UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

TEZĂ DE ABILITARE

Contribuții la reducerea torsiunii generale a structurilor multietajate și optimizarea formei barelor drepte din oțel pentru creșterea forței critice de pierdere a stabilității elastice

Domeniul: **Inginerie mecanică**

Conf.univ.dr.ing. **Marius Florin BOTIȘ**

2023

Cuprins:

Pag.

Mulțumiri

Cu această ocazie și pe această cale, doresc să mulțumesc tuturor cadrelor didactice și de cercetare care prin discuțiile avute au contribuit la clarificarea aspectelor științifice tratate în teza de abilitare, precum și pentru sugestiile pe care mi le-au dat și care au generat idei care au fost dezvoltate în lucrarea de față.

Doresc să îmi exprim recunoștința față de domnului **Prof.dr.ing. Ioan Curtu**, care a fost conducătorul meu de doctorat și sub a cărui îndrumare am făcut primi pași în cariera universitară, la catedra de Rezistența Materialelor și Vibrații de la Universitatea Transilvania Brașov.

De asemenea aduc pe această cale mulțumiri doamnei **Prof.dr.ing.Camelia Cerbu** și **Prof.dr.ing.Vasile Năstăsescu** care au venit cu sugestii și observații care au îmbunătățit semnificativ teza de abilitare.

Doresc să mulțumesc Școli doctorale de la Universitatea Transilvania din Brașov, pentru modul transparent și clar în care sunt prezentate procedurile pentru întocmirea unei tezei de abilitare. Proceduri care au fost un real sprijin pentru mine în realizarea și sistematizarea tezei de abilitare.

În încheiere, doresc să mulțumesc familiei mele, pentru înțelegerea și sprijinul acordat pe perioada realizări tezei de abilitare.

Autorul

31.01.2023

Rezumatul tezei de abilitare

Această teză de abilitare reprezintă o selecție a rezultatelor activității științifice după 2004, când autorul a obținut titlul de doctor inginer. Rezumatul rezultatelor este prezentat în următoarele capitole.

Capitolul 1. Metodă generală de reducere a torsiunii generale a structurilor civile multietajate cu conlucrare spațiala prin intermediul planșeelor.

Contribuțiile principale în acest capitol sunt:

1.Dezvoltarea unui metode generale de reducere a torsiunii generale în cazul structurilor multietajate bazate pe un model matematic care își propune să reducă excentricitatea dintre centrul de masă si centrul de rigiditate de la nivelul planșeelor, precum și dirijarea axelor principale de inerție ale planșeelor, după direcții adecvate, astfel încât mecanismul plastic asociat sau mecanismul plastic favorabil, să genereze un număr semnificativ de articulații plastice.

2.Metoda dezvoltată în lucrare are un grad mare de generalitate, putându-se aplica: structurilor pe cadre, structurilor cu pereți structurali, structurilor duale și structurilor cu tuburi sau cu tub central flexibil. De asemenea în procesul de eliminare a torsiuni generale se iau în considerație sistemele structurale care asigura circulația pe elevația structurii (scări caje de lift etc.)

3.Pentru aplicarea și utilizarea metodei de eliminare a torsiunii generale a structurilor multietajate, în acest capitol este prezentat algoritmul de calcul pentru modelul matematic propus, care este transpus într-un program în cod Matlab ce poate fi utilizat pentru orice sistem structural utilizat la structurile multietajate din inginerie civilă. În vederea explicării modului de aplicare practică a rezultatelor obținute in acest capitol, sunt prezentate studii de caz pentru toate sistemele structurale întâlnite la structurile multietajate din inginerie civilă.

Capitolul 2. Studiul algoritmilor numerici și algoritmilor probabilistici tip Monte Carlo pentru determinarea ariei, momentelor statice, centrului de masă și tensorului de inerție pentru suprafețe plane complexe.

Contribuțiile principale în acest capitol sunt:

1.Dezvoltarea unei metode numerice generale de determinarea a caracteristicilor geometrice, masice și inerțiale pentru suprafețe cu configurație complexă.

2.Echivalarea momentelor de inerție ale unei suprafețe plane cu configurație complexă cu momentele de inerție ale unui dreptunghi care are axele principale de inerție orientate după direcțiile principale ale suprafeței plane cu configurație complexă.

3.Dezvoltarea unui algoritm de calcul al tensorului de inerție pentru suprafețe cu configurație complexa și implementarea acestui algoritm în cod Matlab. Validarea algoritmului de calcul în cazul suprafețelor simple prin soluții analitice.

4.Dezvoltarea unui algoritm de calcul pentru tensorul de inerție al suprafețelor plane cu configurație complexă cu metoda probabilistică Monte Carlo.

5.Metodele dezvoltate in acest capitol, permit echivalarea rigidității elementelor verticale de rezistenta ale structurilor multietajate (stâlpi pereți structurali și tuburi) cu elemente dreptunghiulare. Această echivalare se utilizează la modelul matematic prezentat în capitolul 1, care reduce torsiunea generală a structurilor multietajate din domeniul ingineriei civile.

Capitolul 3. Studiul algoritmilor numerici și algoritmilor probabilistici tip Monte Carlo pentru determinarea volumului, masei, momentelor statice, centrului de masă și tensorului de inerție al maselor pentru corpuri cu configurație complexă.

Contribuțiile principale în acest capitol sunt:

1.Dezvoltarea unei metode numerice generale de determinarea a caracteristicilor geometrice, masice și inerțiale pentru corpurile tridimensionale cu configurație complexă.

2.Crearea unui algoritm de calcul pentru corpurile tridimensionale cu configurație complexă, pentru calculul tensorului de inerție și implementarea acestui algoritm în cod Matlab. Validarea algoritmului de calcul numeric in cazul corpurilor tridimensionale simple prin soluții analitice.

3.Dezvoltarea unui algoritm pentru calculul tensorului de inerție al corpurilor tridimensionale cu configurație complexă, cu metoda probabilistică Monte Carlo.

4.Metodele dezvoltate în acest capitol permit determinarea caracteristicilor inerțiale ale sistemelor structurale tip planșee și scări, care se utilizează la modelul matematic prezentat în capitolul 1, pentru reducerea torsiuni generale a structurilor multietajate din domeniul ingineriei civile.

Capitolul 4. Creșterea forței critice de pierdere a stabilității în cazul barelor drepte cu secțiune variabilă în trepte.

Contribuțiile principale în acest capitol sunt:

1.Realizarea modelelor analitice pentru barele drepte cu secțiune constantă și variabilă în trepte pentru determinarea forței critice de pierdere a stabilității pentru diferite condiții cinematice la capete, care acoperă toate posibilitățile importante întâlnite în domeniul ingineriei civile.

2.A fost studiată și evidențiată creșterea forței critice de pierdere a stabilității în cazul barei cu secțiune variabilă în trepte în raport cu bara de secțiune constantă, pentru următoarele tipuri de condiții cinematice aplicate la capetele barei: **articulat-rezemat (modele C1-C2)**, **liber-încastrată (modele C3-C4)**, **încastrată glisant-încastrată (modele C5-C6)** și **dublu încastrată (modele C7-C8)**.

3.Pentru a determina forța critică de pierdere a stabilității în cazul barei la care secțiunea transversala în lungul unei bare variază în trepte sau la limită continuu, a fost realizat un algoritm de calcul care a fost transpus într-un program de calcul în cod Matlab. Programul Matlab de calcul numeric a fost validat pe baza soluțiilor analitice obținute în cazul modelelor teoretice, pentru bare comprimate cu secțiune constantă și variabilă.

4. Rezultatele obținute se pot aplica cu succes în cazul structurilor tensegrity, deoarece prin creșterea forței critice de pierdere a stabilității din barele comprimate se poate crește rigiditatea geometrică a acestor structuri, prin mărirea gradului de pretensionare a cablurilor structurilor tip tensegrity.

Capitolul 5. Realizări științifice, didactice și profesionale. Plan de evoluție și dezvoltare a carierei.

În cast capitol sunt prezentate următoarele aspecte:

1.Realizările didactice și științifice ale autorului tezei de abilitare, precum și impactul și vizibilitatea activității științifice. Au fost evidențiate publicațiile indexate Web of Science și BDI, citările, bursele obținute, prelegerile la universități din afara țări și proiectele de cercetare realizate în calitate de director de proiect.

2. Planul de evoluție și dezvoltare a carierei universitare în care se face o proiecție în viitor și se fixează principalele obiective științifice și didactice ale autorului tezei de abilitare.

Conf. dr.ing, **Marius Florin BOTIŞ** Braşov, 31.01.2023

Abstract

This habilitation thesis represents a selection of the results of scientific activity after 2004, when the author obtained the title of Doctor of Engineering. The summary of the results is presented in the following chapters.

Chapter 1. General method of reducing the general torsion of multi-story civil structures with spatial cooperation by slabs.

The main contributions in this chapter are:

1.The development of a general method for reducing the general torsion in the case of multi-story structures based on a mathematical model that aims to reduce the eccentricity between the center of mass and the center of rigidity at the level of the floors, as well as directing the main axes of inertia of the floors, following appropriate directions, so that the associated plastic mechanism or the favorable plastic mechanism generates a significant number of plastic joints.

2.The method developed in the work has a high degree of generality, being able to be applied to structures on frames, structures with structural walls, dual structures and structures with tubes or with a flexible central tube. Also, in the process of reducing general torsion, the structural systems that ensure circulation on the elevation of the structure (stairs, elevator box, etc.) are taken into account.

3.In order to generalize the application and use of the method of reducing the general torsion of multi-story structures, this chapter presents the calculation algorithm for the proposed mathematical model, which is transposed into a program in Matlab code that can be used for any structural system used to multi-story structures. In order to explain the practical application of the results obtained in this chapter, case studies are presented for all the structural systems encountered in multi-story structures.

Chapter 2. Study of numerical algorithms and probabilistic Monte Carlo algorithms for determining area, static moments, center of mass and inertia tensor for complex planar surfaces.

The main contributions in this chapter are:

1.Development of a general numerical method for determining mass and inertial geometric characteristics for surfaces with complex configuration.

2.Equivalence of moments of inertia for a flat surface with a complex configuration to the moments of inertia of a rectangle.

3.Development of an algorithm for calculating the inertia tensor for surfaces with complex configuration and implementing this algorithm in Matlab code. Validation of the calculation algorithm in the case of simple surfaces through analytical solutions.

4.Development of a calculation algorithm for the inertia tensor of planar surfaces with complex configuration with the probabilistic Monte Carlo method.

5.The methods developed in this chapter allow equating the stiffness of vertical elements of multi-story structures (columns, structural walls and tubes) with rectangular elements. This equivalence is used in the mathematical model presented in chapter 1, which reduces the general torsion of multi-story structures in the field of civil engineering.

Chapter 3. Study of numerical algorithms and probabilistic Monte Carlo algorithms for determining volume, mass, static moments, center of mass and mass inertia tensor for bodies with complex configuration.

The main contributions in this chapter are:

1.Development of a general numerical method for determining mass and inertial geometric characteristics for three-dimensional bodies with complex configuration.

2.Creation an algorithm for three-dimensional bodies with complex configuration, for the calculation of the inertia tensor and the implementation of this algorithm in Matlab code. Validation of the calculation algorithm in the case of simple three-dimensional bodies.

3.Development of an algorithm for calculating the inertia tensor of three-dimensional bodies with complex configuration with the probabilistic Monte Carlo method.

4.The methods developed in this chapter allow determining the inertial characteristics for slabs and stairs that are used in the mathematical model presented in chapter 1, to reduce the general torsion of multi-story structures in the field of civil engineering.

Chapter 4. Increasing the critical loss of stability force in the case of straight bars with variable step section.

The main contributions in this chapter are:

1.Realization of analytical models for bars with constant and variable section in steps to determine the critical force of loss of stability for straight bars with different kinematic conditions at the ends, covering all the important possibilities encountered in practice.

2.The increase of the critical force of loss of stability in the case of the bar with variable section in steps compared to the bar of constant section was studied and highlighted for the following types of kinematic conditions applied to the ends of the bar: **hinged-support (models C1-C2)**, **free-embedded (models C3-C4)**, **sliding-embedding-embedded (models C5-C6)** and **embedded-embedded (models C7-C8)**.

3.In order to determine the critical force of loss of stability in the case of the bar where the cross-section along a bar varies, an algorithm was made which was transposed into a calculation program in Matlab code. The Matlab numerical calculation program was validated based on the analytical solutions obtained in the case of theoretical models for compressed bars with constant and variable section.

4.The obtained results can be successfully applied in the case of tensegrity structures, because by increasing the critical force of loss of stability in compressed bars, the geometric rigidity of these structures can be increased, by increasing the degree of prestressing of the cables of tensegrity structures.

Chapter 5. Scientific, didactic and professional achievements. Evolution and career development plan.

The following aspects are presented in this chapter:

1. The didactic and scientific achievements of the author of the habilitation thesis, as well as the impact and visibility of the scientific activity. Web of Science and BDI indexed publications, citations, grants obtained, lectures at universities abroad and research projects carried out as project director were highlighted.

2. The evolution and development plan of the university career in which a projection is made into the future and the main scientific and didactic objectives of the author of the habilitation thesis are set.

Assoc.Prof.dr.eng. **Marius Florin BOTIŞ** Braşov, 31.01.2023

1.Metodă generală de reducere a torsiunii generale a structurilor multietajate cu conlucrare spațiala prin intermediul planșeelor

1.1.Introducere

În cazul structurilor multietajate cu simetrie geometrică inerțială și elastică, deplasările de translație și cele de rotație la nivelul fiecărui etaj sunt decuplate, iar forțele tăietoare de nivel se pot determina cu ușurință pentru două axe ortogonale care sunt și axe de simetrie. Dacă structurile multietajate nu au simetrie geometrică inerțială și de rigiditate apare o interacțiune între cele 3 deplasări (2 translații și o rotație) ale planșeelor ceea ce impune o analiză dinamică care să țină seama de conlucrarea dintre elementele verticale (stâlpi, pereți structurali, scări, nuclee) și elementele orizontale (planșee sau diafragme orizontale). Pentru acțiunea seismică forțele de inerție care se dezvoltă în planșee generează o deplasare relativă între două planșee consecutive care este o mișcare plan paralelă. Mișcarea este alcătuită din două deplasări: o translație și o deplasarea de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planșeu. Pentru o structură cu n nivele, rezultă că pentru a determina mișcarea de ansamblu sunt necesari 3n parametrii independenți, deci structura are 3n grade de libertate dinamică (fig.1.1**). Centrul de rigiditate, CR**, al unui planșeu de la nivelul k se definește ca fiind punctul în care dacă se aplică forța de inerție de nivel $\boldsymbol{F_{ik}}$ se obține numai o translație a nivelului respectiv, în direcția forței $\boldsymbol{F_{ik}}$. Dacă forța inerție de nivel F_{ik} este aplicată în alt punct decât în CR atunci deplasarea nivelului k va avea două mișcări: translație în direcția forței F_{ik} și o rotație în jurul CR. Dacă structura este sub acțiunea unui seism, atunci planșeele unde sunt concentrate masele inerțiale ale structurii, se încarcă cu forțe de inerție. C**entrul de masă C.M.** al planșeului respectiv este punctul în care acționează rezultanta forțelor de inerție. Dacă structura prezintă disimetrii geometrice inerțiale și de rigiditate [1] atunci între C.R. și C.M. există o distanță. Dacă se reduc forțele de inerție din C.M. în C.R. pe lângă forța de inerție de nivel apare și un moment de torsiune care este proporțional cu distanța dintre C.R. și C.M. [2].

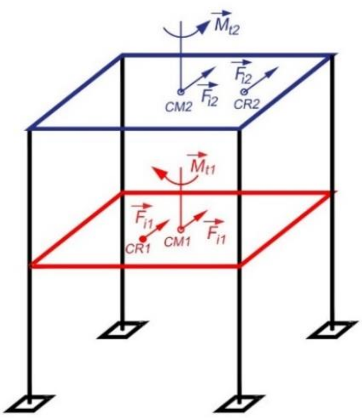


Fig.1.1. Centrele de masă C.M. și centrele de rigiditate C.R. la structurile multietajate.

Momentele de torsiune care se dezvoltă la nivelul fiecărui planșeu, conduc la următoarele dezavantaje:

-cresc deplasările de nivel datorită mișcării de roto-translație, care are drept consecință creșterea degradărilor pentru elementele de nivel (pereți de închidere, pereți despărțitori);

-dacă rigiditatea la torsiune este mai mică decât rigiditatea de încovoiere pentru elementelor verticale de nivel ale structurii, atunci modul 1 de vibrație este de torsiune iar capacitate structurii de disipare a energiei seismice (mecanismul plastic asociat sau mecanismul plastic favorabil) scade semnificativ în eficacitate [1];

-cedarea elementelor de construcții la solicitarea de torsiune este o cedare fără avertizare, de aceea **solicitarea de torsiune trebuie evitată**.

Eliminarea sau reducerea disimetriilor geometrice între nivelele unei structuri se poate realiza prin amplasarea corectă a elementelor verticale de rezistență (stâlpi, pereți structurali, scări, nuclee), pe nivelul respectiv.

Chiar și în cazul existenței simetriei geometrice elastice și inerțiale apar momente de torsiune accidentale [1] datorită:

-neomogenități materialelor din care este realizată structura;

-variabilități încărcărilor;

-imperfecțiunilor de execuție și montaj;

-nu este asigurat sincronismul bazei (deplasările la interfața teren-fundații nu sunt în fază).

Pentru o structură multietajată supusă la acțiunea seismică, la nivelul fiecărui planșeu acționează în C.M, rezultanta forțelor de inerție din planșeu, iar structura răspunde în C.R unde se reduc forțele elastice generate de elementele verticale de rezistență [3]. Linia C.R. în general este o curba în spațiu, dacă elementele verticale au caracteristici elastice identice pe elevație, atunci aceasta este o linie dreaptă. Pentru a evita torsiunea structurilor multietajate și a forma un mecanism plastic favorabil este necesar ca linia C.R. sa fie cât mai apropiata de linia C.M..

Determinarea momentelor de torsiune de la fiecare nivel, presupune determinarea C.R., a rigidității de încovoiere și de torsiune de la nivelul respectiv pentru elementele de rezistență verticale dintre două nivele succesive.

Principalele ipoteze de calcul adoptate pentru determinarea C.R. și a rigidităților de nivel sunt:

-Planșeele sunt infinit rigide în plan orizontal, deoarece rigiditatea planșeului în plan orizontal este mult mai mare decât rigiditatea de nivel a elementelor verticale (stâlpi, pereți structurali, scări, nuclee din beton) [4]. Rezultă că planșeele sunt diafragme orizontale prin intermediul cărora se realizează conlucrarea spațială între planșeu și elementele verticale de rezistență.

-Se cunosc rigiditățile relative de nivel ale elementelor verticale dintre două planșee succesive. În această lucrare elementele verticale sunt echivalate cu dreptunghiuri cu laturile paralele cu direcțiile principale ale elementului vertical de rezistență.

-Masa modală echivalentă corespunzătoare modului de vibrație 1 este mai mare de 85% din masa totală a structurii civile [1].

-Perioada proprie fundamentală a structurii multietajate $T<1,5$ s. Modurile superioare de vibrație nu afectează răspunsul dinamic global al structurii [1].

-Terenul de fundare este ferm, astfel că interacțiunea sol-structură nu este luată în calcul.

-Se consideră că deplasările de la nivelul bazei structurii multietajate sunt același, deci există o mișcare sincronă a bazei la apariția unei accelerații de amplasament imprimate bazei.

-Distribuția forțelor seismice de nivel se consideră cea rezultată din analiza modală cu spectre de răspuns sau metoda forțelor static echivalente (simplificate) de nivel [1].

Principalele cazuri în care apare torsiunea de ansamblu a unei structuri sunt [5], [3]:

1.Structurile multietajate neregulate în plan cu planșee cu forme geometrice complexe. În acest caz disimetriile elastice apar datorită formei complexe a planșeelor și a modului de dispunere a elementelor verticale de rezistență între două planșee succesive.

2. Structurile multietajate cu scări și/sau tuburi care asigură legătura și circulația între etajele structurii civile. În acest caz disimetriile elastice apar datorită poziționări scărilor sau a elementelor de tip tub (nucleu).

3. Structurile multietajate cu tuburi (nuclee) care preiau în proporție semnificativă forța tăietoare de bază. În acest caz disimetriile elastice apar datorită rigidități la torsiune inferioare rigidităților la încovoiere pe cele două direcții principale, ale elementelor verticale dintre două planșee consecutive.

Pentru a minimiza efectul torsiuni de ansamblu a unei structuri multietajate [5], [6], [7], în cazurile 1 și 2 se minimizează distanța dintre C.R. și C.M., prin rotirea și/sau modificarea dimensiunilor secțiunilor transversale ale elementelor verticale de rezistență, până când se anulează distanța dintre C.R. și C.M. Se pot modifica secțiunile transversale ale elementelor verticale de rezistență din interiorul suprafeței delimitate de planșeul de la nivelul respectiv sau elementele verticale perimetrale de la nivelul respectiv. Prin rotirea elementelor verticale se pot dirija și direcțiile principale de inerție după care planșeul are deplasări maxime și minime astfel încât mecanismului de plastificare al suprastructuri să fie unul favorabil, adică să permită apariția unui număr maxim de articulații plastice.

În cazul la 3-lea prezentat mai sus, pentru a reduce efectul torsiunii de ansamblu a unei structuri multietajate, se va mări rigiditatea de torsiune a ansamblului elementelor de rezistență verticale [6], astfel încât să fie superioară rigidității de încovoiere maxime a ansamblului elementelor de rezistență verticale. Pentru a determina cât de sensibilă este o structură multietajată cu tuburi la torsiune, se va defini sensibilitatea la torsiune, care rezultă prin analiza modală a unui sistem cu 3 grad de libertate dinamice. Modelul dinamic echivalent are rigiditate la încovoiere pe două direcții principale și rigiditate la torsiune. Rigiditățile la încovoiere și torsiune se determină ca rigidități echivalente ale elementelor verticale de rezistență dintre două nivele. Din punct de vedere inerțial sistemul dinamic are masa planșeului superior antrenată pe cele două direcții principale de încovoiere și momentul de inerție masic al planșeului superior care caracterizează inerția de rotație a planșeului superior. Din analiza modală, care este o problemă de vectori și valorii proprii, rezultă caracteristicile dinamice (pulsații, frecvențe și perioade) ale celor 3 moduri proprii de vibrație și deformatele modale staționare asociate celor 3 moduri proprii de vibrație. Modul fundamental este modul în care perioada de vibrație este cea mai mare. Pe baza analizei modale a sistemului cu 3 grade de libertate se determină dacă primul mod de vibrație este de torsiune sau de încovoiere. Dacă primul mod de vibrație este de torsiune, atunci structura este sensibilă la torsiune. Pentru a elimina torsiunea ca prim mod de vibrație se mărește rigiditatea la torsiune a ansamblului de elemente verticale de rezistență, până când primul mod de vibrație devine de încovoiere. Astfel structura nu mai este sensibilă la torsiune.

1.2.Prezentarea metodei de calcul și a algoritmului numeric

Principalele etape de calcul pentru reducerea torsiunii de ansamblu pentru structurile civile cu planșee neregulate în plan și scări sunt [3]***:***

1.Calculul rigidităților relative oblice de nivel ale elementelor verticale în raport cu direcțiile principale de inerție ale secțiunilor transversale, pentru elementele verticale de rezistență k=1...n dintre două planșee.

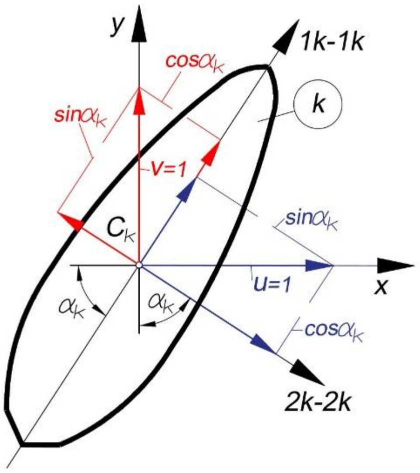


Fig.1.2. Descompunerea deplasărilor u și v pe direcțiile 1k-1k și 2k-2k pentru elementul k.

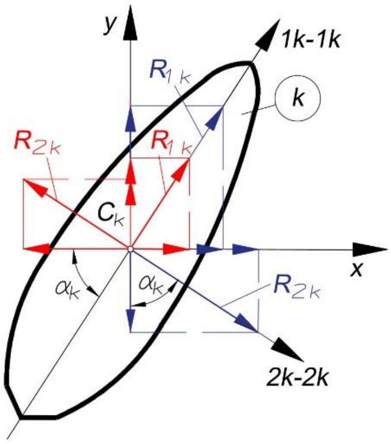


Fig.1.3 Rigiditățile oblice și centrifugală pentru elementul k.

Aplicând deplasări unitare pe direcțiile x și y (fig.1.2) pentru elementul k la nivelul planșeului superior, se obțin rigiditățile relative oblice în raport cu axele x y și rigiditatea oblică centrifugală (fig.1.3) sub forma:

$$
\begin{gathered}
u = 1 \rightarrow F_{1k} = R_{1k} u cos\, \alpha_k =; F_{2k} = R_{2k} u sin\, \alpha_k; \\
R_{xk} = F_{1k}\, cos\, \alpha_k + F_{2k}\, sin\, \alpha_k = R_{1k}\, cos^2\, \alpha_k + R_{2k}\, sin^2\, \alpha_k\, ; \\
R_{xyk} = F_{1k}\, sin\, \alpha_k - F_{2k}\, cos\, \alpha_k = (R_{1k} - R_{2k})\, cos\, \alpha_k\, sin\, \alpha_k; \\
v = 1 \rightarrow F_{1k} = R_{1k} u sin\, \alpha_k =; F_{2k} = R_{2k} u cos\, \alpha_k; \\
R_{yk} = F_{1k}\, sin\, \alpha_k + F_{2k}\, cos\, \alpha_k = R_{1k}\, sin^2\, \alpha_k + R_{2k}\, cos^2\, \alpha_k; \\
R_{yxk} = F_{1k}\, cos\, \alpha_k - F_{2k}\, sin\, \alpha_k = (R_{1k} - R_{2k})\, cos\, \alpha_k\, sin\, \alpha_k; \\
R_{xk} = R_{1k}\, cos^2\, \alpha_k + R_{2k}\, sin^2\, \alpha_k\, ; \\
R_{yk} = R_{1k}\, sin^2\, \alpha_k + R_{2k}\, cos^2\, \alpha_k;
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

$$R_{xyk} = R_{yxk} = (R_{1k} - R_{2k})\, cos\, \alpha_k.$$

Rigiditățile ansamblului elementelor verticale dintre două nivele succesive se obțin prin însumarea rigidităților relative oblice R_{xk}, R_{yk} și a rigidităților centrifugale R_{xyk} ale tuturor elementelor verticale de rezistență $k = 1 \dots n$, deoarece toate rigiditățile sunt raportate la același sistem de referință global Oxy atașat planșeului.

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} (R_{1k}\, cos^2\, \alpha_k + R_{2k}\, sin^2\, \alpha_k);$$
$$R_y = \sum_{k=1}^{n} (R_{1k}\, sin^2\, \alpha_k + R_{2k}\, cos^2\, \alpha_k); \qquad (1.2)$$
$$R_{xy} = R_{xy} = \sum_{k=1}^{n} [(R_{1k} - R_{2k})\, cos\, \alpha_k\, sin\, \alpha_k]\,.$$

2.Stabilirea centrului de masa C.M. la nivelului fiecărui planșeu al structurii multietajate.

Pentru determinarea centrului de masă se discretizează planșeul (fig.1.4) în m elemente finite triunghiulare (i=1...m).

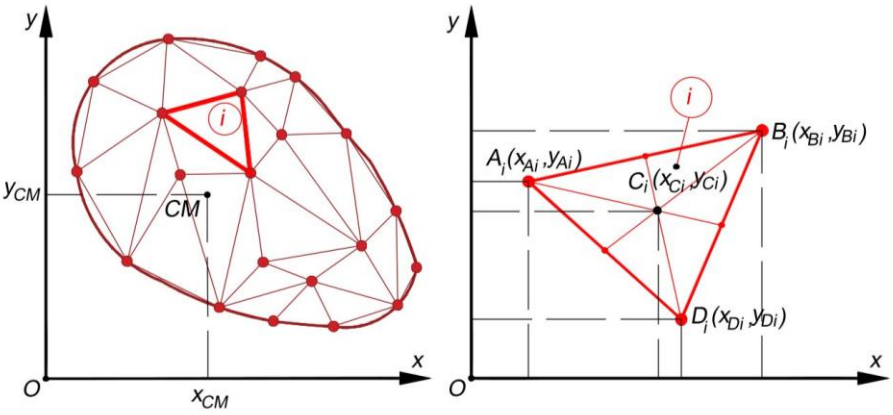


Fig.1.4.Discretizarea planșeului în elemente finite triunghiulare pentru calculul centrului de masă al planșeului.

Coordonatele centrului de masă ale suprafeței planșeului se determină cu relațiile:

$$x_{CM} = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i\, x_{Ci}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)^{-1};\; y_{CM} = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i\, y_{Ci}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)^{-1}; \qquad (1.3)$$

$$x_{Ci} = \frac{x_{Ai} + x_{Bi} + x_{Di}}{3};\, y_{Ci} = \frac{y_{Ai} + y_{Bi} + y_{Di}}{3}.$$

unde,

$A_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{Ai} & y_{Ai} & 1 \\ x_{Bi} & y_{Bi} & 1 \\ x_{Di} & y_{Di} & 1 \end{vmatrix}$- este aria elementului finit triunghiular generic i.

3.Stabilirea centrului de rigiditate C.R. al ansamblului elementelor verticale de rezistență la nivelului fiecărui planșeu.

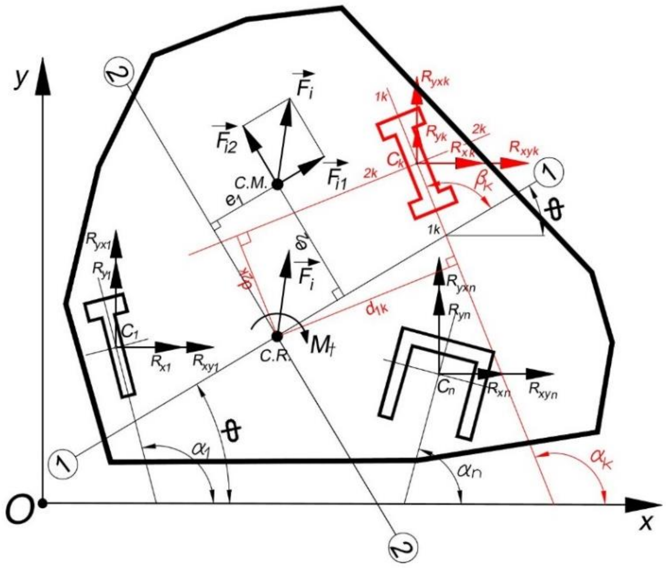


Fig.1.5.Stabilirea centrului de rigiditate și a direcțiilor axelor principale pentru elementele verticale de rezistență dintre două nivele succesive ale structurii multietajate.

Dacă ansamblului elementelor verticale dintre două nivele ale unei structurii i se aplică o deplasare unitară pe direcția x și y a sistemului de referință global xOy, în elementele verticale sunt generate forțe elastice corespunzătoare rigidităților oblice $R_{xk}\ R_{yk}\ (k = 1 \dots n)$ și centrifugale $R_{xyk}\ (k = 1 \dots n)$ (fig.1.5). Pentru fiecare deplasare aplicată la nivelul respectiv sunt generate sisteme de forțe coplanare. Prin reducerea celor două sisteme de forțe coplanare, generate de mișcarea relativă între cele două planșee la torsorul minim, se obțin două axe centrale. La intersecția axelor centrale se află centrul de rigiditate, care se obține prin rezolvarea sistemului format din ecuațiile celor două axe centrale:

$$\begin{cases} R_{xy}x - R_x y + M_{0x} = 0; \\ R_y x - R_{xy} y + M_{0y} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Coordonatele centrului de rigiditate rezultate in urma rezolvări sistemului de ecuații (1.4) sunt:

$$x_{CR} = \frac{M_{0x}R_{xy} - M_{0y}R_x}{R_x R_y - R_{xy}^2};\ y_{CR} = \frac{M_{0x}R_y - M_{0y}R_{xy}}{R_x R_y - R_{xy}^2}; \tag{1.5}$$

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^{n} R_{xk}\, y_k; M_{oy} = \sum_{k=1}^{n} R_{yk}\, x_k.$$

Centrul de rigiditate este o caracteristică elastică a ansamblului elementelor verticale de rezistență de pe nivelul respectiv. Orice forța exterioară care trece prin C.R. va genera doar o mișcare de translație.

4.Determinarea direcțiilor axelor principale 1-1 și 2-2 al ansamblului elementelor verticale de rezistență de pe un nivel.

Axele principale de rigiditate la nivelul unui planșeu sunt axele în raport cu care rigiditățile ansamblului elementelor verticale de rezistență de la nivelul respectiv au valori extreme (minime sau maxime). Originea sistemului axelor principale de rigiditate se consideră în C.R. Dacă o forță acționează în C.R. după direcțiile principale, atunci deplasările relative a două nivele succesive pe direcțiile principale au valori extreme.

Axa principală în raport cu care rigiditatea este maximă este considerată axa 1-1, iar axa in raport cu care rigiditatea este minimă este axa 2-2.

Din condiția ca axa 1-1 să fie axă principală de rigiditate rezultă:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \beta_k} = 0; \frac{\partial}{\partial \beta_k}\left(\sum_{k=1}^{n} (R_{1k}\, cos^2 \beta_k + R_{2k}\, sin^2 \beta_k)\right) = 0;$$

$$2\sum_{k=1}^{n} (-R_{1k}\, cos\, \beta_k \sin \beta_k + R_{2k} \sin \beta_k\, cos\, \beta_k) = \sum_{k=1}^{n} [(R_{1k} - R_{2k})\, cos\, \beta_k\, sin\, \beta_k] = 0. \quad (1.6)$$

Din figura 1.5. rezultă că $\beta_k + \theta = \alpha_k \Rightarrow \beta_k = \alpha_k - \theta$. Deoarece unghiurile α_k sunt cunoscute, se poate determina unghiul θ care reprezintă direcția principală 1-1. După înlocuirea lui β_k în relația (1.6) se obține:

$$\sum_{k=1}^{n} [(R_{1k} - R_{2k})\, cos\, \beta_k\, sin\, \beta_k] = \sum_{k=1}^{n} [(R_{1k} - R_{2k})\, cos(\, \alpha_k - \theta)\, sin(\, \alpha_k - \theta)] = 0;$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [(R_{1k} - R_{2k})\, sin\, 2\, (\alpha_k - \theta)] = 0; \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [(R_{1k} - R_{2k})(sin\, 2\alpha_k cos2\theta - \cos 2\alpha_k sin2\theta)] = 0.$$

Direcția principală θ se determină prin rezolvarea ecuației trigonometrice (1.7).

$$tg2\theta = \left(\sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k})\, sin\, 2\, \alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k})\, cos\, 2\, \alpha_k\right)^{-1}; \quad (1.8)$$

$$\theta = \frac{1}{2} arctg\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(R_{1k} - R_{2k}) \sin 2\,\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(R_{1k} - R_{2k}) \cos 2\,\alpha_k\right)^{-1}\right\} + \frac{k\pi}{2}.$$

Direcțiile principale corespunzătoare axelor 1-1 și 2-2 sunt:

$$\theta = \theta_1 = \frac{1}{2} arctg\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(R_{1k} - R_{2k}) \sin 2\,\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(R_{1k} - R_{2k}) \cos 2\,\alpha_k\right)^{-1}\right\};$$
$$\theta_2 = \frac{1}{2} arctg\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(R_{1k} - R_{2k}) \sin 2\,\alpha_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(R_{1k} - R_{2k}) \cos 2\,\alpha_k\right)^{-1}\right\} + \frac{\pi}{2}. \quad (1.9)$$

5.Rigiditățile principale ale ansamblului elementelor verticale după direcțiile principale 1-1 și 2-2 conform relațiilor (1.2) devin:

$$R_1 = \sum_{k=1}^{n}(R_{1k} \cos^2 \beta_k + R_{2k} \sin^2 \beta_k)\,; R_2 = \sum_{k=1}^{n}(R_{1k} \sin^2 \beta_k + R_{2k} \cos^2 \beta_k)\,; \quad (1.10)$$
$$R_{12} = 0\,.$$

unde $\beta_k = \alpha_k - \theta$, se determină după calcularea lui θ.

6.Determinarea momentului de inerție polar al ansamblului elementelor verticale de rezistență de pe nivelul respectiv.

Rigiditatea la torsiune sau momentul de inerție polar al rigidităților de translație ale elementelor verticale de rezistență în raport cu C.R., conform figurii 1.5., se determină cu relația:

$$R_{\phi} = \sum_{k=1}^{n}(R_{1k} d_{1k}^2 + R_{2k} d_{2k}^2)\,. \quad (1.11)$$

unde, d_{1k} și d_{2k} sunt distanțele de la C.R. la axele principale de inerție 1k-1k și 2k-2k ale elementului vertical de rezistență k.

Pentru a evita torsiunea de ansamblu a unei structurii civile se anulează distanța dintre C.R. și C.M. la nivelul fiecărui planșeu. Toate elementele de verticale de rezistență se echivalează ca secțiune transversală cu un dreptunghi cu axele după direcțiile principale de inerție. Echivalarea unei secțiuni transversale de formă oarecare cu un dreptunghi cu înălțimea h_k și lățimea b_k este prezentată în capitolul 2 al acestei lucrări. Se calculează momentele de inerție ale dreptunghiurilor în raport cu axele principale de inerție și se determină coordonatele C.R. cu relațiile (1.5) și C.M. cu relațiile (1.3) pentru ansamblul elementelor verticale de pe nivelul respectiv. Condiția ca distanța dintre C.R. și C.M. să fie zero se exprimă matematic cu relația:

$$\begin{cases} x_{CR} - x_{CM} = 0; \\ y_{CR} - y_{CM} = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Coordonatele centrului de masă (x_{CM}, y_{CM}) sunt fixe, iar coordonatele centrului de rigiditate (x_{CR}, y_{CR}) depind de rigiditățile dreptunghiurilor. Rigiditățile unui dreptunghi generic k se determină cu relațiile:

$$R_{1k} = I_{1k} = \frac{b_k(h_k)^3}{12}; R_{2k} = I_{2k} = \frac{h_k(b_k)^3}{12}; k = 1 \dots n. \tag{1.13}$$

Modificând lățimea b_k , înălțimea h_k și orientarea α_k a dreptunghiurilor relația (1.12) poate fi îndeplinită deoarece poziția lui C.R. se modifică. Modificarea acestor parametrii poate fi realizată pentru toate elementele verticale de rezistență sau numai pentru o parte din ele.

Deoarece pe direcțiile principale de rigiditate de la nivelul planșeului, deplasările relative au valori extreme (maxime și minime), se pot dirija aceste direcții astfel încât deplasările planșeului să genereze un mecanism plastic asociat optim [1]. Pentru a dirija direcțiile principale de rigiditate se modifică orientarea α_k a elementelor dreptunghiulare $k = 1 \dots n$. Conform relației (1.9) direcția axei principale de rigiditate este:

$$\theta = \frac{1}{2} arctg \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k}) \sin 2\,\alpha_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k}) \cos 2\,\alpha_k \right)^{-1} \right\};$$
$$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{A}{B}; A = \sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k}) \sin 2\,\alpha_k \,; B = \sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k}) \cos 2\,\alpha_k. \tag{1.14}$$

Dacă sistemul global de coordonate atașat planșeului este după direcțiile care ne asigură mecanismul plastic favorabil, atunci din condiția ca $\theta = 0$ rezultă:

$$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{A}{B} = \theta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_k, \dots \alpha_n) = 0 \rightarrow A = 0;$$
$$A = \sum_{k=1}^{n} (R_{1k} - R_{2k}) \sin 2\,\alpha_k = 0. \tag{1.15}$$

Direcția principală de rigiditate θ se determină ca fiind minimul unei funcții $\theta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_k, \dots \alpha_n)$ având n variabile, care sunt orientările α_k, $k = 1 \dots n$ ale dreptunghiurilor echivalente [5]. Pentru a minimiza funcția $\theta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_k, \dots \alpha_n)$ se pot varia orientările tuturor dreptunghiurilor de pe nivelul respectiv sau numai o parte din ele.

Principalele etape de calcul pentru reducerea torsiunii de ansamblu pentru structurile multietajate care au rigiditatea de torsiune dintre două nivele, inferioară rigidității de încovoiere pentru ansamblul elementele verticale de rezistență dintre cele două nivele.

Deoarece rigiditatea relativă de nivel la torsiune R_ϕ se măsoară în $[Nm]$ iar rigiditatea relativă de nivel laterală de încovoiere $R_{min} = \min(R_1, R_2)$ se măsoară în $[Nm^{-1}]$, pentru a compara efectele celor două rigidități asupra structurii, se utilizează perioada proprie de vibrație a unui sistem cu 1GLD (grad de libertate dinamică) .

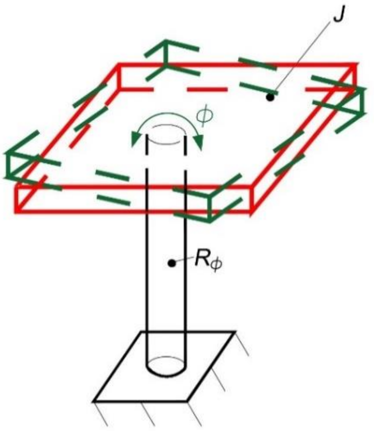


Fig.1.6.Model dinamic 1GLD la torsiune între două nivele succesive ale structurii.

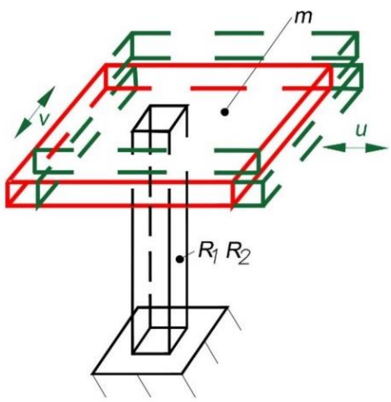


Fig.1.7. Model dinamic 1GLD la încovoiere între două nivele succesive ale structurii.

Pulsația și perioada sistemului dinamic 1GLD la oscilații laterale (fig.1.7) este:

$$\omega_{tr} = \sqrt{\frac{R_{min}}{m}}; T_{tr} = \frac{2\pi}{\omega_{tr}}; T_{tr} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{R_{min}}}\ ; R_{min} = \min(R_1, R_2). \tag{1.16}$$

Pulsația sistemului dinamic 1GLD la oscilații de torsiune (fig.1.6) este:

$$\omega_{rot} = \sqrt{\frac{R_\phi}{J}} = \sqrt{\frac{R_\phi}{kmd^2}}; T_{rot} = \frac{2\pi}{\omega_{rot}} \Rightarrow T_{rot} = 2\pi\sqrt{\frac{kmd^2}{R_\phi}}\ ; J = kmd^2. \tag{1.17}$$

Sensibilitatea la torsiune [5] se poate măsura cu parametrul ST în raport cu care structurile pot fi clasificate astfel:

-Structuri sensibile la torsiune:

$$ST = \frac{T_{rot}}{T_{tr}} = 2\pi\sqrt{\frac{kmd^2}{R_\phi}}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_{min}}{m}} \geq 1. \tag{1.18}$$

-Structuri nesensibile la torsiune:

$$ST = \frac{T_{rot}}{T_{tr}} = 2\pi\sqrt{\frac{kmd^2}{R_\phi}}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_{min}}{m}} < 1. \tag{1.19}$$

Un exemplul numeric de structură care nu este sensibilă la torsiune [5] este prezentată (fig.1.12.b). Dacă mai întâi se consideră structura doar cu tubul central (tub flexibil) fără cele 4 diafragme verticale perimetrale, parametrul ST este:

$$\frac{T_{rot}}{T_{tr}} = \sqrt{\frac{kd^2 R_{min}}{R_\phi}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}1534{,}58 \cdot 4}{215{,}5}} = 1{,}54 > 1; \qquad (1.20)$$

$$R_{min} = 4; R_\phi = 215{,}5; J = kmd^2 = km(a^2 + b^2); k = \frac{1}{12};$$

$$d^2 = (a^2 + b^2) = 2(27{,}7)^2 = 1534{,}58.$$

Prin aplicarea celor 4 diafragme verticale perimetrale, rigiditatea de torsiune ansamblului de nivel crește iar parametrul de sensibilitate ST devine:

$$\frac{T_{rot}}{T_{tr}} = \sqrt{\frac{kd^2 R_{min}}{R_\phi}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}1534{,}58 \cdot 10{,}2}{2617{,}4}} = 0{,}7 < 1; \qquad (1.21)$$

$$R_{min} = 10{,}2; R_\phi = 2617{,}4;$$

$$J = kmd^2 = km(a^2 + b^2); k = \frac{1}{12}; d^2 = 1534{,}58.$$

unde,

a și b sunt dimensiunile laturilor planșeului.

Din analiza exemplului prezentat se poate observa că în cazul structurilor sensibile la torsiune prin mărirea rigidității de torsiune a ansamblului elementelor de pe nivel structura numai este sensibilă la torsiune. Pentru determinarea momentelor de inerție masice J, pentru planșee cu configurație complexă, în capitolul 3 al acestei lucrări este prezentat un algoritm numeric de calcul.

Algoritmul numeric pentru realizarea unui program în cod Matlab pentru determinarea centrului de rigiditate și direcțiilor principale de rigiditate la nivelul unui planșeu.

Pentru desenarea elementelor verticale tip dreptunghi de la nivelul planșeului este necesar sa fie cunoscute relațiile dintre coordonatele vârfurilor a doi vectori, rotiți unul în raport cu celălalt având originea comună.

Se consideră un vector $\vec{V}$ care prin rotire în jurul punctului O cu unghiul α se transformă în vectorul $\vec{V_r}$ (fig.1.8.a).

Coordonatele vârfului vectorului $\vec{V}$ și coordonatele vârfului vectorului $\vec{V_r}$ în sistemului de referință Oxy sunt:

$$x = \rho \cos\beta ; y = \rho \sin\beta ; \qquad (1.22)$$

$$x_r = \rho \cos(\beta + \alpha); y_r = \rho \sin(\beta + \alpha).$$

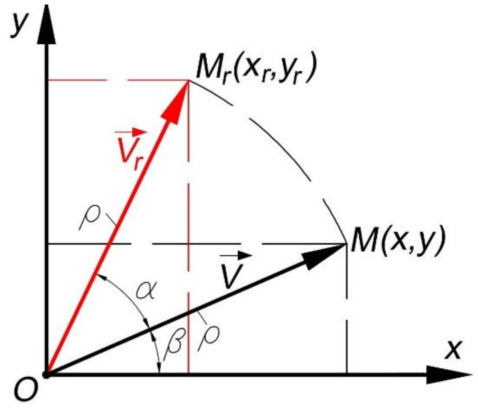


Fig.1.8.a Rotirea unui vector din plan în jurul origini cu unghiul α.

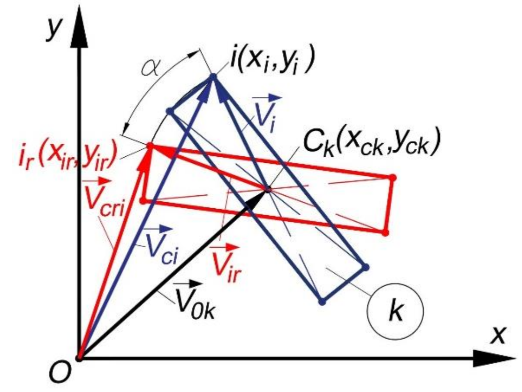


Fig.1.8.b. Rotirea figurilor geometrice plane în jurul centrului de masă.

Exprimarea sub formă matriceală a relației dintre $\vec{V_r}$ și $\vec{V}$ (fig1.8.a) este :

$$\vec{V_r} = x_r\vec{i} + y_r\vec{j}; \vec{V_r} = x\vec{i} + y\vec{j};$$
$$x_r = \rho\cos(\beta+\alpha) = \rho\cos\beta\cos\alpha - \rho\sin\beta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha;$$
$$y_r = \rho\sin(\beta+\alpha) = \rho\sin\beta\cos\alpha + \rho\sin\alpha\cos\beta = y\cos\alpha + x\sin\alpha; \quad (1.23)$$
$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \{V_r\} = [R_\alpha]\{V\};$$

unde,

-$[R_\alpha]$ este matricea de rotație cu unghiul α.

Dacă se consideră că la nivelul planșeului există m elemente verticale de tip dreptunghi, atunci relațiile de transformare între coordonatele vârfurilor fiecărui dreptunghi inițial și coordonatele vârfurilor dreptunghiului rotit (fig.1.8.b) sunt:

$$\vec{V_{ci}} = \vec{V_{0k}} + \vec{V_i}; \vec{V_{cri}} = \vec{V_{0k}} + \vec{V_{ir}};$$
$$\{V_{ir}\} = [R_\alpha]\{V_i\}; i = 1...n; k = 1...m; \quad (1.24)$$
$$\{V_{cri}\} = \{V_{0k}\} + [R_\alpha]\{V_i\}; i = 1...n; k = 1...m.$$

unde,

-m numărul de figuri geometrice;

-n numărul de vârfuri ale figuri geometrice;

Relația (1.24) sub formă matriceală se scrie:

$$\begin{Bmatrix} x_{cri} \\ y_{cri} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{0k} \\ y_{0k} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}; i = 1...n; k = 1...m. \quad (1.25)$$

1.3.Studii de caz

Pentru a evidenția rezultatele care se obțin cu metoda de reducere a torsiunii generale pentru structurile multietajate prezentată mai sus, în continuare sunt prezentate câteva studii de caz.

1.Structuri cu planșee neregulate geometric în plan la care se modifică dimensiunile și orientarea elementelor verticale de rezistență interioare [5]**.**

În fig.1.10.a., fig.1.10.b., fig.1.10.c. și fig.1.10.d. sunt prezentate structuri cu neregularitate geometrică în plan [8], la care prin modificarea unor elemente verticale de rezistență ca dimensiuni și orientare se anulează distanțele dintre C.R. și C.M. pe x și y.

În cazul structurii S1 din figura 1.10.a. prin modificarea orientării celor două diafragme interioare se obține eliminarea momentului de torsiune. Se poate observa că sistemul axelor de rigiditate principale este rotit în raport cu sistemul de referință global al planșeului. Pentru a orienta sistemul axelor de rigiditate principale după axele sistemului de referință global la structura S1O din figura 1.10.b., se modifică atât orientarea celor două diafragme interioare cât și elementele de rezistență verticale perimetrale. La structurile S2 și S3 prezentate în figurile 1.10.c. și 1.10.d. prin modificarea orientării a trei diafragme verticale interioare se obține eliminarea torsiuni generale și orientarea axelor principale de rigiditate ale planșeului după direcțiile sistemului de referință global. La structurile civile diafragmele interioare la care a fost modificată orientarea, pot fi elementele de sprijin pentru scări sau elemente de rezistență pentru lift. Deci aceste elemente verticale de rezistență pot asigura circulația între nivelele structurii. Pentru structurile S1, S1O, S2 și S3 în continuare sunt prezentate fișierele script Matlab [9] cu datele de intrare pentru cele 4-configurații geometrice de planșeu, cu elementele verticale de rezistență aferente.

Structura S1 cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune	Structura S1O cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune și direcții principale dirijate după direcțiile sistemului de referință global.
clear; clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.8 0.8 0 0.4 0.4 0.8 0.8 0 0.4 6.45 0.8 0.8 0 0.4 12.5 0.8 0.8 0 0.4 18.55 0.8 0.8 0 0.4 24.60 0.8 0.8 0 6.45 0.4 0.8 0.8 0 6.45 6.45 0.8 0.8 0 6.45 12.5 0.45 2.75 pi/5.61 6.45 18.55 0.8 0.8 0 6.45 24.60 0.8 0.8 0 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 0.8 0.8 0 12.50 12.5 0.8 0.8 0 12.50 18.55 0.8 0.8 0 12.50 24.60 0.8 0.8 0 18.55 0.4 0.3 1.7 -pi/2.11 18.55 6.45	clear; clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[2.5 1 0 0.4 0.4 2.5 1 0 0.4 6.45 2.5 1 0 0.4 12.5 2.7 1 0 0.4 18.55 2 0.8 pi/2.3 0.4 24.60 0.8 0.8 0 6.45 0.4 0.8 0.8 0 6.45 6.45 0.8 0.8 0 6.45 12.5 1 3 pi/4 6.45 18.55 0.8 2.15 pi/2.2 6.45 24.60 0.8 0.8 0 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 2.5 0.8 0 12.50 12.5 0.8 0.8 0 12.50 18.55 2.5 0.8 -pi/10 12.50 24.60 0.8 0.8 0 18.55 0.4 0.9 3 -pi/6 18.55 6.45

0.8 0.8 0 18.55 12.5 0.8 0.8 0 24.60 0.4 0.8 0.8 0 24.60 6.45 0.8 0.8 0 24.60 12.5]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 25 3 12.9 25 4 12.9 12.9 5 25 12.9 6 25 0 1 0 0];	0.8 0.8 0 18.55 12.5 1.8 0.8 pi/4 24.60 0.4 1.8 0.8 pi/4 24.60 6.45 1.8 0.8 pi/4 24.60 12.5]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 25 3 12.9 25 4 12.9 12.9 5 25 12.9 6 25 0 1 0 0];

Structura S2 cu neregularitate geometrică in plan fără torsiune	Structura S3 cu neregularitate geometrică in plan fără torsiune
clear; clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.8 1.2 0 0.4 0.4 0.8 0.8 0 0.4 6.45 0.8 0.8 0 0.4 12.50 0.8 0.8 0 0.4 18.55 0.8 0.8 0 0.4 24.60 0.8 0.8 0 0.4 30.65 0.8 1.2 0 6.45 0.4 3 0.8 -pi/10 6.45 6.45 0.8 0.8 0 6.45 12.50 0.8 0.8 0 6.45 18.55 2 0.8 pi/6 6.45 24.60 0.8 0.8 0 6.45 30.65 0.8 1.3 0 12.50 0.4 1 0.8 0 12.50 6.45 0.8 0.8 0 12.50 12.50 0.8 0.8 0 12.50 18.55 0.8 0.8 0 12.50 24.60 0.8 0.8 0 12.50 30.65 0.8 0.8 0 18.55 18.55 0.8 0.8 0 18.55 24.60 0.8 0.8 0 18.55 30.65 0.8 0.8 0 24.60 12.50 0.8 0.8 0 24.60 18.55 2.5 0.8 pi/9 24.60 24.60 0.8 0.8 0 24.60 30.65 1.55 0.8 0 30.65 12.50 1.5 0.8 0 30.65 18.55 1.5 0.8 0 30.65 24.60 1.55 0.8 0 30.65 30.65]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 31.05 3 31.05 31.05 4 31.05 12.10 5 24.40 12.10 6 24.40 18.15	clear; clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.8 0.8 0 0.4 12.50 0.8 0.8 0 0.4 18.55 0.8 0.8 0 0.4 24.60 0.8 0.8 0 6.45 12.55 1.8 0.8 pi/15 6.45 18.55 0.8 0.8 0 6.45 24.60 1.65 0.8 0 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 0.8 0.8 0 12.50 12.50 0.8 0.8 0 12.50 18.55 0.8 0.8 0 12.50 24.60 0.8 1.4 0 19.35 0.4 0.75 2.1 pi/3 19.35 6.45 0.8 0.8 0 19.35 12.50 0.8 0.8 0 19.35 18.55 0.8 0.8 0 19.35 24.60 0.8 0.8 0 26.20 0.4 1.1 0.8 0 26.20 6.45 0.8 0.8 0 26.20 12.50 1.8 0.8 pi/4 26.20 18.55 0.8 0.8 0 26.20 24.60 0.8 0.8 0 32.25 12.50 0.8 0.8 0 32.25 18.55 0.8 0.8 0 32.25 24.60]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 12.10 2 0 25 3 32.65 25 4 32.65 12.10 5 26.60 12.10 6 26.60 0 7 12.10 0 8 12.10 12.10 1 0 12.10];

7 12.90 18.15 8 12.90 0 1 0 0];	

Rezultatele obținute în urma rulării programelor în cod Matlab [9] pentru structurile S1, S1O, S2 și S3 sunt prezentate în figurile:1.10.a,1.10.b,1.10.c și 1.10.d.

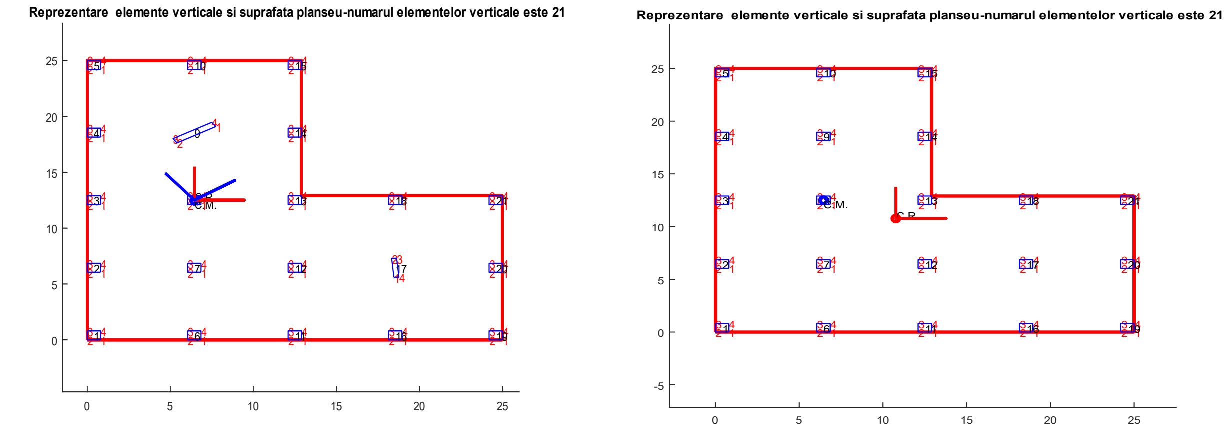


Fig.1.10.a. Structura S1.

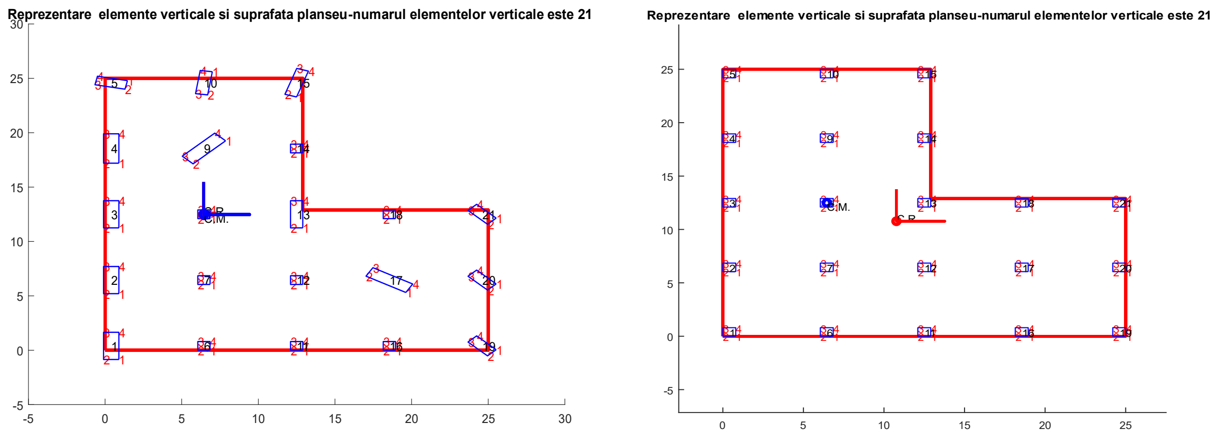


Fig.1.10.b. Structura S1O.

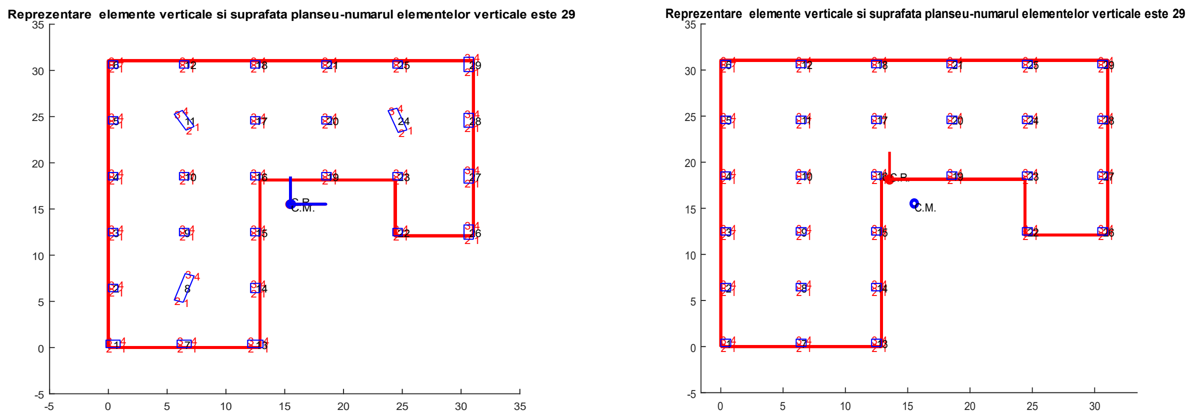


Fig.1.10.c. Structura S2.

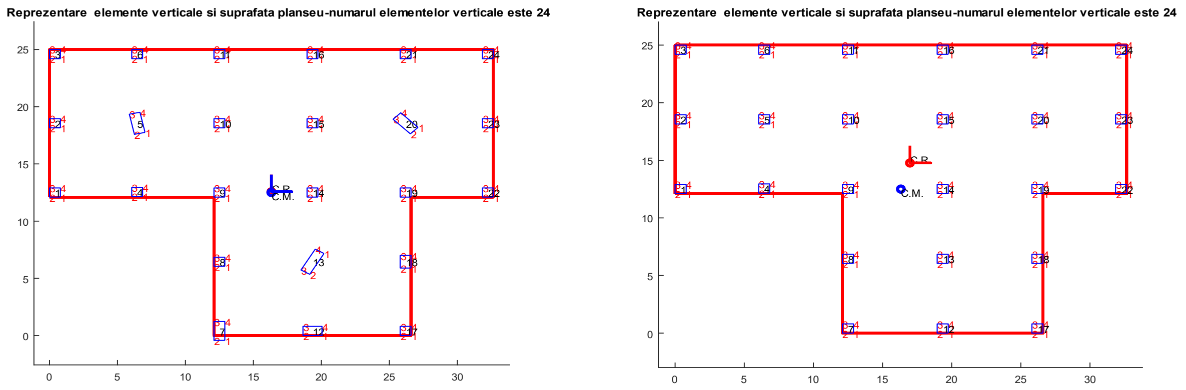


Fig.1.10.d. Structura S3.

2.Structuri cu planșee neregulate geometric în plan la care se modifică dimensiunile și orientarea elementelor verticale de rezistență perimetrale. Structuri cu elemente de rezistență verticale dispuse antisimetric [6] [5] [7]**.**

În fig.1.11.a., fig.1.11.b., fig.1.11.c., fig.1.11.d. și fig.1.11.e. sunt prezentate structuri cu neregularitate geometrică în plan [8], la care prin modificarea unor elemente verticale de rezistență perimetrale, ca dimensiuni și orientare se anulează distanțele dintre C.R. și C.M., în direcțiile x și y, iar axele principale de rigiditate devin paralele cu axele sistemului de referință global atașat planșeului. În figura 1.11.f. elementul de rezistență vertical de tip scară din colțul dreapta sus, este echivalat cu un dreptunghi, iar torsiunea este preluată prin modificarea dimensiunilor elementelor de rezistență din colțul stânga jos. În cazul unei conformări corecte, în faza de proiectare, elementele de rezistență verticale trebuie dispuse antisimetric, fapt reliefat în figura 1.11.g. și figura 1.11.h..

Pentru structurile S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10.a și S10.b în continuare sunt prezentate fișierele script Matlab [9] cu datele de intrare pentru cele opt (8) configurații geometrice de planșeu cu elementele verticale de rezistență aferente.

Structura S4 cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune	Structura S5 cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune
clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[1.5 0.8 -pi/3.7 0.4 0.4 0.8 0.8 0 0.4 6.45 2.1 0.95 0 0.4 12.5 2 0.95 0 0.4 18.55 2 0.8 pi/3.46 0.4 24.60 0.8 0.9 0 6.45 0.4 0.8 0.8 0 6.45 6.45 0.8 0.8 0 6.45 12.5 0.8 0.8 0 6.45 18.55 0.8 0.8 0 6.45 24.60 0.8 0.8 0 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 1.7 0.8 -pi/8 12.50 12.5 0.8 0.8 0 12.50 18.55 1.5 0.8 -pi/10 12.50 24.60 0.8 1.2 0 18.55 0.4	clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.8 1.2 pi/5.5 0.4 0.4 2 0.8 0 0.4 6.45 0.8 0.8 0 0.4 12.50 0.8 0.8 0 0.4 18.55 1.8 0.8 0 0.4 24.60 1.4 0.8 pi/5.9 0.4 30.65 0.85 1.5 0 6.45 0.4 0.8 0.8 0 6.45 6.45 0.8 0.8 0 6.45 12.50 0.8 0.8 0 6.45 18.55 0.8 0.8 0 6.45 24.60 0.8 0.8 0 6.45 30.65 0.8 1.3 -pi/5.05 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 1.1 0.8 0 12.50 12.50 2 0.8 pi/7 12.50 18.55

0.8 0.8 0 18.55 6.45 0.8 0.8 0 18.55 12.5 1.5 0.8 pi/4 24.60 0.4 0.8 0.8 0 24.60 6.45 1.5 0.8 -pi/4 24.60 12.5]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 25 3 12.9 25 4 12.9 12.9 5 25 12.9 6 25 0 1 0 0];	0.8 0.8 0 12.50 24.60 0.8 0.8 0 12.50 30.65 0.95 0.95 0 18.55 18.55 0.8 0.8 0 18.55 24.60 0.8 0.8 0 18.55 30.65 1.5 0.8 -pi/9 24.60 12.50 2.4 0.8 -pi/9.00 24.60 18.55 0.8 0.8 0 24.60 24.60 0.8 0.8 0 24.60 30.65 2 0.8 pi/6 30.65 12.50 0.8 0.8 0 30.65 18.55 0.8 0.8 0 30.65 24.60 1.8 0.8 -pi/7 30.65 30.65]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 31.05 3 31.05 31.05 4 31.05 12.10 5 24.40 12.10 6 24.40 18.15 7 12.90 18.15 8 12.90 0 1 0 0];
Structura S6 cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune	**Structura S7cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune**
clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[1.8 0.8 -pi/4.80 0.4 12.50 0.8 0.8 0 0.4 18.55 1 0.8 pi/5 0.4 24.60 0.8 0.8 0 6.45 12.55 0.8 0.8 0 6.45 18.55 0.8 0.8 0 6.45 24.60 1.2 0.8 -pi/3 12.50 0.4 1.95 0.8 0 12.50 6.45 1 0.8 -pi/4.15 12.50 12.50 0.8 0.8 0 12.50 18.55 0.8 0.8 0 12.50 24.60 0.9 1.05 0 19.35 0.4 0.8 0.8 0 19.35 6.45 0.8 0.8 0 19.35 12.50 0.8 0.8 0 19.35 18.55 0.8 0.8 0 19.35 24.60 1.5 0.8 pi/6.24 26.20 0.4 0.8 0.8 0 26.20 6.45 1.5 0.8 pi/6.99 26.20 12.50 0.8 0.8 0 26.20 18.55 0.8 0.8 0 26.20 24.60 1.5 0.8 pi/3.50 32.25 12.50 0.8 0.8 0 32.25 18.55 1.2 0.8 -pi/5.00 32.25 24.60]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 12.10 2 0 25	clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.8 1.2 pi/5.5 0.4 0.4 2 0.8 0 0.4 6.45 0.8 0.8 0 0.4 12.50 0.8 0.8 0 0.4 18.55 1.8 0.8 0 0.4 24.60 1.4 0.8 pi/5.9 0.4 30.65 0.85 1.5 0 6.45 0.4 0.8 0.8 0 6.45 6.45 0.8 0.8 0 6.45 12.50 0.8 0.8 0 6.45 18.55 0.8 0.8 0 6.45 24.60 0.8 0.8 0 6.45 30.65 0.8 1.3 -pi/5.05 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 1.1 0.8 0 12.50 12.50 2 0.8 pi/7 12.50 18.55 0.8 0.8 0 12.50 24.60 0.8 0.8 0 12.50 30.65 0.95 0.95 0 18.55 18.55 0.8 0.8 0 18.55 24.60 0.8 0.8 0 18.55 30.65 1.5 0.8 -pi/9 24.60 12.50 2.4 0.8 -pi/9 24.60 18.55 0.8 0.8 0 24.60 24.60 0.8 0.8 0 24.60 30.65 2 0.8 pi/6 30.65 12.50 0.8 0.8 0 30.65 18.55 0.8 0.8 0 30.65 24.60

3 32.65 25 4 32.65 12.10 5 26.60 12.10 6 26.60 0 7 12.10 0 8 12.10 12.10 1 0 12.10];	1.8 0.8 -pi/7 30.65 30.65]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 31.05 3 31.05 31.05 4 31.05 12.10 5 24.40 12.10 6 24.40 18.15 7 12.90 18.15 8 12.90 0 1 0 0];
Structura S8 cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune	Structura S9 cu neregularitate geometrică în plan fără torsiune
clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[1.8 0.8 -pi/5.481 0.4 0.4 1.8 0.8 pi/2.5294 0.4 6.45 0.8 0.8 0 6.45 0.4 0.8 0.8 0 6.45 6.45 0.8 0.8 pi/6.775 6.45 9.6278 0.8 0.8 0 12.50 0.4 0.8 0.8 0 12.50 6.45 0.8 0.8 pi/6.775 12.50 12.6528 0.8 0.8 0 18.55 0.4 0.8 0.8 0 18.55 6.45 0.8 0.8 0 18.55 12.50 0.8 0.8 pi/6.775 18.55 15.67 0.8 0.8 0 24.60 0.4 0.8 0.8 0 24.60 6.45 0.8 0.8 0 24.60 12.50 0.8 0.8 0 24.60 18.55 0.8 0.8 0 30.65 0.4 0.8 0.8 0 30.65 6.45 0.8 0.8 0 30.65 12.50 1.8 0.8 -pi/2.290 30.65 18.55 1.8 0.8 pi/2.529 36.70 0.4 1.787 0.8 0 36.70 6.45 0.8 1 -pi/3.7440 36.3743 12.42]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 6.85 3 24.2 18.95 4 31.05 18.95 5 37.10 11.60 6 37.10 0 1 0 0];	clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[1.8 0.75 0 0 0 1.8 0.75 0 0 4.50 0.75 0.75 0 0 9.50 0.75 0.75 0 0 14.50 0.75 0.75 0 0 19 0.75 1.66 0 3.50 0 0.75 0.75 0 3.50 4.50 0.75 0.75 0 3.50 9.50 0.75 0.75 0 3.50 14.50 0.75 0.75 0 3.50 19 0.75 1.66 0 8.50 0 0.75 0.75 0 8.50 4.50 0.75 0.75 0 8.50 9.50 0.75 0.75 0 8.50 14.50 0.75 0.75 0 8.50 19 0.75 0.75 0 13.50 0 0.75 0.75 0 13.50 4.50 0.75 0.75 0 13.50 9.50 0.75 0.75 0 13.50 14.50 0.75 0.75 0 13.50 19 0.75 0.75 0 17 0 0.75 0.75 0 17 4.50 0.75 0.75 0 17 9.50 0.75 0.75 0 17 14.50 0.75 0.75 0 17 19 1.834 1.702 0 15.25 16.75]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 19 3 17 19 4 17 0 1 0 0];
Structura S10.a cu regularitate geometrică în plan cu elemente verticale dispuse antisimetric fără torsiune	Structura S10.b cu regularitate geometrică în plan cu elemente verticale dispuse antisimetric fără torsiune
clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila	clear;clf;clc; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila

% b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.2 3 pi/2 0.1 1.5 0.2 3 2*pi 8.5 0.1 0.2 3 3*pi/2 9.9 8.5 0.2 3 pi 1.5 9.9]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 10 3 10 10 4 10 0 1 0 0];	% b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[0.4 1 pi/2 0.2 0.5 0.4 1 0 0.5 3.8 0.4 1 pi/2 5.8 3.5 0.4 1 0 5.5 0.2 0.2 1 pi/4 1 1 0.2 1 -pi/4 5 3 0.3 0.6 pi/4 1 3 0.3 0.6 -pi/4 5 1]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 4 3 6 4 4 6 0 1 0 0];

Rezultatele obținute în urma rulării programelor în cod Matlab [9] pentru structurile S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10.a și S10.b sunt prezentate în fig.1.11.a, fig.1.11.b, fig.1.11.c, fig.1.11.d, fig.1.11.e, fig.1.11.f., fig.1.11.g. și fig.1.11.h.

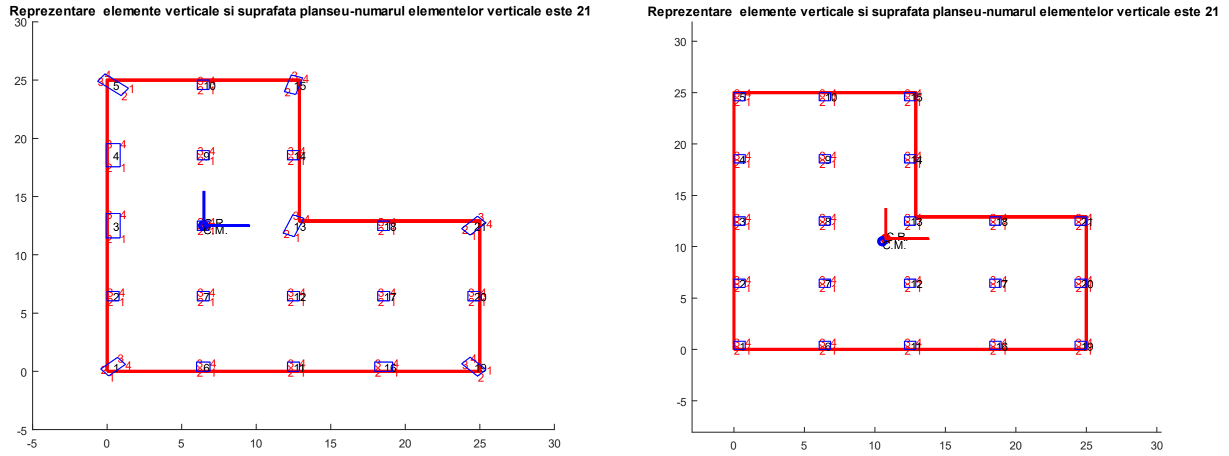


Fig.1.11.a. Structura S4.

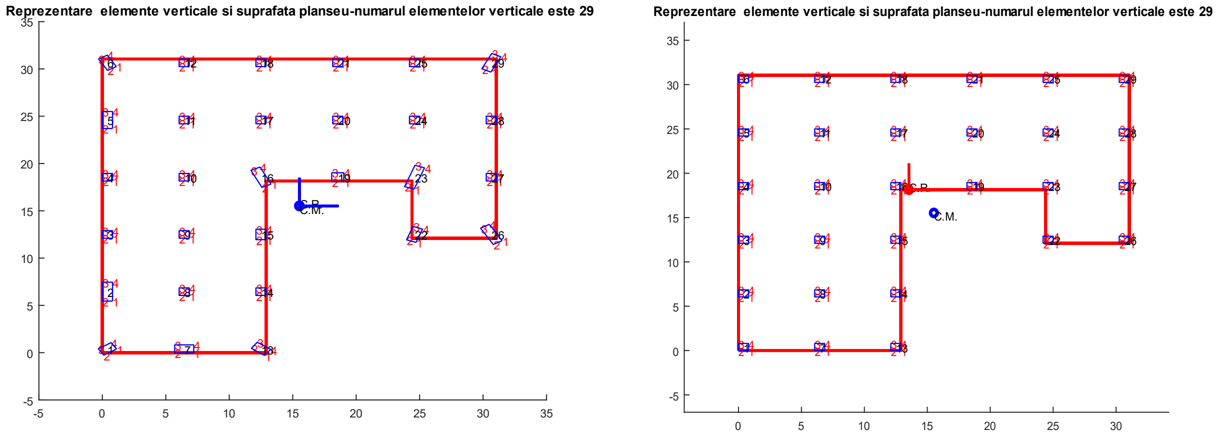


Fig.1.11.b. Structura S5.

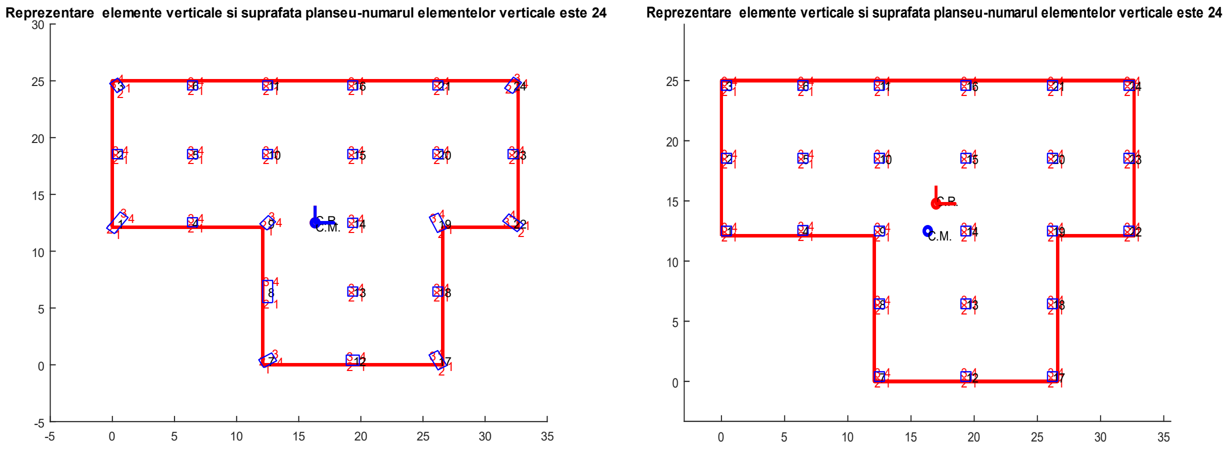


Fig.1.11.c. Structura S6.

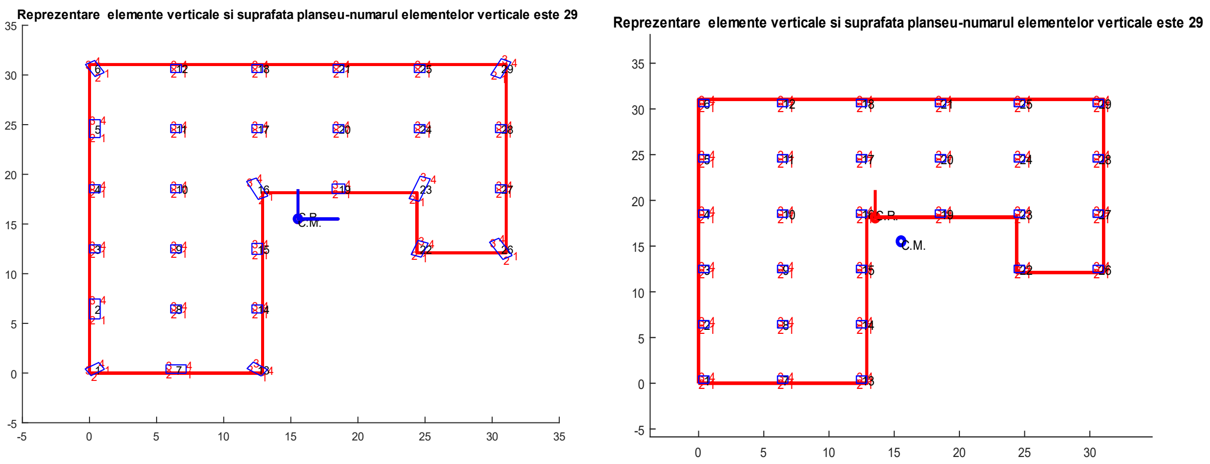


Fig.1.11.d. Structura S7.

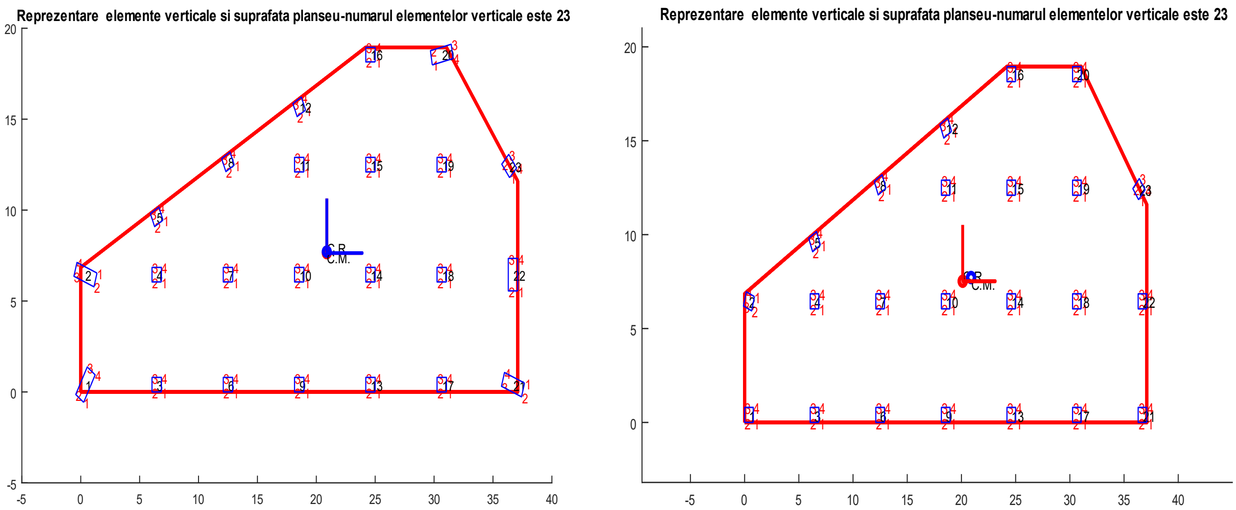


Fig.1.11.e. Structura S8.

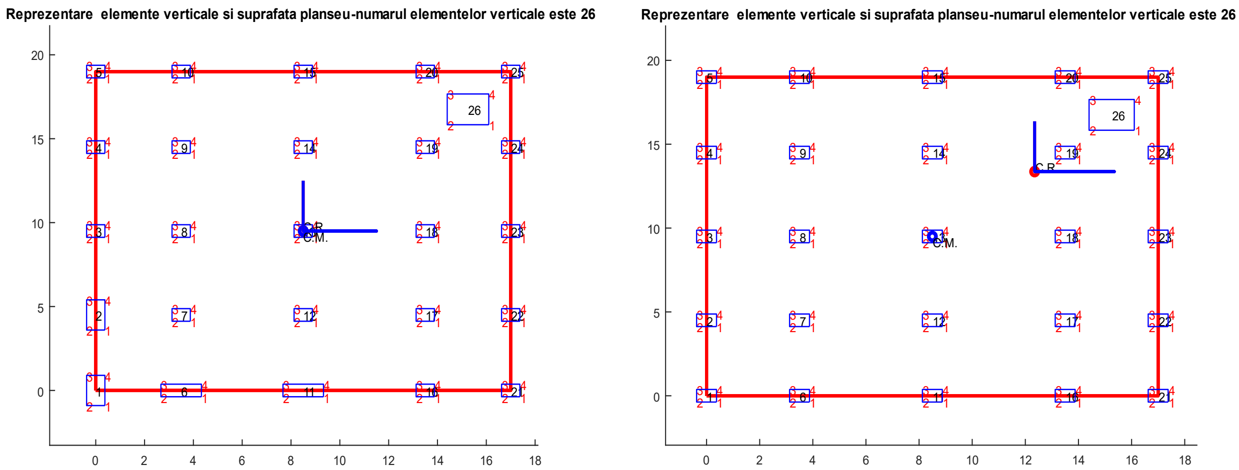


Fig.1.11.f. Structura S9.

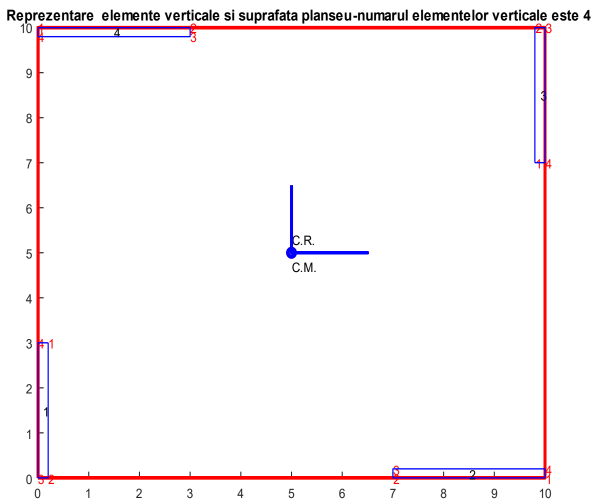


Fig.1.11.g. Structura S10.a.

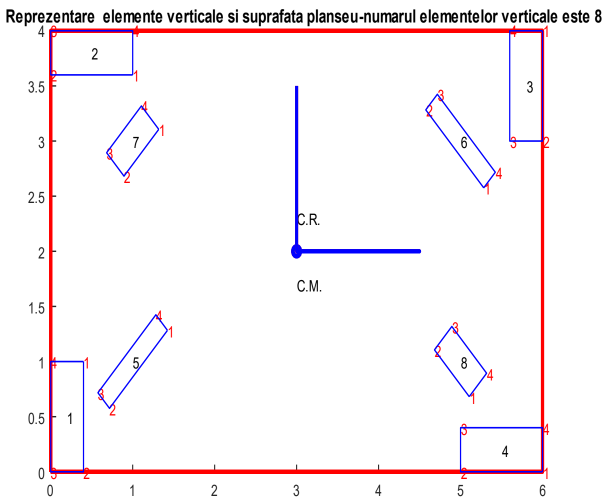


Fig.1.11.h. Structura S10.b.

3.Structuri cu sensibilitate la torsiune. Structuri înalte cu tuburi care preiau torsiunea [6]**.**

La structurile înalte torsiunea accidentală este inevitabilă și trebuie preluată. O soluție este folosirea tuburilor care preiau în condiții foarte bune de solicitare momentul de torsiune aferent planșeului respectiv. În figura 1.12.a. și figura 1.12.b. este modelată o structură cu tub flexibil care este dispus în centrul planșeului. Aceste structuri sunt sensibile la torsiune deoarece tubul materializează o axă de rotație în mijlocul planșeului. Pentru preluarea momentului de torsiune de la nivelul planșeului se dispun 4-patru diafragme perimetrale. Pentru a evidenția efectul pereților tubului asupra rigidității de torsiune R_ϕ de nivel, tubul este odată modelat cu un dreptunghi echivalent, structura S11.a (fig.1.12.a.), iar după aceea tubul este modelat cu pereți care conlucrează între ei ca în structura S11.b (fig.1.12.b.). Evident rigiditatea la torsiune R_ϕ de nivel a structurii S11.b este mai mare decât rigiditatea la torsiune R_ϕ de nivel a structurii S11.a. Rezultă că rigiditatea R_ϕ pentru structura S11.b modelează mai fidel realitatea și a fost folosită în exemplul numeric în relațiile (1.20) și (1.21). Un exemplu asemănător este prezentat în figura 1.12.c și figura 1.12.d, dar în acest caz tubul este așezat excentric stânga față de C.M. al planșeului.

În continuare, pentru structurile S11.a, S11.b, S12.a și S12.b sunt prezentate fișierele script Matlab [9] cu datele de intrare pentru cele 8-opt configurații geometrice de planșeu cu elementele verticale de rezistență aferente.

Structura S11.a cu regularitate geometrică în plan cu elemente verticale de tip tub echivalate cu un dreptunghi fără torsiune	Structura S11.b a cu regularitate geometrică în plan cu elemente verticale de tip tub modelate cu pereți fără torsiune
clear; clf; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[%Stapli 0.8 0.8 0 0 0 0.8 0.8 0 0 6.05 0.8 0.8 0 0 12.10 0.8 0.8 0 0 15.6 0.8 0.8 0 0 21.65 0.8 0.8 0 0 27.7 0.8 0.8 0 6.05 0 0.8 0.8 0 6.05 6.05 0.8 0.8 0 6.05 12.10 0.8 0.8 0 6.05 15.6 0.8 0.8 0 6.05 21.65 0.8 0.8 0 6.05 27.7 0.8 0.8 0 12.10 0 0.8 0.8 0 12.10 6.05 0.8 0.8 0 12.10 12.10 0.8 0.8 0 12.10 15.6 0.8 0.8 0 12.10 21.65 0.8 0.8 0 12.10 27.7 0.8 0.8 0 15.6 0 0.8 0.8 0 15.6 6.05 0.8 0.8 0 15.6 12.10 0.8 0.8 0 15.6 15.6 0.8 0.8 0 15.6 21.65 0.8 0.8 0 15.6 27.7 0.8 0.8 0 21.65 0 0.8 0.8 0 21.65 6.05 0.8 0.8 0 21.65 12.10 0.8 0.8 0 21.65 15.6 0.8 0.8 0 21.65 21.65 0.8 0.8 0 21.65 27.7 0.8 0.8 0 27.7 0 0.8 0.8 0 27.7 6.05 0.8 0.8 0 27.7 12.10 0.8 0.8 0 27.7 15.6 0.8 0.8 0 27.7 21.65 0.8 0.8 0 27.7 27.7 %Nucleu central echivalat 2.4 2.4 0 13.85 13.85 %Contravântuiri exterioare 0.25 5.31 pi/2 0 3.025 0.25 5.31 0 3.025 27.7 0.25 5.31 -pi/2 27.7 24.675 0.25 5.31 0 24.675 -0.0618]; % Definirea suprafeței planșeului de sus	clear; clf; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[%Stapli 0.8 0.8 0 0 0 0.8 0.8 0 0 6.05 0.8 0.8 0 0 12.10 0.8 0.8 0 0 15.6 0.8 0.8 0 0 21.65 0.8 0.8 0 0 27.7 0.8 0.8 0 6.05 0 0.8 0.8 0 6.05 6.05 0.8 0.8 0 6.05 12.10 0.8 0.8 0 6.05 15.6 0.8 0.8 0 6.05 21.65 0.8 0.8 0 6.05 27.7 0.8 0.8 0 12.10 0 0.8 0.8 0 12.10 6.05 0.8 0.8 0 12.10 12.10 0.8 0.8 0 12.10 15.6 0.8 0.8 0 12.10 21.65 0.8 0.8 0 12.10 27.7 0.8 0.8 0 15.6 0 0.8 0.8 0 15.6 6.05 0.8 0.8 0 15.6 12.10 0.8 0.8 0 15.6 15.6 0.8 0.8 0 15.6 21.65 0.8 0.8 0 15.6 27.7 0.8 0.8 0 21.65 0 0.8 0.8 0 21.65 6.05 0.8 0.8 0 21.65 12.10 0.8 0.8 0 21.65 15.6 0.8 0.8 0 21.65 21.65 0.8 0.8 0 21.65 27.7 0.8 0.8 0 27.7 0 0.8 0.8 0 27.7 6.05 0.8 0.8 0 27.7 12.10 0.8 0.8 0 27.7 15.6 0.8 0.8 0 27.7 21.65 0.8 0.8 0 27.7 27.7 %Nucleu central real 0.3 2.7 pi 13.85 15.6618 0.3 2.7 pi 13.85 12.1618 0.3 2.7 pi/2 12.1 13.9118 0.3 2.7 pi/2 15.6 13.9118 %Contravântuiri exterioare 0.25 5.31 pi/2 0 3.025

% nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 27.7 3 27.7 27.7 4 27.7 0 1 0 0];	0.25 5.31 0 3.025 27.7 0.25 5.31 -pi/2 27.7 24.675 0.25 5.31 0 24.675 -0.0618]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 27.7 3 27.7 27.7 4 27.7 0 1 0 0];
Structura S12.a cu regularitate geometrică în plan cu elemente verticale de tip tub echivalate cu un dreptunghi fără torsiune	Structura S12.b cu regularitate geometrică în plan cu elemente verticale de tip tub modelate cu pereți fără torsiune
clear; clf; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[%tub 5.36766960 9.77147261 0 16.0125 12 %Stalpi 0.8 0.8 0 0 24 0.8 0.8 0 8 24 0.8 0.8 0 16 24 0.8 0.8 0 24 24 0.8 0.8 0 32 24 0.8 0.8 0 40 24 0.8 0.8 0 0 16 0.8 0.8 0 32 16 0.8 0.8 0 40 16 0.8 0.8 0 0 8 0.8 0.8 0 32 8 0.8 0.8 0 40 8 0.8 0.8 0 0 0 0.8 0.8 0 8 0 0.8 0.8 0 16 0 0.8 0.8 0 24 0 0.8 0.8 0 32 0 0.8 0.8 0 40 0 %Perete echilibrare 0.41 7.2 pi/2 40 20 0.41 7.2 pi/2 40 4]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 24 3 40 24 4 40 0 1 0 0];	clear; clf; %Definirea elementelor verticale dintre doua nivele structura civila % b h alfa ccgx ccgy elem_vert=[%tub 0.25 8.2 pi/2 8 12 0.3 8.2 pi/2 24 12.05 0.2 16.28 pi 16 16 0.2 16.28 pi 16 8 %Stalpi 0.8 0.8 0 0 24 0.8 0.8 0 8 24 0.8 0.8 0 16 24 0.8 0.8 0 24 24 0.8 0.8 0 32 24 0.8 0.8 0 40 24 0.8 0.8 0 0 16 0.8 0.8 0 32 16 0.8 0.8 0 40 16 0.8 0.8 0 0 8 0.8 0.8 0 32 8 0.8 0.8 0 40 8 0.8 0.8 0 0 0 0.8 0.8 0 8 0 0.8 0.8 0 16 0 0.8 0.8 0 24 0 0.8 0.8 0 32 0 0.8 0.8 0 40 0 %Perete echilibrare 0.07 7.2 pi/2 40 20 0.07 7.2 pi/2 40 4]; % Definirea suprafeței planșeului de sus % nod cx cy coordonate=[1 0 0 2 0 24 3 40 24 4 40 0 1 0 0];

Rezultatele obținute în urma rulării programelor in cod Matlab [9] pentru structurile S11.a, S11.b, S12.a și S12.b sunt prezentate în fig.1.12.a, fig.1.12.b, fig.1.12.c și fig.1.12.d.

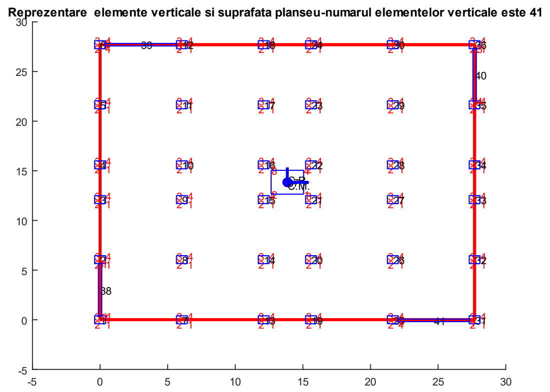


Fig.1.12.a Structura S11.a.

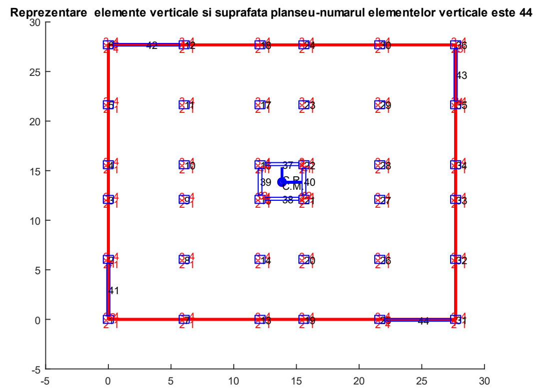


Fig.1.12.b Structura S11.b.

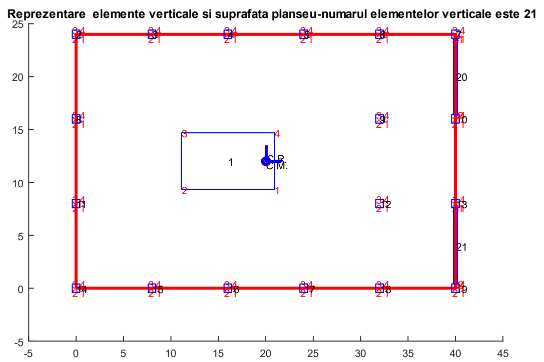


Fig.1.12.c Structura S12.a.

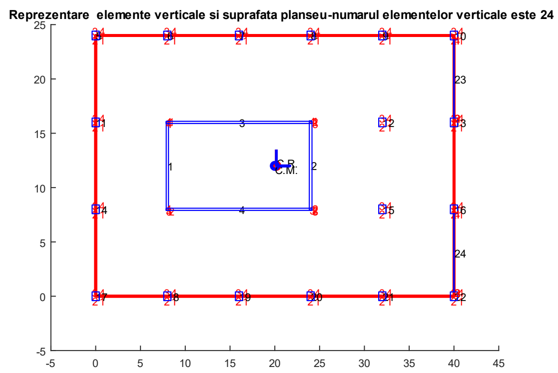


Fig.1.12.d Structura S12.b.

Programul Matlab principal [9] pentru calculul centrului de masă C.M. și centrului de rigiditate C.R. este prezentat mai jos.

```
% Determinarea numarului de elemente verticale si noduri
nelem=length(elem_vert(:,1));  nnd=length(coordonate(:,1));
%Coordonate noduri planseu
cx=coordonate(:,2);cy=coordonate(:,3);
%Ciclu pe elementele structurii pentru calcul momentelor de inertie
%Initializare IX IY IXY
IX=0;IY=0;IXY=0;Mox=0;Moy=0;
 for i=1:nelem
    b=elem_vert(i,1);h=elem_vert(i,2);alfa=elem_vert(i,3);cgex=elem_vert(i,4);cgey=elem_vert(i,5);
    I1=b*h^3/12;I2=h*b^3/12 ;Ix=I1*(cos(alfa))^2+I2*(sin(alfa))^2;Iy=I1*(sin(alfa))^2+I2*(cos(alfa))^2;
    Ixy=(I1-I2)*(sin(alfa)*cos(alfa));IX=IX+Ix;IY=IY+Iy;IXY=IXY+Ixy;Mox=Mox+Ix*cgey;Moy=Moy+Iy*cgex;
 end
 A=0;B=0;
 for i=1:nelem
    b=elem_vert(i,1);h=elem_vert(i,2);alfa=elem_vert(i,3);I1(i)=b*h^3/12;I2(i)=h*b^3/12 ;
    A=A+(I1(i)-I2(i))*(sin(2*alfa));B=B+(I1(i)-I2(i))*(cos(2*alfa));
 end
 %Coordonatele centrului de rigiditate
 xcr=(IXY*Mox-IX*Moy)/(IXY^2-IY*IX); ycr=-(IY*Mox-IXY*Moy)/(IXY^2-IY*IX);
 %Directii principale
 teta1=1/2*atan(A/B)*180/pi;teta2=teta1+90;
 %Pentru a evita erorile
 if (abs(B)<10^(-16));teta1=0;teta2=90;end
 %Calculul momentelor de inertie principale
 IPP1=0;IPP2=0; IPP12=0;J=0;vx=zeros(nelem,1);vy=zeros(nelem,1);beta=zeros(1,nelem);
 di=zeros(1,nelem);ux1=zeros(1,nelem);ux2=zeros(1,nelem);uy1=zeros(1,nelem);uy2=zeros(1,nelem);
```

```
  d1=zeros(1,nelem);d2=zeros(1,nelem);
  for i=1:nelem
     b=elem_vert(i,1);h=elem_vert(i,2);alfa(i)=elem_vert(i,3);beta(i)=alfa(i)-(teta1)*pi/180;
     I1(i)=b*h^3/12;I2(i)=h*b^3/12 ;
     IPP1= IPP1+(I1(i)*(cos(beta(i)))^2+I2(i)*(sin(beta(i)))^2);
     IPP2= IPP2+(I1(i)*(sin(beta(i)))^2+I2(i)*(cos(beta(i)))^2);
     IPP12=IPP12+((I1(i)-I2(i))*(sin(beta(i))*cos(beta(i))));
     %Calculul rigiditatii la torsiune
     alfa=elem_vert(i,3);cgex=elem_vert(i,4);cgey=elem_vert(i,5);
     %Distanta intre CR si CG
     di(i)=sqrt((xcr-cgex)^2+(ycr-cgey)^2);
     %Cosinusi directori directia (CG-CR)
     vx(i)=(xcr-cgex)/sqrt(((xcr-cgex)^2+(ycr-cgey)^2));vy(i)=(ycr-cgey)/sqrt(((xcr-cgex)^2+(ycr-cgey)^2));
     %Cosinusi directori directia element verical
     ux1(i)=cos(alfa);uy1(i)=sin(alfa);ux2(i)=cos(pi/2-alfa);uy2(i)=sin(pi/2-alfa);
     %Distantele pe x si y intre CR si CG
     d1(i)=(vx(i)*ux1(i)+vy(i)*uy1(i))*di(i);d2(i)=(vx(i)*ux2(i)+vy(i)*uy2(i))*di(i);dist=[d1' d2'];
     J=J+(I1(i)*d2(i)^2+I2(i)*d1(i)^2);
 end
 figure(1);clf;hold on;
 %Reprezentarea grafica suprafata planseu si elemente verticale
 title(['Reprezentare  elemente verticale,'-numarul elementelor verticale este ',num2str((nelem))])
 for j=1:nnd
     plot(cx,cy,'r-','linewidth',2.5);
 end;hold on;
%Reprezentarea grafica elemente verticale
for j=1:nelem
    ccgx=elem_vert(j,4);ccgy=elem_vert(j,5);alfa(j)=elem_vert(j,3)-pi/2;
    h(j)=elem_vert(j,2);b(j)=elem_vert(j,1);
     %Coordonatele nodale ale elementului vertical rotit
     xf1=ccgx+cos(alfa(j))*b(j)/2-sin(alfa(j))*h(j)/2;yf1=ccgy+sin(alfa(j))*b(j)/2+cos(alfa(j))*h(j)/2;
     xf2=ccgx+cos(alfa(j))*b(j)/2-sin(alfa(j))*(-h(j)/2);yf2=ccgy+sin(alfa(j))*b(j)/2+cos(alfa(j))*(-h(j)/2);
     xf3=ccgx+cos(alfa(j))*(-b(j)/2)-sin(alfa(j))*(-h(j)/2);yf3=ccgy+sin(alfa(j))*(-b(j)/2)+cos(alfa(j))*(-h(j)/2);
     xf4=ccgx+cos(alfa(j))*(-b(j)/2)-sin(alfa(j))*(h(j)/2);yf4=ccgy+sin(alfa(j))*(-b(j)/2)+cos(alfa(j))*(h(j)/2);
     %Reprezentare noduri element vertical
text(xf1,yf1,num2str(1),'Color','r');text(xf2,yf2,num2str(2),'Color','r');
text(xf3,yf3,num2str(3),'Color','r');text(xf4,yf4,num2str(4),'Color','r');
     %Reprezentare centru de greutate sectiune verticala
     text(ccgx,ccgy,num2str(j));xf=[xf1  xf2   xf3  xf4 xf1 ];yf=[yf1  yf2  yf3 yf4 yf1 ];
     hold on;plot(xf,yf,'b','linewidth',1);
end
plot(xcr,ycr,'--ro','linewidth',3) ;hold on;text(xcr,ycr+0.3,'C.R. ');hold on; %Reprezentare CR
xcm=coordonate(3,2)/2;ycm=coordonate(2,3)/2; %Reprezentare CM
plot(xcm,ycm,'--bo','linewidth',3) ;hold on;text(xcm,ycm-0.3,'C.M. ');hold on;
s=1.5; %Factor de scalare
%Desenare sistem de referinta global cu originea C.R.
XN=[xcr xcr+1*s        xcr xcr   ];hold on;YN=[ycr   ycr          ycr  ycr+1*s  ];hold on;
XR=[xcr  xcr+cos(teta1*pi/180)*s        xcr xcr-sin(teta1*pi/180)*s   ];hold on;
YR=[ycr   ycr+sin(teta1*pi/180)*s         ycr  ycr+cos(teta1*pi/180)*s  ];hold on;
plot(XN,YN,'r','linewidth',2.5);plot(XR,YR,'b','linewidth',2.5);
%%Desenare sistem de referinta  principal cu originea C.R.
%Prezentare  rezultate calcul C.M. C.R. si directii principale si momente de inertie principale'
rezultate1=[xcr           ycr ];rezultate2=[xcm          ycm ];
rezultate3=[teta1  teta2      IPP1       IPP2       IPP12        J];
disp('Coordonate centru rigiditate-xcr[m]  ycr[m]');disp(rezultate1);
disp('Coordonate centru de masa-xcm[m]  ycm[m]');disp(rezultate2);
disp('    alfa1     alfa2       I1      I2       I12       J');disp(rezultate3);
```

1.4.Rezultatele și concluzii:

• Din studiile de caz prezentate în cazul structurilor multietajate neregulate în plan cu planșee cu forme geometrice complexe, rezultă că prin modificarea dimensiunilor și orientării elementelor verticale echivalate cu dreptunghiuri, se poate elimina distanța dintre C.R. și C.M.. Astfel, deplasările de nivel nu vor fi amplificate de mișcarea de rototranslație a planșeelor, ținând sub control deplasările de nivel și implicit degradările de nivel. De asemenea, prin orientarea adecvată a axelor principale de rigiditate a planșeelor se obțin mecanisme plastice favorabile care presupun generarea unui număr maxim de articulații plastice în care să fie disipată energia seismică. În analizele realizate au fost modificate dimensiunile și orientarea dreptunghiurilor din interiorul suprafeței planșeului sau a dreptunghiurilor dispuse perimetral. Rezultatele obținute cu programul Matlab [9] pot fi verificate prin analiză modală cu programul Etabs [10].

• Dacă din faza de conformare laterală și gravitațională a unei structuri multietajate se impune eliminarea distanței dintre C.R. și C.M., atunci elementele verticale de rezistență trebuie dispuse antisimetric în raport cu C.M. al structurii (fig.1.11.h. și fig.1.11.g.).

• În cazul structurilor multietajate cu scări și/sau tuburi care asigură legătura și circulația între etajele structurii civile, se poate echivala scara sau tubul cu un dreptunghi și se elimină distanța dintre C.R. și C.M.. Există cazuri când rigiditatea la torsiune a tuburilor sau scărilor este semnificativă și trebuie modelată rigiditatea lor la torsiune, pentru a fi luată în calcul la rigiditatea de torsiune a ansamblului elementelor de la nivelul respectiv.

• La structurile înalte la care torsiunea este preluată prin intermediul tuburilor centrale (structuri de tip tub flexibil) se poate reduce de asemenea distanța dintre C.R. și C.M., folosind diafragme verticale perimetrale.

• Dacă structura prezintă retrageri pe elevație [5], cele prezentate mai sus pot fi aplicate pe fiecare nivel în parte, asigurându-se continuitatea elementelor verticale pe elevația structurii.

Principalele contribuții ale autorului în cadrul acestui capitol sunt:

• Au fost realizate programe de calcul cu grad mare de generalitate care permit determinarea centrului de rigiditate C.R. ale elementelor verticale de rezistență de la nivelul unei structuri multietajate folosind metode specifice mecanicii solidului rigid (reducerea sistemelor de forțe coplanare la un torsor), precum și programe de calcul pentru determinarea centrului de masă C.M. pentru suprafețe cu configurație complexă.

• Pentru ca structurile analizate să înmagazineze preponderent energie de deformație de încovoiere și a impune mișcarea lor pe anumite direcții au fost realizați algoritmi pentru a dirija axelor principale de inerție ale planșeelor, după direcții adecvate.

• Metoda prezentată în acest capitol este o metodă nouă [5], care permite reducerea distanței dintre C.M. și C.R. la orice sistem structural tip structură multietajată. Pentru a putea fi aplicată în practică, autorul a realizat și prezentat programe de calcul în Matlab care acoperă toate cazurile întâlnite în practică. În acest sens sunt prezentate studii de caz pentru structuri cu planșee neregulate în plan și structuri cu scări și tuburi. Programele prezentate au fost testate prin simulare numerică și validate cu exemple de structuri analizate cu programul ETABS [5],[10].

Bibliografie

[1] M. Ministerul Dezvoltării regionale și administrației publice Romania, Indicativ P 100-1: 2013.Cod de Proiectare Seismica. PARTEA I — Prevederi de Proiectare Pentru Cladiri., București: Monitorul Oficial al României nr. nr. 558, 2013.

[2] B. Naresh Kumar, N. Punith, R. Bhyrav și T. Arpitha, „ Assessment of location of centre of mass and centre of rigidity for different setback buildings,” *Int. J. Eng. Res. Technol. (IJERT),* vol. 6, p. 801–804, 2017.

[3] M. Ifrim, Dinamica structurilor și inginerie seismică, București: Editura didactică și pedagogică, 1973.

[4] S. Srisangeerthanan, M. Hashemi, P. Rajeev, E. Gad și S. Fernando, „Numerical study on the effects of diaphragm stiffness and strength on the seismic response of multi-story modular buildings,” *Eng. Struct.,* nr. 163, p. 25–37, 2018.

[5] M. Botis și C. Cerbu, „A Method for Reducing of the Overall Torsion for Reinforced Concrete Multi-Storey Irregular Structures,” *Applied of Sciences MDPI,* vol. 10, p. 5555, 2020.

[6] M. Botiș, C. Cerbu și H. Shi, „Study on the reduction of the general/overall torsion on multi-story, rectangular, reinforced concrete structures,” *In Proceedings of the 3rd China-Romania Science and Technology Seminar (CRSTS), Transilvania Univ, Brasov, Romania,* 24–27 April 2018.

[7] C. Harbic, C. Cismaș, V. Dubasaru și M. Botiș, „Aspects regarding reduction of general torsion in the structures of the Brașov campus,” *Bull. Transil. Univ. Bra¸sov. Ser. I Eng. Sci.,* nr. 4, p. 153–160, 2011.

[8] S. Maske și P. Pajgade, „ Torsional behaviour of asymmetrical buildings,” *Int. J. Modern Eng. Res. (IJMER),* nr. 3, p. 1146–1149, 2013.

[9] „MathWorks Inc. MATLAB. Math. Graphics. Programming.,” [Interactiv]. Available: https://www.mathworks.com/ products/matlab.html. [Accesat 23 07 2022].

[10] „Computers and Structures Inc. ETABS,” [Interactiv]. Available: https://www.csiamerica.com/products/etabs. [Accesat 16 08 2022].

2.Studiul algoritmilor numerici și algoritmilor probabilistici tip Monte Carlo pentru determinarea ariei, momentelor statice, centrului de masă și tensorului de inerție pentru suprafețe plane complexe.

2.1.Introducere

Determinarea axelor principale și centrale de inerție ale suprafețelor plane este importantă, deoarece după direcția acestor axe, cele șase eforturi secționale din secțiunea transversală se decuplează, astfel că ele nu se mai influențează reciproc. Momentele de inerție ale suprafețelor plane, intervin de asemenea în cazul optimizării formei și dimensiunilor secțiunilor transversale parametrizate ale barelor supuse la încovoiere și torsiune. Cunoașterea caracteristicilor geometrice statice și inerțiale ale suprafețelor plane, permite determinarea celor 6-șase module de rigiditate secțională pentru o bară spațială $EA, GA_y, GA_z, GI_t, EI_y$ și EI_z [1].

Modelarea secțiunilor complexe se poate face utilizând algoritmi numerici care permit determinarea caracteristicilor geometrice statice și inerțiale indiferent de forma secțiunii transversale [2]. Calculul caracteristicilor statice și inerțiale permite determinarea modulelor de rezistență atât în domeniul elastic cât și în domeniul plastic.

2.2.Determinarea caracteristicilor geometrice și statice ale unui triunghi prin transformarea afină de coordonate pentru un triunghi scalen

Pentru a determina aria, coordonatele centrului de masă momentele statice și momentele de inerție pentru un triunghi (fig.2.1), se face transformarea de coordonate din sistemul de coordonate xOy în sistemul de coordonate x_nOy_n[3].

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)x_n + (x_3 - x_1)y_n; \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)x_n + (y_3 - y_1)y_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

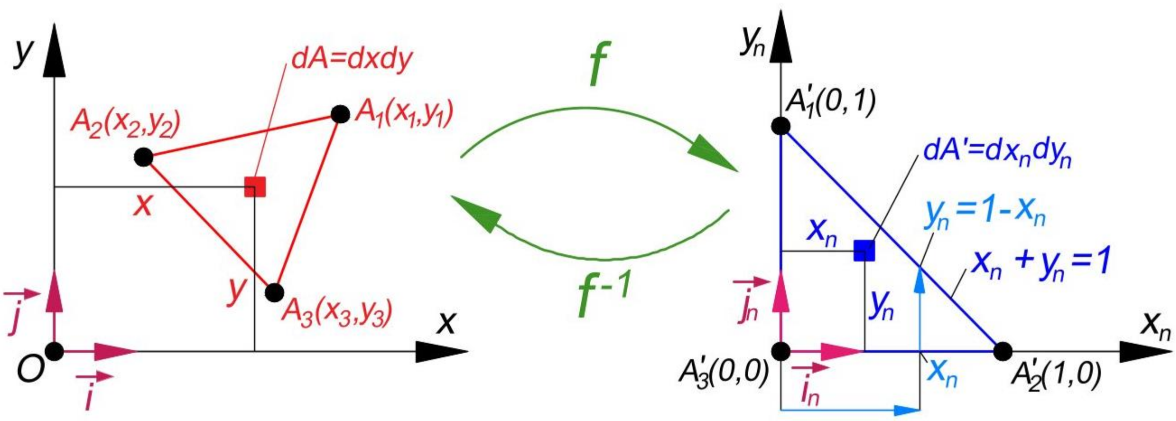


Fig.2.1 Transformarea de coordonate.

Determinarea numerică a ariei suprafeței triunghiulare în funcție de coordonatele vârfurilor se realizează cu relația:

$$A = \int_A dA = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} dx_n\, dy_n;\ A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

unde,

$$dA = dxdy = det(J)dx_n dy_n = det(J)A_n; det(J) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_n} & \frac{\partial x}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} & \frac{\partial y}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Determinarea numerică a momentelor statice ale suprafeței triunghiulare în funcție de coordonatele vârfurilor se efectuează cu relațiile următoare:

-momentul static ale suprafeței A în raport cu o dreaptă Δ_η (fig.2.2):

$$S_\Delta = \int_A \eta dA. \tag{2.3}$$

-momentele statice ale suprafeței în raport cu axele Ox și respectiv Oy (fig.2.2):

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A ydA\,; S_x = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} y_n(x_n, x_n) dx_n\, dy_n; \\ S_y &= \int_A xdA\,; S_y = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} x_n(x_n, x_n) dx_n\, dy_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

După efectuarea calculelor rezultă:

$$S_y = \frac{A \cdot (x_1 + x_2 + x_3)}{3}; S_x = \frac{A \cdot (y_1 + y_2 + y_3)}{3}. \tag{2.5}$$

Determinarea numerică a centrul de masă al suprafeței triunghiulare in funcție de coordonatele vârfurilor se face cu relațiile:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{S_y}{\int_A dA} = \frac{\int_A xdA}{\int_A dA}; y_{CM} = \frac{S_x}{\int_A dA} = \frac{\int_A ydA}{\int_A dA}; \\ x_{CM} &= det\frac{(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} x_n(x_n, x_n) dx_n\, dy_n}{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} dx_n\, dy_n}; \\ y_{CM} &= det\frac{(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} y_n(x_n, x_n) dx_n\, dy_n}{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} dx_n\, dy_n.}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

După efectuarea calculelor rezultă:

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; y_{CM} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{2.7}$$

În raport cu o dreaptă care trece prin centrul de masă C.M. (fig.2.2), $S_\Delta = 0$, iar în raport cu două axe paralele cu axele x și y care trec prin C.M., $S_x = S_y = 0$.

2.3.Variația momentelor de inerție în raport cu translația sistemului de referință

Se cunosc momentele de inerție ale suprafeței A în raport cu sistemul de referință Oxy și se calculează momentele de inerție față de un sistem de referință Ox_1y_1 (fig.2.2). Axele sistemului de referință x_1Oy_1 sunt paralele cu axele sistemului de referință xOy.

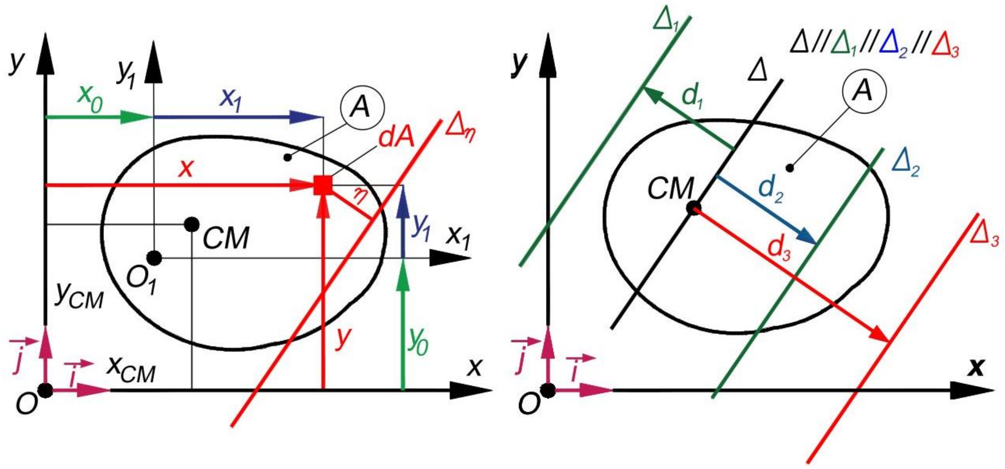


Fig.2.2.Variația momentelor de inerție cu translația axelor.

Conform definiției momentele de inerție în raport cu axele sistemului de referință xOy sunt:

$$I_x = \int_A y^2 dA\,; I_y = \int_A x^2 dA\,; I_{xy} = \int_A xy dA. \tag{2.8}$$

Momentele de inerție în raport cu sistemul de referință Ox_1y_1 rezultă:

$$\begin{gathered}
I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y - y_0) dA\,; \\
I_{x1} = \int_A y^2 dA - 2\int_A y_0 y dA + \int_A y_0^2 dA = I_x - 2y_0 S_x + y_0^2 A; \\
I_{y1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x - x_0) dA; \\
I_{y1} = \int_A x^2 dA - 2\int_A x_0 x dA + \int_A x_0^2 dA = I_y - 2x_0 S_y + x_0^2 A; \\
I_{x1y1} = \int_A x_0 y_0 dA = \int_A (x - x_0)(y - y_0) dA\,; \\
I_{x1y1} = \int_A xy dA - \int_A xy_0 dA - \int_A yx_0 dA + \int_A x_0 y_0 dA\,;
\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$I_{x1y1} = I_{xy} - y_0 S_y - x_0 S_x + x_0 y_0 A.$$

unde s-a notat, $x_1 = x - x_0, y_1 = y - y_0$.

Dacă centrul O coincide cu centrul de masă (C.M.) al suprafeței, rezultă:

$$S_x = S_y = 0; x_{CM} = y_{CM} = 0;$$
$$I_{x1} = I_x + y_0^2 A; I_{y1} = I_y + x_0^2 A; I_{x1y1} = I_{xy} + x_0 y_0 A. \tag{2.10}$$

Pentru o dreaptă Δ care nu trece prin C.M. al suprafeței și pentru o serie de drepte $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ paralele cu Δ (fig.2.2.) rezultă:

$$I_{\Delta_1} = I_\Delta + d_1^2 A; I_{\Delta_2} = I_\Delta + d_2^2 A; I_{\Delta_3} = I_\Delta + d_3^2 A. \tag{2.11}$$

Cel mai mic moment de inerție pentru o serie de drepte paralele, este față de dreapta care trece prin centrul de masă al secțiunii. Momentul de inerție axial este minim față de o axă care trece prin C.M..

2.4.Variația momentelor de inerție cu rotația sistemului de referință. Momentele de inerție principale și direcțiile principale asociate

Momentul de inerție ale suprafeței având aria A (fig.2.3), în raport cu o dreaptă Δ, prin definiție este:

$$I_\Delta = \int_A \eta^2 dA\,; \eta = ycos\alpha - xsin\alpha; I_\Delta = \int_A (cos\alpha - xsin\alpha)^2 dA;$$
$$I_\Delta = cos^2\alpha \int_A y^2 dA - 2cos\alpha sin\alpha \int_A xydA + sin^2\alpha \int_A x^2 dA\,; \tag{2.12}$$
$$I_\Delta = I_x cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha - 2I_{xy} cos\alpha sin\alpha.$$

Orientarea axei Δ este dată de cosinusurile directoare $l = cos\alpha$ și $m = sin\alpha$ care respectă egalitatea:

$$l^2 + m^2 = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1 \tag{2.13}$$

Se numesc axe principale de inerție relative la un punct, axele concurente în punctul dat față de care valorile momentelor de inerție devin extreme. Momentele de inerție în raport cu aceste axe se numesc momente de inerție principale. Determinarea momentelor de inerție conduce la determinarea extremelor unei funcții cu constrângeri.

Pentru a determina valorile extreme ale lui I_Δ, se utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange, care conduce la determinarea extremelor funcției $I_\Delta(sin\alpha, cos\alpha)$ cu constrângeri de tip egalitate.

$$I_\Delta(sin\alpha, cos\alpha) = I_x cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha - 2I_{xy} cos\alpha sin\alpha;$$

$$1 - cos^2\alpha + sin^2\alpha = 0. \tag{2.14}$$

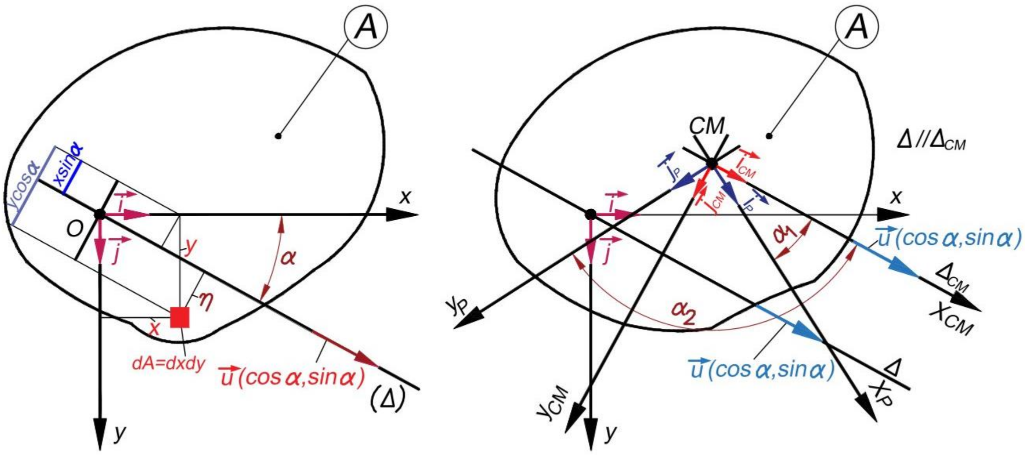


Fig.2.3.Variația momentelor de inerție cu rotația axelor.

Funcția Lagrange $L(sin\alpha, cos\alpha)$ pentru care trebuie determinate extremele este:

$$\begin{gathered} L(sin\alpha, cos\alpha) = I_x cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha - 2I_{xy} cos\alpha sin\alpha + \\ +\lambda(1 - cos^2\alpha + sin^2\alpha). \end{gathered} \tag{2.15}$$

Din condiția de extrem a funcției Lagrange $L(sin\alpha, cos\alpha)$ rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(sin\alpha, cos\alpha)}{\partial(cos\alpha)} = 2I_x cos\alpha - 2I_{xy} sin\alpha - 2\lambda cos\alpha = 0; \\ \dfrac{\partial L(sin\alpha, cos\alpha)}{\partial(sin\alpha)} = 2I_y sin\alpha - 2I_{xy} cos\alpha - 2\lambda sin\alpha = 0; \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{bmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Sistemul de ecuații (2.16) obținut este linear și omogen și nu admite soluții banale deoarece $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$. Condiția ca sistemul de ecuații să nu aibă soluții banale, este ca determinantul coeficienților necunoscutelor să fie nul.

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = 0; (I_x - \lambda)(I_y - \lambda) - I_{xy}^2 = 0;$$

$$\lambda^2 - \lambda(I_x + I_y) + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda I_1 + I_2 = 0; I_1 = I_x + I_y; I_2 = I_x I_y - I_{xy}^2;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{I_x + I_y \pm \sqrt{(I_x + I_y)^2 - 4(I_x I_y - I_{xy}^2)}}{2}; \tag{2.17}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{I_x + I_y \pm \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y + 4I_{xy}^2 - 4I_x I_y}}{2};$$

$$\lambda_{1,2} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}\,.$$

Vectorii proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_{1,2}$ se găsesc pe direcțiile principale, care se determină revenind la sistemul de ecuații (2.16), după cum urmează:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = I_1 \rightarrow \left(\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} cos\alpha_1 \\ sin\alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};\\
tg\alpha_1 = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_1};\\
\alpha_1 = arctg\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right) = arctg\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_1}\right);\\
\lambda_2 = I_2 \rightarrow \left(\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} cos\alpha_2 \\ sin\alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};\\
tg\alpha_2 = \frac{I_x - I_2}{I_{xy}} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_2};\\
\alpha_2 = arctg\left(\frac{I_x - I_2}{I_{xy}}\right) = arctg\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_2}\right).
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Momentele de inerție I_Δ, I_y, I_x sunt întotdeauna pozitive iar momentul de inerție centrifugal I_{xy} poate fi pozitiv negativ sau zero.

2.5.Momentele de inerție geometrice centrifugale extreme

Față de un sistem de referința x_1Oy_1 rotit cu unghiul α față de sistemul de referință xOy momentele de inerție axiale I_{x1}, I_{y1} si cel centrifugal I_{x1y1} sunt (fig.2.4.):

$$\begin{gathered}
I_{x1} = \int_A {y_1}^2 dA = \int_A (ycos\alpha - xsin\alpha)^2 dA\,;\\
I_{x1} = I_x cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha - 2I_{xy}cos\alpha sin\alpha;\\
I_{x1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}cos2\alpha - I_{xy}sin2\alpha;\\
I_{y1} = \int_A {x_1}^2 dA = \int_A (ysin\alpha + xcos\alpha)^2 dA\,;\\
I_{y1} = I_x sin^2\alpha + I_y cos^2\alpha + 2I_{xy}cos\alpha sin\alpha;\\
I_{y1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}cos2\alpha + I_{xy}sin2\alpha;
\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$I_{x1y1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (ysin\alpha + xcos\alpha)(y_1 = ycos\alpha - xsin\alpha)dA\,;$$

$$I_{x1y1} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)sin2\alpha + I_{xy}cos2\alpha.$$

în care au fost utilizate relațiile următoare:

$y_1 = ycos\alpha - xsin\alpha; x_1 = ysin\alpha + xcos\alpha;$

$cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2};\ sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2};$

$sin2\alpha = 2cos\alpha sin\alpha.$

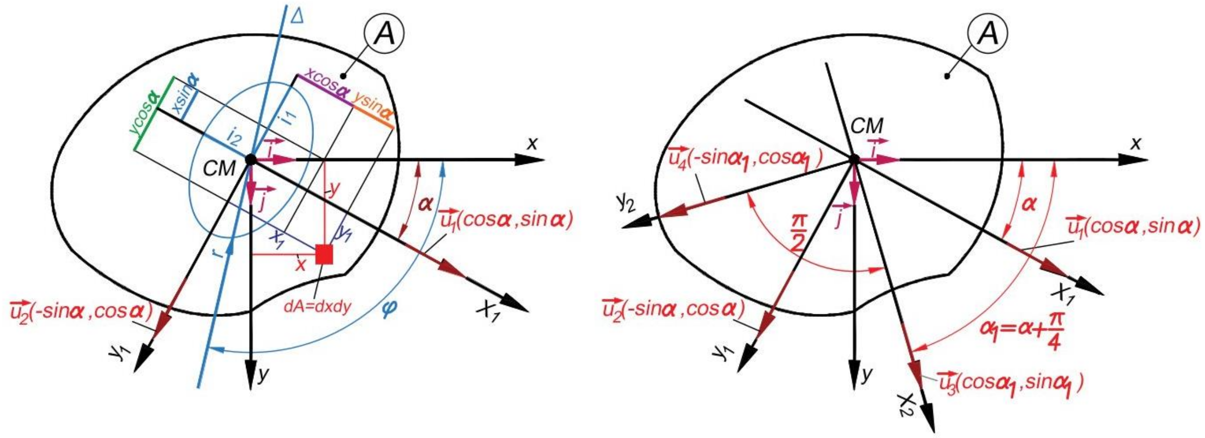


Fig.2.4.Momente de inerție centrifugale extreme. Elipsa de inerție.

Dacă se consideră axele Ox și Oy ca fiind direcțiile principale, atunci $I_{xy} = 0$ sistemul de referință x_1Oy_1 este rotit cu unghiul $\alpha = \phi$ față de sistemul de referință principal, atunci momentele de inerție în raport cu sistemul de referință x_1Oy_1 (fig.2.4.) sunt:

$$I_{x1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}cos2\alpha - I_{xy}sin2\alpha;$$

$$I_{x1} = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}cos2\phi;$$

$$I_{y1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}cos2\alpha + I_{xy}sin2\alpha;$$

$$I_{y1} = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}cos2\phi; \tag{2.20}$$

$$I_{x1y1} = \frac{I_x - I_y}{2}sin2\alpha + I_{xy}cos2\alpha; I_{x1y1} = \frac{I_1 - I_2}{2}sin2\phi.$$

Momentul de inerție centrifugal I_{x1y1} are valoarea maximă pentru $sin2\phi = 1$, adică $\phi = \pi/4$ când:

$$I_{x1y1} = \frac{I_1 - I_2}{2}sin2\phi; \tag{2.21}$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}; I_{x1y1} = \frac{I_1 - I_2}{2}.$$

Momentul de inerție centrifugal este maxim pentru un sistem de referință ortogonal de axe rotit cu $\phi = \pi/4$, față de sistemul de referință care reprezintă direcțiile principale de inerție. Valoarea maximă a momentului de inerție centrifugal este:

$$I_{x1y1} = \frac{I_1 - I_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (2.22)$$

Pentru $\phi = 3\pi/4$ momentul de inerție centrifugal are aceeași valoare în modul dar își schimbă semnul. În raport cu axele Ox_1y_1 rotite cu $\phi = \pi/4$ față de sistemul de referință principal momentele de inerție au valorile:

$$I_{x1} = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}cos2\phi; \phi = \frac{\pi}{4}; I_{x1} = \frac{I_1 + I_2}{2}; \quad (2.23)$$
$$I_{y1} = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}cos2\phi; \phi = \frac{\pi}{4}; I_{y1} = \frac{I_1 + I_2}{2};$$

2.6.Razele de inerție sau girație. Elipsa de inerție.

Prin definiție razele de inerție sau girație au expresiile:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; I_x = {i_x}^2A; I_y = {i_y}^2A;$$
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}; I_1 = {i_1}^2A; I_2 = {i_2}^2A. \quad (2.24)$$

Momentul de inerție axial în raport cu axa Ox_1 (fig.2.4) este:

$$I_{x1} = I_x cos^2\alpha + I_y sin^2\alpha - 2I_{xy}cos\alpha sin\alpha. \quad (2.25)$$

Dacă sistemul de referința xOy este un sistem de referință principal rezultă:

$$I_x = I_1; I_y = I_2; I_{xy} = 0. \quad (2.26)$$

Pentru o direcție Δ care face unghiul ϕ cu axa Ox, momentul de inerție I_{x1} devine:

$$\phi = \alpha; I_\Delta = I_1 cos^2\phi + I_2 cos^2\phi. \quad (2.27)$$

Coordonatele unui punct de pe dreapta Δ la distanță r față de C.M. sunt (fig.2.4):

$$cos^2\phi = \frac{x^2}{r^2}; sin^2\phi = \frac{y^2}{r^2}. \tag{2.28}$$

Dacă se notează $I_\Delta = k^2/r^2$rezultă:

$$I_\Delta = \frac{k^2}{r^2} = I_1 cos^2\phi + I_2 cos^2\phi = I_1\frac{x^2}{r^2} + I_2\frac{y^2}{r^2}; \frac{x^2}{\left(\frac{k^2}{I_1}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{k^2}{I_2}\right)} = 1;$$
$$k^2 = \frac{I_1 I_2}{A}; \frac{x^2}{\left(\frac{I_2}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{I_1}{A}\right)} = 1. \tag{2.29}$$

Ecuația elipsei de inerție față de C.M. este :

$$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1. \tag{2.30}$$

2.7.Tensorul de inerție al unui triunghi în raport cu sistemul de referință xOy

Tensorul de inerție mecanic al unei suprafețe plane prin definiție este:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_V y^2 \rho dV & -\int_V xy\rho dV \\ -\int_V yx\rho dV & \int_V x^2 \rho dV \end{bmatrix} = \rho t \begin{bmatrix} \int_V y^2 dA & -\int_V xydA \\ -\int_V yxdA & \int_V x^2 dA \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

unde, $\rho = ct.$ este densitatea materialului din care este realizat corpul omogen, iar t este grosimea constantă a suprafeței plane.

Tensorul de inerție geometric ale unei suprafețe plane este:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_V y^2 dA & -\int_V xydA \\ -\int_V yxdA & \int_V x^2 dA \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho t}[J]. \tag{2.32}$$

Momentele de inerție principale sunt valorile proprii ale matricei $[I]$ iar direcțiile principale sunt vectorii proprii ai matricei $[I]$. Se poate observa că tensorul este simetric și atunci trebuie calculați numai termenii :

$$I_{xx} = \int_V y^2 dA;$$
$$I_{yy} = \int_V x^2 dA; \tag{2.33}$$

$$I_{xy} = -\int_V yxdA.$$

Pentru calculul termenilor din matricea $[I]$ se evaluează integralele:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_V y^2 dA = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} y(x_n, y_n)^2 dx_n \, dy_n; \\
I_{yy} &= \int_V x^2 dA = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} x(x_n, y_n)^2 dx_n \, dy_n; \\
I_{xy} = I_{yx} &= -\int_V xydA = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} x(x_n, y_n) \cdot y(x_n, y_n) dx_n dy_n.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Pentru a calcula tensorul de inerție geometric se prezintă mai jos un program scris în cod Matlab [4].

```
% Geometric static and inertial triangle characteristics according to the coordinates of the vertices
clear
syms  xn yn x1 x2 x3 y1 y2 y3 z1 z2 z3 x y A Ix Iy Iyx
%Transforming real coordinates(x,y)into normalized coordinates (xn,yn)
x=x1+(x2-x1)*xn+(x3-x1)*yn;
y=y1+(y2-y1)*xn+(y3-y1)*yn;
%The Jacobian matrix (J) for coordinate transformation and the determinant of J
J = jacobian([x; y], [xn, yn]);
detJ=det(J);
%The area of a triangle as a function of vertex coordinates detJ = 2 * Area
Ai=[x1 y1 1
    x2 y2 1
    x3 y3 1];
Area=1/2*det(Ai);
A_int=simplify(det(J)*simplify(int((int(1,yn,0,1-xn)),xn,0,1)),'Step',10);
disp('Area by integration =');
pretty(A_int)
%Static moments according to the coordinates of the vertices
gy=x;
gx=y;
Sx=simplify(A*2*simplify(int((int(gx,yn,0,1-xn)),xn,0,1)),'Step',10);
Sy=simplify(A*2*simplify(int((int(gy,yn,0,1-xn)),xn,0,1)),'Step',10);
disp('Static moment Sx by integration =');
pretty(Sx)
disp('Static moment Sy by integration =');
pretty(Sy)
%The coordinates of the center of mass triangle according to the coordinates of the vertices
xcm=Sy/A;
ycm=Sx/A;
disp('Coordinate xcm of the center of mass  by integration =');
pretty(xcm);
disp('Coordinate ycm of the center of mass  by integration =');
pretty(ycm);
%Moments of inertia based on the coordinate triangle vertices
fxx=simplify(y^2);fyy=simplify(x^2);fxy=simplify(x*y);
Ixx=simplify(A*2*simplify(int((int(fxx,yn,0,1-xn)),xn,0,1)),'Step',10);
Iyy=simplify(A*2*simplify(int((int(fyy,yn,0,1-xn)),xn,0,1)),'Step',10);
Ixy=simplify(A*2*simplify(int((int(fxy,yn,0,1-xn)),xn,0,1)),'Step',10);
disp('Moment of inertia Ixx by integration =');
pretty(Ixx);
```

```
disp('Moment of inertia Iyy by integration =');
pretty(Iyy);
disp('Moment of inertia Ixy by integration =');
pretty(Ixy);
%Determination of eigenvectors and eigenvalues for tensor I
I=[Ix   Iyx
   Iyx   Iy];
[Dp,Ip]=eig(I);
%Main moments of inertia
vp=diag(Ip);
disp('I1 =')
pretty(vp(2))
disp('I2 =')
pretty(vp(1))
%Main directions
Dp=simplify((Dp),'Step',10);
disp('d1 =')
pretty(Dp(:,2))
disp('d2 =')
pretty(Dp(:,1))
```

2.8.Determinarea numerică a caracteristicilor inerțiale ale suprafețelor plane complexe

Coordonatele centrului de masă pentru o suprafață complexă (fig.2.5.) discretizată în n triunghiuri se calculează cu relațiile:

$$x_C = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\, x_{Ci}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{-1};\, y_C = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\, y_{Ci}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{-1}. \tag{2.35}$$

Pentru un triunghi generic din discretizare (fig.2.5.), caracteristicile geometrice se determină în funcție de coordonatele vârfurilor sale cu relațiile:

-aria triunghiului:

$$A_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{1i} & y_{1i} & 1 \\ x_{2i} & y_{2i} & 1 \\ x_{3i} & y_{3i} & 1 \end{vmatrix};\, i = 1\ldots n. \tag{2.36}$$

-coordonatele centrului de masă:

$$x_{Ci} = \frac{x_{1i} + x_{2i} + x_{3i}}{3}; \qquad y_{Ci} = \frac{y_{1i} + y_{2i} + y_{3i}}{3}. \tag{2.37}$$

-momentele statice în raport cu axele Ox și Oy :

$$S_{xi} = A y_G = \frac{A}{3}(y_{1i} + y_{2i} + y_{3i}); \tag{2.38}$$

$$S_{yi} = Ax_G = \frac{A}{3}(x_{1i} + x_{2i} + x_{3i}).$$

-momentele de inerție axiale:

$$I_{xi} = \frac{A}{6}\big(y_{1i}(y_{1i} + y_{2i}) + y_{2i}(y_{2i} + y_{3i}) + y_{3i}(y_{3i} + y_{1i})\big);$$
$$I_{yi} = \frac{A}{6}\big(x_{1i}(x_{1i} + x_{2i}) + x_{2i}(x_{2i} + x_{3i}) + y_{3i}(x_{3i} + x_{1i})\big). \tag{2.39}$$

-momentul de inerție centrifugal:

$$I_{xiyi} = \frac{A}{12}\big((y_{1i} + y_{2i})(x_{1i} + x_{2i}) + (y_{2i} + y_{3i})(x_{2i} + x_{3i}) + (y_{3i} + y_{1i})(x_{3i} + x_{1i})\big). \tag{2.40}$$

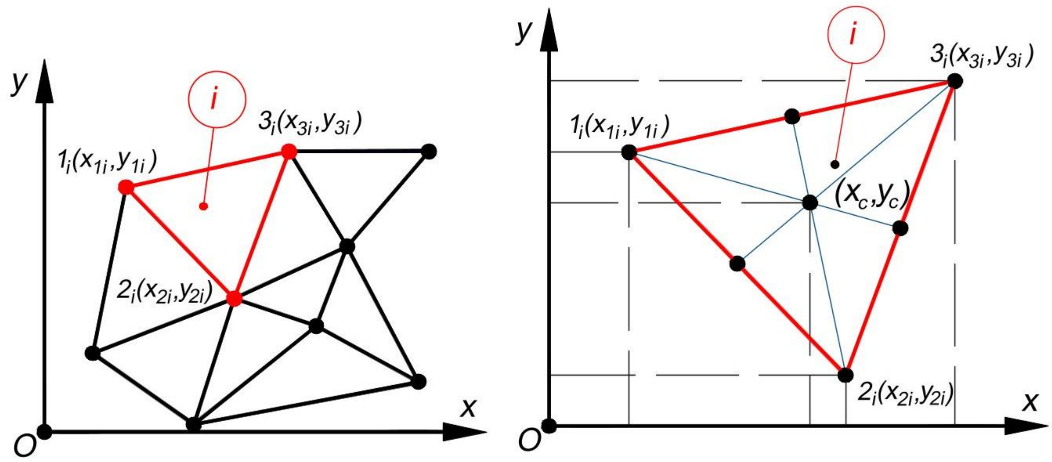


Fig.2.5.Discretizarea suprafeței complexe în elemente tip triunghi.

În cazul suprafețelor complexe (fig.2.5.) pentru determinarea caracteristicilor geometrice statice și inerțiale, se discretizează suprafața în triunghiuri și se determină caracteristicile, cu relațiile [2] :

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{xi}; I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}; I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xiyi};$$
$$I_x = I_{xCM} + Ay_{CM}^2;$$
$$I_{xCM} = I_x - Ay_{CM}^2; \tag{2.41}$$
$$I_y = I_{yCM} + Ax_{CM}^2;$$
$$I_{yCM} = I_y - Ax_{CM}^2;$$

$$I_{xy} = I_{xyCM} + Ax_{CM}^2 y_{CM}^2;$$

$$I_{xyCM} = I_{xy} - Ax_{CM}^2 y_{CM}^2;$$

unde,

-I_x, I_y, I_{xy} sunt momentele de inerție în raport cu sistemul de referință Oxy;

-$I_{xCM}, I_{yCM}, I_{xyCM}$ sunt momentele de inerție în raport cu axele paralele cu cele ale sistemului de referință Oxy care trece prin centrul de masa CM al suprafeței.

2.9.Echivalarea momentelor de inerție ale unei suprafețe plane complexe cu momentele de inerție ale unui dreptunghi cu același axe principale ca și suprafața complexă

Pentru modelarea rigidității laterale a unei structuri civile și pentru a determina orientarea elementelor de rezistență verticale (stâlpi, pereți structurali, tuburi) astfel încât fenomenul de torsiune să fie evitat, se poate utiliza echivalarea secțiunilor transversale complexe cu un dreptunghi echivalent. Acest tip de echivalare a fost utilizată în capitolul 1 al acestei lucrări.

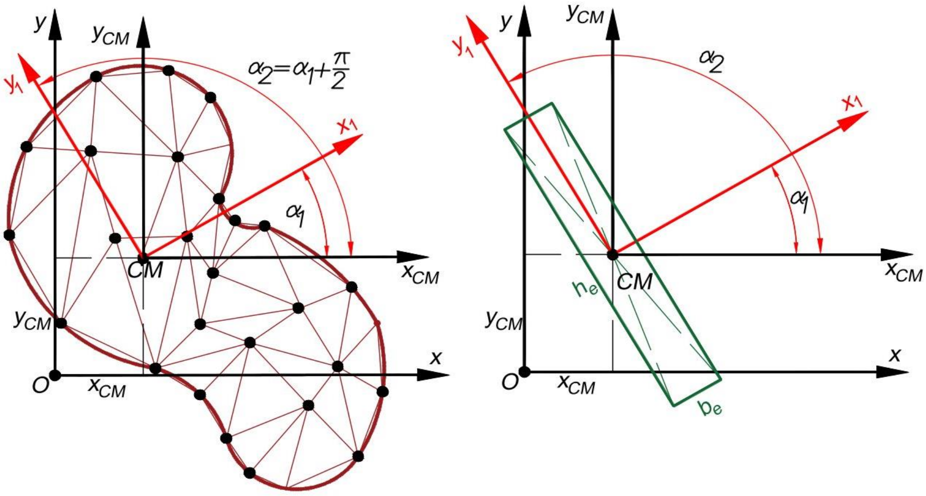


Fig.2.6. Echivalarea momentelor de inerție ale suprafețe cu momentele de inerție ale unui dreptunghi cu axele principale după direcțiile principale ale suprafeței.

Dacă momentele de inerție principale ale unei suprafețe complexe sunt I_1, I_2, atunci dimensiunile dreptunghiului echivalent (fig.2.6.) sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{b_e h_e^3}{12} = I_1 \\ \dfrac{h_e b_e^3}{12} = I_2 \end{cases}; b_e = \frac{12 I_1}{\left(\dfrac{12^2 I_1^3}{I_2}\right)^{\frac{3}{8}}}; h_e = \sqrt[8]{\frac{12^2 I_1^3}{I_2}}. \qquad (2.42)$$

Pentru determinarea dimensiunilor și a orientărilor dreptunghiului echivalent, pentru o suprafață complexă, în continuare este prezentat un program în cod Matlab [4].

```
%Determining the dimensions of the equivalent rectangle for a complex surface
syms  be he I1 I2
f=I1-be*he^3/12;
g=I2-he*be^3/12;s = solve(f,g);
```

```
disp('The dimensions of the equivalent rectangle he be =');
S = [s.he, s.be]
%Check results
v1=simplify((((144*I1^3)/I2)^(1/8))^3*(I2*((144*I1^3)/I2)^(5/8))/(12*I1^2)/12);
v2=simplify(((I2*((144*I1^3)/I2)^(5/8))/(12*I1^2))^3*(((144*I1^3)/I2)^(1/8))/12);
```

Ca exemple, sunt prezentate programele de calcul în Matlab [4] pentru determinarea momentelor de inerție pentru 6-șase suprafețe cu configurație complexă.

Fișierele script cu datele de intrare pentru suprafețele nucleu central, grinda, stâlp central, stâlp marginal, stâlp de colț și tablier sunt prezentate în tabelele 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 și 2.6.

<table>
<tr><td>Tabel 2.1</td><td>Fișier script cu datele intrare pentru nucleu central</td><td>Tabel 2,2</td><td>Fișier script cu datele intrare pentru grinda</td></tr>
<tr><td colspan="2">model = createpde;%Core analysis
S1 = [2;12;0;6;6;5.7;5.7,2.1;2.1;1.8;1.8;0.3;...
0.3;0;0;0;3;3;0.3;0.3;1.8;1.8;0.3;0.3;1.8;1.8];
S2 = [2;12;0.3;0.3;3.9;3.9;4.2;4.2;5.7;5.7;6;6;0...
0;3;5.7;5.7;4.2;4.2;5.7;5.7;4.2;4.2;6;6;3];
geom = [S1,S2];
ns = (char('S1','S2'))';sf = 'S1+S2';
gd =
decsg(geom,sf,ns);geometryFromEdges(model,gd);
generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hma
x',.3);
pdemesh(model);grid off;
hold on
%Extraction of discretization data
[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
%Determination of nodal coordinates
coordonate=p';
%Determination of triangle elements
elem=t(1:3,:)';</td><td colspan="2">model = createpde;%Beam analysis
T = [2;12 ;0.85;0.85;1.1;1.1;0;0;2.5;2.5;1.4....
1.4;1.65;1.65;0;0.55;0.8;2.4;2.4;2.8;2.8;2.4...
2.4;0.8;0.55;0];
geom = T;ns = (char('T'))';sf = 'T';
gd = decsg(geom,sf,ns);
geometryFromEdges(model,gd);
pdegplot(model,'EdgeLabels','on')
generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','H
max',.25);
pdemesh(model);figure;
pdemesh(model,'NodeLabels','on')
hold on;figure;
pdemesh(model,'ElementLabels','on');hold on;
figure;
pdemesh(model);hold on;
%Extraction of discretization data
[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
%Determination of nodal coordinates
coordonate=p';
%Determination of triangle elements
elem=t(1:3,:)';</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Tabel 2.3</td><td>Fișier script cu datele intrare pentru stâlp central</td><td>Tabel 2.4</td><td>Fișier script cu datele intrare pentru stâlp marginal</td></tr>
<tr><td colspan="2">model = createpde;%Central column analysis
R1 = [3,4,-0.75,0.75,0.75,-0.75,-0.75,...
-0.75,0.75,0.75]';
C1 = [1
0.1
0.1
0.3];
% Pad C1 with zeros to enable concatenation with
R1
C1 = [C1;zeros(length(R1)-length(C1),1)];
geom = [R1,C1];
ns = (char('R1','C1'))';
sf = 'R1-C1';
gd = decsg(geom,sf,ns);
geometryFromEdges(model,gd);
pdegplot(model,'EdgeLabels','on')
generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hma
x',.3);
pdemesh(model);
figure</td><td colspan="2">model = createpde; %Marginal column analysis
%Corner pillar analysis
%Create model
T = [2
6
0
2.4251
2.4251
0.3501
-0.5306
-1.0004
0
0
0.5
0.5
2.9197
2.7486];
geom = T;ns = (char('T'))';sf = 'T';
gd = decsg(geom,sf,ns);
geometryFromEdges(model,gd);</td></tr>
</table>

pdemesh(model,'NodeLabels','on')
hold on;
figure
pdemesh(model,'ElementLabels','on')
hold on;
figure;
pdemesh(model);
hold on
%Extraction of discretization data
[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
%Determination of nodal coordinates
coordonate=p';
%Determination of triangle elements
elem=t(1:3,:)';
	pdegplot(model,'EdgeLabels','on')
	generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hmax',.3);
	grid off;pdemesh(model);figure;
	pdemesh(model,'NodeLabels','on')
	hold on;figure;
	pdemesh(model,'ElementLabels','on')
	hold on;figure
	pdemesh(model);hold on
	%Extraction of discretization data
	[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
	%Determination of nodal coordinates
	coordonate=p';
	%Determination of triangle elements
	elem=t(1:3,:)';

Tabel 2.5	Fișier script cu datele intrare pentru stâlp de colț	Tabel 2.6	Fișier script cu datele intrare pentru tablier

model = createpde;%Corner column analysis
%Create model
T = [2
8
0
3.2251
3.2251
1.7893
2.7410
2.2083
1.2487
0
0
0
0.5
0.5
2.7557
2.9501
0.5
0.5];
geom = T;
ns = (char('T'))';
sf = 'T';gd = decsg(geom,sf,ns);
geometryFromEdges(model,gd);
pdegplot(model,'EdgeLabels','on')
generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hmax',.3);
grid off;
pdemesh(model);figure
pdemesh(model,'NodeLabels','on')
hold on
figure
pdemesh(model,'ElementLabels','on')
hold on;figure;
pdemesh(model);hold on
%Extraction of discretization data
[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
%Determination of nodal coordinates
coordonate=p';
%Determination of triangle elements
elem=t(1:3,:)';
		model = createpde;% bridge beam analysis
		%Create model
		S1 = [2;8;0;9;9;8;7.13;1.86;1;0;2.4;2.4;2;2;0...
		0;2;2];
		S2 = [2;4;1.43;4.3;4.3;2.13;2;2;0.4;0.4];
		S3 = [2
		4
		4.7
		7.56
		6.86
		4.7
		2
		2
		0.4
		0.4];
		S2 = [S2;zeros(length(S1)-length(S2),1)];
		S3 = [S3;zeros(length(S1)-length(S3),1)];
		geom = [S1,S2,S3];
		ns = (char('S1','S2','S3'))';sf = 'S1-S2-S3';
		gd = decsg(geom,sf,ns);
		geometryFromEdges(model,gd);
		pdegplot(model,'EdgeLabels','on')
		generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hmax',.3);
		grid off
		pdemesh(model)
		figure
		pdemesh(model,'NodeLabels','on')
		hold on
		figure
		pdemesh(model,'ElementLabels','on')
		hold on
		figure
		pdemesh(model)
		hold on
		%Extraction of discretization data
		[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
		%Determination of nodal coordinates
		coordonate=p';
		%Determination of triangle elements
		elem=t(1:3,:)';	

Programul principal în cod Matlab [4] pentru calculul tensorului de inerție la suprafețe complexe este:

```
clear;clf;clc;
%Determination of the center of mass
nnd=length(coordonate(:,1));
x=coordonate(1:nnd,1) ;y=coordonate(1:nnd,2);nod=[x y];
%Determining the number of elements and nodes
nelem=length(elem(:,1)); nnod=length(nod(:,1));
%Surface area initialization,coordinate center of mass
As=0;sumacgx=0;sumacgy=0;sumaix=0;sumaiy=0;sumaixy=0;
%Calculation of area and center of mass
for i=1 :nelem
nod1=elem(i,1);nod2=elem(i,2);nod3=elem(i,3);
A=abs(det([1 x(nod1) y(nod1)
           1 x(nod2) y(nod2)
           1 x(nod3) y(nod3)]))/2;
As=As+A;
% Calculation of the local coordinates of the center of mass for each surface element
xx=nod(:,1);yy=nod(:,2);
xgl=(xx(elem(i,1))+xx(elem(i,2))+xx(elem(i,3)))/3;ygl=(yy(elem(i,1))+yy(elem(i,2))+yy(elem(i,3)))/3;
Ix=A/6*(yy(elem(i,1))*(yy(elem(i,1))+yy(elem(i,2)))+yy(elem(i,2))*(yy(elem(i,2))+yy(elem(i,3)))+yy(elem(i,3
))*(yy(elem(i,3))+yy(elem(i,1))));
Iy=A/6*(xx(elem(i,1))*(xx(elem(i,1))+xx(elem(i,2)))+xx(elem(i,2))*(xx(elem(i,2))+xx(elem(i,3)))+xx(elem(i,3
))*(xx(elem(i,3))+xx(elem(i,1))));
Ixy=A/12*((xx(elem(i,1))+xx(elem(i,2)))*(yy(elem(i,1))+yy(elem(i,2)))+(xx(elem(i,2))+xx(elem(i,3)))*(yy(ele
m(i,2))+yy(elem(i,3)))+(xx(elem(i,3))+xx(elem(i,1)))*(yy(elem(i,3))+yy(elem(i,1))));
sumacgx=sumacgx+A*xgl;
sumacgy=sumacgy+A*ygl;sumaix=sumaix+Ix;sumaiy=sumaiy+Iy;sumaixy=sumaixy+Ixy;
end
% Center of mass coordinates
xg=sumacgx/As;yg=sumacgy/As;
% Axial moments of inertia in relation to the central reference system
Ixg=sumaix-As*yg^2;Iyg=sumaiy-As*xg^2;
% Centrifugal moment of inertia in relation to the central reference system
Ixyg=sumaixy-As*yg*xg;
% The main moments of inertia
I1=(Ixg+Iyg)/2+sqrt(((Ixg-Iyg)/2)^2+Ixyg^2);I2=(Ixg+Iyg)/2-sqrt(((Ixg-Iyg)/2)^2+Ixyg^2);
% Main directions
if (abs(Ixyg)<10^(-10))
alfa1=0;alfa2=90;
else
alfa1=0.5*atan((-2*Ixyg)/(Ixg-Iyg))*180/pi;alfa2=alfa1+90;
% Values directly in degrees
alfa11=0.5*atand((-2*Ixyg)/(Ixg-Iyg));alfa22=alfa1+90;
end
%Main radii of inertia
i1=sqrt(I1/As);i2=sqrt(I2/As);
%Determining the number of elements and the number of nodes
nel=length(elem(:,1));nnd=length(nod(:,1));
%Transfer node coordinates to xn and yn vectors
xn=nod(:,1);yn=nod(:,2);
%Attaching nodes nod1 nod2 and nod3 from the element matrix
for i=1:nel
nod1=elem(i,1);nod2=elem(i,2);nod3=elem(i,3);
end
hold on;
%Representation of discretized structure geometry
for j=1:nel
%Drawing the discretized structure
```

```
xn12=[xn(elem(j,1)) xn(elem(j,2))];yn12=[yn(elem(j,1)) yn(elem(j,2)) ];
xn23=[xn(elem(j,2)) xn(elem(j,3))];yn23=[yn(elem(j,2)) yn(elem(j,3)) ];
xn31=[xn(elem(j,3)) xn(elem(j,1))];yn31=[yn(elem(j,3)) yn(elem(j,1)) ];
plot(xn12,yn12,'k');plot(xn23,yn23,'k');plot(xn31,yn31,'k');hold on;
%Representation of the node number and the element
xde=[xn(elem(j,1)) xn(elem(j,2)) xn(elem(j,3))];yde=[yn(elem(j,1)) yn(elem(j,2)) yn(elem(j,3))];
%Calculation of the center of mass of the triangle
xe=(xde(1)+xde(2)+xde(3))/3;
ye=(yde(1)+yde(2)+yde(3))/3;
end
%Representation of the center of mass
plot(xg,yg,'--mo') ;hold on
%Scalar factor reference system
s=1.5;
%Drawing the central reference system in C.M.
XGN=[xg xg+s*1    xg xg   ];hold on;YGN=[yg   yg       yg  yg+s*1  ];hold on;
%Drawing the main central reference system in C.M.
XGR=[xg  xg+cos(alfa1*pi/180)*s     xg  xg-sin(alfa1*pi/180)*s   ];hold on;
YGR=[yg   yg+sin(alfa1*pi/180)*s      yg  yg+cos(alfa1*pi/180)*s  ];hold on;
plot(XGN,YGN,'r','linewidth',2);plot(XGR,YGR,'b','linewidth',2);hold on;
%Draw the ellipse of inertia
%Ellipse rotation angle
alfa=alfa1*pi/180;
t = (1/100:1/500:1)'*2.1*pi;
%The parametric equation of the ellipse
x=i2*cos(t);y=i1*sin(t);
%Rotated ellipse
xr=xg+(x*cos(alfa)-y*sin(alfa));yr=yg+(x*sin(alfa)+y*cos(alfa));
plot(xr,yr,'r','LineWidth',2);hold on;plot(xg,yg,'ko','LineWidth',2);hold on;
title('The surface for which the geometric characteristics are calculated ')
fprintf('Coordinates of the center of mass x y(m)\n'); fprintf ('%4.8f   %4.8f\n',xg,yg);
fprintf('Area(m^2)\n'); fprintf ('%4.8f\n',As);
fprintf('Axial moments of inertia Ixg Iyg (m^4)\n'); fprintf ('%4.8f   %4.8f\n  %4.8f\n',Ixg,Iyg);
fprintf('Centrifugal moment of inertia  Ixy(m^4)\n'); fprintf ('%4.8f\n',Ixyg);
fprintf('The main moments of inertia  I1 I2 (m^4)\n'); fprintf ('%4.8f   %4.8f\n  %4.8f\n',I1,I2);
fprintf('Main directions 1 and 2(degree)\n'); fprintf ('%4.8f   %4.8f\n  %4.8f\n',alfa1,alfa2);
fprintf('The main radii of inertia 1 and 2(m)\n'); fprintf ('%4.8f   %4.8f\n  %4.8f\n',i1,i2);
if tan(alfa1*pi/180)/Ixyg<0&&(abs(Ixyg)>10^(-10))
fprintf('The direction in which the moment of inertia is maximum (degree)\n'); fprintf ('%4.8f\n',alfa1);
fprintf('Maximum and minimum moments of inertia  Imax Imin (m^4)\n'); fprintf ('%4.8f     %4.8f\n
%4.8f\n',max(I1,I2),min(I1,I2));
elseif tan(alfa2*pi/180)/Ixyg<0&&(abs(Ixyg)>10^(-10))
fprintf('The direction in which the moment of inertia is maximum (degree)\n'); fprintf ('%4.8f\n',alfa2);
fprintf('Maximum and minimum moments of inertia  Imax Imin (m^4)\n'); fprintf ('%4.8f     %4.8f\n
%4.8f\n',max(I1,I2),min(I1,I2));
end
he=(12^2*max(I1,I2)^3/min(I1,I2))^(1/8);be=12*max(I1,I2)/(12^2*max(I1,I2)^3/min(I1,I2))^(3/8);
fprintf('Equivalent rectangle height and width h,b(m)\n'); fprintf ('%4.8f   %4.8f\n  %4.8f\n',he,be);
%Plot echivalent rectangle
Dreptunghi_e=[-be/2,be/2,be/2,-be/2,-be/2;-he/2,-he/2,he/2,he/2,-he/2; 1 1 1 1 1 ];
% Define Translation Matrix
trans = @(x,y,z) repmat([x; y; z],[1 5]);
% Define Rotation Matrix
rot_plan = @(x, y, theta) [
cosd(theta), -sind(theta), x;
sind(theta), cosd(theta), y;
            0,        0,           1];
%Rotate and translate rectangle
B = rot_plan(0,0,alfa1) * ((Dreptunghi_e))+trans(xg,yg,0);
% Plot rotate and translate rectangle
```

plot(B(1,:),B(2,:),'b','LineWidth',4);hold on;

Rezultatele obținute în urma rulării programelor în cod Matlab sunt prezentate în figurile 2.7-2.12.

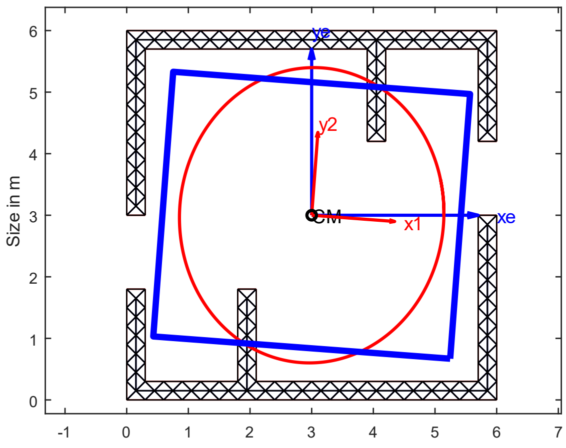


Fig.2.7. Nucleu central.

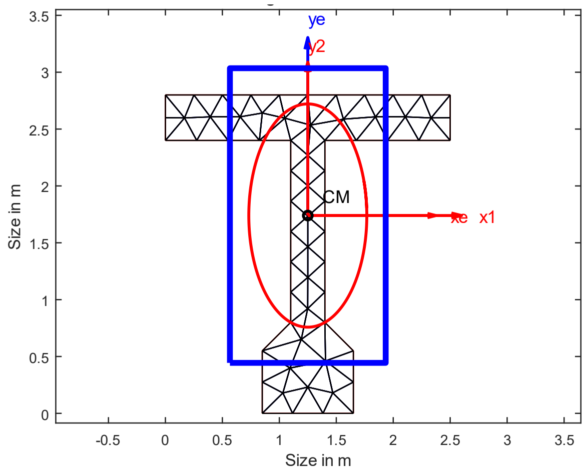


Fig.2.8. Grindă.

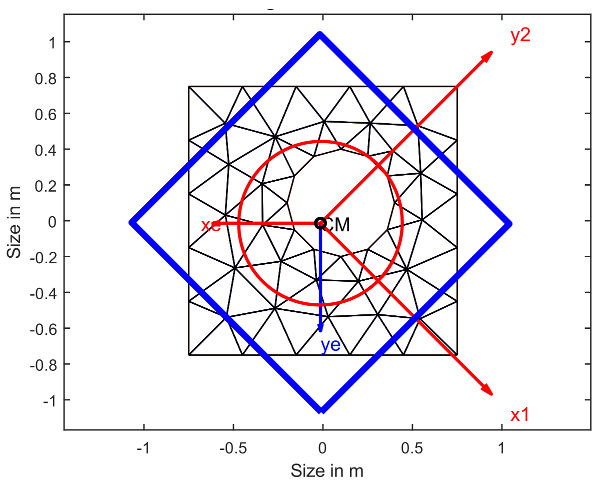


Fig.2.9.Stâlp central.

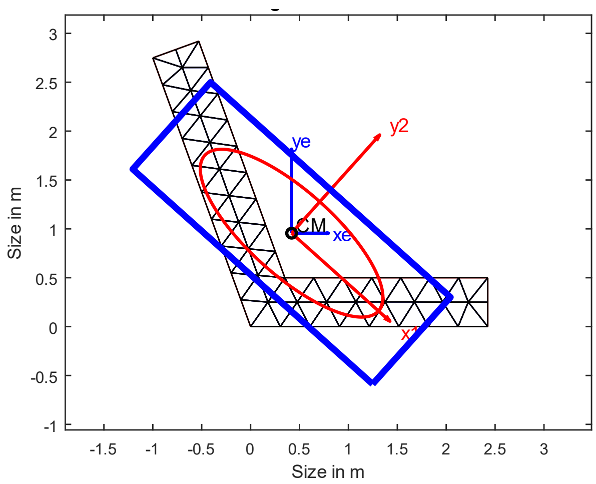


Fig.2.10.Stâlp de colț.

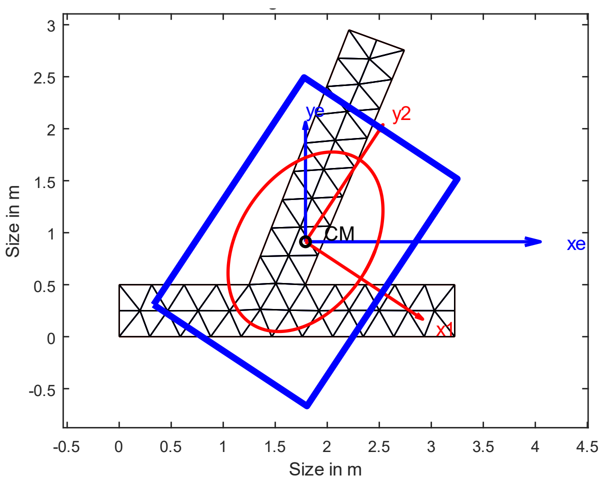


Fig.2.11. Stâlp marginal.

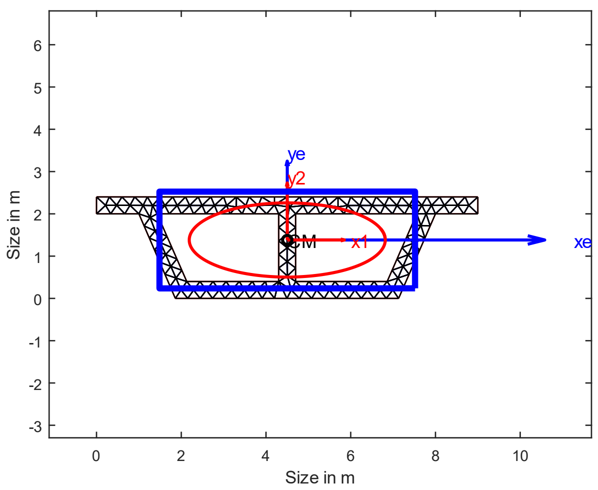


Fig.2.12.Tablier.

Validarea programului de calcul a caracteristicilor geometrice statice și inerțiale a fost realizată prin compararea soluțiilor numerice cu soluțiile analitice în cazul unei suprafețe de tip dreptunghiulare și a unei suprafețe de tip triunghiulare. Soluțiile analitice în cazul celor două suprafețe vor fi prezentate în continuare.

Momentele de inerție geometrice pentru o placă omogenă având forma dreptunghiulară, față de sistemul de referință xOy au expresiile (fig.2.13.):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_A y^2 dA = \int_0^b dx \int_0^h y^2\, dy = \frac{bh^3}{3}; \\ I_{yy} &= \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \int_0^h dy = \frac{b^3 h}{3}; \\ I_{xy} &= \int_A xy dA = \int_0^b x dx \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

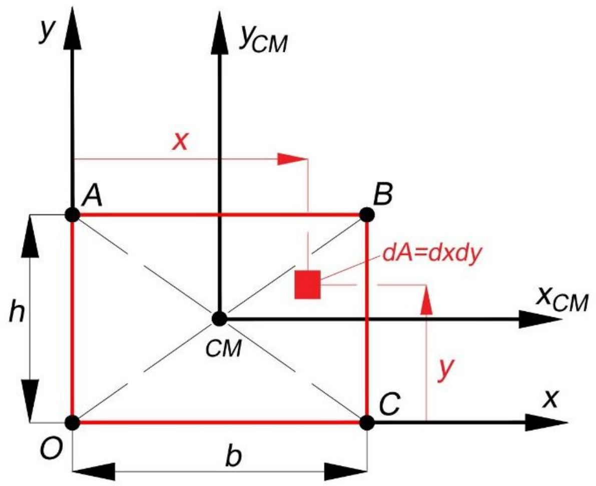


Fig.2.13. Dreptunghi.

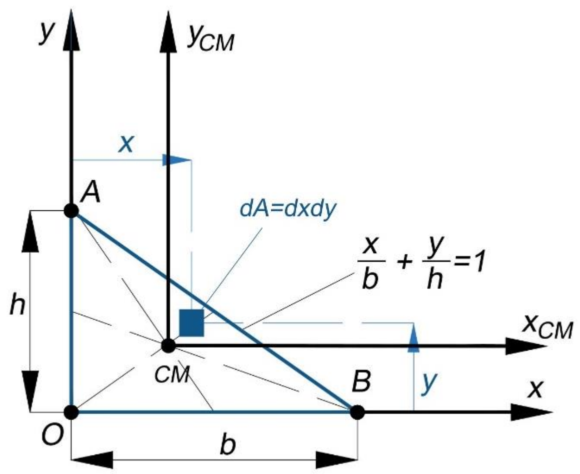


Fig.2.14. Triunghi.

Momentele de inerție mecanice pentru o placă omogenă de formă dreptunghiulară, față de sistemul de referință xOy au expresiile:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \rho t dA = \frac{M}{A}\int_A y^2 dA = \frac{M}{bh}\frac{bh^3}{3} = \frac{Mh^2}{3}; \\ J_{yy} &= \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \rho t dA = \frac{M}{A}\int_A x^2 dA = \frac{M}{bh}\frac{hb^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}; \\ J_{xy} &= \int_A xy dm = \int_A xy \rho t dA = \frac{M}{A}\int_A xy dA = \frac{M}{bh}\frac{b^2h^2}{4} = \frac{Mbh}{4}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

unde t este grosimea constantă a plăcii și $M/A = \rho t$.

Momentele de inerție geometrice pentru o placă omogenă de formă dreptunghiulară, față de sistemul de referință $x_{CM}Oy_{CM}$ se determină prin utilizarea relațiilor Huygens-Steiner și au expresiile:

$$I_{xxcm} = I_{xx} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12};$$
$$I_{yycm} = I_{yy} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12}; \tag{2.45}$$
$$I_{xycm} = I_{xy} - \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) bh = \frac{b^2h^2}{4} - \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) bh = 0.$$

Momentele de inerție mecanice pentru o placă omogenă de formă dreptunghiulară, față de sistemul de referință $x_{CM}Oy_{CM}$ au expresiile:

$$J_{xxcm} = \frac{M}{A} I_{xxcm} = \frac{M}{bh}\frac{hb^3}{12} = \frac{Mh^2}{12};$$
$$J_{yycm} = \frac{M}{A} I_{yycm} = \frac{M}{bh}\frac{hb^3}{12} = \frac{Mb^2}{12}; \tag{2.46}$$
$$J_{xycm} = 0.$$

Momentele de inerție geometrice pentru o placă omogenă având forma triunghiulară (fig.2.14.), față de sistemul de referință xOy au expresiile:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1;$$
$$x = b - \frac{b}{h} y;$$
$$y = h - \frac{h}{b} x - \text{ecuația dreptei AB în triunghiului OAB (fig. 2.14):}$$
$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2\, dy \int_0^{b-\frac{by}{h}} dx = \int_0^h y^2 \left(b - \frac{b}{h} y\right) dy = \frac{bh^3}{12}; \tag{2.47}$$
$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \int_0^{h-\frac{hx}{b}} dy = \int_0^b x^2 \left(h - \frac{h}{b} x\right) dx = \frac{hb^3}{12};$$
$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^b x dx \int_0^{h-\frac{hx}{b}} y dy = \frac{1}{2}\int_0^b x \left(h - \frac{h}{b} x\right)^2 dx = \frac{h^2b^2}{24}.$$

Momentele de inerție mecanice pentru o placă omogenă, triunghiulară, față de sistemul de referință xOy au expresiile:

$$J_{xx} = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \rho t dA = \frac{M}{A}\int_A y^2 dA = \frac{2M}{bh}\frac{bh^3}{12} = \frac{Mh^2}{6};$$
$$J_{yy} = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \rho t dA = \frac{M}{A}\int_A x^2 dA = \frac{2M}{bh}\frac{hb^3}{3} = \frac{Mb^2}{6}; \quad (2.48)$$
$$J_{xy} = \int_A xy dm = \int_A xy \rho t dA = \frac{M}{A}\int_A xy dA = \frac{2M}{bh}\frac{h^2b^2}{24} = \frac{Mbh}{12};$$

unde t este grosimea plăcii și $M/A = \rho t$.

Momentele de inerție geometrice pentru o placă omogenă, triunghiulară,față de sistemul de referință $x_{CM}Oy_{CM}$ se determină prin utilizarea relațiilor Huygens-Steiner și au expresiile:

$$I_{xxcm} = I_{xx} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{36};$$
$$I_{yycm} = I_{yy} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{hb^3}{36}; \quad (2.49)$$
$$I_{xycm} = I_{xy} - \left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\frac{1}{2}bh = \frac{h^2b^2}{24} - \left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\frac{1}{2}bh = \frac{-h^2b^2}{72}.$$

Momentele de inerție mecanice pentru o placă omogenă, triunghiulară, față de sistemul de referință $x_{CM}Oy_{CM}$ au expresiile:

$$J_{xxcm} = \frac{M}{A}I_{xxcm} = \frac{2M}{bh}\frac{bh^3}{36} = \frac{Mh^2}{18};$$
$$J_{yycm} = \frac{M}{A}I_{yycm} = \frac{2M}{bh}\frac{hb^3}{26} = \frac{Mb^2}{18}; \quad (2.50)$$
$$J_{xycm} = \frac{-2M}{bh}\frac{h^2b^2}{72} = \frac{-Mbh}{36}.$$

În continuare sunt prezentate programele de calcul simbolic în Matlab pentru determinarea analitică a momentelor de inerție geometrice și mecanice pentru un dreptunghi și un triunghi față de sistemul de referință xOy.

```
clear
syms x y b h Ar At  M Ix Iy Iyx
% Analytical determination of geometric and mass moments of inertia for a rectangle
Ar=b*h;
fxxr=simplify(y^2);
fyyr=simplify(x^2);
fxyr=simplify(x*y);
Ixxr=simplify(simplify(int((int(fxxr,y,0,h)),x,0,b)),'Step',10);
Iyyr=simplify(simplify(int((int(fyyr,y,0,h)),x,0,b)),'Step',10);
Ixyr=simplify(simplify(int((int(fxyr,y,0,h)),x,0,b)),'Step',10);
Jxxr=simplify(M/Ar*Ixxr);
```

```
Jyyr=simplify(M/Ar*Iyyr);
Jxyr=simplify(M/Ar*Ixyr);
disp('Geometric and mass moment for a rectangle');
disp('Geometric moment of inertia Ixxr by integration =');
pretty(Ixxr);
disp('Geometric moment of inertia Iyyr by integration =');
pretty(Iyyr);
disp('Geometric moment of inertia Ixy by integration =');
pretty(Ixyr);
disp('The moment of mass inertia Jxxr =');
pretty(Jxxr);
disp('The moment of mass inertia Jyyr =');
pretty(Jyyr);
disp('The moment of mass inertia Jxyr =');
pretty(Jxyr);
% Analytical determination of geometric and mass moments of inertia for a triangle
At=1/2*b*h;
fxxt=simplify(y^2);
fyyt=simplify(x^2);
fxyt=simplify(x*y);
Ixxt=simplify(int(int(fxxr,x,0,b-b*y/h),y,0,h),'Step',10);
Iyyt=simplify(int(int(fyyr,x,0,b-b*y/h),y,0,h),'Step',10);
Ixyt=simplify(int(int(fxyr,x,0,b-b*y/h),y,0,h),'Step',10);
Jxxt=simplify(M/At*Ixxt);
Jyyt=simplify(M/At*Iyyt);
Jxyt=simplify(M/At*Ixyt);
disp('Geometric and mass moment for a triangle');
disp('Geometric moment of inertia Ixxt by integration =');
pretty(Ixxt);
```

2.10.Calculul momentelor de inerție ale suprafețelor plane complexe cu metoda probabilistică Monte Carlo

În cazul unui sistem de n mase concentrate situate în același plan tensorul momentelor de inerție mecanice se determină plecând de la relațiile de definiție ale momentelor de inerție mecanice.

-momentele de inerție mecanice axiale în raport cu axele x și y:

$$J_{xx} = \int_A y^2 dm = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \, ; J_{yy} = \int_A x^2 dm = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2. \quad (2.51)$$

-momentul de inerție mecanic centrifugal:

$$J_{xy} = \int_A xydm = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \, y_i. \quad (2.52)$$

-momentul de inerție mecanic polar:

$$J_p = J_{xx} + J_{yy} = \int_A y^2 dm + \int_A x^2 dm = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \, . \quad (2.53)$$

Tensorul de inerție sub formă matriceală devine:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

În mod asemănător se determină tensorul momentelor de inerție geometrice care sub formă matriceală este:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_i y_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\, y_i \\ -\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Relația matriceală dintre momentele de inerție mecanice și momentele de inerție geometrice în cazul sistemului format din *n* mase concentrate este:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2; & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \end{bmatrix} = \rho t \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_i y_i^2; & -\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\, y_i \\ -\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^2 \end{bmatrix} = \rho t[I]; \quad (2.56)$$

$$[J] = \rho t[I].$$

unde, $A_i = m_i(\rho t)^{-1}$, $\rho t = ct$.

Mai jos este prezentat un program de calcul pentru determinarea tensorului de inerție mecanic pentru un sistem de 7-șapte mase concentrate. Evident, programul poate fi extins pentru calculul unui sistem cu un număr n finit de mase concentrate situate în același plan.

```
clc;clear ;
n=6;%number of masses
m_p = [300,60,80,200,450,633,443];
xc = [1   2  3 7  -2 -3 8];  yc = [0.5 1 -2 4  -9  -2 3];
grid on;hold on;
%Representation of point masses
scatter(xc,yc,m_p,'MarkerEdgeColor',[0 0 0],'MarkerFaceColor',[1 0 0],'LineWidth',2);hold on;
m_total = sum(m_p);           % The total mass of this system
% Two components of the position vector of the center of mass are
xcm =(1/m_total)*sum(m_p.*xc); ycm =(1/m_total)*sum(m_p.*yc);
%Mass center representation
scatter(xcm,ycm,m_total,'MarkerEdgeColor',[0 0 0],'MarkerFaceColor',[0 0 1],'LineWidth',2)
hold on;
I = [0.0,0.0;
     0.0,0.0;];
```

```
% The total moment of inertia is the sum of moments of inertia for all
% point masses in the system
for i =1:n
   x = (xc(i) - xcm);
   y = (yc(i) - ycm);m = m_p(i);
   I = I + [  m*(y^2 + x^2),        -m*x*y;
              -m*y*x,             m*(x^2 + y^2)];% [kg*m^2]
end
```

Rezultatul obținut în urma rulării programului Matlab este prezentat în figura 2.15.

Pornind de la calculul momentelor de inerție mecanice și geometrice pentru un sistem de n mase concentrate se poate explica calculul tensorului de inerție geometric și mecanic cu metoda Monte Carlo [5].

Pentru calculul momentelor de inerție pentru suprafețe plane cu metoda Monte Carlo se generează aleatoriu în domeniul delimitat de suprafața plană, mase care se determina astfel:

$$dm = \frac{M}{N}; \qquad (2.57)$$

unde, N este numărul de mase generat aleatoriu in domeniul de definiție al suprafeței pentru care se determina tensorul de inerție, iar M este masa totală a suprafeței.

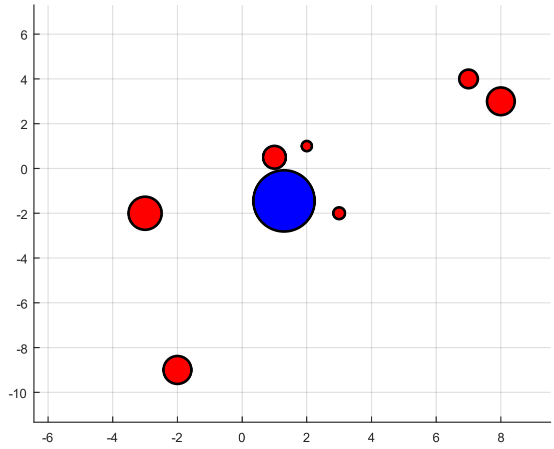


Fig.2.15.Momentele de inerție în cazul maselor concentrate distribuite în plan.

Cu cât numărul N de mase generat este mai mare, rezultatul tinde către valoarea exactă. Relațiile de calcul ale tensorului de inerție geometric și mecanic devin:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} dmy_i^2; & -\sum_{i=1}^{N} dmx_i\, y_i \\ -\sum_{i=1}^{N} dmx_i\, y_i & \sum_{i=1}^{N} dmx_i^2; \end{bmatrix}; \mathrm{dm} = \frac{M}{N}; (x_i y_i)\epsilon A; \qquad (2.58)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} dAy_i^2; & -\sum_{i=1}^{N} dA\, y_i \\ -\sum_{i=1}^{N} dAx_i\, y_i & \sum_{i=1}^{N} dAx_i^2; \end{bmatrix}; \mathrm{d}A = \frac{A}{N}; (x_i y_i)\epsilon A.$$

unde $(x_i y_i)\epsilon A$, A fiind domeniul delimitat de suprafața pentru care se determină termenii tensorului de inerție.

Pentru determinarea momentelor de inerție cu metoda Monte Carlo pentru un dreptunghi a fost utilizat programul Matlab [5] [4] de mai jos:

```
clear;mass_of_square=1;length_side=3;number_of_mass=700;%number of infinitesimal masses
dm=mass_of_square/number_of_mass;
Axial_inertia_xx=0;Axial_inertia_yy=0;Centrifugal_inertia_xy=0;count=0;
while n<number_of_mass
x_pos=length_side*rand;y_pos=length_side*rand;
scatter(x_pos,y_pos,20,'MarkerEdgeColor',[0 0 0],'MarkerFaceColor',[1 0 0],'LineWidth',2);
hold on;rtemp=[x_pos y_pos];
Axial_inertia_xx=Axial_inertia_xx+dm*(y_pos^2);Axial_inertia_yy=Axial_inertia_yy+dm*(x_pos^2);
Centrifugal_inertia_xy=Centrifugal_inertia_xy-dm*(x_pos*y_pos);
count=count+1;end
%Theoretical values of moment of inertia
Ixxt=1/3*mass_of_square*length_side^2;Iyyt=1/3*mass_of_square*length_side^2;
Ixyt=-mass_of_square*length_side^2/4;
```

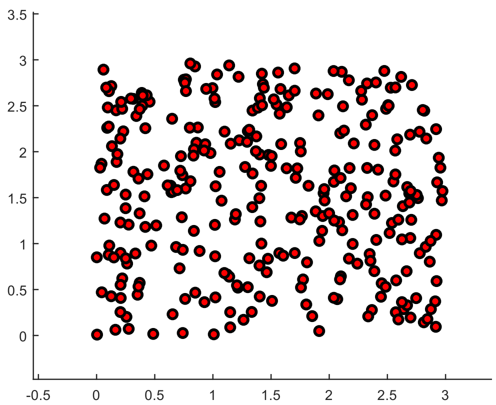


Fig.2.16.Generarea a 300 de mase.

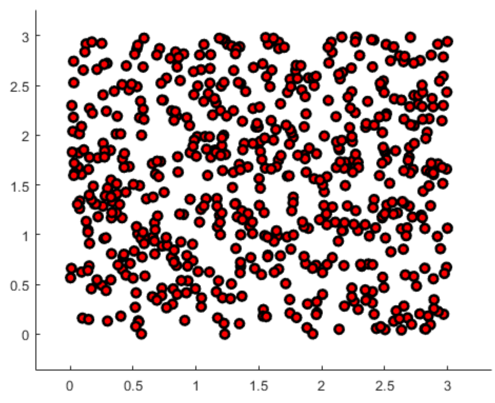


Fig.2.17.Generarea a 600 de mase.

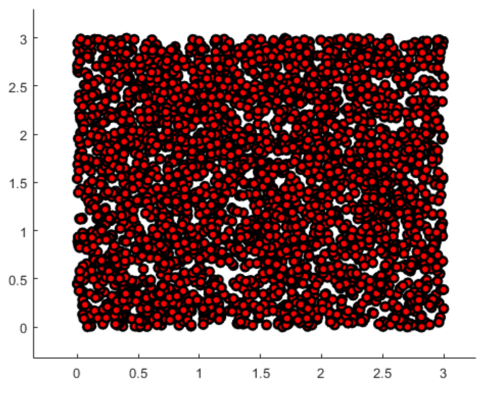


Fig.2.18.Generarea a 3000 de mase.

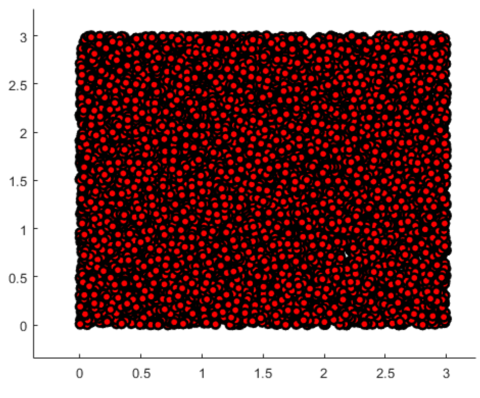


Fig.2.19.Generarea a 10000 de mase.

În figura 2.16, figura 2.17, figura 2.18 și figura 2.19 sunt prezentate rezultatele obținute prin generarea de 300, 600, 3000 și 10000 de mase în domeniul de definiție al suprafeței pătratului.

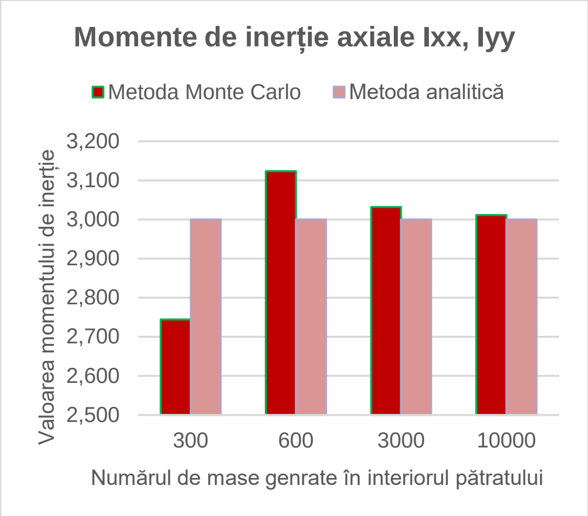


Fig.3.20.a.Momente inerție axiale.

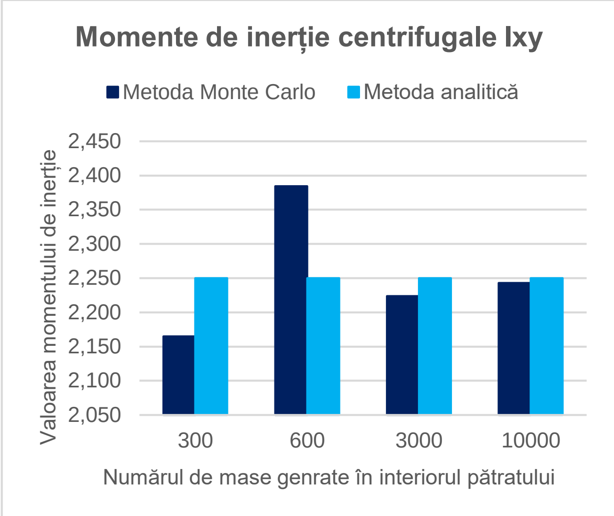


Fig.3.20.b.Momente de inerție centrifugale.

2.11.Rezultate și concluzii

• Algoritmul numeric pentru calculul caracteristicilor geometrice masice și inerțiale ale suprafețelor complexe are un grad mare de generalitate, aplicându-se pentru orice tip de suprafață. În cazul în care suprafața este delimitată de frontiere tip linii drepte, atunci rezultatele sunt exacte. În cazul suprafețelor complexe cu frontierele de tip linii curbe, rezultatele depind de numărul elementelor finite triunghiulare, în care este discretizată structura. Algoritmul este validat prin rezultatele teoretice obținute în cazul suprafețelor având formă dreptunghiulară și triunghiulară.

• Echivalarea momentelor de inerție ale unei suprafețe complexe cu momentele de inerție ale unui dreptunghi axele principale de inerție orientate după direcțiile principale de inerție a suprafeței complexe, se poate utiliza pentru echivalarea rigidității laterale a elementelor verticale de rezistență a unei structuri civile. Acest rezultat a fost utilizat în capitolul 1 al acestei lucrări, care tratează eliminarea torsiunii generale structurilor civile;

• Deoarece metoda Monte Carlo este o metodă probabilistică rezultă că valorile rezultate în urma calculării componentelor tensorului de inerție au un caracter probabilistic;

• Variația probabilistică a componentelor tensorului de inerție pentru o suprafață având formă pătratică este prezentată în fig.3.20.a,și 3.20.b., pentru diferite valori ale maselor generate în interiorul suprafeței pătratice. Din analiza graficelor rezultă că prin generarea unui număr mare de mase distribuția lor se uniformizează iar valorile probabilistice se apropie de valorile analitice.

• Metoda Monte Carlo se poate utiliza pentru calculul tensorului de inerție în cazul suprafețelor complexe, sau pentru validarea calculului numeric al tensorului de inerție al suprafeței respective.

Principalele contribuții ale autorului în cadrul acestui capitol sunt:

• Dezvoltarea unei metode numerice generale de determinarea a caracteristicilor geometrice, masice și inerțiale pentru suprafețe cu configurație complexă. Pentru această metodă a fost realizat un algoritm de calcul care a fost implementat în programul Matlab.

• Programele de calcul a caracteristicilor geometrice masice și inerțiale ale suprafețelor plane complexe, au fost validate analitic și au fost testate în cazul unor suprafețe cu geometrie complexă.

• Realizarea unui algoritm de calcul pentru echivalarea momentelor de inerție ale unei suprafețe plane cu configurație complexă, cu momentele de inerție ale unui dreptunghi care are axele principale de inerție orientate după direcțiile principale ale suprafeței plane cu configurație complexă. Această echivalare se utilizează la modelul matematic prezentat în capitolul 1.

• Implementarea în programul Matlab a unui algoritm pentru calcul pentru tensorul momentelor de inerție pentru un sistem de n mase concentrate situate în același plan.

• Dezvoltarea unui algoritm de calcul pentru tensorul de inerție al suprafețelor plane cu configurație complexă cu metoda probabilistică Monte Carlo. Acest algoritm a fost implementat în programul Matlab și validat în cazul suprafețelor simple care au soluții analitice.

Bibliografie

[1] R. Mott și J. Untener, Applied Strength of Materials, CRC Press; 7th edition, 2021.

[2] X. L. Chen, D. Li și I. Zhang, „Research on geometric properties of arbitrary beam sections," *2nd International Conference on Manufacturing Technologies ,* vol. 398, nr. 1, 19-21 01 2018.

[3] F. Tonon, „Explicit Exact Formulas for the 3-D Tetrahedron Inertia Tensor in Terms of its Vertex Coordinates," *Journal of Mathematics and Statistics,* vol. 1, nr. 1, pp. 8-11, 2004.

[4] „MathWorks Inc. MATLAB. Math. Graphics. Programming.," [Interactiv]. Available: https://www.mathworks.com/ products/matlab.html. [Accesat 23 07 2022].

[5] M. Botiș și C. Pleșcan, „Matlab Program for Determining the Inertia Characteristics of Flat Surfaces with Monte Carlo Algorithms," *THE ANNALS OF "DUNAREA DE JOS" UNIVERSITY OF GALATI,* pp. 22-26, Iunie 2022.

3. Studiul algoritmilor numerici și algoritmilor probabilistici tip Monte Carlo pentru determinarea volumului, masei, momentelor statice, centrului de masă și tensorului de inerție al maselor pentru corpuri cu configurație complexă

3.1.Introducere

Masa unui corp este acea proprietate a corpului de a se opune accelerației pe care rezultanta sistemului de forțe exterioare care acționează asupra lui, o imprimă corpului. Similar, momentul de inerție este cel care se opune accelerației unghiulare imprimate corpului de rezultanta momentului exterior care acționează asupra lui. Pentru a studia mișcarea generală a unui corp solid rigid sub acțiunea forțelor exterioare se folosesc legile de conservare a mișcării materiei care vor fi prezentate în continuare pentru a explica necesitatea calculului volumului, masei, momentelor statice, centrului de masă și tensorului de inerție în cazul corpurilor tridimensionale cu configurație complexă. Masa, centrul de masă și momentele statice intervin la calculul impulsului unui sistem de puncte materiale sau a solidului rigid. De asemenea aceste caracteristici intervin la aplicarea teoremei de variație a impulsului sau de conservare a impulsului când se determină torsorul forțelor care acționează asupra corpului dacă se cunoaște legea de mișcare a corpului sau invers [1].

Impulsul unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) față de un reper inerțial fix $Ox_iy_iz_i$ (S.R.I.- sistem de referință inerțial)

Impulsul unui sistem de mase cu masele m_i i=1...n (fig.3.1.), este egal cu suma impulsurilor punctelor materiale care alcătuiesc sistemul.

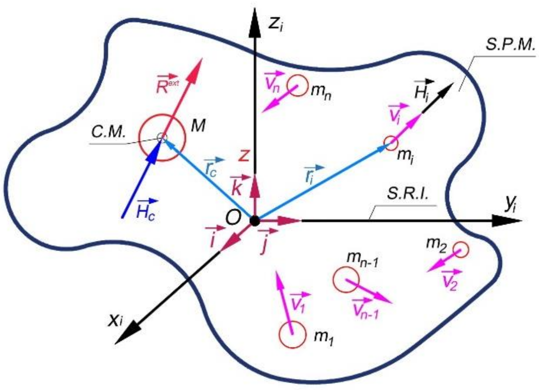


Fig.3.1. Impulsul sistem puncte materiale.

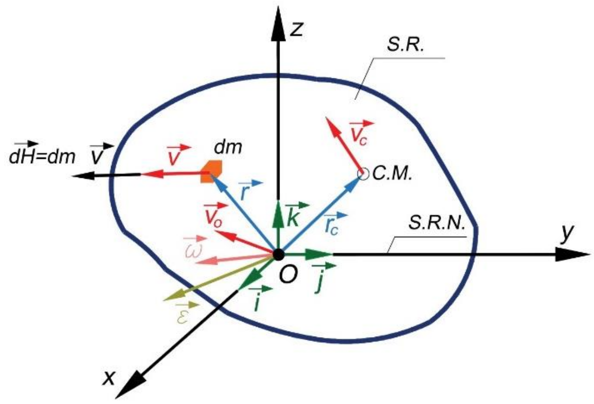


Fig.3.2.Impulsul corp rigid.

$$\overrightarrow{H_o} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{H_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i} = \frac{d}{dt} M\overrightarrow{r_C} = M\frac{d\overrightarrow{r_C}}{dt} = M\vec{v}_C;$$

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\vec{S}}{M}; \vec{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i}; M = \sum_{i=1}^{n} m_i; \vec{S} = M\overrightarrow{r_C} = Mx_C\vec{\imath} + My_C\vec{\jmath} + Mz_C\vec{k}; \tag{3.1}$$

$$\overrightarrow{r_C} = x_C\vec{\imath} + y_C\vec{\jmath} + z_C\vec{k}.$$

Impulsul sistemului de puncte este impulsul unui punct în care se concentrează toată masa sistemului și este plasat în C.M. al sistemului de puncte materiale.

Sub formă algebrică ecuația vectorială (3.1) se poate scrie:

$$\{H_o\} = [M]\{v_C\}; \tag{3.2}$$

unde,

$$\{H_o\}^T = \{H_x H_y H_z\};\ \{v_C\}^T = \{v_{Cx} v_{Cy} v_{Cz}\};\ [M] = M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema de variație a impulsului unui sistem de puncte materiale pe baza legii 2 a lui Newton în raport cu un sistem de referință inerțial fix $Ox_iy_iz_i$ (S.R.I.)

Ecuația de echilibru dinamic instantaneu pentru punctul i de masă m_i (fig.3.1.) conform legii 2 a lui Newton este:

$$m_i\vec{a_i} = \vec{F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \vec{F_{ji}}; \tag{3.3}$$

unde,

$\vec{F_i}$ este rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra punctului i cu masa mi;

$\vec{F_{ji}}, j = 1 \dots n, i \neq j$ sunt forțele interioare pereche care acționează între mi și mj.

Pentru sistemul de puncte materiale ecuația de echilibru dinamic instantaneu se obține în urma aplicării principiului suprapunerii de efecte.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n}\vec{F_{ji}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} = \vec{R}_{ext}; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{F_{ji}} = \vec{0}; \vec{F_{ji}} + \vec{F_{ij}} = \vec{0}; i \neq j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_i\vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v_i} = \frac{d\vec{H_o}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_C)}{dt} = M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = M\vec{a}_C = \vec{R}_{ext}. \tag{3.4}$$

Sub formă algebrică ecuația vectorială (3.4) se scrie:

$$\{\dot{H}\} = [M]\{a_c\} = \{R_{ext}\}; \tag{3.5}$$

unde,

$$\{R_{ext}\}^T = \{R_{ext,x} R_{ext,y} R_{ext,y}\}; \{a_C\}^T = \{a_{Cx} a_{Cy} a_{Cz}\}.$$

Variația impulsului unui sistem de puncte materiale în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează în centrul de masă (C.M.). Centrul de masă se mișcă sub acțiunea lui R_{ext}, iar toată masa sistemului de puncte materiale este concentrată în (C.M.).

Impulsul unui corp solid rigid (S.R.) față de un reper mobil $Oxyz$ (S.R.N.- sistem de referință neinerțial) în raport cu care solidul rigid are o mișcare relativă

Pentru un solid rigid cu masa distribuită continuu (fig.3.2.) impulsul se determină ca fiind suma impulsurilor infinitezimale dH ale maselor infinitezimale dm:

$$\vec{H} = \int_C \vec{v}dm = \int_C (\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{r})dm = \overrightarrow{v_o}\int_C dm + \vec{\omega} \times \int_C \vec{r}dm = M\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{S};$$
$$\vec{H} = M\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times M\overrightarrow{r_C} = M\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{S} = M(\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_C}) = M\vec{v}_C; \quad (3.6)$$
$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\vec{S}}{\int_C dm}; \vec{S} = \int_C \vec{r}dm; M = \int_C dm; \vec{S} = M\overrightarrow{r_C}; \vec{S} = S_x\vec{\imath} + S_y\vec{\jmath} + S_z\vec{k}.$$

Sub formă algebrică ecuația vectorială (3.6) devine:

$$\{H_o\} = [M]\{v_o\} + [\omega]\{S\} = [M](\{v_o\} + [\omega]\{r_C\}) = [M]\{v_C\}. \quad (3.7)$$

unde, $[\omega] = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix}; [M] = M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \{r_C\}^T = \{r_{Cx}r_{Cy}r_{Cz}\}.$

Impulsul solidului rigid este egal cu impulsul unui punct situat în centrul de masă al acestuia. Masa solidului rigid este concentrată în acest punct și participă la mișcare împreună cu rigidului.

Teorema de variație a impulsului unui corp solid rigid pe baza legii 2 a lui Newton în raport cu un sistem de referință mobil $Oxyz$ (S.R.N.) față de care solidul rigid are o mișcare relativă

Pornind de la ecuația de echilibru dinamic instantaneu pentru un element infinitezimal de masă dm (fig.3.2.) se obține:

$$\int_C \vec{a}dm = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_\imath} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{\jmath\imath}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_\imath} = \vec{R}_{ext}; \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{\jmath\imath}} = \vec{0}; \quad (3.8)$$
$$\int_C \vec{a}dm = \int_C \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int_C \vec{v}dm = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_C)}{dt} = M\vec{a}_C = \vec{R}_{ext}; M = \int_C dm;$$

Sub formă algebrică teorema de variație a impulsului unui solid rigid sub formă vectorială (3.8) se scrie:

$$\{\dot{H}\} = [M]\{a_c\} = \{R_{ext}\}. \quad (3.9)$$

Impulsului unui sistem de puncte materiale (S.P.M.) sau a unui solid rigid (S.R.) are aceeași formă în raport cu un sistem inerțial fix $Ox_iy_iz_i$ (S.R.I.) cât și în raport cu un sistem mobil $Oxyz$ (S.R.N.) cu originea în centrul de masă a S.P.M sau S.R., față de care sistemul de puncte materiale (S.P.M.) sau solidul rigid (S.R.) are o mișcare relativă (fig.3.3.).

$$\overrightarrow{H_o} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i} = M\frac{d\overrightarrow{r_C}}{dt} = M\vec{v}_C;$$

$$\overrightarrow{H_{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_{Ci}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\overrightarrow{v_C} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{Ci}}) = \overrightarrow{v_C}\sum_{i=1}^{n} m_i + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_{Ci}} = M\vec{v}_C\,; \tag{3.10}$$

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_{Ci}} = 0.$$

În final, rezultă $\overrightarrow{H_o} = \overrightarrow{H_{CM}}$ sau sub formă algebrică $\{H_o\} = \{H_{CM}\}$.

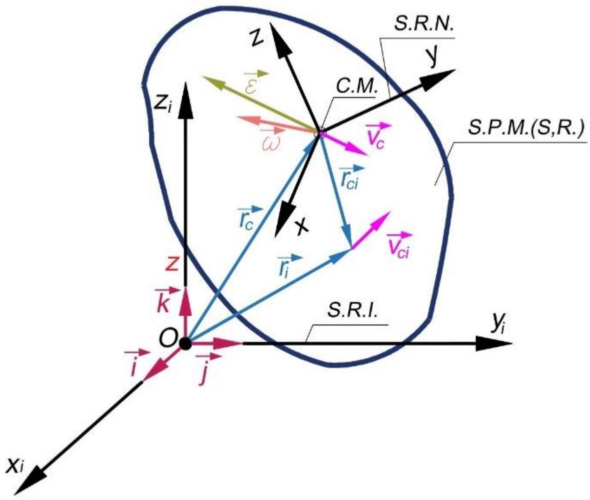


Fig.3.3.Impulsul în raport cu C.M.

Conservarea impulsului unui sistem de puncte materiale S.P.M. și a solidului rigid S.R.

În cazul sistemelor izolate unde rezultanta forțelor exterioare este zero, impulsul sistemelor de puncte materiale sau a solidului rigid, se conservă pe toate cele trei componente sau numai pe componentele pe care rezultanta forțelor exterioare se anulează. Din conservarea impulsului rezultă că pe componentele pe care impulsul se conservă mișcarea este rectilinie uniformă $\vec{v} = \overrightarrow{ct}$..

$$\vec{R}_{ext} = 0; \frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{R}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{H} = M\vec{v}_C = ct.; M = ct.;$$
$$H_x = Mv_{Cx} \rightarrow v_{Cx} = ct; H_y = Mv_{Cy} \rightarrow v_{Cy} = ct; H_z = Mv_{Cz} \rightarrow v_{Cz} = ct.. \tag{3.11}$$

În cazul unui solid rigid (S.R.) sau sistem de punte materiale (S.P.M.) cu mișcare de translație și rotație în cazul general, pentru a determina torsorul forțelor care acționează asupra corpului trebuie cunoscut și tensorul de inerție. Studiul mișcării în acest caz implică cunoașterea momentului cinetic și aplicarea teoremei de variație a momentului cinetic sau conservarea momentului cinetic în cazul corpurilor izolate. Se poate determina torsorul sistemului de forțe care acționează asupra corpului când se cunosc parametrii cinematici ai mișcării sau se poate determina legea de mișcare a corpului dacă se cunoaște torsorul forțelor care acționează asupra corpului.

Momentul cinetic al unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) față de un reper inerțial fix $\boldsymbol{Ox_iy_iz_i}$ (S.R.I.)

Momentul cinetic al unui sistem de puncte față de punctul O (fig.3.4.) este egal cu suma momentelor cinetice K_{iO} a tuturor punctelor care compun sistemul de puncte materiale.

$$\overrightarrow{K_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{K_{\iota O}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_\iota} \times m_i \vec{v_\iota}. \tag{3.12}$$

Teorema de variație a momentului cinetic al unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) față de un reper inerțial fix $\boldsymbol{Ox_iy_iz_i}$ (S.R.I.)

Aplicând legea a doua a dinamicii pentru punctele (fig.3.4.) i=1...n și principiul suprapunerii de efecte pentru sistemul de puncte materiale se obține:

$$m_i\vec{a_\iota} = \vec{F_\iota} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \overrightarrow{F_{j\iota}}; \vec{r_\iota} \times m_i\vec{a_\iota} = \vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota} + \vec{r_\iota} \times \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \overrightarrow{F_{j\iota}};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r_\iota} \times m_i\vec{a_\iota} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_\iota} \times m_i \frac{d\vec{v_\iota}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r_\iota} \times m_i\vec{v_\iota}) = \frac{d\overrightarrow{K_O}}{dt};$$

$$\frac{d\overrightarrow{K_O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota} + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_\iota} \times \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \overrightarrow{F_{j\iota}}\right); \sum_{i=1}^{n} \vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota} = \overrightarrow{M_O^{ext}}; \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_\iota} \times \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \overrightarrow{F_{j\iota}}\right) = \vec{0}; \tag{3.13}$$

$$\vec{r_\iota} \times \overrightarrow{F_{\iota J}} + \vec{r_J} \times \overrightarrow{F_{J\iota}} = \left(\vec{r_J} + \Delta\overrightarrow{r_{\iota J}}\right) \times \overrightarrow{F_{\iota J}} + \vec{r_J} \times \overrightarrow{F_{J\iota}} == \vec{r_J} \times \left(\overrightarrow{F_{\iota J}} + \overrightarrow{F_{J\iota}}\right) = \vec{0};$$

$$\Delta\overrightarrow{r_{\iota J}} II \overrightarrow{F_{\iota J}} II \overrightarrow{F_{J\iota}};$$

$$\Delta\overrightarrow{r_{\iota J}} = \vec{r_\iota} - \vec{r_J};$$

$$\{\dot{K}_o\} = \{M_O^{ext}\};$$

Variația momentului cinetic $\overrightarrow{K_O}$ al unui sistem de puncte materiale în raport cu timpul, este egală cu momentul rezultant al forțelor exterioare care acționează asupra punctelor materiale, reduse în raport cu punctul O.

Momentul cinetic al unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) față de un reper cu originea în centrul de masă (Teorema lui König pentru momentul cinetic)

Variația momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, la schimbarea polului din punctul O în punctul C (fig.3.4.) este:

$$\overrightarrow{K_O}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{K_{iO}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times m_i\vec{v_i}=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{r_{Ci}}+\overrightarrow{r_C})\times m_i\vec{v_i};$$

$$\overrightarrow{K_O}=\overrightarrow{r_C}\times\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v_i}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_{Ci}}\times m_i\vec{v_i};\overrightarrow{K_O}=\overrightarrow{r_C}\times\overrightarrow{H_O}+\overrightarrow{K_C}=\overrightarrow{r_C}\times M\overrightarrow{v_C}+\overrightarrow{K_C};$$

$$\overrightarrow{K_C}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_{Ci}}\times m_i\vec{v_i}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_{Ci}}\times m_i(\overrightarrow{v_C}+\overrightarrow{v_{Ci}}); \tag{3.14}$$

$$\overrightarrow{K_C}=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\,\overrightarrow{r_{Ci}}\right)\times\overrightarrow{v_C}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_{Ci}}\times m_i\overrightarrow{v_{Ci}};\overrightarrow{S_C}=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\,\overrightarrow{r_{Ci}}\right)=0;$$

$$\overrightarrow{K_C}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_{Ci}}\times m_i\overrightarrow{v_{Ci}}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_{Ci}}\times m_i(\vec{\omega}\times\overrightarrow{r_{Ci}})=\sum_{i=1}^{n}m_i(\overrightarrow{r_{Ci}}\times\vec{\omega}\times\overrightarrow{r_{Ci}}).$$

unde, $\overrightarrow{K_C}$ este momentul cinetic al sistemului în raport cu centrul maselor C.M. și se poate dezvolta conform (3.15) prin utilizarea proprietății $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b})\vec{c}$.

$$\overrightarrow{K_C}=\sum_{i=1}^{n}m_i(\overrightarrow{r_{Ci}}\times\vec{\omega}\times\overrightarrow{r_{Ci}})=\sum_{i=1}^{n}m_i[(\overrightarrow{r_{Ci}}\overrightarrow{r_{Ci}})\vec{\omega}-(\overrightarrow{r_{Ci}}\vec{\omega})\overrightarrow{r_{Ci}}]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i[\,({x_{Ci}}^2+{y_{Ci}}^2+{z_{Ci}}^2)(\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k})- \tag{3.15}$$

$$-(x_{Ci}\omega_x+y_{Ci}\omega_x+z_{Ci}\omega_y)(x_{Ci}\vec{i}+y_{Ci}\vec{j}+z_{Ci}\vec{k})];$$

$$\overrightarrow{K_C}=\vec{i}(J_{xx}\omega_x+J_{xy}\omega_y+J_{xz}\omega_z)+\vec{j}(J_{yx}\omega_x+J_{yy}\omega_y+J_{yz}\omega_z)+$$

$$+\vec{k}(J_{zx}\omega_x+J_{zy}\omega_y+J_{zz}\omega_z);$$

unde,

$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k};\overrightarrow{r_{Ci}}=x_{Ci}\vec{i}+y_{Ci}\vec{j}+z_{Ci}\vec{k};$

$$J_{xx}=\sum_{i=1}^{n}m_i(y_{Ci}^2+z_{Ci}^2);J_{yy}=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_{Ci}^2+z_{Ci}^2);J_{zz}=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_{Ci}^2+y_{Ci}^2);$$

$$J_{xy}=J_{yx}=-\sum_{i=1}^{n}m_ix_{Ci}y_{Ci};J_{yz}=J_{zy}=-\sum_{i=1}^{n}m_iy_{Ci}z_{Ci};J_{zx}=J_{xz}=-\sum_{i=1}^{n}m_ix_{Ci}z_{Ci};$$

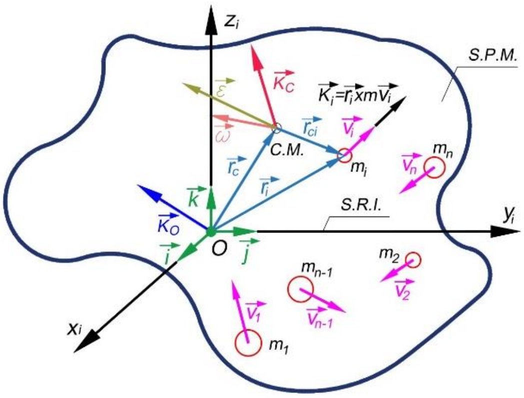


Fig.3.4.Momentul cinetic sistem puncte.

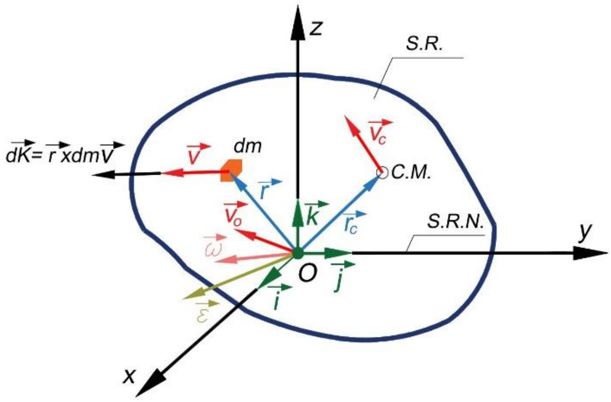


Fig.3.5.Momentul cinetic solid rigid.

Sub formă algebrică relația vectorială (3.14) pentru momentul cinetic și teorema lui König este:

$$\{K_O\} = [\mathrm{M}][r_C]\{v_C\} + \{K_C\} = [\mathrm{M}][r_C]\{v_C\} + [J_C]\{\omega\}; \{K_C\} = [J_C]\{\omega\} \tag{3.16}$$

unde, $[J_C] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{xy} & J_{zz} \end{bmatrix}; [r_C] = \begin{bmatrix} 0 & -z_C & y_C \\ z_C & 0 & -x_C \\ -y_C & x_C & 0 \end{bmatrix}; \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}.$

Teorema de variație a momentului cinetic pentru un sistem de n puncte materiale (S.P.M.) față centrul de masă (C.M.) al sistemului de puncte materiale

Dacă la scrierea ecuațiilor de mișcare pentru un corp, momentul cinetic s-ar exprima în raport cu un sistem de referință fix (inerțial) atunci componentele din tensorului de inerție vor varia în raport cu sistemul fix. De aceea se preferă scrierea momentului cinetic în raport cu un sistem de referință mobil, legat de corp cu originea în C.M.. În acest caz momentele de inerție vor avea tot timpul mișcării aceleași valori. Variația momentului cinetic (fig.3.4.) în raport cu punctul O și C este:

$$\begin{gathered}
\frac{d\overrightarrow{K_O}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{K_C}\right) = \left(\dot{\overrightarrow{r_C}} \times M\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{r_C} \times M\dot{\overrightarrow{v_C}} + \dot{\overrightarrow{K_C}}\right) = \overrightarrow{M_O^{ext}}; \dot{\overrightarrow{r_C}} = \vec{0} \\
\overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{a_C} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{a_C} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_\iota} \times \vec{F_\iota} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{r_{C\iota}} + \overrightarrow{r_C}) \times \vec{F_\iota}; \\
\overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{a_C} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_C} \times \vec{F_\iota} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_{C\iota}} \times \vec{F_\iota} = \overrightarrow{r_C} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F_\iota}; \\
\overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{a_C} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{r_C} \times \vec{R}_{ext} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_{C\iota}} \times \vec{F_\iota}; \vec{R}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_\iota} = M\overrightarrow{a_C}; \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{M_C^{ext}}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Sub formă algebrică relația vectorială (3.17) pentru variația momentul cinetic este:

$$\{\dot{K_C}\} = \{M_C^{ext}\}. \tag{3.18}$$

Momentul cinetic al unui solid rigid (S.R.) față de un reper $Oxyz$ legat de solidul rigid care se mișcă cu solidul rigid

Momentul cinetic pentru un solid rigid (fig.3.5) prin definiție este:

$$\overrightarrow{K_O} = \int_C \vec{r} \times \vec{v}dm = \int_C \vec{r} \times (\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{r})dm = \int_C \vec{r}dm \times \overrightarrow{v_o} + \int_C (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r})dm$$

$$\overrightarrow{K_O} = \vec{S} \times \overrightarrow{v_o} + \int_C [(\vec{r}\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}]dm = \vec{S} \times \overrightarrow{v_o} + \int_C [(\vec{r}\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}]dm;$$

$$\int_C (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r})dm = \int_C [(\vec{r}\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}]dm \rightarrow$$

$$\int_C \left[(x^2+y^2+z^2)\left(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}\right) - \left(x\omega_x + y\omega_x + z\omega_y\right)\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)\right]dm \tag{3.19}$$

$$= \vec{\imath}\left(J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z\right) + \vec{\jmath}\left(J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z\right) +$$

$$+\vec{k}\left(J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z\right);$$

$$\overrightarrow{K_O} = \vec{S} \times \overrightarrow{v_o} + \vec{\imath}\left(J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z\right) + \vec{\jmath}\left(J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z\right) +$$

$$+\vec{k}\left(J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z\right);$$

unde,

$\vec{\omega} = \omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}; \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k};$

$J_{xx} = \int_C (z^2+y^2)dm; J_{yy} = \int_C (x^2+z^2)dm; J_{zz} = \int_C (x^2+y^2)dm;$

$J_{yz} = J_{zy} = -\int_C yzdm; J_{xy} = J_{yx} = -\int_C xydm; J_{xz} = J_{zx} = -\int_C xzdm;$

Sub formă algebrică relația vectorială (3.19) pentru momentul cinetic în raport cu punctul O devine:

$$\{K_o\} = [S]\{v_o\} + [J_O]\{\omega\}; \int_C (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r})dm = \tag{3.20}$$

$$[J_O] = \int_C [r][\omega]\{\mathrm{r}\}dm = -\int_C [r][r]dm\{\omega\}.$$

unde, $[J_O] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{xy} & J_{zz} \end{bmatrix}; [S] = \begin{bmatrix} 0 & -S_z & S_y \\ S_z & 0 & -S_x \\ -S_y & S_x & 0 \end{bmatrix}; [r] = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{z} & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & 0 & -x \\ -\mathrm{y} & x & 0 \end{bmatrix}.$

Dacă O≡C.M. atunci momentele statice în raport cu centrul de masă al sistemului de punte materiale sunt zero și se obține:

$$[S] = [0]; \{K_C\} = [J_C]\{\omega\}. \tag{3.21}$$

Teorema de variație a momentului cinetic al unui solid rigid față de un reper $Oxyz$ legat de solidul rigid care se mișcă cu solidul rigid

Pentru un solid rigid teorema de variație a momentului cinetic sub formă algebrică față de punctul O și C.M. are următoarea formă:

$$\begin{gathered}
\{\dot{K}_o\} = \{M_O^{ext}\};\ \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}};\ \frac{d\{\mathrm{v}\}}{dt} = \frac{\partial\{\mathrm{v}\}}{\partial \mathrm{t}} + [\omega]\{\mathrm{v}\}; \\
\frac{d\{K_o\}}{dt} = \frac{d}{dt}([S]\{v_o\} + [J_O]\{\omega\}) = [S]\{\dot{v_o}\} + [\omega][S]\{v_o\} + [J_O]\{\dot{\omega}\} + [\omega][J_O]\{\omega\} \\
\{\dot{K}_o\} = [S]\{a_o\} + [\omega][S]\{v_o\} + [J_O]\{\varepsilon\} + [\omega][J_O]\{\omega\} = \{M_O^{ext}\}; \\
[S] = [0] \rightarrow O \equiv C;\ \{\dot{K}_C\} = [J_C]\{\varepsilon\} + [\omega][J_C]\{\omega\} = \{M_C^{ext}\}.
\end{gathered} \tag{3.22}$$

Relația (3.22) justifică de ce se alege sistemul de referință față de care se vor scrie ecuațiile de mișcare, în centrul de masă al S.P.M. sau S.R.

Teorema de variație a momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale (S.P.M.) sau a unui solid rigid (S.R.) are aceeași formă în raport cu sistem inerțial fix $Ox_iy_iz_i$ cât și în raport cu un sistem mobil legat de corpul solidul rigid sau de sistemul de puncte materiale cu originea în centrul de masă, față de care S.P.M sau S.R. are o mișcare relativă (fig.3.3).

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{K_O} = \overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{K_C}; \\
\dot{\overrightarrow{K_O}} = \dot{\overrightarrow{r_C}} \times M\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{r_C} \times M\dot{\overrightarrow{v_C}} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{a_C} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{M_O^{ext}};\ \dot{\overrightarrow{r_C}} = 0; \\
\overrightarrow{M_O^{ext}} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{r_{Ci}} + \overrightarrow{r_C}) \times \vec{F_i}; \\
\overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{a_C} + \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{M_O^{ext}} = \overrightarrow{r_C} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_{Ci}} \times \vec{F_i} = \overrightarrow{r_C} \times \vec{R}_{ext} + \overrightarrow{M_C^{ext}}; \\
\overrightarrow{r_C} \times \vec{R}_{ext} = M\overrightarrow{a_C};\ \vec{R}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i};\ \dot{\overrightarrow{K_O}} = \overrightarrow{M_O^{ext}};\ \dot{\overrightarrow{K_C}} = \overrightarrow{M_C^{ext}}.
\end{gathered} \tag{3.23}$$

Sub formă algebrică relațiile vectoriale (3.23) pentru variația momentul cinetic în raport cu punctul O și cu punctul C sunt:

$$\{\dot{K}_O\} = \{M_O^{ext}\}; \{\dot{K}_C\} = \{M_C^{ext}\}. \tag{3.24}$$

Conservarea momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale (S.P.M.) și a solidului rigid (S.R.)

În cazul sistemelor izolate pentru care momentul rezultant al forțelor exterioare este zero, momentul cinetic al sistemelor de puncte materiale sau a solidului rigid se conservă pe toate cele trei componente sau numai pe componentele pe care rezultanta momentului forțelor exterioare se anulează.

$$\overrightarrow{M_O^{ext}} = 0; \frac{d\overrightarrow{K_O}}{dt} = \overrightarrow{M_O^{ext}} = 0 \rightarrow \overrightarrow{K_O} = ct.; \overrightarrow{K_O} = K_{Ox}\vec{\imath} + K_{Oy}\vec{\jmath} + K_{Oz}\vec{k}; \tag{3.25}$$

$$M_{Ox} = 0 \rightarrow K_{Ox} = ct.;\ M_{Oy} = 0 \rightarrow K_{Oy} = ct.; M_{Oz} = 0 \rightarrow K_{Oz} = ct.$$

Torsorul cinetic și teorema de variație a torsorului cinetic în cazul unui sistem de puncte materiale (S.P.M.) sau a solidului rigid (S.R.)

Teorema de variație a impulsului și teorema de variație a momentului cinetic pot fi grupate într-o relație numită teorema de variație a torsorului cinetic.

Se exprimă torsorul de reducere al forțelor exterioare și a impulsurilor față de punctul O și față de punctul C cu următoarele relații:

$$\tau_O(\vec{F_\iota}) = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \overrightarrow{M_O^{ext}} \end{Bmatrix}; \tau_O(\overrightarrow{H_\iota}) = \begin{Bmatrix} \vec{H}_0 \\ \overrightarrow{K_0} \end{Bmatrix}; \tau_C(\vec{F_\iota}) = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \overrightarrow{M_C^{ext}} \end{Bmatrix}; \tau_C(\overrightarrow{H_\iota}) = \begin{Bmatrix} \vec{H}_C \\ \overrightarrow{K_C} \end{Bmatrix}. \tag{3.26}$$

Teorema de variație a torsorului cinetic în raport cu punctul O și C se exprimă vectorial sub forma:

$$\dot{\tau}_O(\overrightarrow{H_\iota}) = \tau_O(\vec{F_\iota});\ \dot{\tau}_C(\overrightarrow{H_\iota}) = \tau_C(\vec{F_\iota}). \tag{3.27}$$

Derivata torsorului impulsurilor în raport cu timpul a unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid este egală cu torsorul forțelor exterioare aplicate S.P.M. sau S.R.

Sub formă algebrică teorema de variație a torsorului cinetic este:

$$\{H\} = [M]\{v_C\}; \{K_o\} = [M][r_C]\{v_C\} + [J_C]\{\omega\};\ \{K_C\} = [J_C]\{\omega\};$$

$$\{\dot{K}_o\} = \sum_{i=1}^{n}[r_i]\{F_i\}; \{\dot{K}_c\} = \sum_{i=1}^{n}[r_{ic}]\{F_i\}; \{\dot{H}\} = [M]\{a_C\} = \sum_{i=1}^{n}\{F_i\}; \tag{3.28}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{H}_O\} \\ \{\dot{K}_O\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\{F_i\} \\ \sum_{i=1}^{n}[r_i]\{F_i\} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \{\dot{H}_C\} \\ \{\dot{K}_C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\{F_i\} \\ \sum_{i=1}^{n}[r_{Ci}]\{F_i\} \end{Bmatrix}.$$

Pentru studiul mișcării corpurilor tridimensionale sub acțiunea unui sistem de forțe fără a mai determina torsorul forțelor de inerție se utilizează teorema de variație a energiei cinetice în care intervin caracteristicile geometrice statice masice si inerțiale ale corpurilor. În continuare se determină energia cinetică în cazul unui sistem de puncte materiale (S.P.M.) și a solidului rigid (S.R.), teorema de variație a energiei cinetice și conservarea energiei cinetice în cazul sistemelor izolate.

Energia cinetică a unui punct material și a unui sistem de n puncte (S.P.M.) materiale față de un reper fix (inerțial) $\boldsymbol{Ox_iy_iz_i}$

Energia cinetică a unui punct material cu masa m și viteza v (fig.3.1.) este:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \tag{3.29}$$

Energia cinetică a unui sistem de n puncte materiale (fig.3.1.) este:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \; i = 1 \dots n. \tag{3.30}$$

Teorema energiei cinetice a unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) față de un reper fix (S.R.N.)) $\boldsymbol{Ox_iy_iz_i}$

Pentru a determina teorema de variație a energiei cinetice se utilizează legea a II-a a dinamicii scrisă pentru un punct material iar apoi se utilizează suprapunerea efectelor.

$$\left(m_i\vec{a_i} = \vec{F_i} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \vec{F_{ji}} \right) \cdot d\vec{r_i}\,;$$

$$m_i\vec{a_i}d\vec{r_i} = \vec{F_i}d\vec{r_i} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \vec{F_{ji}}\, d\vec{r_i}; \tag{3.31}$$

$$dE_{ci} = m_i\vec{a_i}d\vec{r_i} = m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt}d\vec{r_i} = m_i\vec{v_i}\frac{d\vec{r_i}}{dt} = m_i\vec{v_i}d\vec{v_i} = m_i v_i dv_i = m_i d\left(\frac{1}{2}v_i^2\right);$$

$$dE_c = \sum_{i=1}^{n} dE_{ci} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right); dL^{ext} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}d\vec{r_i}\,; dL^{int} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\vec{F_{ji}}\; d\vec{r_i}\,;$$

$$dE_c = dL = dL^{ext} + dL^{int}.$$

Variația energiei cinetice dE_c a unui sistem de n puncte materiale într-un interval de timp dt este egală cu lucrul mecanic elementar dL al forțelor interioare și exterioare care acționează asupra fiecărui punct material.

Energia cinetică unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) în raport cu centrul de masă (C.M.) al sistemului de puncte materiale (Teorema lui König pentru energia cinetică)

Energia cinetică în raport cu C.M. a sistemului de puncte materiale se determină plecând de la energia cinetică exprimată în raport cu sistemul de referință $Ox_iy_iz_i$ (fig.3.4.) :

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v_C} + \vec{v_{Ci}})^2 ;$$

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{v_C}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \vec{v_C}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_{Ci}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_{Ci}}^2; \tag{3.32}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{v_C}^2 M + \vec{v_C}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_{Ci}} + E_c^{rot} = \frac{1}{2}v_c{}^2 M + \vec{v_C}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_{Ci}} + E_c^{rot};$$

$$E_c = \frac{1}{2}v_c{}^2 M + E_c^{rot}; E_c^{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_{Ci}}^2; M = \sum_{i=1}^{n} m_i; \vec{S_C} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_{Ci}} = 0.$$

Energia cinetică a unui sistem de puncte aflat în mișcare în raport cu un sistem de referință inerțial este egală cu energia cinetică de rotație E_c^{rot} a sistemului în mișcare relativă față de sistemul de referință cu originea în centrul de masă, la care se adaugă energia cinetică a unui punct având masa egală cu masa sistemului de puncte și este situat în centrul de masă al sistemului de puncte.

Energia cinetică de rotație a unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) în raport cu centrul de masă (C.M.) al sistemului de puncte materiale

Pentru a evidenția cum influențează distribuția maselor energia cinetică totală a unui sistem de puncte se determină energia cinetică a sistemului în mișcare relativă față de sistemul de referință cu originea în centrul de masă.

$$E_c^{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_{Ci}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r_{Ci}})^2$$

$$E_c^{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i [(\vec{\omega})^2 (\vec{r_{Ci}})^2 - (\vec{\omega}\,\vec{r_{Ci}})^2] = \tag{3.33}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i [(\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2)(x_{Ci}{}^2 + y_{Ci}{}^2 + z_{Ci}{}^2) - (\omega_x x_{Ci} + \omega_y y_{Ci} + \omega_z z_{Ci})];$$

$$E_C^{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (J_x \omega_x{}^2 + J_y \omega_y{}^2 + J_z \omega_z{}^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{xz}\omega_x\omega_z - 2J_{zy}\omega_z\omega_y);$$

unde,

$\vec{\omega} = \omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}; \vec{r_{Ci}} = x_{Ci}\vec{\imath} + y_{Ci}\vec{\jmath} + z_{Ci}\vec{k};$

$\left(\vec{a}\times\vec{\mathrm{b}}\right)^2=(\vec{a})^2\left(\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}\vec{\mathrm{b}}\right)^2$ identitatea lui Lagrange;

$$J_{xx}=\sum_{i=1}^{n}m_i(y_{iC}^2+z_{iC}^2)\,;J_{yy}=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_{iC}^2+z_{iC}^2)\,;J_{zz}=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_{iC}^2+y_{iC}^2)\,;$$

$$J_{xy}=J_{yx}=-\sum_{i=1}^{n}m_ix_{iC}y_{iC}\,;J_{yz}=J_{zy}=-\sum_{i=1}^{n}m_iy_{iC}z_{iC}\,;J_{zx}=J_{xz}=-\sum_{i=1}^{n}m_ix_{iC}z_{iC}.$$

Sub formă algebrică relațiile vectoriale (3.32) și (3.33) pentru energia cinetică a unui sistem de puncte materiale în raport cu centrul de masă a sistemului de puncte devin:

$$E_c=\frac{1}{2}\{v_C\}^T[M]\{v_C\}+\frac{1}{2}\{\omega\}^T[J_C]\{\omega\};E_C^{rot}=\frac{1}{2}\{\omega\}^T[J_C]\{\omega\}. \quad (3.34)$$

Teorema energiei cinetice a unui sistem de n puncte materiale (S.P.M.) în raport cu centrul de masă (C.M.) al sistemului de puncte materiale

Prin derivarea expresiei energiei cinetice totale (3.33) a unui sistem de puncte exprimate în raport cu C.M. se obține:

$$dE_c=d\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{v_C}^2M+E_c^{rot}\right)=M\overrightarrow{v_C}d\overrightarrow{v_C}+dE_c^{rot}=M\frac{d\overrightarrow{r_C}}{dt}d\overrightarrow{v_C}+dE_c^{rot};$$

$$dE_c=Md\overrightarrow{r_C}\frac{d\overrightarrow{v_C}}{dt}+dE_c^{rot}=M\overrightarrow{a_C}d\overrightarrow{r_C}+dE_c^{rot}=\vec{R}_{ext}d\overrightarrow{r_C}+dE_c^{rot};;$$

$$dL^{ext}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_\imath}d(\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_{C\imath}})=\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_\imath}\right)d\overrightarrow{r_C}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_\imath}\,d\overrightarrow{r_{C\imath}}=\vec{R}_{ext}d\overrightarrow{r_C}+dL_C^{ext};$$

$$dL^{int}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{j\imath}}\,d\overrightarrow{r_\imath}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{j\imath}}d(\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_{C\imath}})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{j\imath}}\,d\overrightarrow{r_C}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{j\imath}}\,d\overrightarrow{r_{C\imath}}; \quad (3.35)$$

$$dL^{int}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{j\imath}}\,d\overrightarrow{r_{C\imath}}=dL_C^{int};\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\overrightarrow{F_{j\imath}}\right)d\overrightarrow{r_C}=0;dE_c=dL^{ext}+dL^{int};$$

$$M\overrightarrow{a_C}d\overrightarrow{r_C}+dE_c^{rot}=M\overrightarrow{a_C}d\overrightarrow{r_C}+dL_C^{ext}+dL_C^{int};$$

$$dE_c^{rot}=dL_C^{ext}+dL_C^{int}.$$

Teorema variației energiei cinetice va păstra aceeași formă în mișcarea relativă a unui sistem de puncte în raport cu centrului său de masă, ca și în mișcarea față de un sistem de referință fix.

Energia cinetică a unui solid rigid (S.R.) față de un reper mobil fix $Oxyz$ legat de solidul rigid în raport cu care solidul rigid are o mișcare relativă

La fel ca și în cazul sistemelor de puncte materiale în cazul solidului rigid energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice a elementelor infinitezimale de masă dm care compun corpul.

$$E_c = \int_C dE_c = \frac{1}{2}\int_C \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2}\int_C (\overrightarrow{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm =$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_o^2 \int_C dm + 2\overrightarrow{v_o}\vec{\omega} \times \int_C \vec{r} dm + \int_C (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm\right); M = \int_C dm;$$

$$E_c = \frac{1}{2} v_o^2 M + \frac{1}{2} 2\overrightarrow{v_o}(\overrightarrow{\omega} \times \vec{S}) + \frac{1}{2}\int_C (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm; \vec{S} = \int_C \vec{r} dm\,;$$

$$E_c = \frac{1}{2} v_o^2 M \times \frac{1}{2}\left[\vec{\omega}\left(\vec{S} \times \overrightarrow{v_o}\right) + \overrightarrow{v_o}\left(\vec{\omega} \times \vec{S}\right)\right] + \frac{1}{2}\int_C (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm; \qquad (3.36)$$

$$\overrightarrow{v_o}\left(\vec{\omega} \times \vec{S}\right) = \vec{\omega}\left(\vec{S} \times \overrightarrow{v_o}\right);$$

$$\int_C (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm = \int_C [(\vec{\omega})^2 (\vec{r})^2 - (\vec{\omega}\,\vec{r})^2] dm =$$

$$= \int_C [({\omega_x}^2 + {\omega_y}^2 + {\omega_z}^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2] dm;$$

$$\int_C (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm = J_x {\omega_x}^2 + J_y {\omega_y}^2 + J_z {\omega_z}^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{xz}\omega_x\omega_z - 2J_{zy}\omega_z\omega_y;$$

unde, au fost folosite relațiile:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k}; \vec{r} = x\vec{\imath} + \mathrm{y}\vec{\jmath} + \mathrm{z}\vec{k};\ \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right);$$

$$J_{xx} = \int_C (y^2 + z^2) dm\,; J_{yy} = \int_C (x^2 + z^2) dm\,; J_{zz} = \int_C (x^2 + y^2) dm\,;$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int_C xy dm\,; J_{yz} = J_{zy} = -\int_C zy dm\,; J_{zx} = J_{xz} = -\int_C xz dm.$$

Exprimarea sub formă algebrică a relației vectoriale (3.36) pentru calculul energiei cinetice totale a unui solid rigid este:

$$E_c = \frac{1}{2}\{v_o\}^T [\mathrm{M}]\{v_o\} + \frac{1}{2}\{\omega\}^T [\mathrm{S}]\{v_o\} + \frac{1}{2}\{v_o\}^T [\mathrm{S}]^T \{\omega\} + \frac{1}{2}\{\omega\}^T [J_O]\{\omega\};$$

$$\{v_o\}^T [\omega]\{S\} = -\{v_o\}^T [S]\{\omega\} = \{v_o\}^T [\mathrm{S}]^T \{\omega\}; [\mathrm{S}]^T = -[\mathrm{S}]; \qquad (3.37)$$

$$E_c = \frac{1}{2}[\{v_o\}^T \{\omega\}^T] \begin{bmatrix} [\mathrm{M}] & [\mathrm{S}]^T \\ [\mathrm{S}] & [J_O] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_o\} \\ \{\omega\} \end{Bmatrix}.$$

Dacă $O \equiv C.M.$, rezultă că $[S] = [0]$ iar expresia algebrică pentru energia cinetică totală (3.37) devine:

$$E_c = \frac{1}{2}\{v_C\}^T[\mathrm{M}]\{v_C\} + \frac{1}{2}\{\omega\}^T[J_C]\{\omega\};$$
$$E_c = \frac{1}{2}[\{v_C\}^T\{\omega\}^T]\begin{bmatrix}[\mathrm{M}] & [0]^T\\ [0] & [J_C]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{v_C\}\\ \{\omega\}\end{Bmatrix}. \tag{3.38}$$

Teorema energiei cinetice a unui solid rigid (S.R.) față de un reper mobil $Oxyz$ legat de solidul rigid în raport cu care solidul rigid are o mișcare relativă

Pentru a determina legătura între parametri cinematici (deplasări viteze și accelerații) și cauzele mișcării (forțe și cupluri) se determină teorema de variație a energiei cinetice în cazul unui solid rigid (fig.3.3).

$$dE_c = dL^{ext} + dL^{int}; \frac{dL^{ext}}{dt} = \frac{dE_c}{dt}; dL^{int} = 0 - \text{condiția de solid rigid };$$
$$dL^{ext} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}d\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\vec{v_i}dt;$$
$$dL^{ext} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\,(\vec{v_o} + \vec{\omega}\times\vec{r_i})dt = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\,\vec{v_o}dt + \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\,(\vec{\omega}\times\vec{r_i})dt \tag{3.39}$$
$$dL^{ext} = \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\right)\vec{v_o}dt + \vec{\omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times\vec{F_i}\right)dt = \left(\vec{R}\,\vec{v_o} + \vec{M}\,\vec{\omega}\right)dt;$$
$$\frac{dL^{ext}}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \vec{R}\,\vec{v_o} + \vec{M}\,\vec{\omega}.$$

După înlocuirea în relația (3.39) a expresiei (3.37) a energiei cinetice pentru un solid rigid, teorema energiei cinetice devine:

$$E_c = \frac{1}{2}[\{v_o\}^T\{\omega\}^T]\begin{bmatrix}[\mathrm{M}] & [\mathrm{S}]^T\\ [\mathrm{S}] & [J_O]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{v_o\}\\ \{\omega\}\end{Bmatrix};$$
$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}(2\{v_o\}^T[\mathrm{M}]\{a_o\} + 2\{\omega\}^T[J_O]\{\varepsilon\} + 2\{\omega\}^T[S]\{a_o\} + 2\{v_o\}^T[\mathrm{S}]^T\{\varepsilon\});$$
$$\frac{dL^{ext}}{dt} = [\{v_o\}^T\{\omega\}^T]\begin{Bmatrix}\{R\}\\ \{M_o\}\end{Bmatrix}; \tag{3.40}$$
$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dL^{ext}}{dt};$$
$$\frac{dE_c}{dt} = [\{v_o\}^T\{\omega\}^T]\begin{bmatrix}[\mathrm{M}] & [\mathrm{S}]^T\\ [\mathrm{S}] & [J_O]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{a_o\}\\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix};$$
$$[\{v_o\}^T\{\omega\}^T]\begin{bmatrix}[\mathrm{M}] & [\mathrm{S}]^T\\ [\mathrm{S}] & [J_O]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{a_o\}\\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix} = [\{v_o\}^T\{\omega\}^T]\begin{Bmatrix}\{R\}\\ \{M_o\}\end{Bmatrix}.$$

pentru $[S] = [0]$, rezultă, $O \equiv C.M.$ și se obține expresia teoremei energiei cinetice unui solid rigid raportată la centrul de masă:

$$[\{v_C\}^T\{\omega\}^T]\begin{bmatrix}[\mathrm{M}] & [0]^T \\ [0] & [J_C]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{a_C\} \\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix} = [\{v_C\}^T\{\omega\}^T]\begin{Bmatrix}\{R\} \\ \{M_C\}\end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

Conservarea energiei cinetice al unui sistem de puncte materiale (S.P.M.) și a solidului rigid (S.R.)

Dacă se consideră că sistemul de forțe interioare este conservativ ($\overrightarrow{F_{ji}}$-câmp de forțe conservative- câmpul forțelor elastice), adică forțele interioare derivă dintr-o funcție de forțe $U = U(x_i, y_i, z_i)$, în acest caz:

$$\begin{gathered} dL_{int} = dU; \\ dE_c = dL^{ext} + dL^{int}; \\ dE_c = dL^{ext} + dU; \\ d(E_c - U) = dL^{ext}. \end{gathered} \tag{3.42}$$

Introducând noțiunea de energia potențială V, rezultă:

$$\begin{gathered} V = -U; \\ d(E_c + V) = dL^{ext}. \end{gathered} \tag{3.43}$$

În cazul sistemelor izolate $dL^{ext} = 0$, iar energia totală a sistemului se conservă:

$$\begin{gathered} d(E_c + V) = dL^{ext}; \\ d(E_c + V) = 0; \\ E_c + V = ct. \end{gathered} \tag{3.44}$$

Dacă lucrul mecanic al forțelor exterioare care acționează asupra unui sistem conservativ este egal cu zero pe un interval finit de timp, rezultă ca energia mecanică a sistemului nu se modifică pe acel interval de timp. Pentru sistemele mecanice izolate energia mecanică se conservă.

Atât în cazul vibrațiilor corpurilor când se determină modurile de vibrație și valorile proprii cât și în analiza dinamică când se determină legile de mișcare în deplasare, viteză și accelerație când se cunoaște sistemul de forțe care acționează asupra corpului sau se cunoaște sistemul de forțe și se determină legile de mișcare în deplasare, viteză și accelerație, este necesară determinarea matricei de inerție mecanică a corpurilor. Datorita proceselor de optimizare corpurile solid rigide cât și corpurile solid deformabile tridimensionale au configurați geometrice complexe. De aceea în continuare sunt prezentați algoritmi numerici și probabilistici care determină matricea de inerție mecanică în cazul corpurilor tridimensionale cu configurație complexă.

3.2.Determinarea caracteristicilor geometrice și statice ale unui tetraedru prin transformarea afină de coordonate pentru un tetraedru oarecare

Pentru a determina volumul, coordonatele centrului de masă și momentele de inerție pentru un tetraedru se face transformarea de coordonate (fig.3.6.) din sistemul de coordonate $Oxyz$ în sistemul de coordonate $Ox_ny_nz_n$.

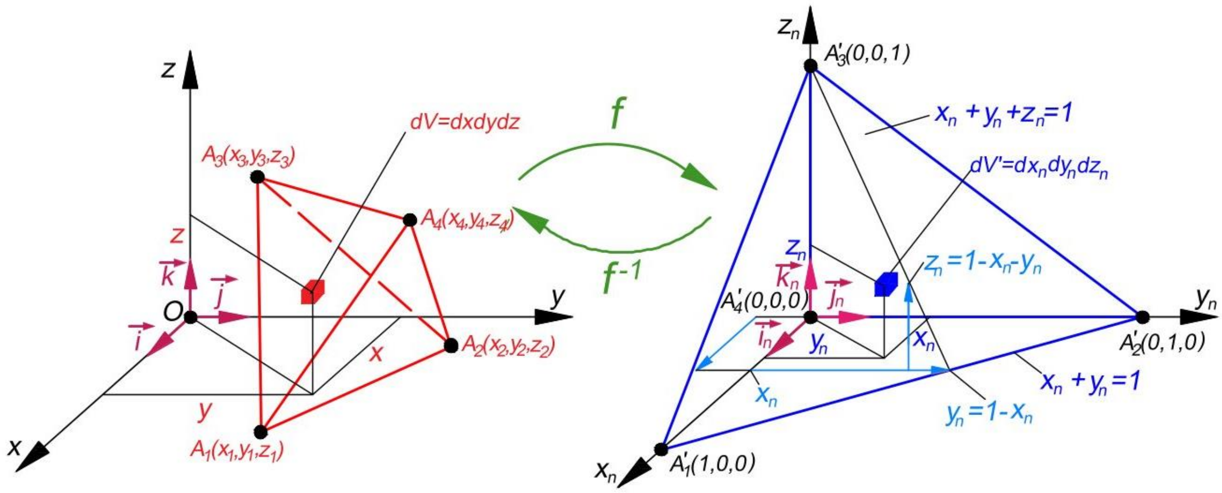


Fig.3.6.Transformare de coordonate.

Relațiile de transformare a coordonatelor din sistemul de referință $Oxyz$ în sistemul de referință $Ox_ny_nz_n$ [2] sunt:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)x_n + (x_3 - x_1)y_n + (x_4 - x_1)z_n \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)x_n + (y_3 - y_1)y_n + (y_4 - y_1)z_n \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)x_n + (z_3 - z_1)y_n + (z_4 - z_1)z_n \end{cases} \tag{3.45}$$

unde,

$dV = dxdydz = det(J)dx_ndy_ndz_n = det(J)V_n;$

$$det(J) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_n} & \frac{\partial x}{\partial y_n} & \frac{\partial x}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} & \frac{\partial y}{\partial y_n} & \frac{\partial y}{\partial z_n} \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} & \frac{\partial z}{\partial y_n} & \frac{\partial z}{\partial z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Determinarea volumului unui tetraedru

Determinarea volumului tetraedrului în funcție de coordonatele (x_n, y_n, z_n), se obține prin integrare numerică cu relația:

$$V = \int_A dV = det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} dx_ndy_ndz_n\,; \tag{3.46}$$

Volumului tetraedrului în funcție de coordonatele $(x_i, y_i, z_i), i = 1 \dots 4$ ale vârfurilor tetraedrului real este:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.47}$$

Determinarea momentelor statice ale unui tetraedru

Momentul static ale tetraedrului în raport cu o dreaptă Δ este:

$$S_\Delta = \int_V \eta dV = \eta_G V \tag{3.48}$$

Momentele statice ale tetraedrului în raport cu planele xOy xOz și yOz prin definiție sunt:

$$S_{xOy} = \int_V z dV\ ;\ S_{xOz} = \int_V y dV; S_{yOz} = \int_V x dV. \tag{3.49}$$

Momentele statice în raport cu planele xOy xOz și yOz se determină prin integrare numerică cu relațiile:

$$\begin{aligned} S_{xOy} &= det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} z(x_n, y_n, z_n) dx_n dy_n dz_n\ ; \\ S_{xOz} &= det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} y(x_n, y_n, z_n) dx_n dy_n dz_n; \\ S_{yOz} &= det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} x(x_n, y_n, z_n) dx_n dy_n dz_n. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Centrul de masă al tetraedrului este prin definiție:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{S_{yOz}}{\int_V dV} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}; \\ y_C &= \frac{S_{xOz}}{\int_V dV} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}; \\ z_C &= \frac{S_{xOy}}{\int_V dV} = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Coordonatele centrului de masă se obțin prin integrare numerică cu relațiile:

$$x_C = \frac{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} x(x_n, y_n, z_n) dx_n dy_n dz_n}{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} dx_n dy_n dz_n};$$
$$y_C = \frac{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} y(x_n, y_n, z_n) dx_n dy_n dz_n}{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} dx_n dy_n dz_n}; \qquad (3.52)$$
$$z_C = \frac{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} z(x_n, y_n, z_n) dx_n dy_n dz_n}{det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} dx_n dy_n dz_n}.$$

Coordonatele centrului de masă al tetraedrului in funcție de coordonatele vârfurilor după integrarea numerică rezultă:

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4};$$
$$y_{CM} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \qquad (3.53)$$
$$z_{CM} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

În raport cu o dreaptă care trece prin centrul de masa C.M., $S_\Delta = 0$, iar în raport cu trei axe paralele cu x y și z care trec prin CM, $S_x = S_y = S_z = 0$.

3.3.Variația momentelor de inerție mecanice în raport cu translația sistemului de referință

Se consideră cunoscute momentele de inerție ale unui solid-rigid față de un sistem de referință $Oxyz$ și se determină momentele de inerție ale corpului în raport cu sistemul de referință $Cx_1y_1z_1$ (fig.3.7.a).

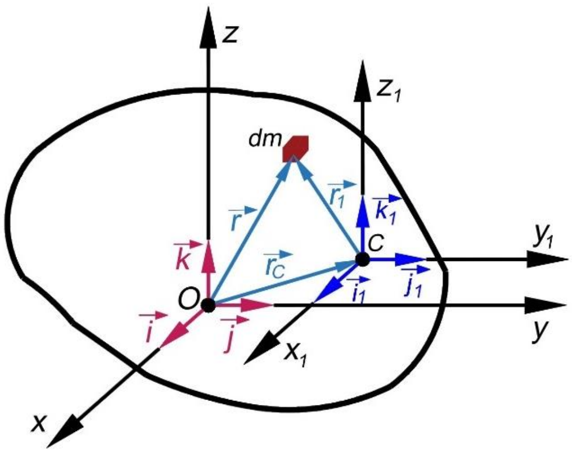


Fig.3.7.a. Momente de inerție în raport cu $Cx_1y_1z_1$.

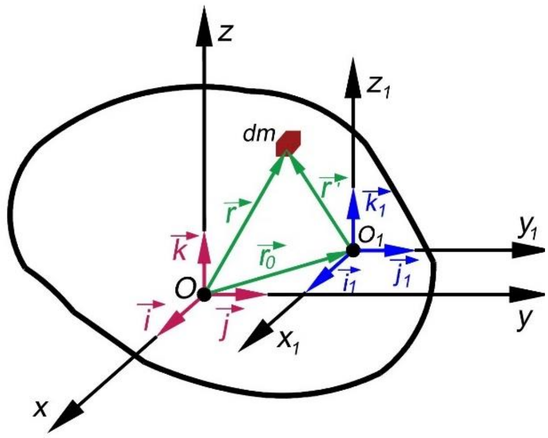


Fig.3.7.b. Tensor de inerție în raport cu punctul O_1 .

Sistemul de referință $Cx_1y_1z_1$ are originea situată în centrul de masă al corpului iar axele sale sunt paralele cu axele sistemului de referință $Oxyz$. Relațiile vectoriale între vectori de poziție ai masei dm în cele două sisteme de referință sunt:

$$\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_1} = \vec{r}; \overrightarrow{r_1} = \vec{r} - \overrightarrow{r_C};$$
$$\overrightarrow{r_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}; \overrightarrow{r_C} = x_C\vec{\imath} + y_C\vec{\jmath} + z_C\vec{k}; \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}; \quad (3.54)$$
$$\overrightarrow{r_1} = (x - x_C)\vec{\imath} + (y - y_C)\vec{\jmath} + (z - z_C)\vec{k};$$

Momentele de inerție axiale ale corpului în raport cu sistemul de referință $Ox_1y_1z_1$ sunt:

$$J_{xx1} = \int_C (y_1^2 + z_1^2)dm = \int_C [(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2)]dm$$
$$= \int_C [y^2 - 2yy_C + {y_C}^2 + z^2 - 2zz_C + {z_C}^2]dm =$$
$$= \int_C (y^2 + z^2)dm + ({y_C}^2 + {z_C}^2)\int_C dm - 2y_C\int_C ydm - 2z_C\int_C zdm =$$
$$= \int_C (y^2 + z^2)dm + ({y_C}^2 + {z_C}^2)M - 2{y_C}^2M - 2{z_C}^2M = J_{xx} - ({y_C}^2 + {z_C}^2)M;$$
$$J_{yy1} = \int_C (x_1^2 + z_1^2)dm = \int_C [(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2)]dm$$
$$= \int_C [x^2 - 2xx_C + {x_C}^2 + z^2 - 2zz_C + {z_C}^2]dm = \quad (3.55)$$
$$= \int_C (x^2 + z^2)dm + ({x_C}^2 + {z_C}^2)\int_C dm - 2x_C\int_C xdm - 2z_C\int_C zdm =$$
$$= \int_C (x^2 + z^2)dm + ({x_C}^2 + {z_C}^2)M - 2{x_C}^2M - 2{z_C}^2M = J_{xx} - ({x_C}^2 + {z_C}^2)M;$$
$$J_{zz1} = \int_C (y_1^2 + x_1^2)dm = \int_C [(y - y_C)^2 + (x - x_C)^2)]dm$$
$$= \int_C [y^2 - 2yy_C + {y_C}^2 + x^2 - 2xx_C + {x_C}^2]dm =$$
$$= \int_C (y^2 + x^2)dm + ({y_C}^2 + {x_C}^2)\int_C dm - 2y_C\int_C ydm - 2x_C\int_C xdm =$$
$$= \int_C (y^2 + x^2)dm + ({y_C}^2 + {x_C}^2)M - 2{y_C}^2M - 2{x_C}^2M = J_{xx} - ({y_C}^2 + {x_C}^2)M;$$
$$\int_C dm = M.$$

Momentele de inerție centrifugale ale corpului în raport cu sistemul de referință $Ox_1y_1z_1$ sunt:

$$J_{xy1} = \int_C x_1 y_1 dm = \int_C (y - y_C)(\mathrm{x} - x_C) dm =$$
$$= \int_C yxdm - \int_C yx_C dm - \int_C xy_C dm + \int_C x_C y_C dm =$$
$$= J_{xy} - x_C \int_C ydm - y_C \int_C xdm + x_C y_C \int_C dm = J_{xx} - x_C y_C M;$$
$$J_{xz1} = \int_C x_1 z_1 dm = \int_C (x - x_C)(z - z_C) dm = \tag{3.56}$$
$$= \int_C xzdm - \int_C xz_C dm - \int_C zx_C dm + \int_C x_C z_C dm =$$
$$= J_{xz} - z_C \int_C xdm - x_C \int_C zdm + x_C z_C \int_C dm = J_{xz} - x_C z_C M;$$
$$J_{yz1} = \int_C z_1 y_1 dm = \int_C (z - z_C)(y - y_C) dmdm$$
$$= \int_C yzdm - \int_C yz_C dm - \int_C zy_C dm + \int_C z_C y_C dm =$$
$$= J_{yz} - z_C \int_C ydm - y_C \int_C zdm + z_C y_C \int_C dm = J_{yz} - z_C y_C M.$$

Sub formă matriceală tensorul de inerție în raport cu punctul O_1 (fig.3.7.b), este:

$$[J_{O1}] = \int_C [r'][r']^T dm = \int_C ([r] - [r_0])^T ([r] - [r_0]) dm =$$
$$= \int_C ([r]^T [r] - [r_0]^T [r] - [r]^T [r_0] + [r_0]^T [r_0]) dm = \tag{3.57}$$
$$= [J_O] - [r_0]^T [S_O] + [S_O]^T [r_0] + [r_0][M][r_0]^T; [r] = [r'] + [r_0]; [r'] = [r] - [r_0].$$

unde,

$$[r'][r']^T = -[r'][r']; [S_O] = \int_C [r] dm\,; [S_\mathrm{O}]^T = \int_C [r]^T dm.$$

Pentru cazul în care $O \equiv C$ tensorul de inerție în raport cu centrul de masă al corpului devine:

$$[J_{O1}] = [J_\mathrm{C}] + [r_0][M][r_0]^T; [S_\mathrm{C}] = [0]; \tag{3.58}$$

unde au fost utilizate relațiile,

$$[J_C] = \int_C ([r]^T [r]) dm\,; [r_0][M][r_0]^T = M \begin{bmatrix} \mathrm{z}_0^2 + \mathrm{y}_0^2 & -\mathrm{x}_0\mathrm{y}_0 & -\mathrm{x}_0\mathrm{z}_C \\ -\mathrm{x}_0\mathrm{y}_0 & \mathrm{z}_0^2 + \mathrm{x}_0^2 & -\mathrm{y}_0\mathrm{z}_0 \\ -\mathrm{x}_0\mathrm{z}_0 & -\mathrm{y}_0\mathrm{z}_0 & \mathrm{y}_0^2 + \mathrm{x}_0^2 \end{bmatrix}.$$

3.4.Variația momentelor de inerție mecanice în raport cu axe concurente

Se cunosc momentele de inerție ale unui corp în raport cu un sistem de referință $Oxyz$ și se determină variația momentul de inerție al corpului în raport cu o axă Δ care are orientarea dată de versorul $\vec{u} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

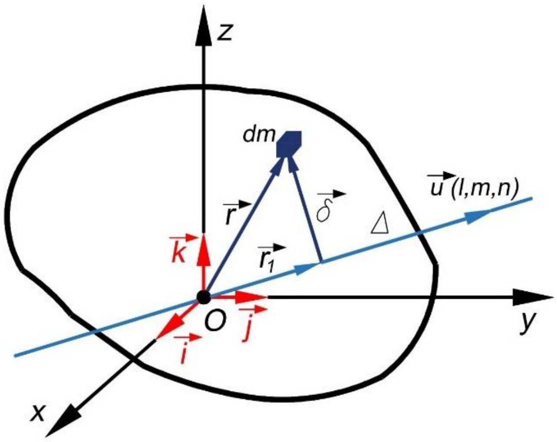


Fig.3.8. Variația momentelor de inerție în raport cu axa Δ.

Între cosinusurile directoare există relația:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{3.59}$$

Momentul de inerție al corpului, în raport cu axa Δ care trece prin originea sistemului de referință, variază în funcție de orientarea versorului $\vec{u}$ și are expresia:

$$J_\Delta = \int_C \delta^2 dm. \tag{3.60}$$

Conform figurii 3.8. distanța de la elementul de masă infinitezimal dm la dreapta Δ, se determina astfel:

$$\begin{gathered}
\vec{r} = \vec{\delta} + \vec{r_1} = \vec{\delta} + (\vec{r}\vec{u})\vec{u}\,;\vec{\delta} = \vec{r} - (\vec{r}\vec{u})\vec{u}\,;\\
\delta^2 = |\vec{r}|^2 - (\vec{r}\vec{u})^2 = (x^2+y^2+z^2)(l^2+m^2+n^2) - (xl+ym+zn)^2 =\\
= x^2(l^2+m^2+n^2) + y^2(l^2+m^2+n^2) + z^2(l^2+m^2+n^2) -\\
-(xl+ym+zn)(xl+ym+zn) =\\
= x^2l^2 + y^2l^2 + z^2l^2 + x^2m^2 + y^2m^2 + z^2m^2 + x^2n^2 + y^2n^2 + z^2n^2 -\\
-x^2l^2 - xylm - xzln - y^2m^2 - yxlm - yzmn - z^2n^2 - zxln - zynm =\\
= (y^2+z^2)l^2 + (x^2+z^2)m^2 + (x^2+y^2)n^2 - 2xylm - 2xzln - 2zynm.
\end{gathered} \tag{3.61}$$

Momentul de inerție J_Δ după înlocuiri devine:

$$J_\Delta = \int_C \delta^2 dm = \int_C (y^2 + z^2) l^2 dm + \int_C (x^2 + z^2) m^2 dm + \int_C (x^2 + y^2) n^2 dm - \\ - \int_C 2xylmdm - \int_C 2xzlndm - \int_C 2zynmdm\,; \tag{3.62}$$

$$J_\Delta = J_{xx} l^2 + J_{yy} m^2 + J_{zz} n^2 - 2J_{xy} lm - 2J_{xz} ln - 2J_{zy} nm;$$

$$J_\Delta = \{u\}^T [J] \{u\}.$$

Deoarece tensorul de inerție $[J]$ intervine în calculul momentului cinetic și a energiei cinetice a unui corp solid rigid, iar cele două mărimi depind de sistemul de referință față de care se calculează, în continuare se determină cum variază tensorul de inerție și momentul static al solidului rigid cu rotația sistemului de referință [1] .

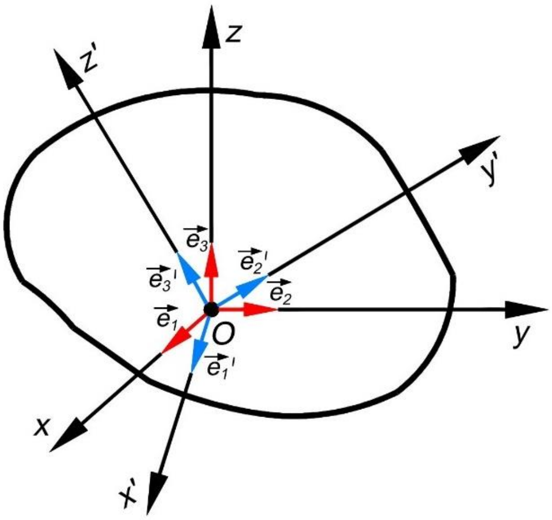


Fig.3.9. Reprezentarea sistemelor de referință $Oe_1e_2e_3$ și $Oe_1'e_2'e_3'$.

Între versorii sistemului de referință $Oe_1e_2e_3$ și versorii sistemului de referință $Oe_1'e_2'e_3'$ (fig.3.9.), se scrie relația matriceală:

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1'}) & (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2'}) & (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3'}) \\ (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1'}) & (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2'}) & (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3'}) \\ (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1'}) & (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2'}) & (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_3'}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overrightarrow{e_1'} \\ \overrightarrow{e_2'} \\ \overrightarrow{e_3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overrightarrow{e_1'} \\ \overrightarrow{e_2'} \\ \overrightarrow{e_3'} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \overrightarrow{e_1'} \\ \overrightarrow{e_2'} \\ \overrightarrow{e_3'} \end{Bmatrix}; \tag{3.63}$$

unde,

l_1, m_1, n_1 sunt cosinușii lui $\overrightarrow{e_1'}$ în raport cu $Oxyz$, $\overrightarrow{e_1'} = (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1'})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1'})\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1'})\overrightarrow{e_3}$;

l_2, m_2, n_2 sunt cosinușii lui $\overrightarrow{e_2'}$ în raport cu $Oxyz$, $\overrightarrow{e_2'} = (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2'})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2'})\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2'})\overrightarrow{e_3}$;

l_3, m_3, n_3 sunt cosinușii lui $\overrightarrow{e_3'}$ în raport cu $Oxyz$, $\overrightarrow{e_3'} = (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3'})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3'})\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_3'})\overrightarrow{e_3}$;

$[T]$ este matricea de rotație.

Un vector $\{v\}$ în sistemul referință $Oe_1e_2e_3$ devine vectorul $\{v'\}$în sistemul de referință $Oe_1'e_2'e_3'$:

$$\{v\} = v_x\overrightarrow{e_1} + v_y\overrightarrow{e_2} + v_z\overrightarrow{e_3} = \{v_xv_yv_z\}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{Bmatrix} = \{v_xv_yv_z\}[T]\begin{Bmatrix}\overrightarrow{e_1'}\\ \overrightarrow{e_2'}\\ \overrightarrow{e_3'}\end{Bmatrix} = \{v'\} =$$
$$= v_x'\overrightarrow{e_1'} + v_y'\overrightarrow{e_2'} + v_z'\overrightarrow{e_3'}; \tag{3.64}$$
$$\begin{Bmatrix}v_x'\\ v_y'\\ v_z'\end{Bmatrix} = [T]^T\begin{Bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{Bmatrix}; [T]^T[T] = [I]; [T]^T = [T]^{-1}.$$

Dacă se cunoaște momentul cinetic al unui solid rigid dat de relația (3.20) față de sistemul de referință $Oe_1e_2e_3$, atunci momentul cinetic față de sistemul de referință $Oe_1'e_2'e_3'$ are forma:

$$\{K_0'\} = [T]^T\{K_o\} = [T]^T([S]\{v_o\} + [J_O]\{\omega\}) =$$
$$= [T]^T[S][T]\{v_0'\} + [T]^T[J_O][T]\{\omega'\}; \{v_o\} = [T]\{v_0'\}; \{\omega\} = [T]\{\omega'\}; \tag{3.65}$$
$$\{K_0'\} = [S']\{v_0'\} + [J_0']\{\omega'\}.$$

Prin identificarea termenilor din relația (3.65) rezultă:

$$[S'] = [T]^T[S][T]; [J_0'] = [T]^T[J_O][T]. \tag{3.66}$$

3.5.Momentele de inerție mecanice principale și direcțiile principale asociate

Din relația (3.66) rezultă că tensorul de inerție mecanic $[J_O]$ are valori diferite față de sistemele de referință cu aceeași origine dar cu orientări diferite. Există un sistem de referință față de care valorile momentelor de inerție au valori extreme. Axele acestui sistem se numesc axe principale de inerție relative la un punct, acele axe concurente în punctul respectiv față de care momentele de inerție au valori extreme [1]. Momentele de inerție în raport cu aceste axe sunt momente principale de inerție.

Pentru a determina momentele de inerție trebuie determinate extremele unei funcții supusă la constrângeri de tip egalitate.

Se utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange și se determină extremul funcției:

$$L(l, m, n) = J_\Delta - \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1), \tag{3.67}$$

unde,

$$J_\Delta = J_{xx}l^2 + J_{yy}m^2 + J_{zz}n^2 - 2J_{xy}lm - 2J_{xz}ln - 2J_{zy}nm;$$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$ este legătura de tip egalitate.

Pentru a determina extremele funcției $L(l, m, n)$ se aplică condițiile de extrem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(l,m,n)}{\partial l} = \frac{\partial J_\Delta}{\partial l} - 2\lambda l = \\
&= 2J_{xx}l - 2J_{xy}m - 2J_{xz}n - 2\lambda l;; \\
&\frac{\partial L(l,m,n)}{\partial m} = \frac{\partial J_\Delta}{\partial m} - 2\lambda m = \\
&= 2J_{yy}m - 2J_{xy}l - 2J_{zy}n - 2\lambda m; \\
&\frac{\partial L(l,m,n)}{\partial n} = \frac{\partial J_\Delta}{\partial n} - 2\lambda n = \\
&= 2J_{zz}n - 2J_{xz}l - 2J_{zy}m - 2\lambda n.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Sub formă matriceală relația (3.68) devine:

$$\begin{bmatrix} J_{xx}-\lambda & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy}-\lambda & J_{zy} \\ J_{xz} & J_{zy} & J_{zz}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \ ([J] - \lambda[I])\{v\} = \{0\};$$
$$\{v\} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}; \ [J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{zy} \\ J_{xz} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3.69}$$

Sistemul de ecuații (3.69) este un sistem de ecuații liniar și omogen care admite soluții nenule $\{v\} \neq \{0\}$, dacă determinantul coeficienților este nul, condiție care se exprimă sub forma:

$$det([J] - \lambda[I]) = 0; \lambda_1 = I_1; \lambda_2 = I_2; \lambda_3 = I_3. \tag{3.70}$$

Ecuația caracteristică (3.70) este un polinom de gradul 3 care are trei soluții care reprezintă valorile momentelor de inerție principale. Pentru a determina direcțiile principale asociate momentelor de inerție principale se rezolvă sistemele de ecuații:

$$\begin{bmatrix} J_{xx}-\lambda_i & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy}-\lambda_i & J_{zy} \\ J_{xz} & J_{zy} & J_{zz}-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; i = 1,2,3 \rightarrow (l_i \ m_i \ n_i) \ i = 1,2,3. \tag{3.71}$$

Tensorul de inerție principal este:

$$[J_{0P}] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}. \tag{3.72}$$

3.6.Razele de inerție sau girație. Elipsoidul de inerție.

Elipsoidul de inerție reprezintă o imagine a modului în care este distribuită din punct de vedere inerțial masa într-un corp [1].

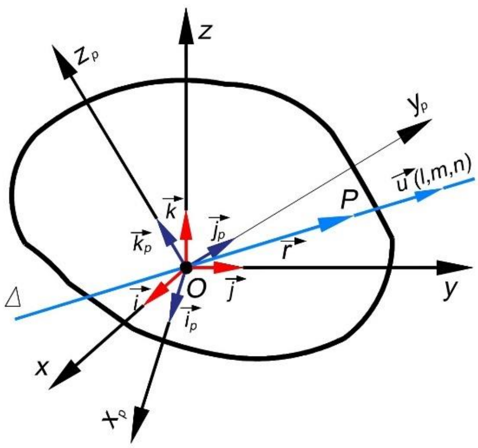


Fig.3.10. Elipsoidul de inerție.

Vectorul de poziție al punctului P situat pe dreapta Δ cu orientarea dată de versorul $\vec{u} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$,conform fig.3.10 se poate scrie:

$$\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|\vec{u} = \frac{k}{\sqrt{J_\Delta}}; \{r\} = \frac{k}{\sqrt{J_\Delta}}\{u\}; \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{k}{\sqrt{J_\Delta}}\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}. \tag{3.73}$$

Dacă dreapta Δ este variabilă ca direcție, atunci locul geometric al punctului P este un elipsoid cu ecuația:

$$J_\Delta = \{u\}^T[J_0]\{u\} = \frac{J_\Delta}{k^2}\{x \quad y \quad z\}[J_0]\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}; \{x \quad y \quad z\}[J_0]\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = k^2. \tag{3.74}$$

În raport cu sistemul de axe principal $Ox_py_pz_p$, dacă (x_p, y_p, z_p) sunt coordonatele în acest sistem de referință, ecuația elipsoidului conform (3.66) și (3.72) devine:

$$\begin{gathered} \{x_p \quad y_p \quad z_p\}[J_{0P}]\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = k^2; \{x_p \quad y_p \quad z_p\}\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = k^2; \\ [J_{0P}] = [T]^T[J_O][T]; \{x_p \quad y_p \quad z_p\} = \{x \quad y \quad z\}[T]; \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = [T]^T\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}; \\ \{x \quad y \quad z\}[T][T]^T[J_O][T][T]^T\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = k^2. \end{gathered} \tag{3.75}$$

Din relația (3.75), rezultă că ecuația elipsoidului față de sistemul de referință principal este:

$$\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{b^2}+\frac{z_p^2}{c^2}=k^2;$$
$$a=\frac{1}{\sqrt{J_1}};b=\frac{1}{\sqrt{J_2}};c=\frac{1}{\sqrt{J_3}}. \tag{3.76}$$

unde k, este o constantă arbitrară ale cărei dimensiuni se aleg astfel încât să rezulte o lungime.

3.7.Tensorul de inerție al unui tetraedru în raport cu sistemul de referință $\boldsymbol{Oxyz}$

Tensorul de inerție mecanic al unui tetraedru (fig.3.6.) în raport axele sistemului de referință $Oxyz$ prin definiție este:

$$[J]=\begin{bmatrix} \int_V (y^2+z^2)\rho dV & -\int_V xy\rho dV & -\int_V xz\rho dV \\ -\int_V yx\rho dV & \int_V (x^2+z^2)\rho dV & -\int_V xz\rho dV \\ -\int_V zx\rho dV & -\int_V zy\rho dV & \int_V (x^2+y^2)\rho dV \end{bmatrix}, \tag{3.77}$$

unde $\rho = ct.$ este densitatea materialului din care este confecționat tetraedrul.

Momentele de inerție principale sunt valorile proprii ale matricei $[J]$ iar direcțiile principale sunt vectori proprii ai matricei $[J]$. Se poate observa că tensorul este simetric si atunci trebuie determinați numai termenii:

$$\begin{gathered} J_{xx}=\rho\int_V (y^2+z^2)dV; \\ J_{yy}=\rho\int_V (x^2+z^2)dV; \\ J_{zz}=\rho\int_V (x^2+y^2)dV; \\ J_{xy}=J_{yx}=-\rho\int_V yxdV; \\ J_{xz}=J_{zx}=-\rho\int_V xzdV; \\ J_{yz}=J_{zy}=-\rho\int_V yzdV. \end{gathered} \tag{3.78}$$

Pentru a determina termenii din matricea tensorului mecanic de inerție $[I]$ se folosește relația (3.45) pentru transformarea de coordonate După integrarea numerică termenii tensorului de inerție mecanică pentru tetraedru sunt:

$$
\begin{aligned}
&J_{xx} = \rho\, det(J) \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} (y(x_n,y_n,z_n)^2 + z(x_n,y_n,z_n)^2) dx_n dy_n dz_n;\\
&J_{yy} = \rho\, det(J) \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} (x(x_n,y_n,z_n)^2 + z(x_n,y_n,z_n)^2) dx_n dy_n dz_n\,;\\
&J_{zz} = \rho det(J) \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} (x(x_n,y_n,z_n)^2 + y(x_n,y_n,z_n)^2) dx_n dy_n dz_n;\\
&J_{xy} = -\rho\, det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} x(x_n,y_n,z_n) \cdot y(x_n,y_n,z_n) dx_n dy_n dz_n;\\
&J_{xz} = -\rho\, det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} x(x_n,y_n,z_n) \cdot z(x_n,y_n,z_n) dx_n dy_n dz_n;\\
&J_{yz} = -\rho\, det(J) \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_n} \int_0^{1-x_n-y_n} y(x_n,y_n,z_n) \cdot z(x_n,y_n,z_n) dx_n dy_n dz_n;
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

unde, au fost folosite relațiile;

$dV = dxdydz = det(J)dx_n dy_n dz_n;$

$$
det(J) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_n} & \frac{\partial x}{\partial y_n} & \frac{\partial x}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} & \frac{\partial y}{\partial y_n} & \frac{\partial y}{\partial z_n} \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} & \frac{\partial z}{\partial y_n} & \frac{\partial z}{\partial z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}.
$$

De asemenea se poate defini tensorul de inerție geometric sub forma:

$$
\begin{aligned}
[I] &= \begin{bmatrix} \int_V (y^2+z^2)dV & -\int_V xydV & -\int_V xzdV \\ -\int_V yxdV & \int_V (x^2+z^2)dV & -\int_V xzdV \\ -\int_V zxdV & -\int_V zydV & \int_V (x^2+y^2)dV \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \int_V (y^2+z^2)\rho dV & -\int_V xy\rho dV & -\int_V xz\rho dV \\ -\int_V yx\rho dV & \int_V (x^2+z^2)\rho dV & -\int_V xz\rho dV \\ -\int_V zx\rho dV & -\int_V zy\rho dV & \int_V (x^2+y^2)\rho dV \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

Relația care există între tensorul de inerție mecanic și geometric rezultă din relația (3.57). Tensorul de inerție mecanic se exprimă în funcție de tensorul de inerție geometric sub forma:

$$[I] = \frac{1}{\rho}[J]. \tag{3.81}$$

Pentru a determina tensorul de inerție al unui tetraedru cu relațiile obținute, se prezintă mai jos un program scris în cod Matlab folosind calculul simbolic [3].

```
%Geometric static and inertial thetraedron characteristics
%according to the coordinates of the vertices
clf;
clear;
syms  xn yn zn x1 x2 x3 x4 y1 y2 y3 y4 z1 z2 z3 z4 x y z V
%Transforming real coordinates(x,y,z) into normalized coordinates (xn,yn,zn)
x=x1+(x2-x1)*xn+(x3-x1)*yn+(x4-x1)*zn;
y=y1+(y2-y1)*xn+(y3-y1)*yn+(y4-y1)*zn;
z=z1+(z2-z1)*xn+(z3-z1)*yn+(z4-z1)*zn;
%The Jacobian matrix (J) for coordinate transformation and the determinant of J
J = jacobian([x; y;z], [xn, yn,zn]);
detJ=det(J);
%The volume of a thetraedron as a function of vertex coordinates
%detJ = 6 *Volume
Vi=[x1 y1 z1 1
   x2 y2 z2 1
   x3 y3  z3 1
   x4 y4  z4 1];
Volume=1/6*det(Vi);
%Static moments according to the coordinates of the vertices
gx=x;gy=y;gz=z;
Syoz=6 * V*simplify(int((int(((int(gx,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
Sxoz=6 * V*simplify(int((int(((int(gy,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
Sxoy=6 * V*simplify(int((int(((int(gz,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
%The coordinates of the center of mass triangle according
%to the coordinates of the vertices
xg=Syoz/V
yg=Sxoz/V
zg=Sxoy/V
%Moments of inertia based on the coordinate triangle vertices
fxx=simplify(z^2+y^2);fyy=simplify(x^2+z^2);fzz=simplify(x^2+y^2);
fxy=simplify(x*y);fxz=simplify(x*z);fyz=simplify(y*z);
%Axial moments of inertia
Ixx=6 * V*simplify(int((int(((int(fxx,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
Iyy=6 * V*simplify(int((int(((int(fyy,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
Izz=6 * V*simplify(int((int(((int(fzz,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
%Centrifugal moments of inertia
Ixy=6 * V*simplify(int((int(((int(fxy,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
Ixz=6 * V*simplify(int((int(((int(fxz,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
Iyz=6 * V*simplify(int((int(((int(fyz,zn,0,1-xn-yn))),yn,0,1-xn)),xn,0,1))
```

3.8.Determinarea numerică a caracteristicilor geometrice statice și inerțiale ale corpurilor cu configurație complexă

Se consideră corpul tridimensional cu configurație complexă din fig3.11. pentru care se vor determina numeric caracteristicile geometrice statice și inerțiale. Corpul se discretizează în n elemente finite de tip tetraedru [2]. Se determină caracteristicile pentru fiecare tetraedru în funcție de coordonatele vârfurilor față de un sistem de referință global

$Ox_gy_gz_g$ cu relațiile (3.77)-(3.81). Vârfurile tetraedrului sunt definite de punctele $P_{1i}(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}), P_{2i}(x_{2i}, y_{2i}, z_{2i}), P_{3i}(x_{3i}, y_{3i}, z_{3i})$și $P_{4i}(x_{4i}, y_{4i}, z_{4i})$.

Pentru întregul corp caracteristicile se determină folosind relațiile lui Steiner (3.55)-(3.56). Tensorul de inerție principal central și direcțiile principale asociate de obțin prin rezolvarea problemei de vectori și valori proprii conform relației (3.69).

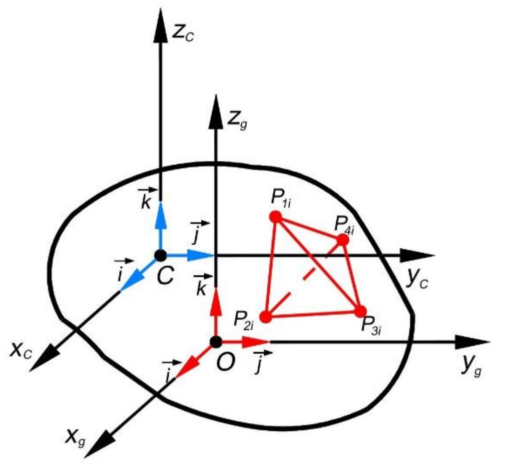


Fig.3.11.Discretizarea unui corp în n tetraedre.

Volumul și coordonatele centrului de masă pentru un tetraedru generic i se determină cu relațiile:

$$V_i = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_{i1} & y_{i1} & z_{i1} & 1 \\ x_{i2} & y_{i2} & z_{i2} & 1 \\ x_{i3} & y_{i3} & z_{i3} & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}; x_{Ci} = \frac{x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i}}{4}; \tag{3.82}$$

$$y_{Ci} = \frac{y_{1i} + y_{2i} + y_{3i} + y_{4i}}{4}; z_{Ci} = \frac{z_{1i} + z_{2i} + z_{3i} + z_{4i}}{4}; i = 1...n.$$

Momentele statice în raport cu planele xOy xOz și yOz ale tetraedrului generic i sunt:

$$S_{xOy} = \frac{6V_i}{24}(z_{1i} + z_{2i} + z_{3i} + z_{4i}); S_{xOz} = \frac{6V_i}{24}(y_{1i} + y_{2i} + y_{3i} + y_{4i}); \tag{3.83}$$

$$S_{yOz} = \frac{6V_i}{24}(x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i});\ i = 1...n.$$

Volumul total, centrul de masă și momentele statice al corpului tridimensional discretizat în n tetraedre este:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i; x_C = \sum_{i=1}^{n} x_{Ci}V_i\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right)^{-1}; y_C = \sum_{i=1}^{n} y_{Ci}V_i\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right)^{-1}; \tag{3.84}$$

$$z_C = \sum_{i=1}^{n} z_{Ci} V_i \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \right)^{-1} ;\ i = 1 \ldots n.$$

Momentele de inerție mecanice axiale pentru un tetraedru generic i extras din discretizarea corpului în n tetraedre, sunt:

$$I_{xxi} = 6V_i\rho({y_{1i}}^2 + y_{1i}y_{2i} + y_{1i}y_{3i} + y_{1i}y_{4i} + {y_{2i}}^2 + y_{2i}y_{3i} + y_{2i}y_{4i} + {y_{3i}}^2 + y_{3i}y_{4i} +$$
$$+{y_{4i}}^2 + {z_{1i}}^2 + z_{1i}z_{2i} + z_{1i}z_{3i} + z_{1i}z_{4i} + {z_{2i}}^2 + z_{2i}z_{3i} + z_{2i}z_{4i} + {z_{3i}}^2 + z_{3i}z_{4i} + {z_{4i}}^2)/60;$$
$$I_{yyi} = 6V_i\rho({x_{1i}}^2 + x_{1i}x_{2i} + x_{1i}x_{3i} + x_{1i}x_{4i} + {x_{2i}}^2 + x_{2i}x_{3i} + x_{2i}x_{4i} + {x_{3i}}^2 + x_{3i}x_{4i} +$$
$$+{x_{4i}}^2 + {z_{1i}}^2 + z_{1i}z_{2i} + z_{1i}z_{3i} + z_{1i}z_{4i} + {z_{2i}}^2 + z_{2i}z_{3i} + z_{2i}z_{4i} + {z_{3i}}^2 + z_{3i}z_{4i} + {z_{4i}}^2)/60;$$
$$I_{zzi} = 6V_i\rho({x_{1i}}^2 + x_{1i}x_{2i} + x_{1i}x_{3i} + x_{1i}x_{4i} + {x_{2i}}^2 + x_{2i}x_{3i} + x_{2i}x_{4i} + {x_{3i}}^2 + x_{3i}x_{4i} +$$
$$+{x_{4i}}^2 + {y_{1i}}^2 + y_{1i}y_{2i} + y_{1i}y_{3i} + y_{1i}y_{4i} + {y_{2i}}^2 + y_{2i}y_{3i} + y_{2i}y_{4i} + {y_{3i}}^2 + y_{3i}y_{4i} + {y_{4i}}^2)/60.$$

Momentele de inerție mecanice centrifugale pentru un tetraedru generic i extras din discretizarea corpului în n teraedre, sunt:

$$I_{xiyi} = 6V_i\rho((x_{1i}y_{1i} + x_{2i}y_{2i} + x_{3i}y_{3i} + x_{4i}y_{4i})/60 +$$
$$+(x_{1i}y_{2i} + x_{2i}y_{1i} + x_{1i}y_{3i} + x_{3i}y_{1i} + x_{1i}y_{4i} + x_{2i}y_{3i} + x_{3i}y_{2i} + x_{4i}y_{1i} +$$
$$+x_{2i}y_{4i} + x_{4i}y_{2i} + x_{3i}y_{4i} + x_{4i}y_{3i})/120)\ ;$$
$$I_{xizi} = 6V_i\rho((x_{1i}z_{1i} + x_{2i}z_{2i} + x_{3i}z_{3i} + x_{4i}z_{4i})/60 +$$
$$+(x_{1i}z_{2i} + x_{2i}z_{1i} + x_{1i}z_{3i} + x_{3i}z_{1i} + x_{1i}z_{4i} + x_{2i}z_{3i} + x_{3i}z_{2i} + x_{4i}z_{1i} +$$
$$+x_{2i}z_{4i} + x_{4i}z_{2i} + x_{3i}z_{4i} + x_{4i}z_{3i})/120)\ ;$$
$$I_{ziyi} = 6V_i\rho((z_{1i}y_{1i} + z_{2i}y_{2i} + z_{3i}y_{3i} + z_{4i}y_{4i})/60 +$$
$$+(y_{1i}z_{2i} + y_{2i}z_{1i} + y_{1i}z_{3i} + y_{3i}z_{1i} + y_{1i}z_{4i} + y_{2i}z_{3i} + y_{3i}z_{2i} + y_{4i}z_{1i} +$$
$$+y_{2i}z_{4i} + y_{4i}z_{2i} + y_{3i}z_{4i} + y_{4i}z_{3i})/120)\ .$$

Pentru corpul tridimensional din fig. 3.11. discretizat în tetraedre, componentele din tensorul de inerție în raport cu centrul de masă conform relațiilor lui Steiner (3.55)-(3.56) sunt:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} I_{xxi}; I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} I_{yyi}; I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} I_{zzi}; I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xiyi};$$
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} I_{yizi}; I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} I_{xizi};\ m = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho V_i\ ; \tag{3.85}$$
$$I_{xxC} = I_{xx} - m(y_C^2 + z_C^2); I_{yyC} = I_{yy} - m(x_C^2 + z_C^2); I_{zzC} = I_{zz} - m(z_C^2 + y_C^2);$$

$$I_{xyC} = I_{xy} - mx_C^2y_C^2; I_{xzC} = I_{xz} - mx_C^2z_C^2; I_{yzC} = I_{yz} - my_C^2z_C^2.$$

unde,

-$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{zy}, I_{xz}$, momentele de inerție ale corpului în raport cu sistemul de referință global $Ox_gy_gz_g$;

-$I_{xxC}, I_{yyC}, I_{ZZC}, I_{xyC}, I_{zyC}, I_{xzC}$, momentele de inerție ale corpului în raport cu sistemului de referință $Ox_Cy_Cz_C$ cu originea în centrul de masa C al corpului și care are axele paralele cu axele sistemului de referință $Ox_gy_gz_g$.

3.9.Parametri de poziție unui solid rigid în mișcare generală

Se consideră un solid rigid în mișcare generală. Mișcarea solidului rigid este cunoscută la fiecare moment de timp dacă se poate determina poziția oricărui punct arbitrar P al solidului rigid în raport cu un sistem de referință global $Ox_gy_gz_g$ prin ecuația vectorială de poziție fig.3.12:

$$\overrightarrow{r_g} = \overrightarrow{r_g}(t) = x_g(t)\overrightarrow{\iota_g} + y_g(t)\overrightarrow{\jmath_g} + z_g(t)\overrightarrow{k_g}. \quad (3.86)$$

Pentru studiul mișcării solidului rigid se atașează un sistem de referință $Cx_ly_lz_l$ invariabil legat de solid cu originea în centrul de masă C al solidului . Versorii sistemului mobil $Ox_ly_lz_l$ notați cu $\overrightarrow{\iota_l}, \overrightarrow{\jmath_l}$ și $\overrightarrow{k_l}$ își schimbă poziția în timpul mișcării adică $\overrightarrow{\iota_l} = \overrightarrow{\iota_l}(t), \overrightarrow{\jmath_l} = \overrightarrow{\jmath_l}(t)$ și $\overrightarrow{k_l} = \overrightarrow{k_l}(t)$.

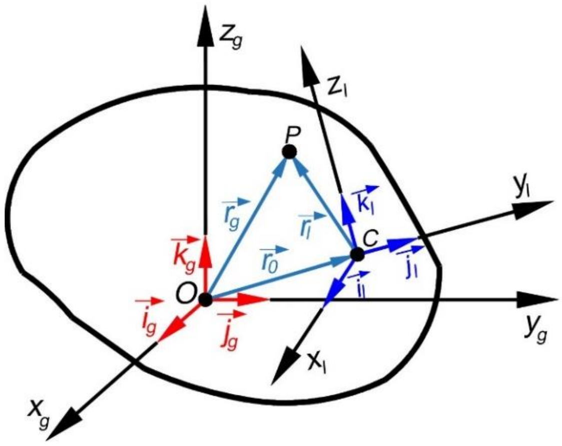


Fig.3.12.Parametri de poziție ai unui solid rigid.

Coordonatele punctului arbitrar P față de sistemul de referință $Ox_ly_lz_l$ sunt:

$$\overrightarrow{r_l} = \overrightarrow{r_l}(t) = x_l(t)\overrightarrow{\iota_l} + y_l(t)\overrightarrow{\jmath_l} + z_l(t)\overrightarrow{k_l}. \quad (3.87)$$

Poziția la un moment de timp t a sistemului de referință $Cx_ly_lz_l$ în raport cu sistemul de referință $Ox_gy_gz_g$, va fi dată de următorii 6 parametrii geometrici care sunt funcții de timp:

-poziția origini C a sistemului mobil $Cx_ly_lz_l$ în raport cu sistemul fix (inerțial) $Ox_gy_gz_g$ descrisă de vectorul de poziție,

$$\vec{r_0} = \vec{r_0}(t) = x_0(t)\vec{\iota_g} + y_0(t)\vec{J_g} + z_0(t)\vec{k_g}; \tag{3.88}$$

-cele 9 cosinusuri directoare care determină direcțiile variabile ale versorilor $\vec{\iota_l}(t), \vec{J_l}(t)$ și $\vec{k_l}(t)$ în raport cu sistemul de referință fix (inerțial) $Ox_gy_gz_g$,

$$\begin{aligned}
\vec{\iota_l} &= (\vec{\iota_l}\vec{\iota_g})\vec{\iota_g} + (\vec{\iota_l}\vec{J_g})\vec{J_g} + (\vec{\iota_l}\vec{k_g})\vec{k_g} = l_1\vec{\iota_g} + m_1\vec{J_g} + n_1\vec{k_g};\\
\vec{J_l} &= (\vec{J_l}\vec{\iota_g})\vec{\iota_g} + (\vec{J_l}\vec{J_g})\vec{J_g} + (\vec{J_l}\vec{k_g})\vec{k_g} = l_2\vec{\iota_g} + m_2\vec{J_g} + n_2\vec{k_g};\\
\vec{k_l} &= (\vec{k_l}\vec{\iota_g})\vec{\iota_g} + (\vec{k_l}\vec{J_g})\vec{J_g} + (\vec{k_l}\vec{k_g})\vec{k_g} = l_3\vec{\iota_g} + m_3\vec{J_g} + n_3\vec{k_g}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Deoarece versorii aceluiași sistem de referință sunt perpendiculari între ei, doi câte doi, între cei 9 cosinuși directori există următoarele șase relații:

$$\begin{aligned}
\vec{\iota_l}\vec{\iota_l} &= 1; {l_1}^2 + {m_1}^2 + {n_1}^2 = 1;\\
\vec{J_l}\vec{J_l} &= 1; {l_2}^2 + {m_2}^2 + {n_2}^2 = 1;\\
\vec{k_l}\vec{k_l} &= 1; {l_3}^2 + {m_3}^2 + {n_3}^2 = 1;\\
\vec{\iota_l}\vec{J_l} &= 1; l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0;\\
\vec{J_l}\vec{k_l} &= 1; l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = 0;\\
\vec{\iota_l}\vec{k_l} &= 1; l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Rezultă, că din nouă cosinusuri directoare doar trei sunt independente. Cele trei cosinusuri directoare pot fi înlocuite cu trei unghiuri cunoscute sub numele de unghiurile lui Euler [4].

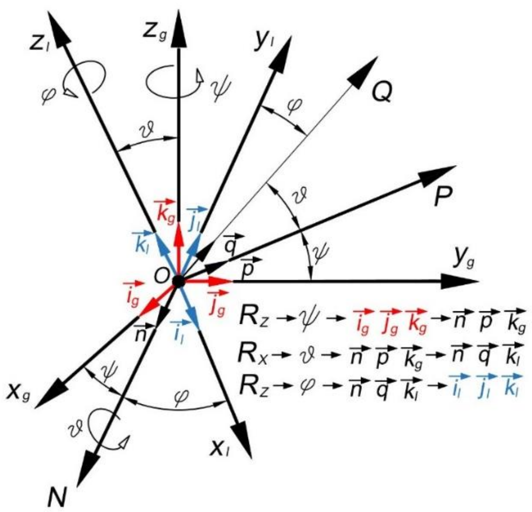


Fig.3.13.Unghiurile lui Euler.

Cu ajutorul unghiurilor lui Euler se pot exprima în mod unic cele 9 cosinusuri directoare. Prin transformări succesive de rotație se trece de la cele 9 cosinusuri directoare la unghiurile lui Euler ψ (precesia), θ (nutația) și φ (rotația proprie) (fig.3.13):

$$\begin{Bmatrix}\vec{i_l}\\ \vec{j_l}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{i_g}\\ \vec{j_g}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix};\begin{Bmatrix}\vec{i_g}\\ \vec{j_g}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\psi & -sin\psi & 0\\ sin\psi & cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{n}\\ \vec{p}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix}=[R_z(\psi)]\begin{Bmatrix}\vec{n}\\ \vec{p}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}\vec{n}\\ \vec{p}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\theta & -sin\theta\\ 0 & sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}=[R_x(\theta)]\begin{Bmatrix}\vec{n}\\ \vec{q}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix};\begin{Bmatrix}\vec{n}\\ \vec{q}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\varphi & -sin\varphi & 0\\ sin\varphi & cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{i_l}\\ \vec{j_l}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}\vec{n}\\ \vec{q}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix}=[R_z(\varphi)]\begin{Bmatrix}\vec{i_l}\\ \vec{j_l}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix};\begin{Bmatrix}\vec{i_g}\\ \vec{j_g}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix}=[R_z(\psi)][R_x(\theta)][R_z(\varphi)]\begin{Bmatrix}\vec{i_g}\\ \vec{j_g}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix}=[R_E]\begin{Bmatrix}\vec{i_l}\\ \vec{j_l}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}\vec{i_l}\\ \vec{j_l}\\ \vec{k_l}\end{Bmatrix}=[R]\begin{Bmatrix}\vec{i_g}\\ \vec{j_g}\\ \vec{k_g}\end{Bmatrix};[R_E]=[R]^{-1}. \tag{3.91}$$

În fig.3.14 a-c sunt prezentate cele trei tipuri de transformări de rotație ale versorilor dintr-un sistem de referință triortogonal drept neinerțial (SRN) într-un sistem de referință triortogonal drept inerțial fix (SRI).

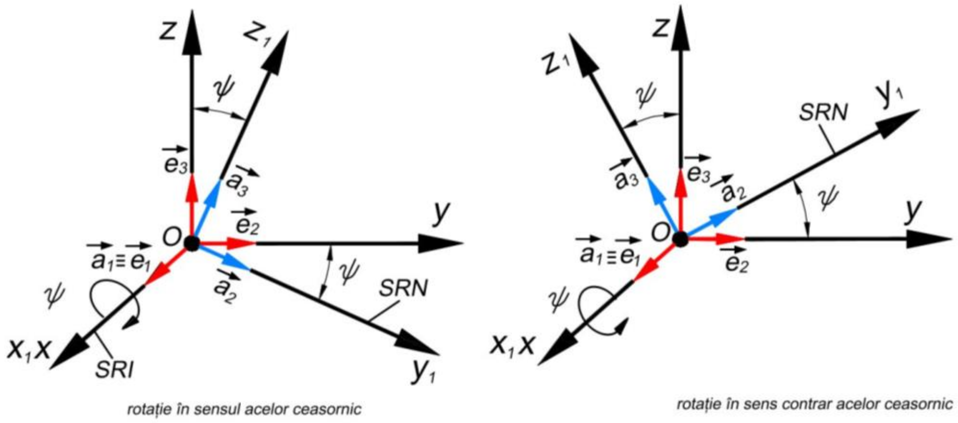


Fig.3.14.a.Rotația în jurul axei Ox.

Matricele de rotație în jurul axei x corespunzătoare sensului orar și anti orar de rotație (fig.3.14.a) sunt:

$$[R_x(\psi)]_{orar}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\psi & -sin\psi\\ 0 & sin\psi & cos\psi\end{bmatrix};[R_x(\psi)]_{anti\_orar}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\psi & sin\psi\\ 0 & -sin\psi & cos\psi\end{bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=[R_x(\psi)]_{orar}\begin{Bmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{Bmatrix}; \tag{3.92}$$

$$\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=[R_x(\psi)]_{anti\_orar}\begin{Bmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{Bmatrix}.$$

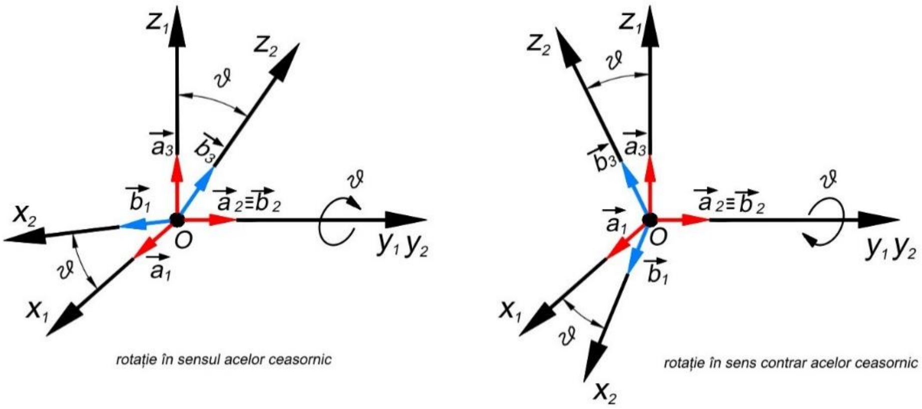


Fig.3.14.b. Rotația în jurul axei Oy.

Matricele de rotație în jurul axei y corespunzătoare sensului orar și anti orar de rotație (fig.3.14.b) sunt:

$$\left[R_y(\theta)\right]_{orar} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}; \left[R_y(\theta)\right]_{anti\_orar} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix};$$
$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \left[R_y(\theta)\right]_{orar} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \left[R_y(\theta)\right]_{anti\_orar} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.93)$$

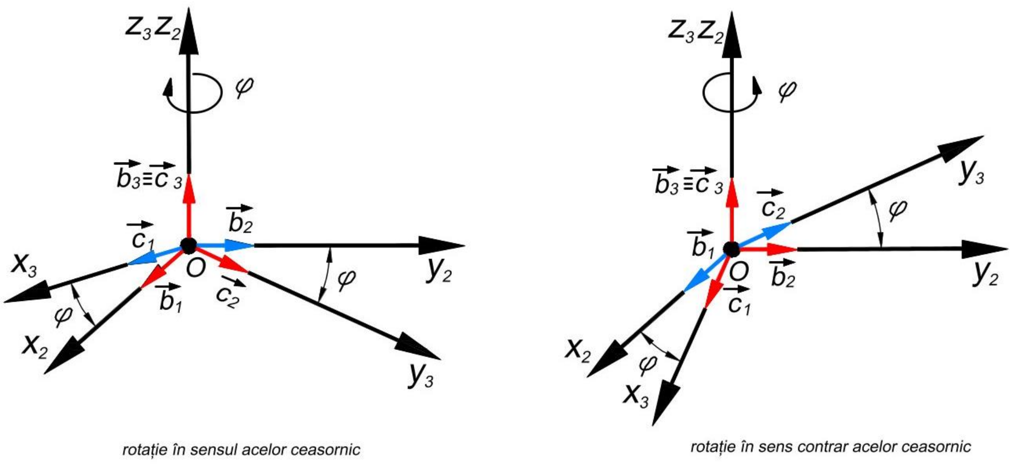


Fig.3.14.c. Rotația în jurul axei Oz.

Matricele de rotație în jurul axei z corespunzătoare sensului orar și anti orar de rotație (fig.3.14.c) sunt:

$$[R_z(\varphi)]_{orar} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [R_z(\varphi)]_{anti\_orar} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$
$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = [R_z(\varphi)]_{orar} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = [R_z(\varphi)]_{orar} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.94)$$

Relația de legătură între versorii în cele trei sisteme de referință, se obține din relațiile (3.92), (3.93) și (3.94):

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = [R_z(\varphi)]_{orar} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = [R_z(\varphi)]_{orar}\left[R_y(\theta)\right]_{orar}[R_x(\psi)]_{orar} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix};$$
$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \left([R_z(\varphi)]_{orar}\left[R_y(\theta)\right]_{orar}[R_x(\psi)]_{orar}\right)^{-1} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.95)$$

În cazul unei rotații generale $[R]$ compusă din trei rotații succesive relația de calcul devine:

$$[\mathrm{R}] = [R_z(\varphi)]\left[R_y(\theta)\right][R_x(\psi)] =$$
$$= \begin{bmatrix} cos\theta cos\varphi & cos\varphi sin\psi sin\theta - cos\psi sin\varphi & cos\varphi cos\psi sin\theta + sin\psi sin\varphi \\ cos\theta sin\varphi & cos\varphi cos\psi + sin\psi sin\theta sin\varphi & -cos\varphi cos\psi + cos\varphi sin\theta sin\varphi \\ -sin\theta & cos\theta sin\psi & cos\theta cos\psi \end{bmatrix} = \quad (3.96)$$
$$= \begin{bmatrix} V(1,1) & V(1,2) & V(1,3) \\ V(2,1) & V(2,2) & V(2,3) \\ V(3,1) & V(3,2) & V(3,3) \end{bmatrix}.$$

Prin identificare se găsesc unghiurile de rotație corespunzătoare rotației generalizate $[R]$.

$$V(3,1) = -sin\theta \to \theta = \arcsin\,(V(3,1));$$
$$\frac{V(3,2)}{V(3,3)} = \frac{cos\theta sin\psi}{cos\theta cos\psi} = \frac{sin\psi}{cos\psi} = tg\psi \to \psi = atan\left(\frac{V(3,2)}{V(3,3)}\right); \quad (3.97)$$
$$\frac{V(2,1)}{V(1,1)} = \frac{cos\theta sin\varphi}{cos\theta cos\varphi} = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = tg\varphi \to \varphi = atan\left(\frac{V(2,1)}{V(1,1)}\right).$$

Relațiile (3.97) au fost utilizate în programul de determinare numerică a caracteristicilor geometrice statice și inerțiale ale corpurilor cu configurație complexă, pentru a găsi direcțiile elipsei centrale de inerție.

În analiza dinamică a corpurilor o rotație generală se poate descompune în trei rotații succesive liniar independente. Pentru analiza dinamică sunt posibile 12 transformări de rotație și anume:

$$[R_x(\psi)]\left[R_y(\theta)\right][R_z(\varphi)];\left[R_y(\theta)\right][R_x(\varphi)][R_z(\psi)];[R_z(\varphi)][R_x(\psi)]\left[R_y(\theta)\right];$$
$$[R_x(\psi)][R_z(\varphi)]\left[R_y(\theta)\right];\left[R_y(\theta)\right][R_z(\psi)][R_x(\varphi)];[R_z(\varphi)]\left[R_y(\theta)\right][R_x(\psi)];$$
$$[R_x(\varphi)]\left[R_y(\psi)\right][R_x(\varphi)];\left[R_y(\psi)\right][R_x(\theta)]\left[R_y(\psi)\right];[R_z(\theta)][R_x(\varphi)][R_z(\theta)];$$
$$[R_x(\varphi)][R_z(\theta)][R_x(\varphi)];\left[R_y(\psi)\right][R_z(\varphi)]\left[R_y(\psi)\right];[R_z(\theta)]\left[R_y(\psi)\right][R_z(\theta)].$$

Pentru analiza dinamică a vehiculelor terestre, navale și aerospațiale unde rotațiile sunt relativ mici se utilizează în mod uzual transformări de tip Tait-Brayn $[R(\varphi,\theta,\psi)] = = [R_z(\varphi)][R_y(\theta)][R_x(\psi)], (\varphi - roll, \theta - pitch, \psi - roll)$.

Pentru generarea tuturor posibilităților de decompoziție a unei rotații generale în trei rotații succesive, este prezentat mai jos un program în cod Matlab [3].

```
%All twelve posibilities of rotations
Clear
syms  teta psi fi
%Clockwise rotation
Rx=[1     0         0
     0    cos(fi)   sin(fi)
      0  -sin(fi)  cos(fi)];
Ry=[cos(teta) 0  -sin(teta)
           0      1      0
       sin(teta) 0 cos(teta)];
Rz=[cos(psi)  sin(psi)  0
       -sin(psi) cos(psi)  0
                0      0       1];
%Counter clockwise rotation
Rxx=[1     0         0
        0  cos(fi)   -sin(fi)
        0  sin(fi)  cos(fi)];
Ryy=[cos(teta) 0  sin(teta)
             0      1      0
        -sin(teta) 0 cos(teta)];
Rzz=[cos(psi)  -sin(psi)  0
          sin(psi) cos(psi)  0
                  0      0       1];
%Clockwise rotation
Rxyzd=simplify(Rx*Ry*Rz);   %Tait Brayn in vehicle dynamics and aeronautics
%yaw(z)-psi/pitch(y)-teta/roll(x)-fi
Ryxzd=simplify(Ry*Rx*Rz);
Rzxyd=simplify(Rz*Rx*Ry);
Rxzyd=simplify(Rx*Rz*Ry);
Ryzxd=simplify(Ry*Rz*Rx);
Rzyxd=simplify(Rz*Ry*Rx);
Rxyxd=simplify(Rx*Ry*Rx);
Ryxyd=simplify(Ry*Rx*Ry);
Rzxzd=simplify(Rz*Rx*Rz);
Rxzxd=simplify(Rx*Rz*Rx);
Ryzyd=simplify(Ry*Rz*Ry);
Rzyzd=simplify(Rz*Ry*Rz);%for dynamics of gyroscopes
%Counter clockwise rotation
Rxyz=simplify(Rxx*Ryy*Rzz); %Tait Brayn in vehicle dynamics and aeronautics
%yaw(z)-psi/pitch(y)-teta/roll(x)-fi
Ryxz=simplify(Ryy*Rxx*Rzz);
Rzxy=simplify(Rzz*Rxx*Ryy);
Rxzy=simplify(Rxx*Rzz*Ryy);
Ryzx=simplify(Ryy*Rzz*Rxx);
Rzyx=simplify(Rzz*Ryy*Rxx);
Rxyx=simplify(Rxx*Ryy*Rxx);
Ryxy=simplify(Ryy*Rxx*Ryy);
Rzxz=simplify(Rzz*Rxx*Rzz);
Rxzx=simplify(Rxx*Rzz*Rxx);
Ryzy=simplify(Ryy*Rzz*Ryy);
Rzyz=simplify(Rzz*Ryy*Rzz); %for dynamics of gyroscopes
```

Pentru o rotație generalizată a unui solid rigid există o axă instantanee față de care are loc rotația. Deci, pentru a cunoaște orientarea unui solid rigid trebuie determinată axa de rotație și unghiul cu care rigidul se rotește în sens orar sau anti orar. De aceea pentru orientarea sistemului de referință atașat solidului în raport cu sistemul de referință inerțial se poate folosi formula Euler-Rodriguez [5].

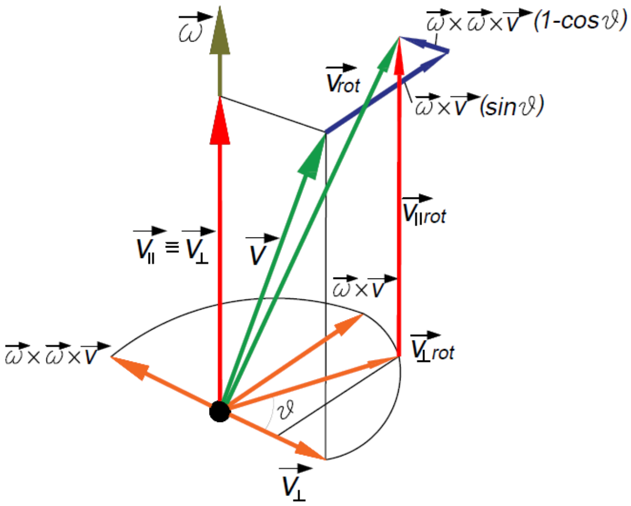


Fig.3.15.Rotația cu θ a unui solid, în raport cu axa instantanee de rotație definită de $\vec{\omega}$.

Se consideră conform figurii 3.15, vectorul $\vec{v}$ care se rotește în jurul axei $\vec{\omega}$ cu unghiul θ. Vectorul $\vec{v}$ se descompune după direcția lui $\vec{\omega}$ și după o direcție perpendiculară pe $\vec{\omega}$ obținându-se relațiile:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_\parallel} + \overrightarrow{v_\perp}; \overrightarrow{v_\parallel} = (\vec{v}\vec{\omega})\vec{\omega}; \overrightarrow{v_\perp} = \vec{v} - \overrightarrow{v_\parallel} = \vec{v} - (\vec{v}\vec{\omega})\vec{\omega} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}); \tag{3.98}$$
$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) = (\vec{\omega}\vec{v})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\vec{\omega})\vec{v} = (\vec{\omega}\vec{v})\vec{\omega} - \vec{v} \rightarrow \vec{v} - (\vec{v}\vec{\omega})\vec{\omega} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{v}).$$

Vectorul rotit $\overrightarrow{v_{rot}}$ se descompune de asemenea după o direcție paralelă și una perpendiculară pe direcția lui $\vec{\omega}$, obținându-se relația dintre vectorul $\vec{v}$ și vectorul $\overrightarrow{v_{rot}}$:

$$\overrightarrow{v_{rot}} = \overrightarrow{v_{\parallel rot}} + \overrightarrow{v_{\perp rot}}; \overrightarrow{v_\parallel} = \overrightarrow{v_{\parallel rot}}; |\overrightarrow{v_{\perp rot}}| = |\overrightarrow{v_\perp}|;$$
$$\overrightarrow{v_{\perp rot}} = (\overrightarrow{v_{\perp rot}}\cdot\overrightarrow{v_\perp})\overrightarrow{v_\perp} + \left(\overrightarrow{v_{\perp rot}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{v})\right)(\vec{\omega}\times\vec{v}) = \overrightarrow{v_\perp}cos\theta + (\vec{\omega}\times\vec{v})sin\theta;$$
$$\overrightarrow{v_{rot}} = \overrightarrow{v_{\parallel rot}} + \overrightarrow{v_{\perp rot}} = \overrightarrow{v_\parallel} + \overrightarrow{v_\perp}cos\theta + (\vec{\omega}\times\vec{v})sin\theta = \tag{3.99}$$
$$= \overrightarrow{v_\parallel} + (\vec{v} - \overrightarrow{v_\parallel})cos\theta + (\vec{\omega}\times\vec{v})sin\theta = \vec{v}cos\theta + (1 - cos\theta)\overrightarrow{v_\parallel} + (\vec{\omega}\times\vec{v})sin\theta =$$
$$= \vec{v}cos\theta + (1 - cos\theta)\overrightarrow{v_\parallel} + (\vec{\omega}\times\vec{v})sin\theta;$$
$$\overrightarrow{v_{\perp rot}} = \vec{v}cos\theta + (1 - cos\theta)(\vec{v}\vec{\omega})\vec{\omega} + (\vec{\omega}\times\vec{v})sin\theta.$$

Relația vectorială (3.99) se mai poate exprima și sub forma:

$$\overrightarrow{v_{rot}} = \vec{v}cos\theta + (\vec{\omega} \times \vec{v})sin\theta + (1 - cos\theta)(\vec{v} - \overrightarrow{v_{\perp}}) =$$
$$= \vec{v}cos\theta + (\vec{\omega} \times \vec{v})sin\theta + (1 - cos\theta)\big(\vec{v} - (-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})\big) = \quad (3.100)$$
$$= \vec{v}(cos\theta + 1 - cos\theta) + (\vec{\omega} \times \vec{v})sin\theta + (1 - cos\theta)\big(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})\big);$$
$$\overrightarrow{v_{rot}} = \vec{v} + (\vec{\omega} \times \vec{v})sin\theta + \big(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})\big)(1 - cos\theta).$$

Sub formă matriceală relația (3.100) devine:

$$\{v_{rot}\} = \{v\} + [\Omega]\{v\}sin\theta + [\Omega][\Omega]\{v\}(1 - cos\theta); \quad (3.101)$$
$$\{v_{rot}\} = \{v\} + [\Omega]\{v\}sin\theta + [\Omega]^2\{v\}(1 - cos\theta);$$
$$\{v_{rot}\} = \{v\}\big([I] + [\Omega]sin\theta + [\Omega]^2(1 - cos\theta)\big) = \{v\}[R(\theta, \omega)]$$

unde,

$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$ este matricea antisimetrică care conține componenetele versorului $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{j}$ în jurul căruia are loc rotația.

Matricea de rotație $[R(\theta, \omega)]$ se poate obține prin dezvoltarea în serie Taylor [5] pentru cu relația:

$$e^{\theta[\Omega]} = [I] + \frac{\theta}{1!}[\Omega] + \frac{\theta^2}{2!}[\Omega]^2 + \frac{\theta^3}{3!}[\Omega]^3 + \frac{\theta^4}{4!}[\Omega]^4 + \frac{\theta^5}{5!}[\Omega]^5 + \frac{\theta^6}{6!}[\Omega]^6 +$$
$$+ \frac{\theta^7}{7!}[\Omega]^7 + \frac{\theta^8}{8!}[\Omega]^8 \ldots$$
$$e^{\theta[\Omega]} = [I] + \frac{\theta}{1!}[\Omega] + \frac{\theta^2}{2!}[\Omega]^2 - \frac{\theta^3}{3!}[\Omega] - \frac{\theta^4}{4!}[\Omega]^2 + \frac{\theta^5}{5!}[\Omega] + \frac{\theta^6}{6!}[\Omega]^2 -$$
$$- \frac{\theta^7}{7!}[\Omega] - \frac{\theta^8}{8!}[\Omega]^2 \ldots; [\Omega]^3 = -[\Omega]; [\Omega]^5 = -[\Omega] \ldots;$$
$$e^{\theta[\Omega]} = [I] + \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)[\Omega] + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \cdots\right)[\Omega]^2; \quad (3.102)$$
$$sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots;$$
$$cos\theta = \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \cdots;$$
$$e^{\theta[\Omega]} = \big([I] + [\Omega]sin\theta + [\Omega]^2(1 - cos\theta)\big) = [R(\theta, \omega)];$$

Dacă se consideră matricea de rotație $[R(\varphi,\theta,\psi)]$ cu unghiurile lui Euler se poate determina versorul $\vec{\omega}$ și unghiul de rotație θ pentru matricea $[R(\theta,\omega)]$, cu relațiile:

$$[R]=[R(\varphi,\theta,\psi)]=[R_z(\varphi)][R_y(\theta)][R_x(\psi)]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}=[R(\theta,\omega)];$$

$$\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{Bmatrix}=(2sin\theta)^{-1}\begin{Bmatrix} r_{32}-r_{23}\\ r_{13}-r_{31}\\ r_{21}-r_{12}\end{Bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}=(2sin\theta)^{-1}([R]-[R]^T); \qquad (3.103)$$

$$\theta=cos^{-1}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right);\theta=cos^{-1}\left(\frac{tr[R]-1}{2}\right).$$

Reprezentarea orientării unui solid rigid prin utilizarea unghiurilor lui Euler sau folosind relația lui Euler-Rodriguez introduce singularități (gimbal lock) în anumite cazuri la rezolvarea ecuațiilor de mișcare în cazul unui solid rigid. O abordare alternativă mai elegantă care evită apariția singularităților este metoda quaternionilor. Un quaternion este caracterizat de patru parametri și se poate scrie sub forma propusă de Hamilton, astfel:

$$\vec{q}=\beta_0+\beta_1\vec{\imath}+\beta_2\vec{\jmath}+\beta_3\vec{\jmath}; \qquad (3.104)$$

Dacă se cunoaște axa de rotație $\vec{\omega}$ și unghiul de rotație θ dintr-o transformare Euler-Rodriguez atunci matricea de transformare în funcție de cei patru parametrii ai quaternionului este:

$$[R(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)]=$$
$$=\begin{bmatrix}\beta_0^2+\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2-\beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3+\beta_0\beta_2)\\ 2(\beta_1\beta_2+\beta_0\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\\ 2(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3+\beta_0\beta_1) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2\end{bmatrix} \qquad (3.105)$$

Mai jos se prezintă un program Matlab care determină matricea de rotație a unui sistem de referință în raport cu alt sistem de referință cu unghiurile lui Euler, formula Euler Rodriguez și apoi cu quaternioni sau parametri lui Euler [3].

```
clear
%Euler angles of rotation -three rotation by q1 q2 q3
q1 = input('Value angle q1-roll (x) (fi-rad)=');
q2 = input('Value angle q2-pitch(y)(teta-rad)=');
q3 = input('Value angle q3-yaw (z) (psi-rad)=');
Rx=[1    0        0
   0  cos(q1)   sin(q1)
   0  -sin(q1)  cos(q1)];
Ry=[cos(q2) 0  -sin(q2)
     0     1     0
   sin(q2) 0 cos(q2)];
Rz=[cos(q3)  sin(q3)  0
   -sin(q3) cos(q3)  0
     0     0      1];
```

```
%Matrix of rotation by Euler angles
c=Rx*Ry*Rz;%counter clockwise rotation
%Rotation by angle teta and unit vecor omega
%Formula Euler-Rodrigues
teta=acos((c(1,1)+c(2,2)+c(3,3)-1)/2);%in rad
tetadegree=teta*180/pi;%in degree
int=[c(3,2)-c(2,3)
     c(1,3)-c(3,1)
     c(2,1)-c(1,2)];
omega=(1/(2*sin(teta)))* int;
gama=teta*omega;
exp=[0  -gama(3) gama(2)
    gama(3)    0      -gama(1)
   -gama(2)  gama(1)    0];
%Rodrigues matrix of rotation form 1-cc
cc=expm(exp);
I=[1 0 0
   0 1 0
   0 0 1];
omegar=[0  -omega(3) omega(2)
    omega(3)    0      -omega(1)
   -omega(2)  omega(1)    0];
%Rodrigues matrix of rotation form 2-ccc
ccc=I+sin(teta)*omegar+(1-cos(teta))*omegar*omegar;
%Quaternion form for transformation c
b0=cos(teta/2);
b1=omega(1)*sin(teta/2);
b2=omega(2)*sin(teta/2);
b3=omega(3)*sin(teta/2);
cccc=[b0^2+b1^2-b2^2-b3^2 2*(b1*b2-b0*b3)   2*(b1*b3+b0*b2)
      2*(b1*b2+b0*b3)     b0^2-b1^2+b2^2-b3^2  2*(b2*b3-b0*b1)
      2*(b1*b3-b0*b2)     2*(b2*b3+b0*b1)    b0^2-b1^2-b2^2+b3^2];
%Check the results for all transformations
rest1=c-cc;rest2=c-ccc;rest3=c-cccc;
```

În continuare se prezintă programele de calcul în Matlab pentru determinarea momentelor de inerție pentru patru corpuri cu configurație complexă: paralelipiped, placă simplă, placă complexă și scară. Modelele geometrice tridimensionale au fost importate cu extensia .stl din programul Autocad.

<table>
<tr><th>Paralelipiped</th><th>Placă simplă</th></tr>
<tr><td><pre>clear; clf;
a=1;b=2;c=3;
%Creating a parallelepiped
nod=[0 0 0
      a 0 0
      a 0 c
      0 0 c
      0 b 0
      a b 0
      a b c
      0 b c];
elemente=[1 2 5 4
           4 8 2 5
           3 8 4 2
           2 5 6 7
           2 5 8 7
           2 3 8 7];</pre></td><td><pre>clear;clf;
model = createpde;
%Creating a discretized body model
importGeometry(model,'Plate_s.stl')
view(3);
generateMesh(model,'Hmax',6,'GeometricOrder'
,'linear')
%Extraction of discretization data
[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
size(p);size(e);size(t);
%Determining the coordinates of tetrahedral
vertices
nod=p';
%Determination of tetrahedral elements
elemente=t(1:4,:)';</pre></td></tr>
</table>

Placă complexă	Scară

clear; clf;
model = createpde;
%Creating a discretized body model
importGeometry(model,'Plate_c.stl')
view(-42,24);
generateMesh(model,'Hmax',5,'GeometricOrder','linear')
%Extraction of discretization data
[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
size(p);size(e);size(t);
%Determining the coordinates of tetrahedral vertices
nod=p';
%Determination of tetrahedral elements
elemente=t(1:4,:)';
	clear; clf;
	model = createpde;
	%Creating a discretized body model
	importGeometry(model,'Stair.stl')
	view(60, 20);
	%view(3);
	generateMesh(model,'Hmax',0.5,'GeometricOrder','linear')
	%Extraction of discretization data
	[p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
	size(p);size(e);size(t);
	%Determining the coordinates of tetrahedral vertices
	nod=p';
	%Determination of tetrahedral elements
	elemente=t(1:4,:)';

Programul principal în cod Matlab [3] pentru calculul tensorului de inerție la corpuri cu configurație complexă este:

```
%Determining the number of nodes and elements
nelem=length(elemente(:,1));nnod=length(nod(:,1));
%Node coordinates
xx=nod(:,1);yy=nod(:,2);zz=nod(:,3);
for i=1:nelem
   nod1=elemente(:,1);nod2=elemente(:,2);
   nod3=elemente(:,3);nod4=elemente(:,4);
end
%Calculation of mass volume center of gravity and inertia tensor for the body
Vt=0; mt=0;suma1x=0;suma1y=0;suma1z=0;suma=0;
Ixxf=0;Iyyf=0;Izzf=0;Ixyf=0;Iyxf=0;Ixzf=0;Izxf=0;Iyzf=0;Izyf=0;
%Concrete density
ro=2400;
for i=1:nelem
   x1=xx(nod1(i));y1=yy(nod1(i));z1=zz(nod1(i));
   x2=xx(nod2(i));y2=yy(nod2(i));z2=zz(nod2(i));
   x3=xx(nod3(i));y3=yy(nod3(i));z3=zz(nod3(i));
   x4=xx(nod4(i));y4=yy(nod4(i));z4=zz(nod4(i));
   %Calculation of body volume and mass
   V=(abs(det([1 x1 y1  z1
            1 x2 y2  z2
            1 x3 y3  z3
            1 x4 y4  z4])))/6;
   Vt=Vt+V;m=ro*V;mt=mt+m;
   xgl=(x1+x2+x3+x4)/4;ygl=(y1+y2+y3+y4)/4;zgl=(z1+z2+z3+z4)/4;
   suma1x=suma1x+V*xgl;suma1y=suma1y+V*ygl;suma1z=suma1z+V*zgl;suma=suma+V;
   % Inertia matrix with respect to the inertial reference system xyz
   Ixx=ro*6*V*(y1^2+y1*y2+y2^2+y1*y3+y2*y3+y3^2+y1*y4+y2*y4+y3*y4+y4^2+...
          z1^2+z1*z2+z2^2+z1*z3+z2*z3+z3^2+z1*z4+z2*z4+z3*z4+z4^2)/60;
   Iyy=ro*6*V*(x1^2+x1*x2+x2^2+x1*x3+x2*x3+x3^2+x1*x4+x2*x4+x3*x4+x4^2+...
          z1^2+z1*z2+z2^2+z1*z3+z2*z3+z3^2+z1*z4+z2*z4+z3*z4+z4^2)/60;
   Izz=ro*6*V*(x1^2+x1*x2+x2^2+x1*x3+x2*x3+x3^2+x1*x4+x2*x4+x3*x4+x4^2+...
          y1^2+y1*y2+y2^2+y1*y3+y2*y3+y3^2+y1*y4+y2*y4+y3*y4+y4^2)/60;
   Ixy=-ro*6*V*(2*x1*y1+x2*y1+x3*y1+x4*y1+x1*y2+2*x2*y2+x3*y2+x4*y2+x1*y3+x2*y3+...
          2*x3*y3+x4*y3+x1*y4+x2*y4+x3*y4+2*x4*y4)/120;
   Ixz=-ro*6*V*(2*x1*z1+x2*z1+x3*z1+x4*z1+x1*z2+2*x2*z2+x3*z2+x4*z2+x1*z3+x2*z3+...
```

```
            2*x3*z3+x4*z3+x1*z4+x2*z4+x3*z4+2*x4*z4)/120;
    Iyz=-ro*6*V*(2*y1*z1+y2*z1+y3*z1+y4*z1+y1*z2+2*y2*z2+y3*z2+y4*z2+y1*z3+y2*z3+...
            2*y3*z3+y4*z3+y1*z4+y2*z4+y3*z4+2*y4*z4)/120;
    Iyx=Ixy;Izx=Ixz;Izy=Iyz;
    %Calculation of the final moments of inertia with respect to the inertial reference system xyz
    Ixxf=Ixxf+Ixx;Iyyf=Iyyf+Iyy;Izzf=Izzf+Izz;
    Ixyf=Ixyf+Ixy;Iyxf=Iyxf+Iyx;Ixzf=Ixzf+Ixz;Izxf=Izxf+Izx;Iyzf=Iyzf+Iyz;Izyf=Izyf+Izy;
end
%Determination of the center of mass
xg=suma1x/suma;yg=suma1y/suma;zg=suma1z/suma;
%Moments of inertia in relation to the center of mass
Ixxc=Ixxf-mt*(zg^2+yg^2);Iyyc=Iyyf-mt*(zg^2+xg^2);Izzc=Izzf-mt*(xg^2+yg^2);
Ixyc=-Ixyf-mt*(xg*yg);Ixzc=-Ixzf-mt*(xg*zg);Iyzc=-Iyzf-mt*(yg*zg);Iyxc=Ixyc;Izxc=Ixzc;Izyc=Iyzc;
%Data display
fprintf('Body volume(m)\n'); fprintf ('%4.8f(m^3)\n',Vt);
fprintf('Body mass(m)\n'); fprintf ('%4.8f(Kg)\n',mt);
fprintf('Mass center coordinates xg,yg,zg(m)\n'); fprintf ('%4.8f\n',xg,yg,zg);
fprintf('Moments of inertia relative to the inertial reference system xyz\n');
fprintf('Moments of axial inertia Ixxf,Iyyf,Izzf(Kg*m^2)\n'); fprintf ('%4.8f\n',Ixxf,Iyyf,Izzf);
fprintf('Moments of centrifugal inertia Ixyf,Iyzf,Ixzf(Kg*m^2)\n'); fprintf ('%4.8f\n',Ixyf,Iyzf,Ixzf);
fprintf('Moments of inertia with respect to the central reference system with the axes parallel to the axes
of the inertial reference system\n');
fprintf('Central axial moments of inertia  Ixxc,Iyyc,Izzc(Kg*m^2)\n'); fprintf ('%4.8f\n',Ixxc,Iyyc,Izzc);
fprintf('Moments of central centrifugal inertia Ixyc,Iyzc,Ixzc(Kg*m^2)\n'); fprintf ('%4.8f\n',Ixyc,Iyzc,Ixzc);
%Determination of eigenvectors and eigenvalues for tensor I
format long
A=[round(Ixxc,6) round(Ixyc,6) round(Ixzc,6)
    round(Iyxc,6)  round(Iyyc,6) round(Iyzc,6)
    round(Izxc,6)  round(Izyc,6) round(Izzc,6)];
[V,D] = eig(A);
%Sort vectors and eigenvalues in ascending order
[d,ind] = sort(diag(D));
Ds = D(ind,ind);
Vs = (V(:,ind));
%Main moments of inertia
fprintf('Main moment of inertia max I1(Kg*m^2)\n');fprintf ('%4.8f\n',round(    Ds(3,3),1));
fprintf('Main moment of inertia max-min I2(Kg*m^2)\n');fprintf ('%4.8f\n',round(Ds(2,2),1));
fprintf('Main moment of inertia min I3(Kg*m^2)\n');fprintf ('%4.8f\n',round(Ds(1,1),1));
%Main directions
fprintf('Main direction 1 max(grade)\n');fprintf ('%4.8f\n',acosd(Vs(:,3)));
fprintf('Main direction 2 max-min(grade)\n');fprintf ('%4.8f\n',acosd(Vs(:,2)));
fprintf('Main direction 3 min(grade)\n');fprintf ('%4.8f\n',acosd(Vs(:,1)));
%The main rays of inertia of the body
fprintf('Radius of inertia i1 (m)\n');fprintf ('%4.8f\n',sqrt((Ds(3,3))/mt));
fprintf('Radius of inertia i2 (m)\n');fprintf ('%4.8f\n',sqrt((Ds(2,2))/mt));
fprintf('Radius of inertia i3 (m)\n');fprintf ('%4.8f\n',sqrt((Ds(1,1))/mt));
%Checking the orthogonality of vectors associated with the main directions
v1=sum(V(:,1)'.*V(:,2)');v1s=sum(Vs(:,1)'.*Vs(:,2)');
v2=sum(V(:,2)'.*V(:,3)');v2s=sum(Vs(:,2)'.*Vs(:,3)');
v3=sum(V(:,3)'.*V(:,1)');v3s=sum(Vs(:,3)'.*Vs(:,1)');
subplot(1,2,1);
view(3);hold on;
Im1=round((Ds(3,3)),2);Im2=round((Ds(2,2)),2);Im3=round((Ds(1,1)),2);
title(['Three-dimensional body discretization-
I1/I2/I3(Kgm^2)=',num2str(Im1),'/',num2str(Im2),'/',num2str(Im3)])
plot3(xg,yg,zg,'-o','Color','b','linewidth',3,'MarkerSize',12)
text(xg-0.1*xg,yg-0.1*yg,zg-0.1*zg, sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[xg,yg,zg]));
xlabel('x-size in m');ylabel('y-size in m');zlabel('z-size in m')
text(xg+0.1*xg,yg+0.1*yg,zg+0.1*zg,'CM','Color','blue','FontSize',12)
for i=1:nelem
```

```
facex1=[xx(nod1(i)) xx(nod2(i)) xx(nod3(i)) xx(nod1(i))];
facey1=[yy(nod1(i)) yy(nod2(i)) yy(nod3(i)) yy(nod1(i))];
facez1=[zz(nod1(i)) zz(nod2(i)) zz(nod3(i)) zz(nod1(i))];
facex2=[xx(nod2(i)) xx(nod3(i)) xx(nod4(i)) xx(nod2(i))];
facey2=[yy(nod2(i)) yy(nod3(i)) yy(nod4(i)) yy(nod2(i))];
facez2=[zz(nod2(i)) zz(nod3(i)) zz(nod4(i)) zz(nod2(i))];
facex3=[xx(nod3(i)) xx(nod4(i)) xx(nod1(i)) xx(nod3(i))];
facey3=[yy(nod3(i)) yy(nod4(i)) yy(nod1(i)) yy(nod3(i))];
facez3=[zz(nod3(i)) zz(nod4(i)) zz(nod1(i)) zz(nod3(i))];
facex4=[xx(nod1(i)) xx(nod2(i)) xx(nod4(i)) xx(nod1(i))];
facey4=[yy(nod1(i)) yy(nod2(i)) yy(nod4(i)) yy(nod1(i))];
facez4=[zz(nod1(i)) zz(nod2(i)) zz(nod4(i)) zz(nod1(i))];
patch(facex1,facey1,facez1,'r','FaceAlpha',.01);hold on
patch(facex2,facey2,facez2,'r','FaceAlpha',.01);hold on
patch(facex3,facey3,facez3,'r','FaceAlpha',.01);hold on
patch(facex4,facey4,facez4,'r','FaceAlpha',.01);hold on
end
%Drawing inertial -global reference system on discretized body
si=max(xx)*0.5;
%Drawing the inertial axis x
xe1=[xg,yg, zg ];xe2=[xg+si*1,yg+si*0,zg+si*0];xef=xe2-xe1;
quiver3(xe1(1),xe1(2),xe1(3),xef(1),xef(2),xef(3),'Color','r','linewidth',3);
text(xe2(1),xe2(2),xe2(3), 'x')
%Draw the inertial axis y
ye1=[xg,yg, zg ];ye2=[xg+si*0,yg+si*1,zg+si*0];yef=ye2-ye1;
quiver3(ye1(1),ye1(2),ye1(3),yef(1),yef(2),yef(3),'Color','r','linewidth',3);
text(ye2(1),ye2(2),ye2(3), 'y')
%Drawing the inertial axis z
ze1=[xg,yg, zg ];ze2=[xg+si*0,yg+si*0,zg+si*0.5];zef=ze2-ze1;
quiver3(ze1(1),ze1(2),ze1(3),zef(1),zef(2),zef(3),'Color','r','linewidth',3);
text(ze2(1),ze2(2),ze2(3), 'z')
hold on;subplot(1,2,2);view(3)
title('Ellipsoid of inertia and radius of gyration for each main direction');
Ii1=round(sqrt((Ds(3,3))/mt),2);Ii2=round(sqrt((Ds(2,2))/mt),2);Ii3=round(sqrt((Ds(1,1))/mt),2);
title(['Ellipsoid of inertia and  main radius of gyration-
i1/i2/i3(m)=',num2str(Ii1),'/',num2str(Ii2),'/',num2str(Ii3)])
%Sphere generation with radius 1
[x, y, z] =sphere;
%Transform the sphere into an ellipsoid
x1 = x*(sqrt(Ds(3,3)/mt));y1 = y*(sqrt(Ds(2,2)/mt));z1 = z*(sqrt(Ds(1,1)/mt));hold on
%Ellipsoid center drawing
plot3(0,0,0,'-o','Color','k','linewidth',3,'MarkerSize',10);hold on
%Drawing the rotated ellipsoid according to the main directions
hmesh = surf(x1,y1,z1, 'EdgeColor',[1,0,0]);
set(hmesh,'FaceColor',[1,0,0],'FaceAlpha',0.02)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
theta1 = -asind(Vs(3,1)); %rotation around y-axis in degrees
psi1 = atan2d(Vs(3,2)/cos(theta1),Vs(3,3)/cos(theta1)); %rotation around x-axis in degrees
phi1 = atan2d(Vs(2,1)/cos(theta1),Vs(1,1)/cos(theta1)); %rotation around z-axis in degress
direction = [1 0 0]; %rotate the surface plot psi1 degrees around its x-axis
rotate(hmesh,direction,psi1)
direction = [0 1 0]; %rotate the surface plot theta1 degrees around its y-axis
rotate(hmesh,direction,theta1)
direction = [0 0 1]; %rotate the surface plot phi1 degrees around its z-axis
rotate(hmesh,direction,phi1)
xlabel(' i1-size in m');ylabel(' i2-size in m');zlabel(' i3-size in m');hold on
%Drawing inertial -global reference system
s0=sqrt((Ds(3,3))/mt)*0.3;
%Drawing the inertial axis x
v1xe=[0,0, 0 ];v2xe=[s0*1,s0*0,s0*0];dvxe=v2xe-v1xe;
```

```
quiver3(v1xe(1),v1xe(2),v1xe(3),dvxe(1),dvxe(2),dvxe(3),'Color','k','linewidth',3);
text(v1xe(1),v1xe(2),v1xe(3), sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[0,0,0]))
text(v2xe(1),v2xe(2),v2xe(3), sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[1,0,0]))
%Draw the inertial axis y
v1ye=[0,0, 0 ];v2ye=[s0*0,s0*1,s0*0];dvye=v2ye-v1ye;
quiver3(v1ye(1),v1ye(2),v1ye(3),dvye(1),dvye(2),dvye(3),'Color','k','linewidth',3);
text(v1ye(1),v1ye(2),v1ye(3), sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[0,0,0]))
text(v2ye(1),v2ye(2),v2ye(3), sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[0,1,0]))
%Drawing the inertial axis z
v1ze=[0,0, 0 ];v2ze=[s0*0,s0*0,s0*1];dvze=v2ze-v1ze;
quiver3(v1ze(1),v1ze(2),v1ze(3),dvze(1),dvze(2),dvze(3),'Color','k','linewidth',3);
text(v1ze(1),v1ze(2),v1ze(3), sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[0,0,0]))
text(v2ze(1),v2ze(2),v2ze(3), sprintf('(%.0f,%.0f,%.0f)',[0,0,1]));
%Drawing the main reference system
%Drawing the main axis 1
%Own unit vector axis 1
s1=sqrt((Ds(1,1))/mt);
lx=sqrt(Vs(1,3)^2+Vs(2,3)^2+Vs(3,3)^2);ux=Vs(1,3)/lx;uy=Vs(2,3)/lx;uz=Vs(3,3)/lx;
u=sqrt(ux^2+uy^2+uz^2);
v1x=[0,0, 0 ];v2x=[s1*ux,s1*uy,s1*uz];dvx=v2x-v1x;hold on
quiver3(v1x(1),v1x(2),v1x(3),dvx(1),dvx(2),dvx(3),'Color','r','linewidth',3);
text(v2x(1),v2x(2),v2x(3), sprintf('(%.2f)',sqrt((Ds(3,3))/mt)));
%Drawing the main axis 2
%Own unit vector axis 2
s2=sqrt((Ds(2,2))/mt);
ly=sqrt(Vs(1,2)^2+Vs(2,2)^2+Vs(3,2)^2);vx=Vs(1,2)/ly;vy=Vs(2,2)/ly;vz=Vs(3,2)/ly;
v=sqrt(vx^2+vy^2+vz^2);
v1y=[0,0, 0 ];v2y=[s2*vx,s2*vy,s2*vz];dvy=v2y-v1y;
quiver3(v1y(1),v1y(2),v1y(3),dvy(1),dvy(2),dvy(3),'Color','g','linewidth',3);
text(v2y(1),v2y(2),v2y(3), sprintf('(%.2f)',sqrt((Ds(2,2))/mt)));
%Drawing the main axis 3
%Own unit vector axis 3
s3=sqrt((Ds(3,3))/mt);
lz=sqrt(Vs(1,1)^2+Vs(2,1)^2+Vs(3,1)^2);wx=Vs(1,1)/lz;wy=Vs(2,1)/lz;wz=Vs(3,1)/lz;
w=sqrt(wx^2+wy^2+wz^2);
v1z=[0,0, 0 ];v2z=[s3*wx,s3*wy,s3*wz];dvz=v2z-v1z;
quiver3(v1z(1),v1z(2),v1z(3),dvz(1),dvz(2),dvz(3),'Color','b','linewidth',3);
text(v2z(1),v2z(2),v2z(3), sprintf('(%.2f)',sqrt((Ds(1,1))/mt)));
```

Rezultatele obținute în urma rulării programelor in cod Matlab [3] sunt prezentate în fig.3.16.a-d.

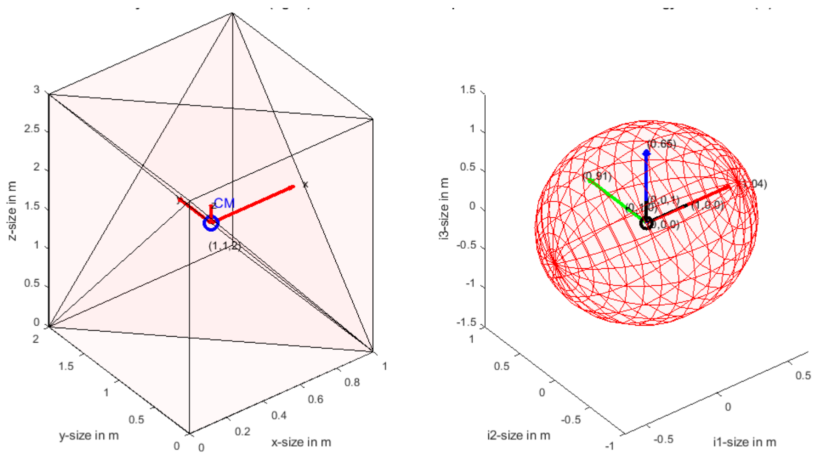


Fig.3.16.a. Momentele de inerție la un paralelipiped.

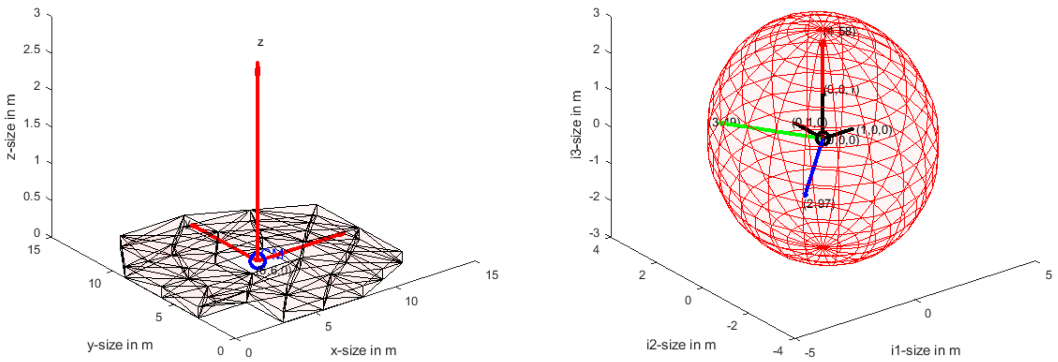


Fig.3.16.b. Momentele de inerție la un planșeu complex.

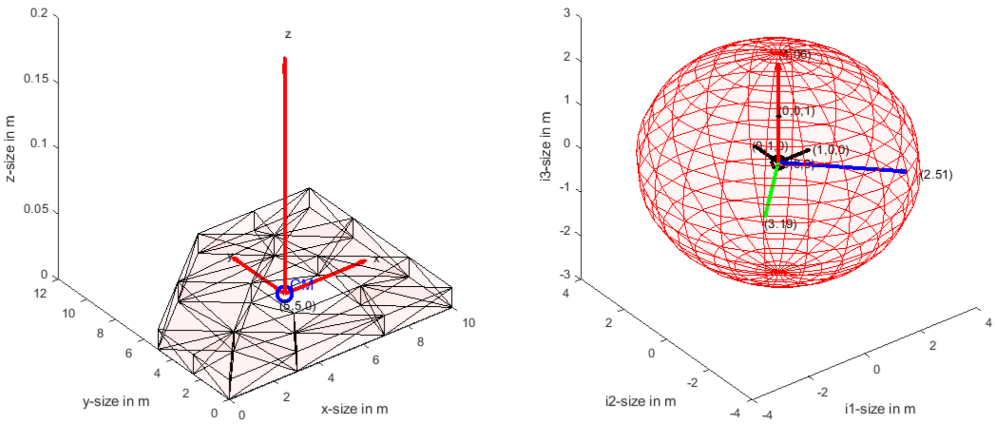


Fig.3.16.c. Momentele de inerție la un planșeu simplu.

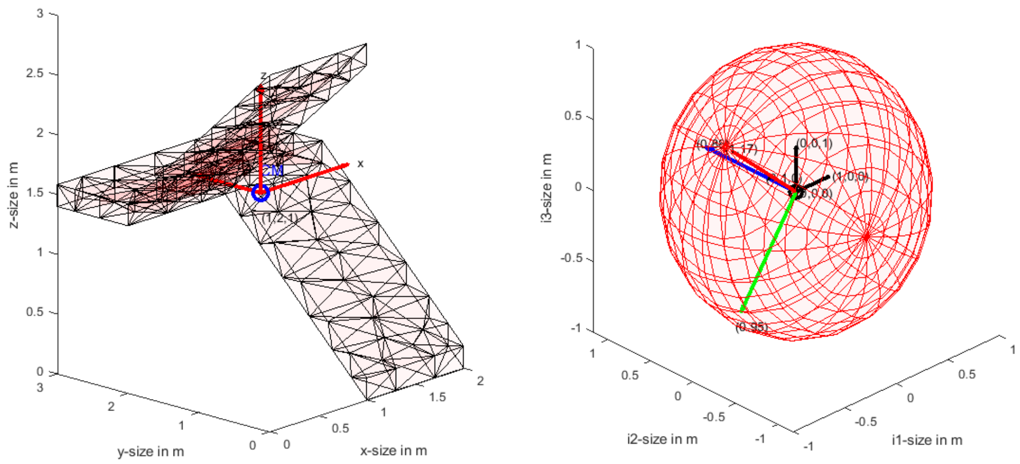


Fig.3.16.d. Momentele de inerție la o scară.

Validarea programului de determinare numerică a caracteristicilor geometrice masice statice și inerțiale a corpurilor tridimensionale cu formă complexă, a fost realizată prin compararea soluțiilor numerice cu soluțiile analitice în cazul unui corp tridimensional de tip paralelipiped .

Momentele de inerție geometrice și mecanice pentru un paralelipiped

Se consideră paralelipipedul din fig.3.17 care are masa m și laturile cu lungimile a, b și c.

Momentele de inerție axiale ale paralelipipedului față de sistemul de referință $Oxyz$ au expresiile:

$$\begin{gathered}
J_{xx}=\int_C (y^2+z^2)dm=\frac{m}{abc}\int_C (y^2+z^2)dxdydz=\\
=\frac{m}{abc}\int_0^a dx\int_0^b y^2dy\int_0^c dz+\frac{m}{abc}\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c z^2dz=\\
=\frac{m}{abc}ac\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^b+\frac{m}{abc}ab\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^c=\frac{m(b^2+c^2)}{3};\\
J_{yy}=\int_C (x^2+z^2)dm=\frac{m}{abc}\int_C (x^2+z^2)dxdydz=\\
=\frac{m}{abc}\int_0^a x^2dx\int_0^b dy\int_0^c dz+\frac{m}{abc}\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c z^2dz=\\
=\frac{m}{abc}bc\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a+\frac{m}{abc}ab\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^c=\frac{m(a^2+c^2)}{3};\\
J_{zz}=\int_C (y^2+x^2)dm=\frac{m}{abc}\int_C (y^2+x^2)dxdydz=\\
=\frac{m}{abc}\int_0^a dx\int_0^b y^2dy\int_0^c dz+\frac{m}{abc}\int_0^a x^2dx\int_0^b dy\int_0^c dz=\\
=\frac{m}{abc}ac\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^b+\frac{m}{abc}ab\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a=\frac{m(b^2+a^2)}{3};
\end{gathered}\tag{3.106}$$

unde, au fost utilizate relațiile:

$$\rho=\frac{dm}{dV};\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{abc};$$

$$dm=\frac{mdV}{abc}=\frac{mdxdydz}{abc};$$

$$dm=\frac{mdxdydz}{abc}.$$

Momentele de inerție centrifugale ale paralelipipedului față de sistemul de referință $Oxyz$ au expresiile:

$$\begin{aligned}
J_{xy} = J_{yx} &= \int_C yxdm = \frac{m}{abc}\int_C yxdxdydz = \\
&= \frac{m}{abc}\int_0^a xdx \int_0^b \mathrm{y}dy \int_0^c dz = \\
&= \frac{m}{abc} c \frac{x^2}{2}\bigg|_0^a \frac{y^2}{2}\bigg|_0^b = \frac{mab}{4}; \\
J_{xz} = J_{zx} &= \int_C zxdm = \frac{m}{abc}\int_C zxdxdydz = \\
&= \frac{m}{abc}\int_0^a xdx \int_0^b dy \int_0^c zdz = \\
&= \frac{m}{abc} b \frac{x^2}{2}\bigg|_0^a \frac{z^2}{2}\bigg|_0^c = \frac{mac}{4}; \\
J_{yz} = J_{zy} &= \int_C zydm = \frac{m}{abc}\int_C zydxdydz = \\
&= \frac{m}{abc}\int_0^a dx \int_0^b ydy \int_0^c zdz = \\
&= \frac{m}{abc} a \frac{y^2}{2}\bigg|_0^b \frac{z^2}{2}\bigg|_0^c = \frac{mbc}{4};
\end{aligned} \tag{3.107}$$

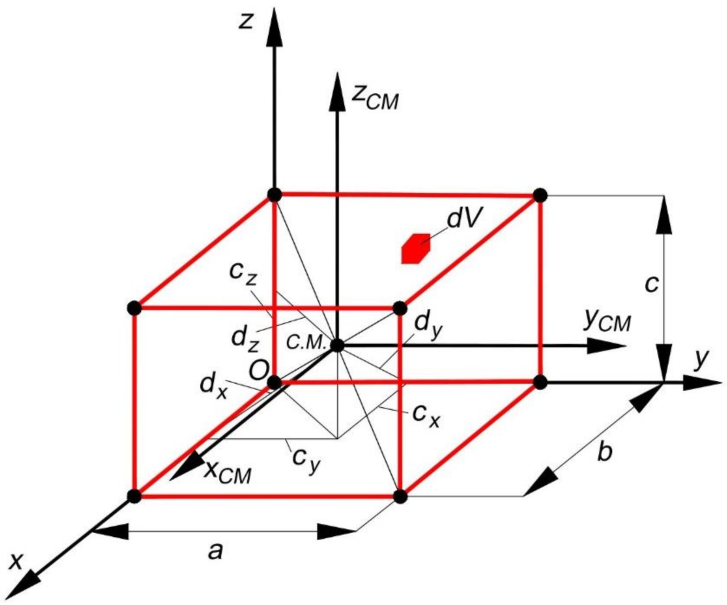


Fig.3.17.Determinarea analitică a momentelor de inerție la un paralelipiped.

Momentele de inerție mecanice pentru paralelipipedul cu masa distribuită omogen (fig.3.17) , față de un sistem de referință $Ox_{CM}y_{CM}z_{CM}$ cu originea în centrul de masă al paralelipipedului C.M., rezultă prin aplicarea relațiilor Huygens-Steiner și au expresiile:

$$J_{xx\_CM} = J_{xx} - md_x^2 = \frac{m(b^2+c^2)}{3} - m\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) = \frac{m(b^2+c^2)}{12} \ ;$$

$$J_{yy\_CM} = J_{yy} - md_y^2 = \frac{m(a^2+c^2)}{3} - m\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) = \frac{m(a^2+c^2)}{12} \ ;$$

$$J_{zz\_CM} = J_{zz} - md_z^2 = \frac{m(b^2+a^2)}{3} - m\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{m(b^2+a^2)}{12} \ ; \qquad (3.108)$$

$$J_{xy\_CM} = J_{yx\_CM} = J_{xy} - mc_xc_y = \frac{mab}{4} - m\frac{a}{2}\frac{b}{2} = 0;$$

$$J_{xz\_CM} = J_{zx\_CM} = J_{xz} - mc_xc_z = \frac{mac}{4} - m\frac{a}{2}\frac{c}{2} = 0;$$

$$J_{yz\_CM} = J_{zy\_CM} = J_{yz} - mc_yc_z = \frac{mbc}{4} - m\frac{b}{2}\frac{c}{2} = 0;$$

Rezultă că tensorul de inerție mecanic pentru un paralelipiped în raport cu axele sistemului de referință $Oxyz$ se determină cu relațiile:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{3} & -\frac{mab}{4} & -\frac{mac}{4} \\ -\frac{mab}{4} & \frac{m(a^2+c^2)}{3} & -\frac{mbc}{4} \\ -\frac{mac}{4} & -\frac{mbc}{4} & \frac{m(b^2+a^2)}{3} \end{bmatrix}. \qquad (3.109)$$

În raport cu sistemul de referință $Ox_{CM}y_{CM}z_{CM}$ care trece prin centrul de masă C.M. al paralelipipedului tensorul de inerție mecanic se determină cu relațiile:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(b^2+a^2)}{12} \end{bmatrix}. \qquad (3.110)$$

Momentele de inerție geometrice se obțin din momentele de inerție mecanice prin utilizarea relației (3.81).

În continuare este prezentat un program de calcul simbolic în Matlab [3] pentru determinarea analitică a momentelor de inerție geometrice și mecanice pentru un paralelipiped față de sistemul de referință $Oxyz$.

```
syms x y z a b c  m ro
% Analytical determination of geometric and mass moments of inertia for a
% parallelepiped
V=a*b*c;
fxx=simplify(z^2+y^2);
fyy=simplify(x^2+z^2);
fzz=simplify(x^2+y^2);
fxy=simplify(x*y);
fxz=simplify(x*z);
fyz=simplify(y*z);
Ixxp=m/(a*b*c)*simplify(int((int(((int(fxx,z,0,c))),y,0,b)),x,0,a),'Step',10);
Iyyp=m/(a*b*c)*simplify(int((int(((int(fyy,z,0,c))),y,0,b)),x,0,a),'Step',10);
Izzp=m/(a*b*c)*simplify(int((int(((int(fzz,z,0,c))),y,0,b)),x,0,a),'Step',10);
Ixyp=m/(a*b*c)*simplify(int((int(((int(fxy,z,0,c))),y,0,b)),x,0,a),'Step',10);
Ixzp=m/(a*b*c)*simplify(int((int(((int(fxz,z,0,c))),y,0,b)),x,0,a),'Step',10);
Iyzp=m/(a*b*c)*simplify(int((int(((int(fyz,z,0,c))),y,0,b)),x,0,a),'Step',10);
Ixxpg=simplify(1/ro*Ixxp);Iyypg=simplify(1/ro*Iyyp);
Izzpg=simplify(1/ro*Izzp);Ixypg=simplify(1/ro*Ixyp);
Ixzpg=simplify(1/ro*Ixzp);Iyzpg=simplify(1/ro*Iyzp);
disp(' Mechanical moment of inertia Ixxp by integration =');
pretty(Ixxp);
disp(' Mechanical moment of inertia Iyyp by integration =');
pretty(Iyyp);
disp(' Mechanical moment of inertia Izzp by integration =');
pretty(Izzp);
disp(' Mechanical moment of inertia Ixyp by integration =');
pretty(Ixyp);
disp(' Mechanical moment of inertia Iyzp by integration =');
pretty(Iyzp);
disp(' Mechanical moment of inertia Izxp by integration =');
pretty(Ixzp);
disp(' Geometric moment of inertia Ixxpg by integration =');
pretty(Ixxpg);
disp(' Geometric moment of inertia Iyypg by integration =');
pretty(Iyypg);
disp(' Geometric moment of inertia Izzp by integration =');
pretty(Izzp);
disp(' Geometric moment of inertia Ixypg by integration =');
pretty(Ixypg);
disp(' Geometric moment of inertia Iyzpg by integration =');
pretty(Iyzpg);
disp(' Geometric moment of inertia Izxpg by integration =');
pretty(Ixzpg);
```

3.10.Calculul momentelor de inerție ale corpurilor tridimensionale cu configurație complexă cu metoda probabilistică tip Monte Carlo

În cazul unui sistem de n mase concentrate din spațiul tridimensional tensorul momentelor de inerție mecanice se determină pornind de la relațiile de definiție pentru momentele de inerție mecanice.

Momentele de inerție mecanice axiale în raport cu axele x ,y și z sunt:

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2)\,; J_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2)\,; J_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2). \tag{3.111}$$

Momentele de inerție mecanice centrifugale:

$$J_{xy} = J_{yx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i;$$
$$J_{xz} = J_{zx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, z_i; \qquad (3.112)$$
$$J_{yz} = J_{zy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\, z_i;$$

Tensorul de inerție mecanic pentru un sistem de n mase distribuite în spațiu se poate scrie sub formă matriceală:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, z_i & -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\, z_i & \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}; \qquad (3.113)$$

În mod asemănător se determină tensorul momentelor de inerție geometrice care sub formă matriceală devine:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} V_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, y_i & -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} V_i y_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, z_i & -\sum_{i=1}^{n} V_i y_i\, z_i & \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}; \qquad (3.114)$$

Relația matriceală dintre momentele de inerție mecanice și momentele de inerție geometrice în cazul sistemelor de mase concentrate distribuite în spațiul tridimensional este:

$$[J] = \rho[I], \qquad (3.115)$$

unde $\rho = ct.$, adică cele n mase au masa distribuită uniform în volumul pe care îl ocupă.

Pentru calculul tensorului de inerție mecanic pentru un sistem de 12 mase concentrate distribuite în spațiu este prezentat un program Matlab [3]. Programul poate fi generalizat pentru calcul tensorului de inerție în cazul unui sistem cu un număr *n* finit de mase concentrate.

```
% The moments of inertia about the center of mass of the system of
% ten point masses.
clc;
clear ;
n=10;%number of masses
m_p = [68,103,34,123,23,54,24,12,34,43];
xc = [0 -1 6 4 -2 5 7 11 -6 15];
yc = [1 4 -7 9 5 -6 13 4 -4 -8];
zc = [1 -6 4 -2 3 -10 7 -5 -15 18];
%Representation of point masses
scatter3(xc,yc,zc,m_p,'MarkerEdgeColor',[0 0 0],...
            'MarkerFaceColor',[1 0 0],...
            'LineWidth',2);hold on;
m_total = sum(m_p);
%Position of the center of mass are
xcm =(1/m_total)*sum(m_p.*xc);
ycm =(1/m_total)*sum(m_p.*yc);
zcm =(1/m_total)*sum(m_p.*zc);
%Mass center representation
scatter3(xcm,ycm,zcm,m_total,'MarkerEdgeColor',[0 0 0],...
            'MarkerFaceColor',[0 0 1],...
            'LineWidth',2); hold on;
I = [0.0,0.0,0.0;
     0.0,0.0,0.0;
     0.0,0.0,0.0];
% Moment of inertia  for all point  into the system
for i =1:n
   xr = (xc(i) - xcm);
   yr = (yc(i) - ycm);
   zr = (zc(i) - zcm);
   m = m_p(i);
 I = I + [  m*(yr^2 + zr^2),    -m*xr*yr,         -m*xr*zr;
          -m*yr*xr,             m*(xr^2 + zr^2), -m*yr*zr;
          -m*xr*zr,            -m*yr*zr,          m*(yr^2 + xr^2)];
end
```

Rezultatele obținute după rularea programului Matlab sunt prezentate în fig. 3.18.

Pornind de la calculul momentelor de inerție mecanice și geometrice pentru un sistem de n mase concentrate se poate explica calculul tensorului de inerție geometric și mecanic cu metoda Monte Carlo.

Pentru calculul momentelor de inerție pentru corpuri tridimensionale cu configurație complexă cu metoda Monte Carlo [6], se generează aleatoriu în domeniul delimitat de volumul corpului mase care se determină astfel:

$$m_i = \frac{M}{N}, \tag{3.116}$$

unde, N este numărul de mase generat aleatoriu in domeniul de definiție al corpului pentru care se determină tensorul de inerție, iar M este masa totală a corpului tridimensional.

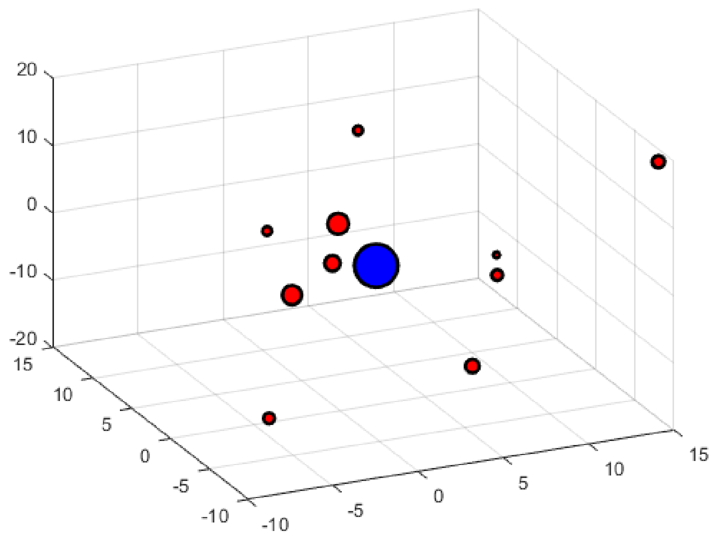


Fig.3.18.Sistem de 12 mase concentrate distribuite în spațiu.

Cu cât numărul N de mase generat este mai mare, precizia rezultatului mai bună.

Relațiile de calcul ale tensorului de inerție mecanic în metoda Monte Carlo sunt:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, z_i & -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\, z_i & \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}; \tag{3.117}$$

$$m_i = \frac{M}{N}; (x_i y_i z_i) \epsilon V;$$

În mod asemănător tensorul de inerție geometric în metoda Monte Carlo este:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} V_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, y_i & -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} V_i y_i\, z_i \\ -\sum_{i=1}^{n} V_i x_i\, z_i & -\sum_{i=1}^{n} V_i y_i\, z_i & \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}; \tag{3.118}$$

$$V_i = \frac{V}{N}; (x_i y_i z_i)\epsilon V;$$

unde $(x_i y_i z_i)\epsilon V$, *V* fiind domeniul delimitat de volumul corpului tridimensional pentru care se determină tensorului de inerție mecanic sau geometric.

Pentru determinarea momentelor de inerție cu metoda Monte Carlo pentru un cub s-a realizat programul Matlab [3] de mai jos:

```
clear;clf;%Monte Carlo method for complex bodies
mass_hexadron=1;side=0.5;number_of_mass=100;
dm_point=mass_hexadron/number_of_mass;
Axial_mom_xx_mc=0;Centr_mom_xy_mc=0;count=0;
while count<number_of_mass
x_pos=side*rand;y_pos=side*rand;z_pos=side*rand;
scatter3(x_pos,y_pos,z_pos,30,'MarkerEdgeColor',[0 0 0],...
            'MarkerFaceColor',[1 0 0],...
            'LineWidth',2)
hold on;
Axial_mom_xx_mc=Axial_mom_xx_mc+dm_point*(x_pos^2+z_pos^2);
Centr_mom_xy_mc=Centr_mom_xy_mc-dm_point*(x_pos*y_pos);
count=count+1;
end
hold off;
%Theoretical values
Axial_mom_xx_theo=2/3*mass_hexadron*side^2;
Centr_mom_xy_theo=-1/4*mass_hexadron*side^2;
Axial_mom_xx_mc;Axial_mom_xx_theo;
Centr_mom_xy_mc;Centr_mom_xy_theo;
```

După rularea programului Matlab cu generarea a 300, 600, 3000 și 10000 de mase distribuite probabilistic în volumul delimitat de cub se obțin rezultatele din fig.3.19.a-d.

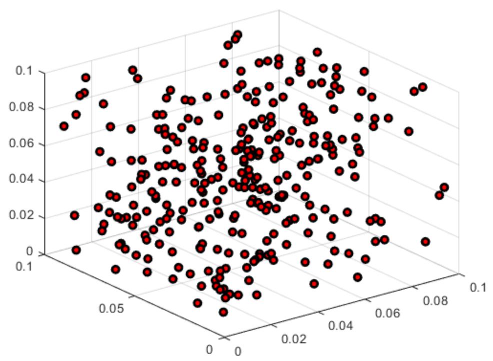


Fig.3.19.a Generarea a 300 de mase.

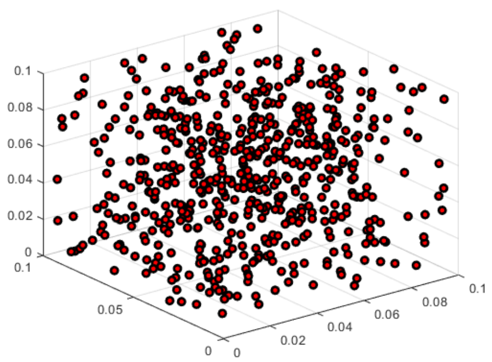


Fig.3.19.b Generarea a 600 de mase.

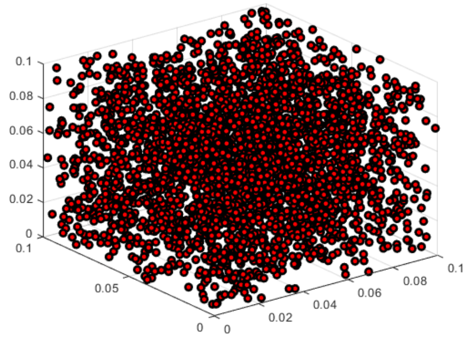


Fig.3.19.c.Generarea a 3000 de mase.

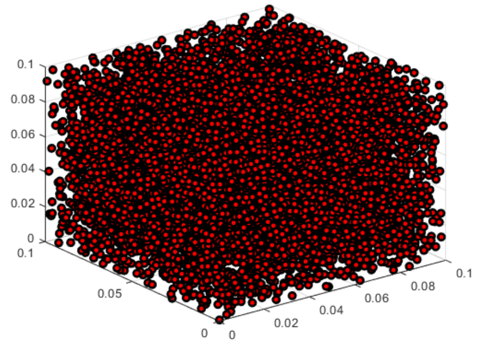


Fig.3.19.d.Generarea a 10000 de mase.

În fig.3.20.a-b., se prezintă o analiză comparativă între rezultatele obținute prin utilizarea metodei Monte Carlo și cele obținute cu metoda analitică.

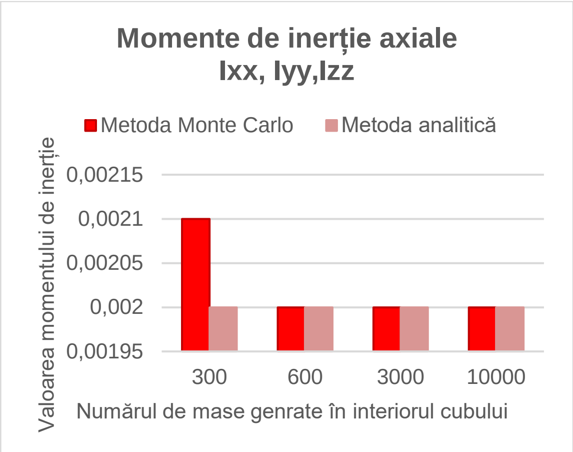


Fig.3.20.a.Variația momente inerție axiale.

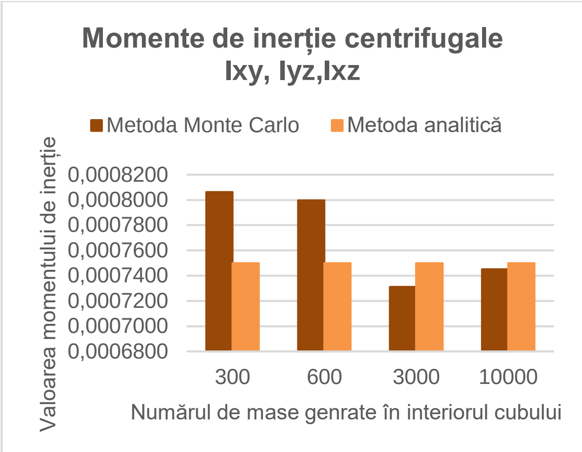


Fig.3.20.b. Variația momente inerție centrifugale.

3.11. Rezultate și concluzii

• Algoritmul numeric pentru calcul volumului, momentelor statice, centrului de masă și tensorului de inerție mecanic pentru corpuri tridimensionale cu configurație geometrică complexă, se poate aplica pentru orice corp tridimensional, solid rigid omogen. Algoritmul generează soluții exacte în cazul în care frontierele corpului sunt suprafețe plane. În cazul în care frontierele corpului sunt suprafețe curbe, precizia depinde numărul elementelor finite de tip tetraedru în care este discretizat volumul delimitat de corp.

• Metoda numerică prezentată în acest capitol pentru determinarea tensorului de inerție, se poate utiliza pentru determinarea caracteristicilor inerțiale la plăci, tuburi și scări. Caracteristicile inerțiale pentru aceste elemente geometrice, intervin în capitolul 1 unde a fost descrisă o metodă de reducere a torsiuni generale în cazul structurilor civile.

• Metoda Monte Carlo fiind o metodă probabilistică, rezultă că valorile care se obțin pentru componentele tensorului de inerție au valori probabilistice;

• Probabilitatea ca rezultatele obținute să tindă către valori exacte crește dacă crește numărul maselor generate din volumul delimitat de corp fig.3.20. Astfel, generarea unui număr de mase mai mare, conduce la o distribuție mai omogenă a maselor generate în volumul delimitat de corp.

Principalele contribuții ale autorului în cadrul acestui capitol sunt:

• Dezvoltarea unei metode numerice generale de determinarea a caracteristicilor geometrice, masice și inerțiale pentru corpurile tridimensionale cu configurație complexă. Pentru această metodă a fost realizat un algoritm de calcul care a fost implementat și testat în programul Matlab.

• Programele de calcul a caracteristicilor geometrice masice și inerțiale pentru corpurile tridimensionale cu configurație complexă, au fost validate in cazul corpurilor tridimensionale simple prin soluții analitice.

• Implementarea în programul Matlab a unui algoritm pentru calcul pentru tensorul momentelor de inerție pentru un sistem de n mase concentrate situate în spațiu.

• Dezvoltarea unui algoritm de calcul pentru tensorul de inerție pentru corpurile tridimensionale cu configurație complexă cu metoda probabilistică Monte Carlo. Acest algoritm a fost implementat în programul Matlab și validat în cazul corpurilor simple care au soluții analitice.

• Algoritmul de calcul a tensorul de inerție pentru corpurile tridimensionale cu configurație complexă se poate utiliza la analiza dinamică a corpurilor solid rigide sau a sistemelor de corpuri rigide pentru a determina torsorul forțelor de inerție.

• Metodele dezvoltate în acest capitol permit determinarea caracteristicilor inerțiale ale sistemelor structurale tip planșee și scări, care se utilizează la modelul matematic prezentat în capitolul 1, pentru eliminarea torsiuni generale a structurilor multietajate.

Bibliografie

[1] S. Vlase, Mecanica. Dinamica., Infomarket, 2005.ISBN 973-8204-74-7.

[2] F. Tonon, „Explicit Exact Formulas for the 3-D Tetrahedron Inertia Tensor in Terms of its Vertex Coordinates,” *Journal of Mathematics and Statistics,* vol. 1, nr. 1, pp. 8-11, 2004.

[3] „MathWorks Inc. MATLAB. Math. Graphics. Programming.,” [Interactiv]. Available: https://www.mathworks.com/ products/matlab.html. [Accesat 23 07 2022].

[4] E. W. Weisstein, „"Euler Angles." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.,” [Interactiv]. Available: https://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html. [Accesat 20 07 2022].

[5] J. S.Dai, „Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections,” *Mechanism and Machine Theory,* vol. 92, pp. 144-152, 2015.

[6] M. Botiș și C. Pleșcan, „Matlab program for determining the inertia characteristics of three-dimensional bodies with Monte Carlo algorithms,” *THE ANNALS OF “DUNAREA DE JOS” UNIVERSITY OF GALATI,* 2022.

4.Creșterea forței critice de pierdere a stabilității în cazul barelor drepte cu secțiune variabilă în trepte

4.1.Optimizare formei barelor drepte articulat – rezemate solicitate la compresiune în vederea creșterii forței critice prin modificarea formei

Structurile trebuie să îndeplinească condiția de rezistență și stabilitate fiind în același timp soluții economice. Pentru a îndeplini condiția de stabilitate este necesară utilizarea calculului geometric neliniar care ia în calcul influența modificării geometriei structurii, sub acțiunea încărcărilor, asupra răspunsului structurii. Principalele tipuri de calcul geometric neliniar utilizate în analiza structurilor civile sunt: calculul de ordinul II; calculul de stabilitate; calculul structurilor cu deplasări mari.

Primul studiu asupra stabilității barelor drepte supuse la compresiune este realizat de Euler în anul 1744 [1], care se bazează pe forma simplificată a curburi în ecuația fibrei medii deformate. Prin rezolvarea ecuației fibrei medii deformate scrisă pe forma deformată a barei comprimate și aplicarea condițiilor la limită, Euler determină forța critică de pierdere a stabilității. În anul 1773, Lagrange [2] stabilește limitele relației lui Euler, prin utilizarea expresiei exacte a curburii în relația fibrei medii deformate.

În general stabilitatea unei bare comprimate depinde de: natura materialului, dimensiunile secțiunii transversale, lungimea barei și tipul constrângerilor aplicate la capetele barei. Relația lui Euler nu ia în calcul imperfecțiunile structurale și geometrice ale barei comprimate și faptul că forța de compresiune nu este aplicată perfect centric. De aceea, în practică se folosesc coeficienți de siguranță la flambaj care iau în calcul aceste imperfecțiuni.

Deoarece cedarea unui element comprimat datorită fenomenului de flambaj este o cedare fără avertizare, calculul de stabilitate al barelor comprimate este foarte important în contextul creșterii rezistenței materialelor și zvelteții elementelor care se utilizează în prezent în practică. Pentru mări forța critică e pierdere a stabilității pentru o bară dreaptă comprimată se poate optimiza forma barei în lungul barei astfel încât forța critică sa crească.

Optimizarea barelor drepte solicitate la compresiune este un proces complex prin care în urma modificări diferiților parametri ai barei, se pot obține soluții noi care să utilizeze mai rațional materialul. Deoarece rezistențele materialelor au crescut în ultimii ani, în practică apar tot mai des bare care au secțiuni transversale mici si lungimi mari, rezultă că optimizarea formei barelor pentru creșterea sarcinii de pierdere a stabilității devine foarte importantă în cazul calculului structurilor. Pentru a mări sarcina critică de pierdere a stabilității, se pot modifica secțiunile transversale a barei în lungul barei astfel încât sarcina de pierdere a stabilității să crească, iar fenomenul de flambaj să fie evitat.

În cele ce urmează, este descris un model de optimizare în cazul unei bare drepte articulată la un capăt și rezemată la celălalt capăt, la care se urmărește creșterea sarcinii de pierdere a stabilității prin modificarea secțiuni transversale a barei la mijloc când dimensiunile secțiunilor transversale la capetele barei rămân constante sau aria secțiunii transversale de la capete este fixată. Procesul de optimizare se oprește în momentul în care cu forța critică de pierdere a stabilității este egală cu forța capabilă a barei. Geometria barei este prezentată în figura 4.1-a,b, unde se poate observa că secțiunea transversală a barei variază la mijloc iar secțiunile transversale de la capete sunt constante. În procesul de optimizare se fixează aria secțiunii transversale de la capetele barei și în funcție aceasta se calculează diametrele exterior și interior la capete barei și mijlocul barei. Se modifică diametrul exterior de la mijlocul barei, până când tensiunea din interiorul barei, devine egală cu tensiunea de proporționalitate a materialului din care este confecționată bara. Procesul iterativ de modificare a diametrului exterior de la mijlocul barei și evaluarea forței critice de pierdere a stabilității se oprește în momentul în care se atinge forța capabilă a barei. În procesul de optimizare descris, se observă că forța critică depinde doar de diametrul exterior de la mijlocul barei care este în acest caz variabila de proiectare.

Modelul de bară care poate fi considerat în procesul de optimizare poate fi unul general, la care constrângerile aplicate la capetele barei pot fi aplicate cu arcuri elastice [3], sau un model de bară la care constrângerile aplicare la capetele barei sunt ideale, cazul când rigiditățile arcurilor elastice sunt infinite. Modelul folosit în această lucrare, pentru optimizarea barelor comprimate, este modelul cu constrângeri ideale aplicate la capetele barei.

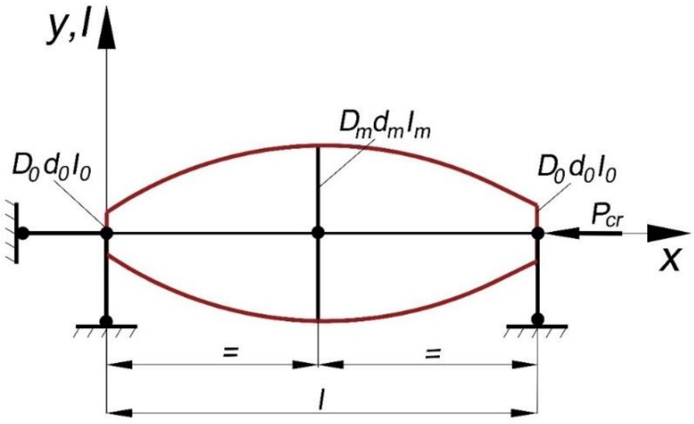


Fig.4.1. Modelul barei cu secțiune variabilă la mijloc supusă la compresiune cu constrângeri ideale.

Pentru a determina valoarea forței critice de pierdere a stabilității pentru bara dreaptă din figura 4.1 fost realizat un program de calcul în mediul Matlab care să determine valoare forței critice de pierdere a stabilități P_{cr} când diametrul de la mijlocul barei variază, până când forța critică devine egală cu forța capabilă a barei.

Pentru a determina forța critică P_{cr} se creează un element finit [4], [5] pentru bara dreaptă pentru a rezolva problema de stabilitate. Elementul finit pentru calculul la stabilitate a barei drepte, este descris în lucrarea [3] și modelează câmpul deplasărilor transversale sub forma unui polinom algebric de forma:

$$v(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \alpha_8 x^8 + \alpha_{10} x^{10} + \alpha_{12} x^{12}. \tag{4.1}$$

Momentul de inerție al barei este variabil în lungul barei și se determină folosind funcția de interpolare:

$$I(x) = I_1\left(1-\frac{x+\frac{l}{2}}{l}\right) + 4\left(\frac{(I_2-I_1)}{2}-\frac{I_3}{2}\right)\left(\frac{x+\frac{l}{2}}{l}\right)\left(1-\frac{x+\frac{l}{2}}{l}\right) + I_3\left(\frac{x+\frac{l}{2}}{l}\right) \tag{4.2}$$

unde,

-$I_1 = I_3$ sunt momentele de inerție ale secțiunilor transversale de la capetele barei drepte;

-I_2 este momentul de inerție al secțiuni transversale de la mijlocul barei care variază în procesul iterativ de optimizare a formei barei drepte.

Din relația 4.2., rezultă că funcția de interpolare pentru momentele de inerție, este o funcție care are o variație parabolică.

Problema de calcul la stabilitate conform lucrări [3], scrisă sub formă matriceală, devine o problemă de vectori și valori proprii care se exprimă sub forma:

$$([K] + \lambda[K_g])\{v\} = \{0\} \tag{4.3}$$

unde,

[K] – este matricea de rigiditate a barei

$[K_g]$ – este matricea de rigiditate geometrică a barei.

După rezolvare se obține vectorul $\{\lambda\}$ care conţine valorile proprii λ_i şi o matrice care conţine vectorii proprii $\{v_i\}$ corespunzători. Valoarea minima λ_1 reprezintă factorul critic de pierdere a stabilității, iar $\{v_1\}$ corespunzător este forma de pierdere a stabilității

Pentru determinarea valori forței critice de pierdere a stabilității când diametrul de la mijlocul barei variază, mai jos este prezentat programul în cod Matlab care calculează valoarea forței critice de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune variabilă.

```
fprintf('\nStabilitatea la compresiune a barelor dublu articulate\n\n')
clear
% grad polinom de interpolare deplasari transversale
gradp = 10;
% Lungimea barei (m)
L = 8;
E = 2.1e8;                % kN/m2
% Aria impusa sectiunilor in lungul barei (m2)
A = 0.0131947;
fy=355000;                % kN/m2
% Diametrul impus la mijlocul deshiderii (m)
Dm=.334;
% Diametrul impus la capetele barei (m)
D0=.150;
% Forta capabila (kN)
Ncap=A*fy;
% Diametrul interior la mijloc bara
dm=sqrt(-4*A/pi+Dm^2);
% Moment de inerție al secțiunii la mijloc bara
Im=pi*(Dm^4-dm^4)/64;
% Diametrul interior la capat bara
d0=sqrt(-4*A/pi+D0^2);
% Moment de inerție al secțiunii la capat bara
I0=pi*(D0^4-d0^4)/64;
I = [I0 Im I0];
syms  x real
xx=x+L/2;                 % origine la L/2
%Funcția de interpolare a rigidității de încovoiere
```

```
EI=E*(I(1)*(1-xx/L)+4*(I(2)-I(1)/2-I(3)/2)*xx/L*(1-xx/L)+I(3)*xx/L);
%Funcțiile de interpolare pentru câmpul deplasărilor transversale pe bară
Fi=[x^2 x^4 x^6 x^8 x^10 x^12];
F=Fi(1:gradp/2);
N=subs(F,L/2)-F;
disp('functiile de iterpolare');
disp(N')
S=diff(N);
% matricele de rigiditate
kg=int(S'*S,-L/2,L/2);
ks=int(N'*N/EI,-L/2,L/2);
%Trecerea din calculul simbolic în calculul numeric
kgn=double(subs(kg));
ksn=double(subs(ks));
% Vectorii si valorile proprii
[vp,Vp]=eig(kgn,ksn);
% Forma de pierdere a stabilitatii
fp=N*vp(:,1);
% Forta critica
QT0=Vp(1,1);
fprintf('\n    D0      d0      Dm      dm      Fcr       Ncap\n')
fprintf('%8.3f%8.3f%8.3f%8.3f%10.2f%10.2f\n',[D0 d0 Dm dm QT0 Ncap])
% Momente din Q=QT0 excentrica
Mx=fp*QT0;
% Momente din incovoiere
Mi=-EI*diff(fp,2);
% Reprezentarea grafica
figure(1); clf; hold on;
fplot(EI,[-L/2 L/2],'k');
plot([-L/2 L/2],[0 0]);grid
title('Variatia sectiunii (EI)');
xlabel('x'); ylabel('I')
figure(2); clf; hold on;
fplot(fp,[-L/2 L/2],'k');
plot([-L/2 L/2],[0 0]);grid
title('Forma de pierdere a stabilitatii');
xlabel('x'); ylabel('fp')
figure(3); clf; hold on;
fplot(Mx,[-L/2 L/2]);
fplot(Mi,[-L/2 L/2]); plot([-L/2 L/2],[0 0]);grid
title('Momente');
xlabel('x');
ylabel('M')
legend('din excentricitate','din incovoiere','Location','NorthEastOutside')
figure(4); clf; hold on;
fplot((Mx-Mi)/subs(Mx,0),[-L/2 L/2]);
plot([-L/2 L/2],[0 0]);grid
title('Eroarea (Mx-Mi)/Mx(L/2)');
xlabel('x');
ylabel('M')
```

Pentru a exemplifica modul de aplicare a procesului de optimizare a formei barelor drepte comprimate cu constrângeri dimensionale la capete, în continuare, se determină forța critică de pierdere a stabilității pentru o bara cu secțiune constantă. După care se determina forța critica de pierdere a stabilității pentru o bară cu o formă optimizată la care momentul de inerție de la mijloc crește. Exemple de bare la care se poate optimiza forma secțiunii transversale pentru a crește sarcina de pierdere a stabilității sunt prezentate în fig.4.2.

Se consideră o bară cu secțiune inelară constantă în lungul barei, figura 4.3.a, care este executată din oțel S355 conform cu SR EN 1993-1-1:2006 [7] care are următoarele caracteristici mecanice și geometrice:

-tensiunea de proporționalitate σ_p=355 MPa;
-rezistența ultimă fu=510 MPa;
-modulul de elasticitate longitudinal E=210000 MPa;
-modulul de elasticitate transversal G=81000 MPa;
-coeficientul de contracție transversală Poisson v=0.3;
-lungimea barei este l=8000mm;
-diametrul exterior al barei este D_0=230mm;
-diametrul interior al barei este d_0=190mm;

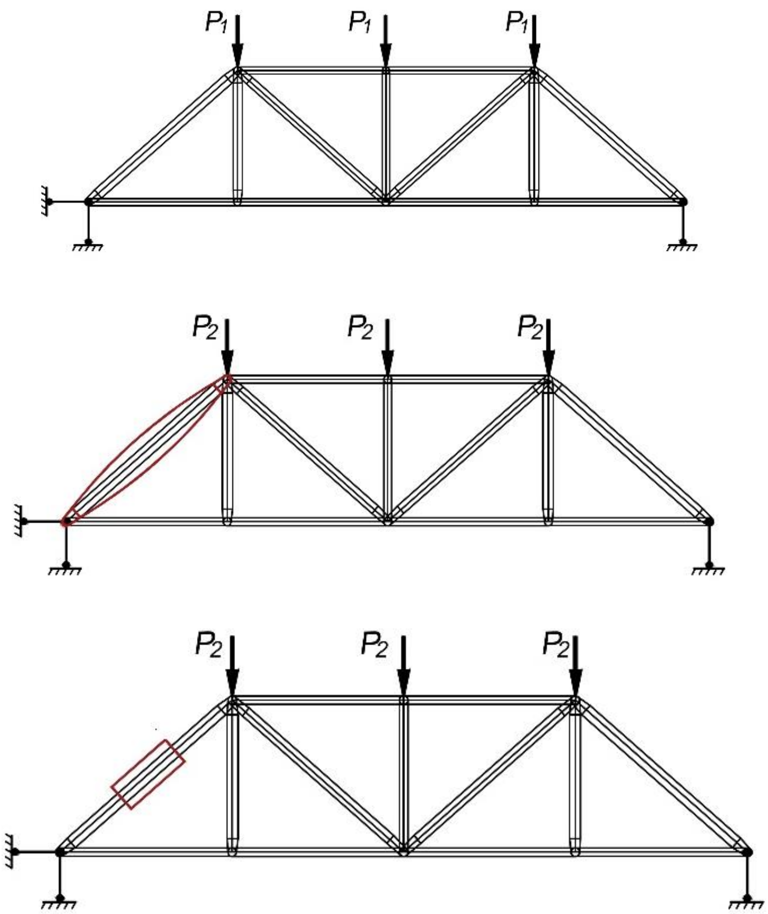


Fig.4.2. Soluții constructive pentru creșterea forței critice de pierdere a stabilității la barele de la grinzile cu zabrele utilizând bare cu secțiune variabilă $P_2 > P_1$.

Caracteristicile geometrice și inerțiale ale secțiunii transversale sunt:
-Aria secțiunii transversale pentru bara dreaptă este:

$$A = \frac{\pi D_0^2}{4} - \frac{\pi d_0^2}{4} = 13194{,}68915 mm^2. \tag{4.4}$$

-Momentul de inerție axial al secțiunii transversale pentru bara dreaptă este:

$$I = I_{min} = I_0 = \frac{\pi D_0^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} = 73395458{,}37mm^4. \tag{4.5}$$

Pentru a determina forța critică de pierdere a stabilității trebuie calculat coeficientul de zveltețe λ_0, care delimitează zona de flambaj elastic de zona de flambaj plastic. Din condiția ca tensiunea în secțiunea transversală să fie egală cu tensiunea de proporționalitate σ_p rezultă:

$$\sigma_p = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot \mathrm{A}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{{\lambda_0}^2}\ ;$$

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}\right)^{1/2}; \tag{4.6}$$

$$\lambda_0 = \left(\frac{3{,}14^2 \cdot 210000}{355}\right)^{1/2} \approx 76(pentru\ oțel\ S355).$$

Coeficientul de zveltețe al barei cu caracteristicile definite în 4.4 și 4.5 este:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = 74{,}58mm; l_f = l = 8000mm; \lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{8000}{74{,}58} = 107{,}26. \tag{4.7}$$

Se poate observa că $\lambda > \lambda_0$, rezultă că bara se află in domeniul elastic, deci se poate aplica relația lui Euler pentru calculul sarcinii critice de pierderea stabilității.

$$F_{cr\_sct\_ct} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} = 2376{,}885456\mathrm{kN}; \tag{4.8}$$

Forța capabilă a barei se determină din condiția ca tensiunea care se dezvoltă în interiorul barei să fie tensiunea de proporționalitate σ_p.

$$F_{cap} = \mathrm{A}\sigma_p = 4684{,}115\mathrm{kN}; \tag{4.9}$$

Raportul dintre forța capabilă a barei la compresiune și forța critică de pierdere a stabilității barei drepte comprimate este:

$$\frac{F_{cap}}{F_{cr\_sct\_ct}} = \frac{4684{,}115}{2376{,}885} = 1{,}97; \tag{4.10}$$

Pentru optimizarea formei barei prezentate in fig.4.3.b se parcurg următori pași:

1. Se fixează aria secțiunilor transversale de la capete A, arie care devine referință și va fi constanta pe durata procesului de optimizare, deci pe cale de consecință și volumul barei rămâne constant de-a lungul procesului iterativ de optimizare $V = Al$.

2. Se calculează diametrele exterioare și interioare ale barei la capete și mijloc în funcție de aria de referință A.

-aria de referință

$$A_{ref} = A = 13194{,}68915mm^2; \tag{4.11}$$

- diametrul exterior și interior la capetele barei, momentul inerție I_0:

$$D_0 = 150mm; d_0 = \sqrt{D_0^2 - \frac{4A_{ref}}{\pi}} = 75{,}5mm;$$
$$I_0 = \frac{\pi D_0^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} = 232556mm^4. \tag{4.12}$$

- diametrul exterior și interior la mijlocul barei, momentul inerție $I_m(D_m)$:

$$D_m = variabil\ ;$$
$$valoari\ de\ start - D_m = 310mm; d_m = \sqrt{D_m^2 - \frac{4A_{ref}}{\pi}} = 307{,}4mm; \tag{4.13}$$
$$I_m(D_m) = \frac{\pi D_m^4}{64} - \frac{\pi d_m^4}{64} = variabil.$$

3. Prin creșterea diametrului exterior D_m forța critică de pierdere a stabilității crește pe măsură ce momentul de inerție al secțiunii transversale de la mijlocul barei crește.

4. Procesul iterativ de modificare a lui D_m, se oprește în momentul în care forța critică de pierdere a stabilității este egală cu forța capabilă a barei $F_{cr} = F_{cap} = \sigma_p A$.

5. În cazul de față au fost necesare 5 iterații pentru a determina diametrul maxim D_{m_max} al barei la mijloc, pentru care condiția de stop a procesului iterativ a fost îndeplinită.

În concluzie, dacă diametrul la capetele barei este impus sau aria A_{ref} , se poate obține $F_{cr} = F_{cap}$, prin adoptarea unei legi de variație a secțiunii în lungul barei în așa fel încât aria A_{ref} a secțiunii transversale să nu se modifice. În cazul de față se modifică numai momentul de inerție I_m.

În urma rulării programului de calcul Matlab pentru determinarea sarcinii critice, pentru valori crescătoare ale diametrului de mijlocul barei D_m, se obțin datele rezultate în urma procesului iterativ, care sunt prelucrate cu programul Matlab prezentat în continuare.

```
%Program pentru determinarea diametrului maxim la mijloc bara in procesul de optimizare
%pentru care Fcr=Fcap
Fcr=4684;
%     Dm     dm      Fcr
vi = [0.310 0.282 4019.25
      0.320 0.293 4294.68
      0.325 0.298 4435.59
      0.330 0.303 4578.63
      0.335 0.309 4723.81];
fprintf('\n  Dmax    d     Fcr\n')
fprintf('%6.3f %6.3f %8.2f\n',vi')
figure(1);clf;hold on
title('Forta capabilã a barei Fcap=4684kN')
plot(vi(:,1),vi(:,3),'r','LineWidth',2)
xlabel('Dmax mijloc barã')
ylabel('Fcr')
grid
plot(vi(:,1),vi(:,3)*0+Fcr,'b','LineWidth',2)
```

Pentru a evidenția variația diametrului de la mijlocul barei D_m precum și a forței critice pe parcursul procesului de optimizare a formei, ele sunt prezentate în tabelul 4.1 de mai jos. Îndeplinirea condiției de stop a procesului iterativ și determinarea diametrului maxim D_{max} =333,6mm prin interpolare, este prezentată în graficul în fig.4.3.c.

Tabelul 4.1

Diametrul exterior mijloc bară (mm)	Diametrul interior mijloc bară(mm)	Forța critică (kN)	Forța capabilă(kN)
310	282	4019.25	4684
320	293	4294.68	4684
325	298	4435.59	4684
330	303	4578.63	4684
335	309	4723.81	4684

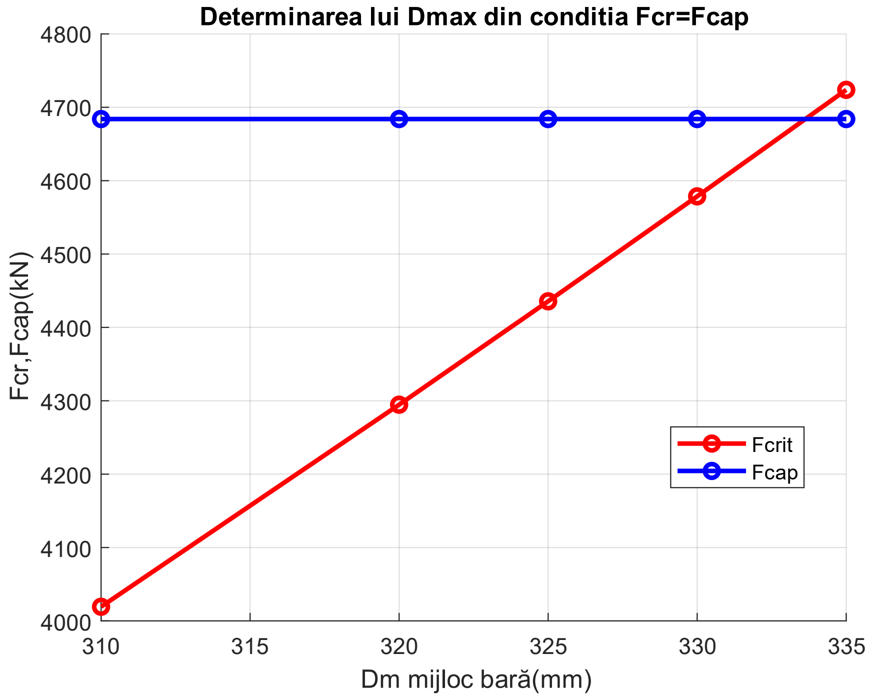


Fig.4.3.c Grafic pentru determinarea diametrului maxim de la mijlocul barei din condiția $F_{cr} = F_{cap}$.

Pentru a determina variația diametrului exterior $D(x)$ interior $d(x)$ și grosimii peretelui $t(x)$ în lungul barei, când se cunosc aria secțiunii transversale A care este aria de referință și variația momentului de inerție $I(x)$, se aplică relațiile de mai jos [8].

$$d(x) = kD(x);$$
$$A = \frac{\pi D(x)^2}{4}(1-k^2); I(x) = \frac{\pi D(x)^4}{64}(1-k^4); \tag{4.14}$$
$$D(x) = \sqrt{\frac{8I(x)}{A_{fopt}} + \frac{2A}{\pi}}; d(x) = \sqrt{\frac{8I(x)}{A} - \frac{2A}{\pi}}; t(x) = \frac{D(x)-d(x)}{2}.$$

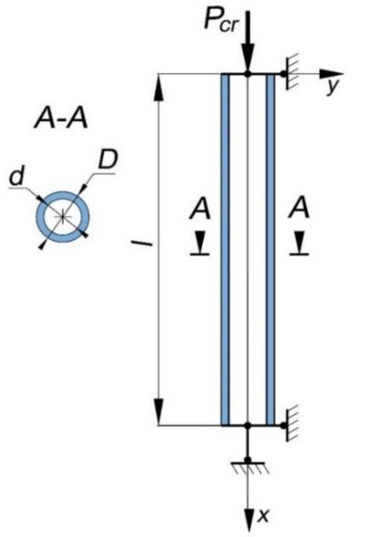


Fig.4.3.a Bara cu secțiune constantă.

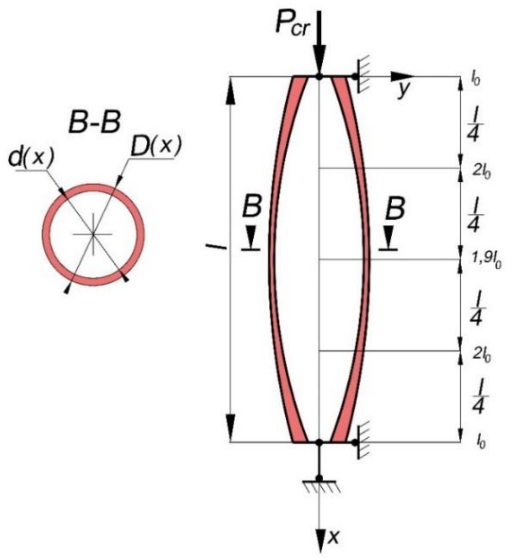


Fig.4.3.b Bara cu secțiune variabilă.

Principalele concluzii care se desprind în urma procesului de optimizare sunt:

- conform relației 4.10 rezultă că forța critică în cazul barei cu formă optimizată $F_{cr\_sct\_opt} = F_{\text{cap}}$ este de 1,97 ori mai mare decât forța critică a barei cu secțiune constantă $F_{cr\_sct\_ct.}$, la același volum de material utilizat.
- prin optimizarea formei barei cu secțiune constantă se obține o distribuție mai eficientă și rațională a materialului prin mărirea diametrului D_m de la mijlocul barei.

Studiul optimizări cu modelul prezentat în 4.4 este dezvoltat pe larg în lucrarea [3] , în care este prezentat detaliat modelul pentru optimizarea formei geometrice a barelor comprimate și în cazul în care constrângerile la limită aplicate barei sunt elastice. În lucrarea [3] barele sunt considerate cu secțiunea transversală inelară și cu grosimea de perete variabilă.

În lucrare [9], este studiată creșterea forței critice de pierdere a stabilității pentru o bară la care momentul de inerție variază în lungul barei: triunghiular-fig.4.4.a,sinusoidal-fig.4.4.b, parabolic-fig.4.4.c și sinusoidal -fig.4.4.c. Momentele de inerție în lungul barei se consideră pentru toate aceste variații, I_0 la capete și $4I_0$ la mijloc. După determinarea sarcinilor critice de pierdere a stabilității în toate aceste cazuri, se constată că forma optimă de bară pentru care creșterea forței critice este cea mai mare, în raport cu forța critică a barei cu moment de inerție contat I_0, este forma parabolică.

Fig.4.4.a. Bară la care momentul de inerție variază triunghiular în lungul barei.

Fig.4.4.b. Bară la care momentul de inerție variază sinusoidal în lungul barei.

Fig.4.4.c. Bară la care momentul de inerție variază parabolic în lungul barei.

Fig.4.4.d. Bară la care momentul de inerție variază trapezoidal în lungul barei.

În capitolul care urmează, este prezentat un studiu parametric al barei comprimate, la care prin modificarea momentele de inerție ale barei pe anumite regiuni ale barei se obține o creștere a sarcinii critice de pierdere a stabilității. Studiul este realizat pentru diferite condiții cinematice aplicate la capetele barei comprimate, pentru care rezultă forme optime ale bare în lungul ei pentru preluarea unor forțe critice mai mari, în raport cu cazul barelor cu secțiune constantă. Rezultatele devin importante în cazul barelor care trebuie consolidate pentru a prelua forțe de compresiune mari, iar structura nu poate fi demontată pentru a fi înlocuită bara la care forța de compresiune a crescut datorită modificări încărcărilor pe structură. În aceste cazuri se determina poziția pe bară, unde pot fi montate manșoanele de consolidare precum și dimensiunile acestora. În cazul utilizării manșoanelor pentru mărirea forței critice, trebuie mai întâi verificate capetele barei, dacă au arii suficiente pentru a prelua noua forță critică, care este transmisă prin bară, astfel încât σ_p să nu fie depășit.

4.2.Modelul teoretic de pierdere a stabilității barei drepte comprimate cu secțiune constantă și variabilă în trepte cu diferite condiții la limită

În cazul lucrărilor de reabilitare și consolidare a structurilor, este necesar să fie modificată secțiunea elementelor, astfel încât structura, să poată prelua și transmite la teren noile încărcări. În cazul elementele zvelte solicitate la compresiune, pentru a mări încărcarea critică, se pot realiza manșoane cu formă complexă de o anumită lungime, care să fie sudate pe bară în anumite regiuni ale barei [9], [10], [11]. Pentru a determina cu cât crește forța axială care se transmite printr-o bară comprimată, datorită variației secțiunii transversale, se realizează un studiu teoretic și numeric pentru 4-patru tipuri de modele de bară.

În continuare se prezintă 4-patru tipuri de modele teoretice de calcul la stabilitate pentru cazurile cele mai importante întâlnite în practică. La fiecare tip de model, în primul caz este prezentat modelul pentru bara cu secțiune constantă, după care este prezentat modelul parametric pentru bara cu secțiune variabilă în trepte. Pentru o analiză comparativă a rezultatelor obținute pentru cele 4-patru tipuri de modele, se face o comparație a forțelor critice, în cazul barei cu secțiune constantă și în cazul când bara prezintă o variație în trepte a secțiunii transversale.

Ipotezele simplificatoare care sunt utilizate la realizarea celor 4-patru tipuri de modele teoretice sunt:

• materialul din care este confecționată bara este continu omogen și izotrop;

• materialul are comportare liniar-elastică;

• deformațiile barei sunt mici, deci se poate utiliza expresia aproximativă a curburii;

• este valabilă ipoteza lui Bernoulli – secțiunile plane ale barei, care sunt normale pe axa barei înainte de aplicarea încărcării pe bară, rămân plane și normale pe axă și după ce bara a fost încărcată;

-forțele sunt aplicate static.

4.2.1.Cazul barei articulat-rezemată cu secțiune constantă-(cazul C1)

Pentru bara din figura 4.5. articulat-rezemată se determină forța critică P_{cr}, la care bara părăsește poziția de echilibru rectilinie și trece într-o altă configurație de echilibru. Secțiunea transversală a barei este constantă în lungul barei.

Pentru o secțiune curentă a barei, expresia de variație a efortului secțional de încovoiere pe forma deformată este:

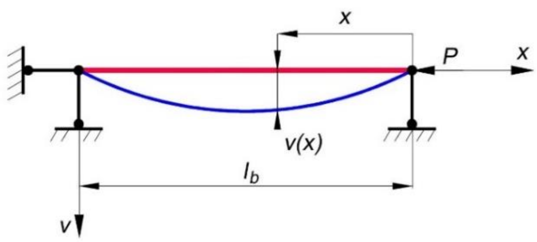
$$M(x) = P \cdot v(x); \tag{4.15}$$

Din ecuația diferențială a fibrei medii deformate aproximativă rezultă:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{P \cdot v}{EI}; \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P \cdot v}{EI} = 0; \frac{d^2v}{dx^2} + k^2 \cdot v = 0; k^2 = \frac{P}{EI}. \tag{4.16}$$

Soluția ecuației diferențiale de ordinul II omogenă și cu coeficienți constanți (4.16) este:

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx). \tag{4.17}$$



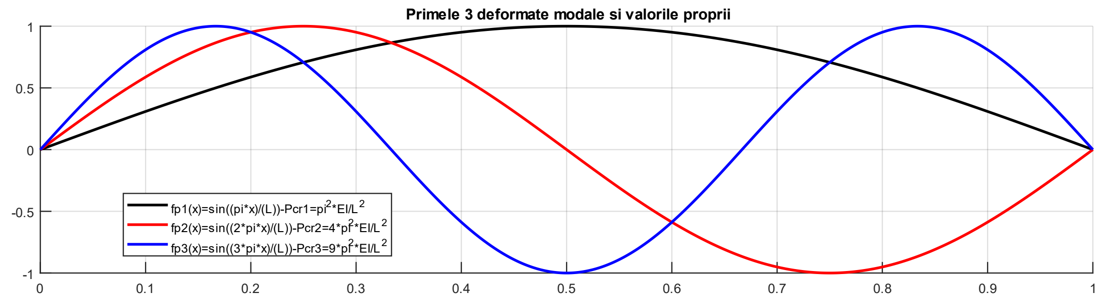


Fig.4.5 Deformatele modale corespunzătoare modurilor 1,2 și 3 caz C1.

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca formă de echilibru:

$$\begin{gathered} x = 0 \rightarrow v(0) = 0 \rightarrow v(0) = C_2 \rightarrow C_2 = 0; \\ x = l \rightarrow v(l) = 0 \rightarrow v(l) = C_1 \sin(kl) \rightarrow C_1 \neq 0 \rightarrow \sin(kl) = 0; \\ kl = n\pi; n = 1,2, \dots; k = \frac{n\pi}{l}. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Deoarece constanta C_1 rămâne nedeterminată, rezultă că forma deformată a barei prin încovoiere este o sinusoidă care pentru $n = 1,2,3$ și $C_1 = 1$ are următoarele expresii:

$$\begin{gathered} n = 1; k_1 l = \pi \rightarrow k_1^2 = \frac{P_{cr1}}{EI} \rightarrow P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}; v_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right); \\ n = 2; k_2 l = 2\pi \rightarrow k_2^2 = \frac{P_{cr2}}{EI} \rightarrow P_{cr1} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}; v_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right); \\ n = 3; k_3 l = 3\pi \rightarrow k_3^2 = \frac{P_{cr3}}{EI} \rightarrow P_{cr3} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2};\ v_3(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Din relațiile (4.19) și figura 4.5 se poate observa că P_{cr} crește, prin aplicarea unor constrângeri transversale barei, pentru modurile superioare de pierdere a stabilității.

4.2.2.Cazul barei articulat-rezemată cu secțiune variabilă în trepte-(cazul C2)

Pentru bara articulată-rezemată din fig.4.6. cu variație de secțiune în trepte, se determină valoarea forței critice P_{cr}. Datorită simetriei analiza a fost realizată pe jumătate din bară, aplicând condițiile la limită corespunzătoare în axa de simetrie.

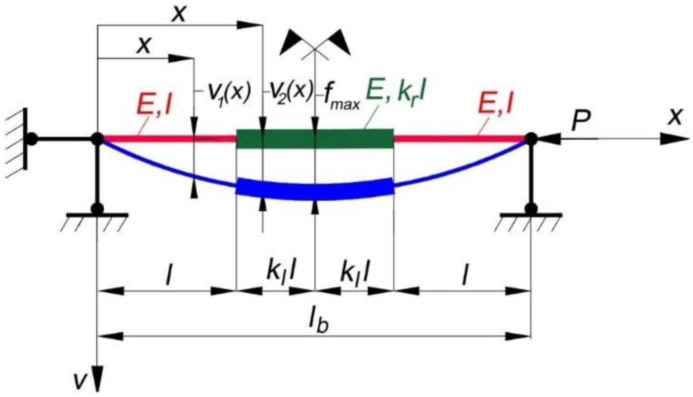


Fig.4.6 Bară articulat-rezemată cu variație în trepte a secțiunii transversale.

Pe primul tronson cu modulul de rigiditate EI într-o secțiune curentă expresia de variație a efortului secțional de încovoiere este:

$$M_{t1}(x) = P \cdot v_1(x). \tag{4.20}$$

Pe al doilea tronson cu modulul de rigiditate $k_r EI$ într-o secțiune curentă expresia efortului secțional de încovoiere este:

$$M_{t2}(x) = P \cdot v_2(x). \tag{4.21}$$

Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate aproximative pe cele două intervale sunt:

$$\begin{gathered}\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{M_{t1}(x)}{EI}; \frac{d^2v_1}{dx^2} + \frac{P \cdot v_1}{EI} = 0; \frac{P}{EI} = \left(k\sqrt{k_r}\right)^2;\\ \frac{d^2v_2}{dx^2} = -\frac{M_{t2}(x)}{k_r EI}; \frac{d^2v_2}{dx^2} + \frac{P \cdot v_2}{k_r EI} = 0; \frac{P}{k_r EI} = k^2.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul II omogene și cu coeficienți constanți pe cele două tronsoane sunt:

$$v_1(x) = C_1 \sin\left(k\sqrt{k_r}x\right) + C_2 \cos\left(k\sqrt{k_r}x\right); v_2(x) = C_3 \sin(kx) + C_4 \cos(kx). \tag{4.23}$$

Derivatele acestor funcții se determină cu relațiile:

$$v_1'(x) = C_1\, k\sqrt{k_r}\cos\left(k\sqrt{k_r}x\right) - C_2 k\sqrt{k_r} \sin\left(k\sqrt{k_r}x\right); \tag{4.24}$$

$$v_2'(x) = C_3 k\cos(kx) - C_4\, k\sin(kx).$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca forma de echilibru:

$$\begin{gathered}
x = 0 \to v_1(0) = 0 \to C_2 = 0;\\
x = l + k_l l; v_2(l + k_l l) = f_{max};\\
f_{max} = C_3\sin\big(k(l + k_l l)\big) + C_4\cos\big(k(l + k_l l)\big);\\
x = l; v_1(l) = v_2(l);\\
C_1\sin\big(k\sqrt{k_r}l\big) = C_3\sin(kl) + C_4\cos(kl);\\
x = l; v_1'(l) = v_2'(l);\\
C_1\, k\sqrt{k_r}\cos\big(k\sqrt{k_r}l\big) = C_3 k\cos(kl) - C_4\, k\sin(kl);\\
x = l + k_l l; v_2'(l + k_l l) = 0;\\
C_3 k\cos\big(k(l + k_l l)\big) - C_4\, k\sin\big(k(l + k_l l)\big) = 0.
\end{gathered} \tag{4.25}$$

Necunoscutele sistemului de ecuații (4.25) sunt C_1, C_2, C_3, C_4 și f_{max}. Sistemul de ecuații omogen (4.25) are soluții nebanale, dacă determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} 0 & sink(l + k_l l) & cosk(l + k_l l) & -1\\ \sin\,(k\sqrt{k_r}l) & -sinkl & -coskl & 0\\ \sqrt{k_r}\cos\,(k\sqrt{k_r}l) & -coskl & sinkl & 0\\ 0 & cosk(l + k_l l) & -sink(l + k_l l) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.26}$$

Soluțiile ecuației transcendentale obținute prin dezvoltarea determinantului, pentru $k_r = 4$ și $k_l = 1$, se determină în Matlab [12] folosind limbajul simbolic:

```
clear
%Bara  articulata rezemata analizata prin simetrie
syms x
%kl=x
kr=4;kl=1;
A=[ 0                   sin(x*(1+kl))   cos(x*(1+kl))  -1
   sin(x*sqrt(kr))            -sin(x)          -cos(x)     0
   sqrt(kr)*cos(x*sqrt(kr))    -cos(x)           sin(x)     0
   0                   cos(x*(1+kl))     -sin(x*(1+kl)) 0];
d=det(A);
solve(d)
Soluțiile ecuației transcendentale sunt:
  pi/2=1.57
  acos(6^(1/2)/3)= 0.6155
 -acos(6^(1/2)/3)= -0.6155
```

Pentru a determina forța critică în continuare se consideră soluția cu valoarea minimă $kl = 0.6155$.

Forța critica de pierdere a stabilității pentru $k_r = 4$ și $k_l = 1$ este:

$$\frac{P}{EI} = \left(k\sqrt{k_r}\right)^2 = 4k^2; k_r = 4; kl = 0{,}6155; (kl)^2 = 0{,}37884025;$$

$$k^2 = \frac{P}{4EI}; k^2 = \frac{0{,}37884025}{l^2}; \frac{P}{4EI} = \frac{0{,}37884025}{l^2}; \tag{4.27}$$

$$P_{cr} = \frac{0{,}37884025 \cdot 4EI}{l^2} = \frac{1{,}515361 \cdot EI}{l^2} = \frac{0{,}15369 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2};$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{6{,}5064 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(2{,}5507 \cdot l)^2}.$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune in trepte devine:

$$l_b = 2l(1 + k_l); l = \frac{l_b}{2(1 + k_l)} = \frac{l_b}{4}; \tag{4.28}$$

$$P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0{,}6376 \cdot l_b)^2}.$$

Forța critica de pierdere a stabilității bara cu secțiune constanta este:

$$P_{cr\_sect\_constanta} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(l_b)^2}. \tag{4.29}$$

Raportul dintre forța critică la bara cu secțiunea în trepte și forța critică la bara cu secțiunea constanta este:

$$\frac{P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte}}{P_{cr\_sect\_constanta}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0{,}6376 \cdot l_b)^2} \cdot \frac{(l_b)^2}{\pi^2 \cdot EI} = 2{,}4592. \tag{4.30}$$

Pentru diferite valori ale raportului dintre lungimea zonei cu moment de inerție 4I și lungimea zonei cu moment de inerție I, în fig.4.7. este prezentată variația raportului dintre forța critică pentru bara cu secțiune variabilă în trepte și bara cu secțiune contantă .

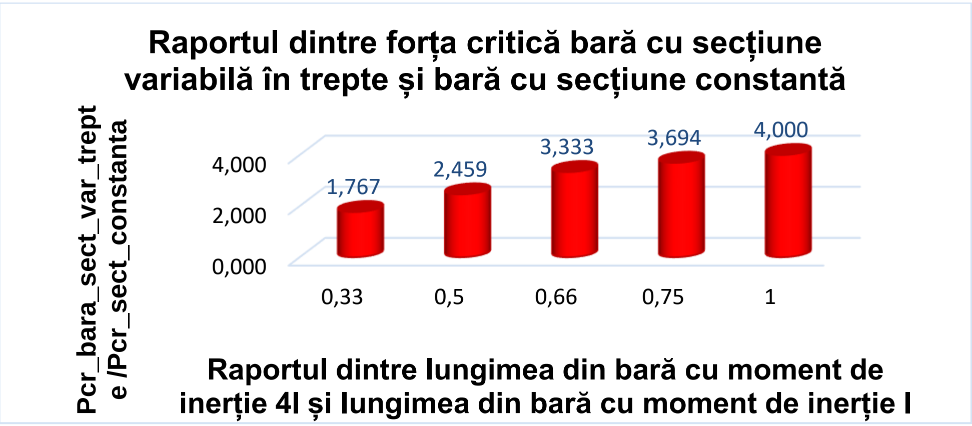


Fig.4.7.

4.2.3.Cazul barei liberă-încastrată cu secțiune constatată-(cazul C3)

Pentru bara din fig.4.8. încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt, se determină sarcina critică de pierdere a stabilității P_{cr}, considerând secțiunea transversală a barei constantă în lungul bare.

Pentru o secțiune curentă expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M(x) = P \cdot v(x); \tag{4.31}$$

Din ecuația diferențială a fibrei medii deformate aproximativă rezultă:

$$\begin{gathered} \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{P \cdot v}{EI}; \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P \cdot v}{EI} = 0; \\ \frac{d^2v}{dx^2} + k^2 \cdot v = 0; k^2 = \frac{P}{EI}. \end{gathered} \tag{4.32}$$

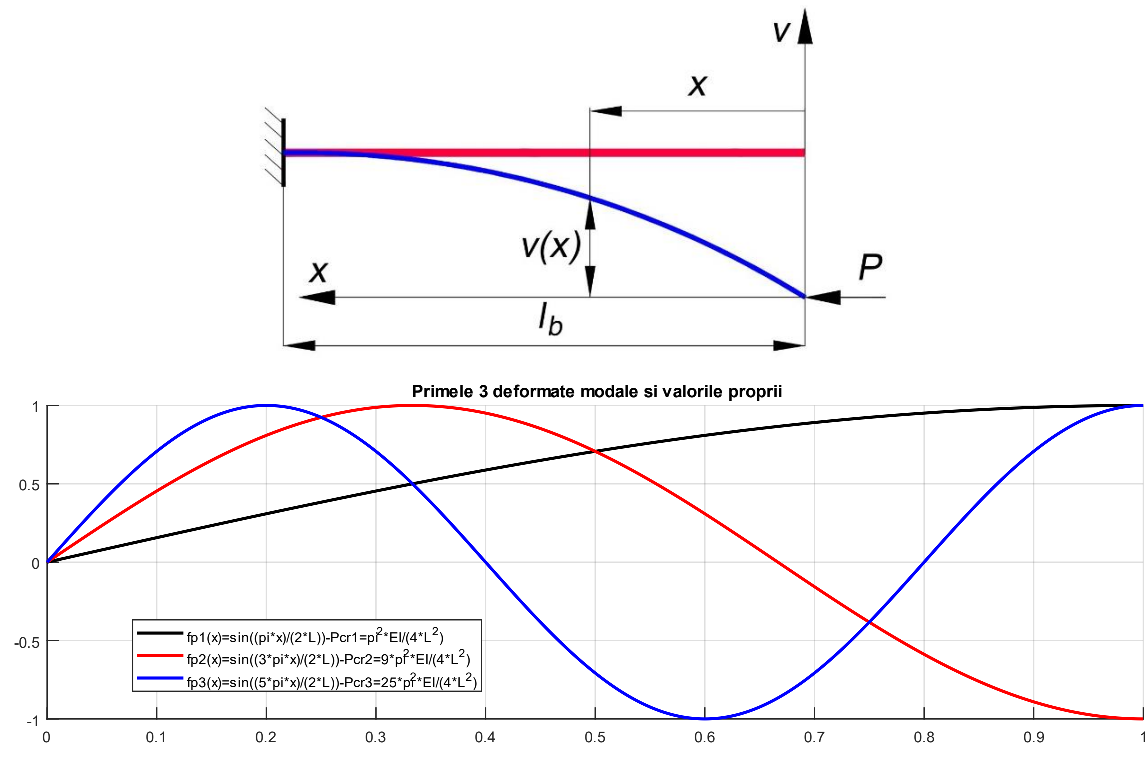


Fig.4.8. Deformatele modale corespunzătoare modurilor 1,2 și 3 caz C3.

Soluția ecuației diferențiale de ordinul II omogenă și derivata ei este:

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx); v'(x) = kC_1 \cos(kx) - kC_2 \sin(kx). \tag{4.33}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca formă de echilibru:

$$x = 0 \rightarrow v(0) = 0 \rightarrow v(0) = C_2 \rightarrow C_2 = 0;$$
$$x = l \rightarrow v'(l) = 0 \rightarrow v'(l) = kC_1 \cos(kl) = 0\,;$$
$$kC_1 \neq 0 \rightarrow \cos(kl) = 0\,;$$
$$kl = \frac{(2n+1)\pi}{2}; n = 0,1,\dots; k = \frac{(2n+1)\pi}{2l}. \tag{4.34}$$

Deoarece constanta C_1 rămâne nedeterminată, rezultă că forma deformată a barei prin încovoiere pentru $n = 0,1,2$ și $C_1 = 1$ are următoarele expresii:

$$- n = 0; k_1 l = \frac{\pi}{2} \rightarrow k_1^2 = \frac{P_{cr1}}{EI} \rightarrow P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}; v_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right);$$
$$- n = 1; k_2 l = \frac{3\pi}{2} \rightarrow k_2^2 = \frac{P_{cr2}}{EI} \rightarrow P_{cr2} = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}; v_2(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right);$$
$$- n = 2; k_3 l = \frac{5\pi}{2} \rightarrow k_3^2 = \frac{P_{cr3}}{EI} \rightarrow P_{cr3} = \frac{25\pi^2 EI}{4l^2}; v_3(x) = \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right). \tag{4.35}$$

Din relațiile (4.35) și figura 4.8. se poate observa că P_{cr} crește, prin aplicarea unor constrângeri transversale barei, pentru deformatele modale din modurile superioare de pierdere a stabilității.

4.2.4.Cazul barei liberă-încastrată cu secțiune variabilă-(cazul C4)

Pentru bara liberă la un capăt și încastrată la celălalt fig.4.9, cu variație de secțiune în trepte se determină valoarea forței critice P_{cr}.

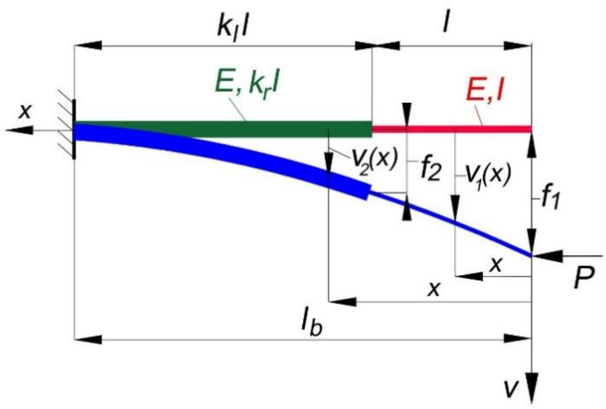


Fig.4.9 Bară liberă - încastrată, cu variație în trepte a secțiunii transversale.

Pe primul tronson cu modulul de rigiditate EI, într-o secțiune curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M_{tr1}(x) = P \cdot (f_1 - v_1(x)). \tag{4.36}$$

Pe al doilea tronson cu modulul de rigiditate $k_r EI$, într-o secțiune curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M_{tr2}(x) = P \cdot (f_1 - v_2(x)). \tag{4.37}$$

Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate aproximative pe cele două intervale sunt:

$$\begin{gathered}\frac{d^2v_1(x)}{dx^2} = \frac{M_{tr1}(x)}{EI}; \frac{d^2v_1(x)}{dx^2} + \frac{P \cdot v_1(x)}{EI} = \frac{P \cdot f_1}{EI}; \ \frac{P}{EI} = \left(\sqrt{k_r}k\right)^2. \\ \frac{d^2v_2(x)}{dx^2} = \frac{M_{tr2}(x)}{EI}; \frac{d^2v_2(x)}{dx^2} + \frac{P \cdot v_2(x)}{k_\mathrm{r}EI} = \frac{P \cdot f_1}{k_\mathrm{r}EI}; \ k^2 = \frac{P}{k_\mathrm{r}EI}.\end{gathered} \tag{4.38}$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul II neomogene și cu coeficienți constanți sunt:

$$\begin{gathered}v_1(x) = v_{10}(x) + v_{1\mathrm{p}}(x) = C_1 \sin\left(k\sqrt{k_r}x\right) + C_2 \cos\left(k\sqrt{k_r}x\right) + f_1; v_{1\mathrm{p}}(x) = f_1; \\ v_2(x) = v_{20}(x) + v_{2\mathrm{p}}(x) = C_3 \sin(kx) + C_4 \cos(kx) + f_1; v_{2\mathrm{p}}(x) = f_1.\end{gathered} \tag{4.39}$$

Derivatele acestor funcții sunt:

$$\begin{gathered}v_1'(x) = C_1\, k\sqrt{k_r}\cos\left(k\sqrt{k_\mathrm{r}}x\right) - C_2 k\sqrt{k_r} \sin\left(k\sqrt{k_\mathrm{r}}x\right); \\ v_2'(x) = C_3 k \cos(kx) - C_4\, k \sin(kx).\end{gathered} \tag{4.40}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca forma de echilibru:

$$\begin{gathered}x = 0 \rightarrow v_1 = f_1 \rightarrow C_2 + f_1 = f_1 \rightarrow C_2 = 0; \\ x = l; v_2(l) = v_1(l); \\ C_1 \sin\left(k\sqrt{k_\mathrm{r}}l\right) - C_3 \sin(kl) - C_4 \cos(kl) + f_1 - f_1 = 0 \\ x = l; v_2(l) = f_2; \\ C_3 \sin(kl) + C_4 \cos(kl) + f_1 - f_2 = 0 \\ x = l; v_1'(l) = v_2'(l); \\ C_1\, k\sqrt{k_r}\cos\left(k\sqrt{k_r}l\right) - C_3 k \cos(kl) + C_4\, k \sin(kl) = 0 \\ x = l + k_l l; v_2(l + k_l l) = 0; \\ C_3 \sin\left(k(l + k_l l)\right) + C_4 \cos\left(k(l + k_l l)\right) + f_1 = 0; \\ x = l + k_l l; v_2'(l + k_l l) = 0; \\ C_3 k \cos\left(k(l + k_\mathrm{l} l)\right) - C_4\, k \sin\left(k(l + k_\mathrm{l} l)\right) = 0.\end{gathered} \tag{4.41}$$

Necunoscutele sistemului (4.41) sunt C_1, C_2, C_3, C_4, f_1 și f_2 **.**Sistemul de ecuații omogen (4.41) are soluții nenule, dacă determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} 0 & sinkl(1+k_l) & coskl(1+k_l) & 1 & 0 \\ 0 & coskl(1+k_l) & -sinkl(1+k_l) & 0 & 0 \\ sinkl\sqrt{k_r} & -sinkl & -coskl & 0 & 0 \\ 0 & sinkl & coskl & 1 & -1 \\ \sqrt{k_r}coskl\sqrt{k_r} & -coskl & sinkl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.42}$$

După dezvoltarea determinantului din ecuația (4.42) se obține o ecuație transcendentală care se rezolvă în Matlab [12] folosind limbajul simbolic:

```
%Bara incastrata-capat liber
clear ;syms x ;kr=4;kl=1;
A=[  0                    sin(x*(1+kl))    cos(x*(1+kl))     1      0
       0                  cos(x*(1+kl))   -sin(x*(1+kl))     0      0
  sin(sqrt(kr)*x)              -sin(x)          -cos(x)       0      0
       0                        sin(x)           cos(x)       1     -1
sqrt(kr)*cos(sqrt(kr)*x)     -cos(x)            sin(x)        0      0];
d=det(A);solve(d)
Solutiile sunt:
  pi/2=0.7854
  acos(6^(1/2)/3)=0,6155
 -acos(6^(1/2)/3)=-0,6155
```

Forța critica de pierdere a stabilității pentru $k_r = 4$ și $k_l = 1$ este:

$$\frac{P}{EI} = \left(k\sqrt{k_r}\right)^2 = 4k^2; k_r = 4; kl = 0{,}6155; (kl)^2 = 0{,}37884025;$$
$$k^2 = \frac{P}{4EI}; k^2 = \frac{0{,}37884025}{l^2}; \frac{P}{4EI} = \frac{0{,}37884025}{l^2}; \tag{4.43}$$
$$P_{cr} = \frac{1{,}515361 \cdot EI}{l^2} = \frac{0{,}15369 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{6{,}5064 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(2{,}5507 \cdot l)^2}.$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune în trepte devine:

$$l_b = l(1+k_l); l = \frac{l_b}{(1+k_l)} = \frac{l_b}{2}; P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(1{,}27535 \cdot l_b)^2}. \tag{4.44}$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune constanta este:

$$P_{cr\_sect\_constanta} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(2l_b)^2}. \tag{4.45}$$

Raportul dintre forța critică la bara cu secțiunea în trepte și forța critică la bara cu secțiunea constanta este:

$$\frac{P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte}}{P_{cr\_sect\_constanta}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(1{,}27535 \cdot l_b)^2} \cdot \frac{(2l_b)^2}{\pi^2 \cdot EI} = 2{,}4592. \tag{4.46}$$

Pentru diferite valori ale raportului dintre lungimea zonei cu moment de inerție 4I și lungimea zonei cu moment de inerție I, în figura 4.10 este prezentată variația raportului dintre forța critică pentru bara cu secțiune variabilă în trepte și bara cu secțiune contantă.

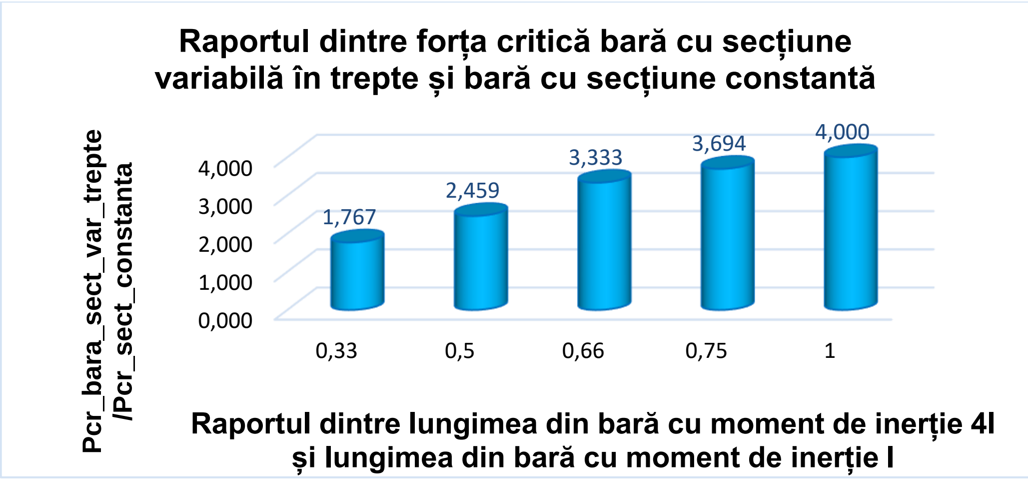


Fig.4.10

4.2.5.Cazul barei încastrată glisant-încastrat cu secțiune constantă-(cazul C5)

Se consideră bara din figura 4.11. care este încastrată glisant la un capăt și încastrată la celălalt capăt, pentru care se determină sarcina critică de pierdere a stabilității P_{cr}. Secțiunea transversală a barei este constantă în lungul barei.

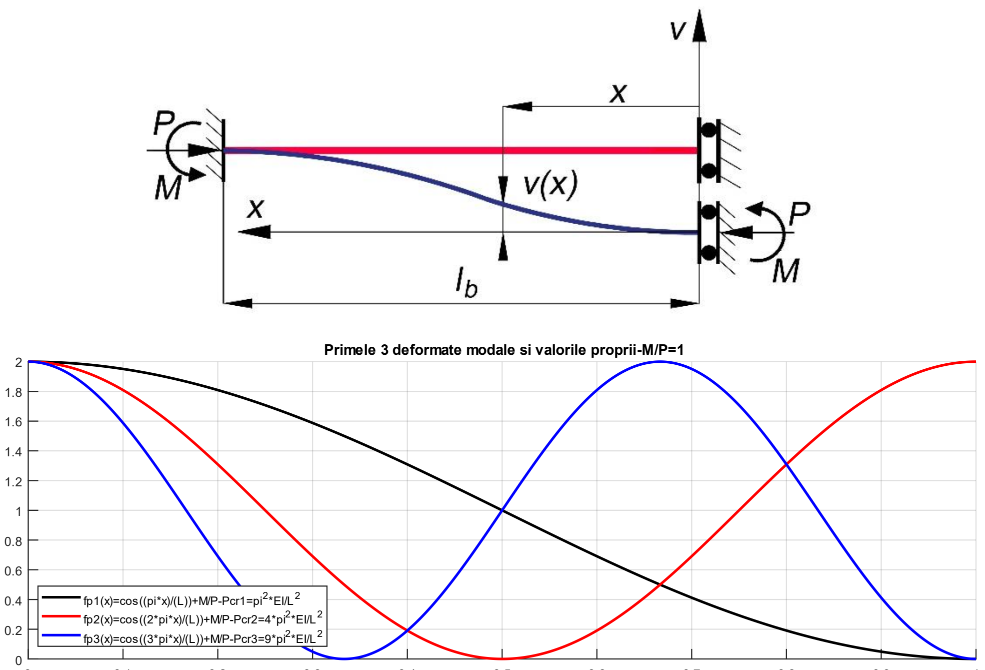


Fig.4.11 Deformatele modale corespunzătoare modurilor 1,2 și 3 caz C5.

Pentru o secțiune curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M(x) = P \cdot v - M. \tag{4.47}$$

Din ecuația diferențială a fibrei medii deformate aproximativă rezultă:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}; \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P \cdot v}{EI} = \frac{M}{EI};$$
$$k^2 = \frac{P}{EI}. \tag{4.48}$$

Soluția ecuației diferențiale de ordinul II neomogenă și cu coeficienți constanți este:

$$v(x) = v_o(\mathrm{x}) + v_p(\mathrm{x});$$
$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx);$$
$$v_p(x) = C \to \frac{P \cdot v_p}{EI} = \frac{M}{EI} \to v_p = \frac{M}{P}. \tag{4.49}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale și derivata soluției sunt:

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + \frac{M}{P};$$
$$v'(x) = C_1 k \cos(kx) - C_2 k \sin(kx). \tag{4.50}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca formă de echilibru:

$$x = 0 \to v(0) = 0;$$
$$C_2 + \frac{M}{P} = 0 \to C_2 = -\frac{M}{P};$$
$$x = 0 \to v'(0) = 0; kC_1 = 0 \to C_1 = 0;$$
$$x = l \to v'(l) = 0;\ C_2 k \sin(kl) = 0. \tag{4.51}$$

Forța critică de pierdere a stabilității este:

$$C_2 k \sin(kl) = 0;$$
$$(kl) = n\pi; n = 1,2,3 \dots;$$
$$\mathrm{k}l = \pi \to k^2 = \frac{P_{cr}}{EI};$$
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{4.52}$$

Deoarece constanta C_2 rămâne nedeterminată, rezultă că forma deformată a barei prin încovoiere pentru $n = 1,2,3$ și $C_2 = 1$ are următoarele expresii:

$$
\begin{aligned}
&-n = 1; k_1 l = \pi \rightarrow k_1^2 = \frac{P_{cr1}}{EI} \rightarrow P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}; v_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{M}{P};\\
&-n = 2; k_2 l = 2\pi \rightarrow k_2^2 = \frac{P_{cr2}}{EI} \rightarrow P_{cr2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}; v_2(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \frac{M}{P};\\
&-n = 3; k_3 l = 3\pi \rightarrow k_3^2 = \frac{P_{cr3}}{EI} \rightarrow P_{cr3} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}; v_3(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{M}{P}.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Din relațiile (4.53) și figura 4.11. se poate observa că P_{cr} crește, prin aplicarea unor constrângeri transversale barei, în modurile superioare de pierdere a stabilității.

4.2.6.Cazul barei încastrată glisant-încastrată cu secțiune variabilă-(cazul C6)

Se consideră bara din figura 4.12. încastrată la un capăt și cu încastrare glisantă la celălalt capăt, pentru care se determină valoarea forței critice P_{cr} . Secțiunea transversală este variabilă în trepte.

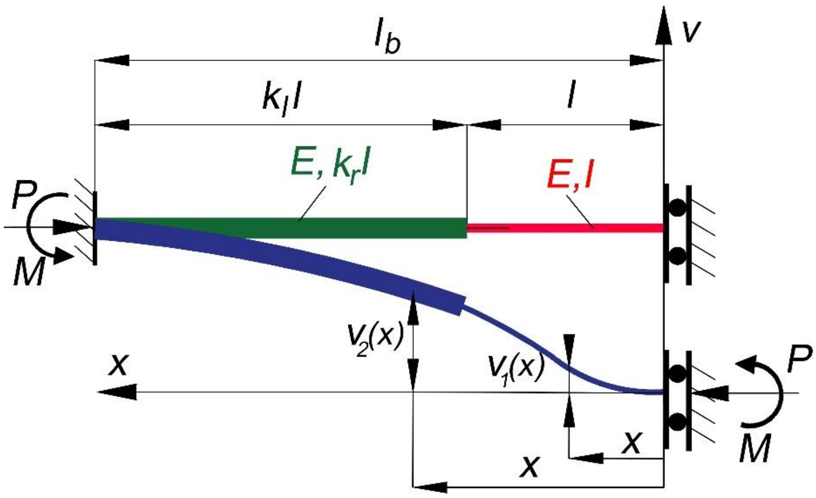


Fig.4.12 Bară încastrată-încastrată glisant cu variație în trepte a secțiunii transversale.

Pe primul tronson cu modulul de rigiditate EI, într-o secțiune curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M_{tr1}(x) = Pv_1(\mathrm{x}) - M. \tag{4.54}$$

Pe al doilea tronson având modulul de rigiditate $k_r EI$, într-o secțiune curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M_{tr2}(x) = Pv_2(\mathrm{x}) - M. \tag{4.55}$$

Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate pe cele două intervale sunt:

$$\frac{d^2v_1}{dx^2}=\frac{M_{tr1}(x)}{EI};\frac{d^2v_1}{dx^2}+\frac{P\cdot v_1}{EI}=\frac{M}{EI};k^2=\frac{P}{k_rEI};\qquad(4.56)$$

$$\frac{d^2v_2}{dx^2}=\frac{M_{tr2}(x)}{EI};\frac{d^2v_2}{dx^2}+\frac{P\cdot v_2}{k_rEI}=\frac{M}{k_rEI};\frac{P}{EI}=\left(\sqrt{k_r}k\right)^2.$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul II neomogene și cu coeficienți constanți sunt:

$$v_1(x)=C_1\sin\left(k\sqrt{k_r}x\right)+C_2\cos\left(k\sqrt{k_r}x\right)+\frac{M}{P};\qquad(4.57)$$

$$v_2(x)=C_3\sin(kx)+C_4\cos(kx)+\frac{M}{P}.$$

Derivatele funcțiilor (4.57) devin:

$$v_1'(x)=C_1\,k\sqrt{k_r}\cos\left(k\sqrt{k_r}x\right)-C_2k\sqrt{k_r}\sin\left(k\sqrt{k_r}x\right);\qquad(4.58)$$

$$v_2'(x)=C_3k\cos(kx)-C_4\,k\sin(kx).$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca forma de echilibru:

$$x=0\rightarrow v_1=0\rightarrow C_2+\frac{M}{P}=0\rightarrow C_2=-\frac{M}{P};$$

$$x=0\rightarrow v_1'(0)=0\rightarrow C_1k\sqrt{k_r}=0\rightarrow C_1=0;$$

$$x=l;v_1(l)=v_2(l);$$

$$C_2\cos\left(k\sqrt{k_r}l\right)-C_3\sin(kl)-C_4\cos(kl)=0;\qquad(4.59)$$

$$x=l;v_1'(l)=v_2'(l);$$

$$-C_2\,k\sqrt{k_r}\sin\left(k\sqrt{k_r}l\right)-C_3k\cos(kl)+C_4\,k\sin(kl)=0$$

$$x=l+k_ll;v_2'(l+k_ll)=0;$$

$$C_3k\cos\left(k(l+k_ll)\right)-C_4\,k\sin\left(k(l+k_ll)\right)=0.$$

Necunoscutele sistemului de ecuații (4.59) sunt C_3, C_4, și M/P. Sistemul de ecuații omogen are soluții nebanale, dacă determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} coskl\sqrt{k_r} & -sinkl & -coskl \\ -\sqrt{k_r}sinkl\sqrt{k_r} & -coskl & sinkl \\ 0 & coskl(1+k_l) & -sinkl(1+k_l)\end{vmatrix}=0\qquad(4.60)$$

Soluțiile ecuației transcendentale (4.60) se obține prin calcul simbolic în Matlab [12]:

```
clear syms x; %Bara incastrata incastrata glisant
kr=4;
kl=1;
A=[ cos(sqrt(kr)*x)              -sin(x)        -cos(x)
   -sqrt(kr)*sin(sqrt(kr)*x)    -cos(x)       sin(x)
              0              cos(x*(1+kl))      -sin(x*(1+kl))           ];
d=det(A);solve(d);
Solutiile sunt:
 -acos((2^(1/2)*3^(1/2))/6)= 1.1503
  acos((2^(1/2)*3^(1/2))/6)=- 1.1503
```

Forța critica de pierdere a stabilității pentru $k_r = 4$ și $k_l = 1$ este:

$$\frac{P}{EI} = \left(k\sqrt{k_r}\right)^2 = 4k^2; k_{\mathrm{r}} = 4; kl = 1.1503; (kl)^2 = 1.32319009;$$

$$k^2 = \frac{P}{4EI}; k^2 = \frac{1,32319009}{l^2}; \frac{P}{4EI} = \frac{1,32319009}{l^2}; \tag{4.61}$$

$$P_{cr} = \frac{1,323190095 \cdot 4EI}{l^2} = \frac{5,29276036 \cdot EI}{l^2} = \frac{0,53681 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2};$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{1,8628464 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(1,3648613 \cdot l)^2}.$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune în trepte devine:

$$l_b = l(1 + k_{\mathrm{l}});$$

$$l = \frac{l_b}{(1 + k_l)} = \frac{l_b}{2}; \tag{4.62}$$

$$P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0,6824306 \cdot l_b)^2}.$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune constanta este:

$$P_{cr\_sect\_constanta} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(l_b)^2}. \tag{4.63}$$

Raportul dintre forța critică la bara cu secțiunea în trepte și forța critică la bara cu secțiunea constanta este:

$$\frac{P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte}}{P_{cr\_sect\_constanta}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0,6824306 \cdot l_b)^2} \cdot \frac{(l_b)^2}{\pi^2 \cdot EI} = 2,14725. \tag{4.64}$$

Pentru diferite valori ale raportului dintre lungimea zonei cu moment de inerție 4I și lungimea zonei cu moment de inerție I, în figura 4.13 este prezentată variația raportului dintre forța critică pentru bara cu secțiune variabilă în trepte și bara cu secțiune contantă.

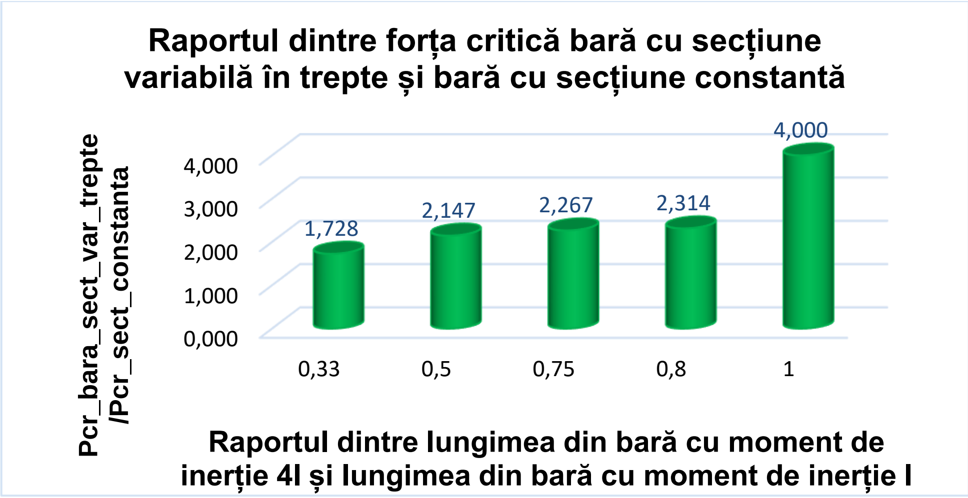


Fig.4.13

4.2.7.Cazul barei dublu încastrată cu secțiune constatată- (cazul C7)

Se consideră bara din figura 4.14.care este încastrată la ambele capete, pentru care se determină sarcina critică de pierdere a stabilității P_{cr}. Secțiunea transversală a barei se consideră constantă în lungul axei barei.

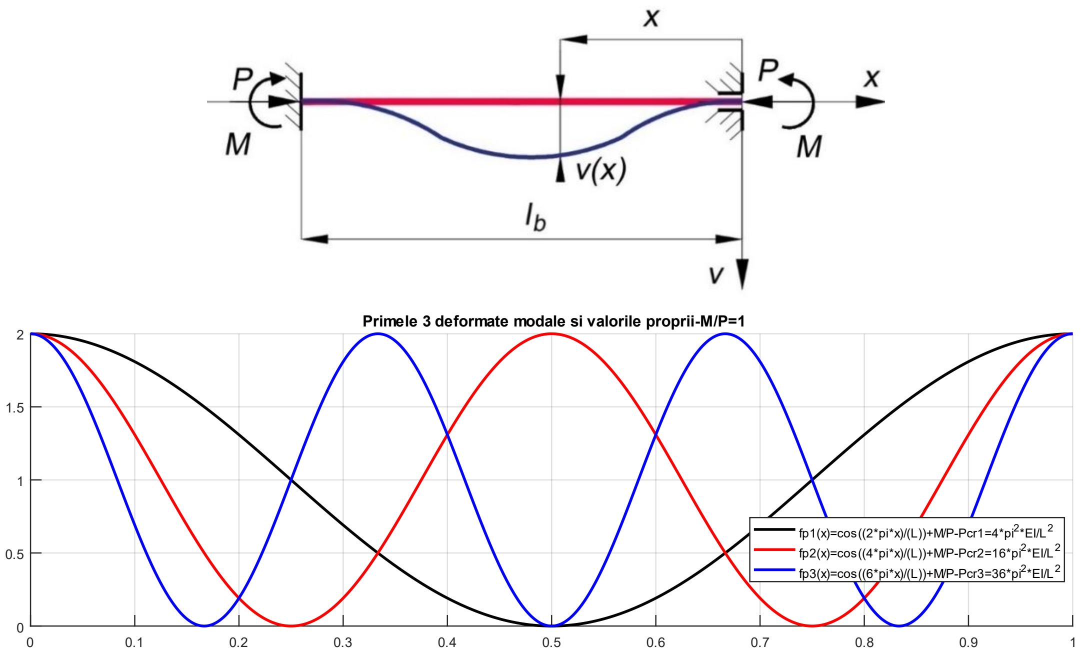


Fig.4.14 Deformatele modale corespunzătoare modurilor 1,2 și 3 caz C7.

Pentru o secțiunea curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M(x) = P \cdot v(x) - M. \tag{4.65}$$

Din ecuația diferențială a fibrei medii deformate aproximative rezultă:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}; \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P \cdot v}{EI} = \frac{M}{EI}; k^2 = \frac{P}{EI}. \tag{4.66}$$

Soluția ecuației diferențiale de ordinul II neomogenă cu coeficienți constanți este:

$$v(x) = v_o(\mathrm{x}) + v_p(\mathrm{x});$$
$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx); \tag{4.67}$$
$$v_p(x) = C \rightarrow v_p = \frac{M}{P}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale și derivata ei sunt:

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + \frac{M}{P}; \tag{4.68}$$
$$v'(x) = C_1 k \cos(kx) - C_2 k \sin(kx).$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca forma de echilibru:

$$x = 0 \rightarrow v(0) = 0;$$
$$C_2 + \frac{M}{P} = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{M}{P};$$
$$x = 0 \rightarrow v'(0) = 0; kC_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0; \tag{4.69}$$
$$x = l \rightarrow v(l) = 0; C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) + \frac{M}{P} = 0;$$
$$x = l \rightarrow v'(l) = 0; C_1 k \cos(kl) - C_2 k \sin(kl) = 0.$$

Sistemul de ecuații omogen (4.69) are soluții nebanale, dacă determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{cases} C_2 \cos(kl) - C_2 = 0 \\ C_2 \mathrm{k} \sin(kl) = 0 \end{cases}; \begin{cases} \cos(kl) - 1 = 0 \\ \mathrm{k} \sin(kl) = 0 \end{cases}; \tag{4.70}$$
$$\begin{vmatrix} \cos(kl) & -1 \\ \mathrm{k}\sin(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0;$$
$$k \sin(kl) = 0; \rightarrow kl = 2n\pi; n = 1,2,3 \ldots .$$

Forța critică de pierdere a stabilității este:

$$kl = 2\pi \rightarrow k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}; \tag{4.71}$$
$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

Deoarece constanta C_2 rămâne nedeterminată, rezultă că forma deformată a barei prin încovoiere pentru $n = 1,2,3$ și $C_2 = 1$ are următoarele expresii:

$$
\begin{aligned}
&-n = 1; k_1 l = 2\pi \rightarrow k_1^2 = \frac{P_{cr1}}{EI} \rightarrow P_{cr1} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}; v_1(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \frac{M}{P};\\
&-n = 2; k_2 l = 4\pi \rightarrow k_2^2 = \frac{P_{cr2}}{EI} \rightarrow P_{cr2} = \frac{16\pi^2 EI}{l^2}; v_2(x) = \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + \frac{M}{P};\\
&-n = 3; k_3 l = 6\pi \rightarrow k_3^2 = \frac{P_{cr3}}{EI} \rightarrow P_{cr3} = \frac{36\pi^2 EI}{l^2}; v_3(x) = \cos\left(\frac{6\pi x}{l}\right) + \frac{M}{P}.
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

Din relațiile (4.72) și figura 4.14., rezultă că P_{cr} crește, prin aplicarea unor constrângeri transversale barei pentru modurile superioare de pierdere a stabilității.

4.2.8.Cazul barei dublu încastrată cu secțiune variabilă-(cazul C8)

Pentru bara din figura 4.15., cu variație de secțiune în trepte se determină valoarea forței critice P_{cr}. Datorită simetriei analiza a fost realizată pe jumătate din bară aplicând condițiile la limită corespunzătoare la mijlocul barei.

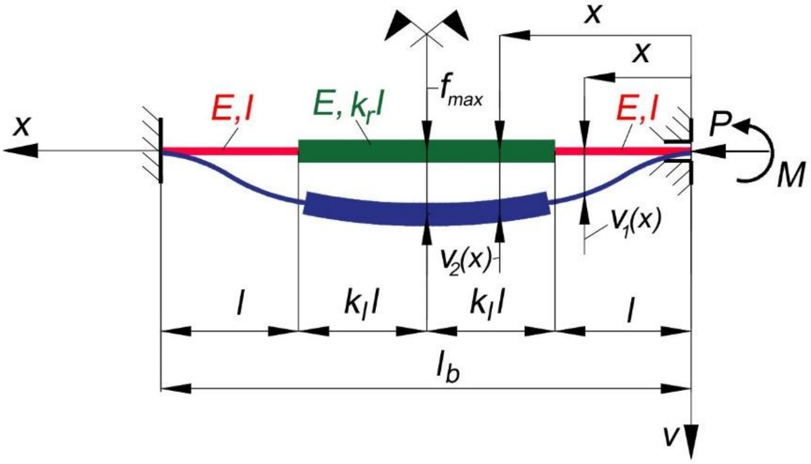


Fig.4.15 Bară dublu încastrată cu variație în trepte a secțiunii transversale.

Pe primul tronson cu modulul de rigiditate EI, într-o secțiune curentă expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M_{tr1}(x) = P \cdot v_1(\mathrm{x}) - M. \tag{4.73}$$

Pe al doilea tronson având modulul de rigiditate $k_r EI$, într-o secțiune curentă, expresia de variație a momentului de încovoiere este:

$$M_{tr2}(x) = P \cdot v_2(\mathrm{x}) - M. \tag{4.74}$$

Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate aproximative pe cele două intervale sunt:

$$\frac{d^2v_1}{dx^2}=-\frac{M_{tr1}(x)}{EI};\frac{d^2v_1}{dx^2}+\frac{P\cdot v_1}{EI}=\frac{M}{EI};\frac{P}{EI}=\left(k\sqrt{k_r}\right)^2;$$
$$\frac{d^2v_2}{dx^2}=-\frac{M_{tr2}(x)}{EI};\frac{d^2v_2}{dx^2}+\frac{P\cdot v_2}{EI}=\frac{M}{EI};\frac{P}{k_rEI}=k^2. \qquad (4.75)$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul II neomogene și cu coeficienți constanți pe cele două tronsoane sunt:

$$v_1(x)=C_1\sin\left(k\sqrt{k_r}x\right)+C_2\cos\left(k\sqrt{k_r}x\right)+\frac{M}{P};$$
$$v_2(x)=C_3\sin(kx)+C_4\cos(kx)+\frac{M}{P}. \qquad (4.76)$$

Derivatele acestor funcții sunt:

$$v_1'(x)=C_1\,k\sqrt{k_r}\cos\left(k\sqrt{k_r}x\right)-C_2k\sqrt{k_1}\sin\left(k\sqrt{k_r}x\right);$$
$$v_2'(x)=C_3k\cos(kx)-C_4\,k\sin(kx). \qquad (4.77)$$

Constantele de integrare se determină din condițiile de existență a formei deformate ca forma de echilibru:

$$x=0\to v_1(0)=0\to C_2+\frac{M}{P}=0;C_2=-\frac{M}{P};$$
$$x=0\to v_1'(0)=0\to C_1k\sqrt{k_r}=0;C_1=0;$$
$$x=l;v_1(l)=v_2(l);$$
$$C_2\cos\left(k\sqrt{k_r}x\right)+\frac{M}{P}-C_3\sin(kl)+C_4\cos(kl)-\frac{M}{P}=0;$$
$$x=l;v_1'(l)=v_2'(l);$$
$$-C_2\,k\sqrt{k_r}\sin\left(k\sqrt{k_r}l\right)-C_3k\cos(kl)+C_4\,k\sin(kl)=0 \qquad (4.78)$$
$$x=l+k_ll;v_2(l+k_ll)=f_{\max};$$
$$f_{\max}=C_3\sin\left(k(l+k_ll)\right)+C_4\cos\left(k(l+k_ll)\right)+\frac{M}{P};$$
$$x=l+k_ll;v_2'(l+k_ll)=0;$$
$$C_3k\cos\left(k(l+k_ll)\right)-C_4\,k\sin\left(k(l+k_ll)\right)=0.$$

Necunoscutele sistemului de ecuații (4.78) sunt $C_3, C_4, M/P$ și $f_{\max}$. Sistemul de ecuații omogen are soluții nenule dacă determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} -sinkl & coskl & -coskl\sqrt{k_r} & 0 \\ -coskl & sinkl & \sqrt{k_r}sinkl\sqrt{k_r} & 0 \\ -sink(l+k_l l) & cosk(l+k_l l) & 1 & -1 \\ cosk(l+k_l l) & -sink(l+k_l l) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.79)$$

După dezvoltarea determinantului se obține o ecuație transcendentală. Soluțiile ecuației transcendentale se determină în Matlab [12] folosind limbajul simbolic:

```
clear ;syms x
%Bara incastrata la ambele capete
kr=4;kl=1;
A=[ -sin(x)         -cos(x)        -cos(sqrt(kr)*x)          0
   -cos(x)          sin(x)      sqrt(kr)*sin(sqrt(kr)*x)    0
   -sin(x*(1+kl))   cos(x*(1+kl))        1                 -1
   cos(x*(1+kl))   -sin(x*(1+kl))        0                  0];

d=det(A);
solve(d)
Solutiile sunt:
        0
-acos((2^(1/2)*3^(1/2))/6)=- 1.1503
acos((2^(1/2)*3^(1/2))/6)= 1.1503
```

Forța critica de pierdere a stabilității pentru $k_r = 4$ și $k_l = 1$ este:

$$\frac{P}{EI} = \left(k\sqrt{k_1}\right)^2 = 4k^2; k_r = 4; kl = 1{,}1503; (kl)^2 = 1{,}32319009;$$

$$k^2 = \frac{P}{4EI}; k^2 = \frac{1{,}32319009}{l^2}; \frac{P}{4EI} = \frac{1{,}32319009}{l^2}; \quad (4.80)$$

$$P_{cr} = \frac{1{,}32319009 \cdot 4EI}{l^2} = \frac{5{,}29276036 \cdot EI}{l^2} = \frac{0{,}536812888 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2};$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{1{,}86284647 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(1{,}36486134 \cdot l)^2};$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune in trepte devine:

$$l_b = 2l(1+k_l); l = \frac{l_b}{2(1+k_l)} = \frac{l_b}{4}; P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0{,}341215335 \cdot l_b)^2}; \quad (4.81)$$

Forța critica de pierdere a stabilității pentru bara cu secțiune constanta este:

$$P_{cr\_sect\_constanta} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0{,}5l_b)^2}; \quad (4.82)$$

Raportul dintre forța critică la bara cu secțiunea în trepte și forța critică la bara cu secțiunea constanta este:

$$\frac{P_{cr\_bara\_sect\_var\_trepte}}{P_{cr\_sect\_constanta}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(0{,}341215335 \cdot l_b)^2} \cdot \frac{(0{,}5 l_b)^2}{\pi^2 \cdot EI} = 2{,}14725 \tag{4.83}$$

Pentru diferite valori ale raportului dintre lungimea zonei cu moment de inerție 4I și lungimea zonei cu moment de inerție I, în figura.4.16. este prezentată variația raportului dintre forța critică pentru bara cu secțiune variabilă în trepte și bara care are secțiune contantă.

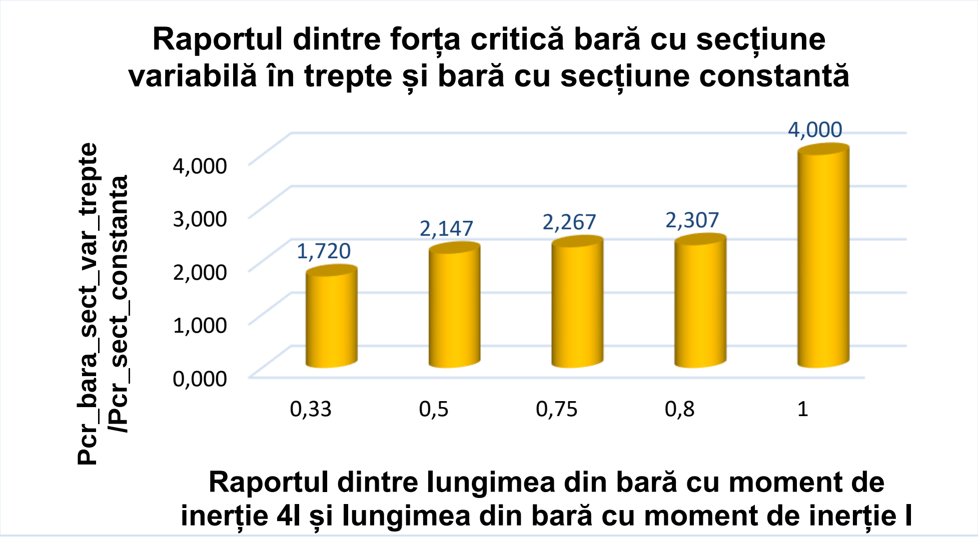


Fig.4.16

4.3.Validarea numerică a forței critice de pierdere a stabilității pentru cazurile C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7 și C8

Relația dintre variația forței și variația deplasări în calculul de ordinul II [13], se poate scrie finit sub forma,

$$\{\Delta P\} = [K_T(U)]\{\Delta U\}; \tag{4.84}$$

sau infinitezimal sub forma:

$$\{dP\} = [K_T(U)]\{dU\}; \tag{4.85}$$

unde,

$[K_T(U)]$ este matricea de rigiditate tangentă;

Pierderea configurației de echilibru a structurii se produce în momentul în care, la o variație mică ΔP a forțelor, deplasările tind la infinit.

Din relația (4.84) rezultă că variația finită a deplasărilor este:

$$\{\Delta U\} = [K_T(U)]^{-1}\{\Delta P\} = \frac{[K_T(U)]^*}{\det[K_T(U)]}\{\Delta P\}. \tag{4.86}$$

Deplasările $\{\Delta U\} \rightarrow \infty$ dacă determinantul matricei $det[K_T(U)] = 0$, ceea ce se poate scrie sub forma:

$$\det\left[[K_e] - \lambda\left[K_{gt}\right]\right] = 0. \tag{4.87}$$

unde,

$[K_e]$ este matricea de rigiditate elastică (materială) din calculul ordinul I pentru un element finit de bară dublu încastrată $i - j$ (fig.4.17);

$\left[K_{gt}\right]$este matricea de rigiditate tangentă geometrică (depinde doar de geometria barei) pentru un element finit de bară dublu încastrată $i - j$ (fig.4.17).

Matricea de rigiditate elastică $[K_e]$ are expresia:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{4.88}$$

Matricea de rigiditate geometrică tangentă $\left[K_{gt}\right]$ are forma:

$$\left[K_{gt}\right] = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}. \tag{4.89}$$

Ecuația (4.87) după aplicarea condițiilor la limită, reprezintă ecuația de stabilitate a structurii.

Pentru a valida rezultatele obținute pe cale teoretică, a fost realizat un program in Matlab [12] pentru calculul celor 4-patru tipuri de modele.

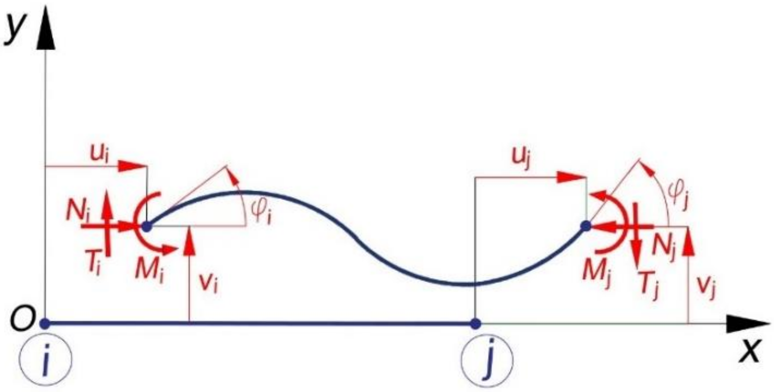


Fig.4.17 Element finit de bară în plan.

În tabelul 4.2 sunt prezentate datele de intrare pentru cazurile C1 și C2.

<table>
<tr><td colspan="2">Tabelul 4.2</td></tr>
<tr><td>Date intrare pentru cazul C1</td><td>Date intrare pentru cazul C2</td></tr>
<tr><td>% Bara articulat-rezemata
clear;
clf;
%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
%si inertiale
E=2.1*10^5;
D=100;
d=50;
lf=8000;
ld=1000;
A=pi/4*(D^2-d^2);
I=pi/64*(D^4-d^4);
X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
El=[1 2 A I
2 3 A I
3 4 A I
4 5 A I
5 6 A I
6 7 A I
7 8 A I
8 9 A I];
%Constrangeri aplicate
cr=[1 2 26];
%Articulatii interioare
cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordin I
Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];
%Forta critica dupa Euler
fcrE=(pi)^2*E*I/(lf)^2;
%Program de calcul la stabilitate
stab
%Reprezentare grafica moduri proprii
grafica</td><td>% Bara articulat-rezemata in trepte
clear;
clf
%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
%si inertiale
E=2.1*10^5;
D=100;
d=50;
lf=8000;
ld=1000;
A=pi/4*(D^2-d^2);
I=pi/64*(D^4-d^4);
X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
El=[1 2 A I
2 3 A I
3 4 A 4*I
4 5 A 4*I
5 6 A 4*I
6 7 A 4*I
7 8 A I
8 9 A I];
%Constrangeri aplicate
cr=[1 2 26];
%Articulatii interioare
cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordin I
Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];
%Forta critica dupa Euler
fcrE=(pi)^2*E*I/(lf*0.6376)^2;
%Program de calcul la stabilitate
stab
%Reprezentare grafica moduri proprii
grafica</td></tr>
</table>

Rezultatele obținute în urma simulării numerice pentru cazurile C1 și C2 sunt prezentate în figura 4.18.a și figura 4.18.b. Eroarea relativă în modelul numeric față de cel teoretic este de 0,00327% pentru cazul C1, și 0,12% pentru cazul C2.

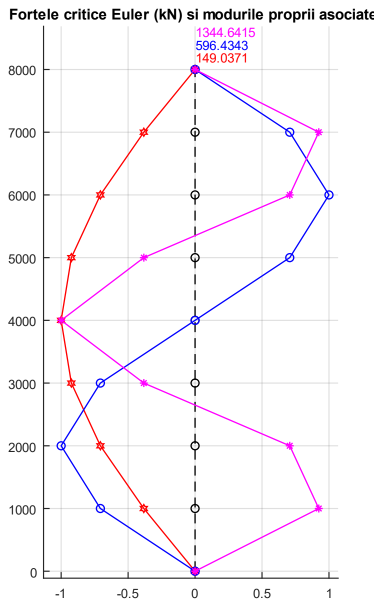


Fig.4.18.a-Caz C1.

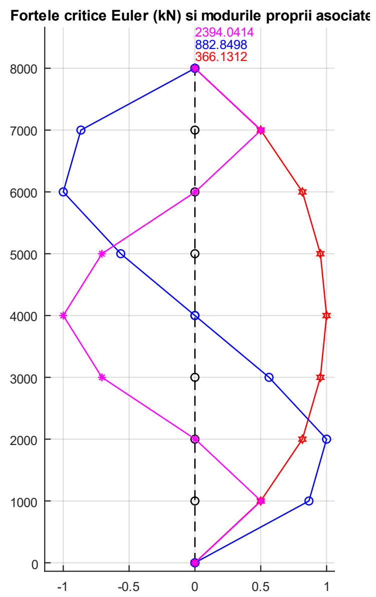


Fig.4.18.b-Caz C2.

În tabelul 4.3 sunt prezentate datele de intrare pentru cazurile C3 și C4.

Tabelul 4.3

Date intrare pentru cazul C3	Date intrare pentru cazul C4

%Bara capat liber-incastrata
clear;clf;
%%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
%si inertiale
E=2.1*10^5;D=100;d=50;lf=8000;ld=1000;
A=pi/4*(D^2-d^2);I=pi/64*(D^4-d^4);
X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
El=[1 2 A I
2 3 A I
3 4 A I
4 5 A I
5 6 A I
6 7 A I
7 8 A I
8 9 A I];
%Constrangeri aplicate
cr=[1 2 3];
%Articulatii interioare
cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordinul I
Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];scp
%Forta critica dupa Euler
fcrE=(pi)^2*E*I/(2*lf)^2;
%Program de calcul la stabilitate
stab
%Reprezentare grafica moduri proprii
grafica
	%Bara capat liber-incastrata in trepte
	clear
	%%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
	%si inertiale
	E=2.1*10^5;D=100;d=50;lf=8000;ld=1000;
	A=pi/4*(D^2-d^2);I=pi/64*(D^4-d^4);
	X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
	El=[1 2 A 4*I
	2 3 A 4*I
	3 4 A 4*I
	4 5 A 4*I
	5 6 A I
	6 7 A I
	7 8 A I
	8 9 A I];
	%Constrangeri aplicate
	cr=[1 2 3];
	%Articulatii interioare
	cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
	%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordinul I
	Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];scp
	%Forta critica dupa Euler
	fcrE=(pi)^2*E*I/(1.27535*lf)^2;
	%Program de calcul la stabilitate
	stab
	%Reprezentare grafica moduri proprii
	grafica

Rezultatele obținute în urma simulării numerice pentru cazurile C3 și C4 sunt prezentate în figura 4.19.a și figura 4.19.b. Eroarea relativă în modelul numeric față de cel teoretic este 0,000206% pentru cazul C3, și 0,112% pentru cazul C4.

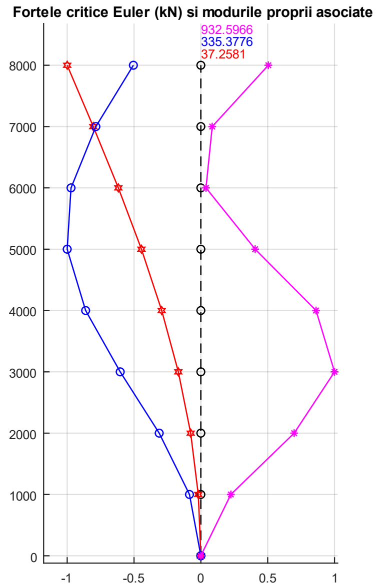


Fig.4.19.a-Caz C3.

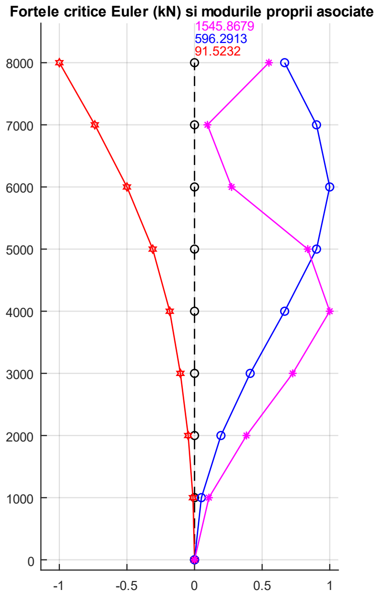


Fig.4.19.b-Caz C4.

În tabelul 4.4 sunt prezentate datele de intrare pentru cazurile C5 și C6.

Tabelul 4.4	
Date intrare pentru cazul C5	Date intrare pentru cazul C6

% Bara incastrata glisant-incastrata
clear;clf;
%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
%si inertiale
E=2.1*10^5;D=100;d=50;lf=8000;ld=1000;
A=pi/4*(D^2-d^2);I=pi/64*(D^4-d^4);
X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
El=[1 2 A I
2 3 A I
3 4 A I
4 5 A I
5 6 A I
6 7 A I
7 8 A I
8 9 A I];
%Constrangeri aplicate
cr=[1 2 3 25 27];
%Articulatii interioare
cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordin I
Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];
%Forta critica dupa Euler
fcrE=(pi)^2*E*I/(lf)^2;
%Program de calcul la stabilitate
stab
%Reprezentare grafica moduri proprii
grafica
	%Bara incastrata glisant-incastrata in trepte
	clear;clf;
	%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
	%si inertiale
	E=2.1*10^5;D=100;d=50;lf=8000;ld=1000;
	A=pi/4*(D^2-d^2);I=pi/64*(D^4-d^4);
	X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
	El=[1 2 A 4*I
	2 3 A 4*I
	3 4 A 4*I
	4 5 A 4*I
	5 6 A I
	6 7 A I
	7 8 A I
	8 9 A I];
	%Constrangeri aplicate
	cr=[1 2 3 27];
	%Articulatii interioare
	cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
	%Forte de compresiune in bare dintr-un calcul de ordin I
	Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];
	%Forta critica dupa Euler
	fcrE=(pi)^2*E*I/(0.6824306*lf)^2;
	%Program de calcul la stabilitate
	stab
	%Reprezentare grafica moduri proprii
	grafica

Rezultatele obținute în urma simulării numerice pentru cazurile C5 și C6 sunt prezentate în fig.4.20.a și fig.4.20.b. Eroarea relativă în modelul numeric față de cel teoretic este de 0,00327% pentru cazul C5, și 0,100% pentru cazul C6.

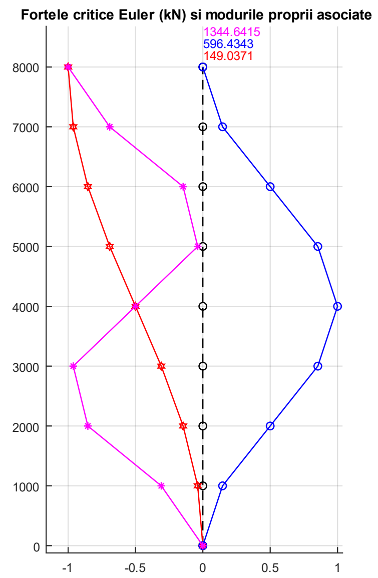


Fig.4.20.a-Caz C5.

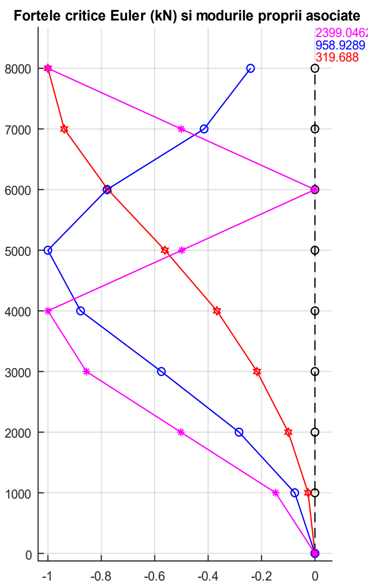


Fig.4.20.b-Caz C6.

În tabelul 4.5 sunt prezentate datele de intrare pentru cazurile C7 și C8.

Tabelul 4.5	
Date intrare pentru cazul C7	Date intrare pentru cazul C8

%Bara dublu incastrata
clear;clf;
%%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
%si inertiale
E=2.1*10^5;D=100;d=50;lf=8000;ld=1000;
A=pi/4*(D^2-d^2);I=pi/64*(D^4-d^4);
X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
El=[1 2 A I
2 3 A I
3 4 A I
4 5 A I
5 6 A I
6 7 A I
7 8 A I
8 9 A I];
%Constrangeri aplicate
cr=[1 2 3 27 26];
%Articulatii interioare
cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordin I
Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];
%Forta critica dupa Euler
fcrE=(pi)^2*E*I/(0.5*lf)^2;
%Program de calcul la stabilitate
stab
%Reprezentare grafica moduri proprii
grafica
	% Bara dublu incastrata in trepte
	clear;clf;
	%%Caracteristici geometrice fizico-mecanice
	%si inertiale
	E=2.1*10^5;D=100;d=50;lf=8000;ld=1000;
	A=pi/4*(D^2-d^2);I=pi/64*(D^4-d^4);
	X=[0 0;1*ld 0;2*ld 0;3*ld 0;4*ld 0;5*ld 0;6*ld 0;7*ld 0;8*ld 0];
	El=[1 2 A I
	2 3 A I
	3 4 A 4*I
	4 5 A 4*I
	5 6 A 4*I
	6 7 A 4*I
	7 8 A I
	8 9 A I];
	%Constrangeri aplicate
	cr=[1 2 3 27 26];
	%Articulatii interioare
	cdi=[0;0;0;0;0;0;0;0];
	%Forte de compresiune dintr-un calcul de ordin I
	Ni=-[1;1;1;1;1;1;1;1];
	scp
	%Forta critica dupa Euler
	fcrE=(pi)^2*E*I/(0.341215335*lf)^2;
	%Program de calcul la stabilitate
	stab
	%Reprezentare grafica moduri proprii
	grafica

Rezultatele obținute în urma simulării numerice pentru cazurile C7 și C8 sunt prezentate în figura 4.21.a și figura 4.21.b. Eroarea relativă în modelul numeric față de cel teoretic este 0,051% pentru cazul C7 și 0,00096% pentru cazul C8.

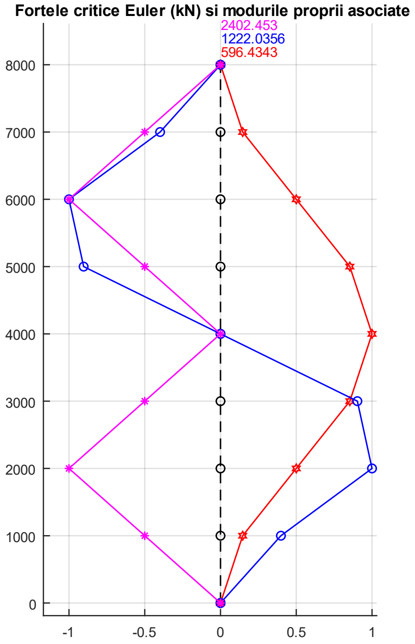


Fig.4.21.a-Caz C7.

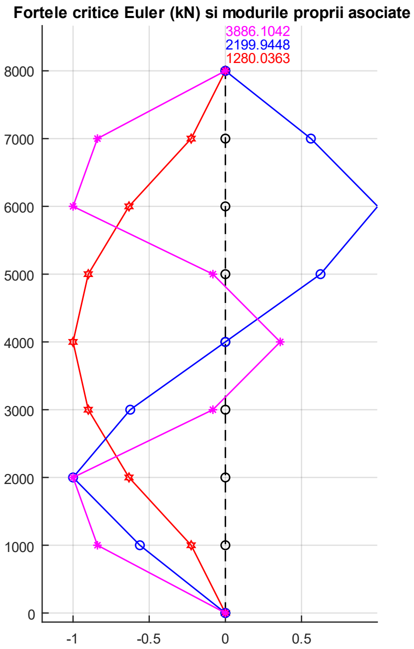


Fig.4.21.b-Caz C8.

Programele script pentru procedurile stab.m și grafica.m sunt prezentate în continuare.

Programul Matlab [12] pentru calculul cadrelor plane la stabilitate-stab.m.

```
disp('Programul stab - stabilitatea structurilor de bare plane -')
% E modulul lui Young/X - coordonatele nodurilor/ El-datele bare n1, n2, A, I,
% cr-cond de rezemare/% cdi-cod de discontinuitate/Ni-forte axiale in elemente.
nE=size(El,1);nN=size(X,1);nd=3*nN+length(find(cdi));ndl=nd-length(cr);% nr. depl. libere
Kgt=zeros(nd,nd); Kgeom=zeros(nd,nd);v=[0 1 0 0 -1 0]';kginit=v*v'; idd=ndl+1;
for i=1:nE
   n1=El(i,1); n2=El(i,2); A=El(i,3); I=El(i,4);v=X(n2,:)-X(n1,:);L=sqrt(v*v');
   r=[v,0;-v(2),v(1),0;0,0,L]/L; Rot=blkdiag(r,r);%matricea de rotatie
   Me=[-1 0 0;0 -1 0;0 L/2 -1;1 0 0;0 1 0;0 L/2 1];%matricea de echilibru
   kincov= E/L*Me*[A 0 0;0 12*I/L^2 0;0 0 I]*Me';%adaugare efect incovoiere
   kgeom=kginit+Me*[0 0 0;0 1/5 0;0 0 L^2/12]*Me';% matricea geometrica
   id=[n1*3+(-2:0) n2*3+(-2:0)];if cdi(i); id(cdi(i))=idd; idd=idd+1; end
   Kgt(id,id)=Kgt(id,id)+Rot'*kincov*Rot;Kgeom(id,id)=Kgeom(id,id)+Ni(i)/L*Rot'*kgeom*Rot; end
a=ones(nd,ndl);a(cr,:)=0; idl=find(a(:,1));[a(idl,:),D]=eig(Kgt(idl,idl),-Kgeom(idl,idl));%Valori si vectori
proprii
```

Programul Matlab [12] pentru reprezentare grafică-grafica.m.

```
%Program reprezentare grafica
%Sortare vectori si valori proprii
[d,ind] = sort(diag(D));Ds = D(ind,ind);Vs = a(:,ind);
fcr=min(abs(diag(D)));D=Ds;a=Vs;disp([nE fcr fcrE (fcr-fcrE)/fcr])
% Stabilirea poz primului mod ifcr
[fcr,ifcr]=min(abs(diag(D)));fprintf ('Forta critica(kN)\n ')
fprintf ('Nr.elem./F_cr_min_mef/F_cr_min_Euler/Eroarea_rel \n ')
disp([nE      fcr*10^-3    fcrE*10^-3      (fcr-fcrE)/fcr*100])
%Reprezentare configuratii echilibru si Fcr asociat
u1=a(:,ifcr);u2=a(:,ifcr+1);u3=a(:,ifcr+2);hold on;grid on;
forma1=reshape(u1,3,nN)';forma2=reshape(u2,3,nN)';forma3=reshape(u3,3,nN)';
%Reprezentare mod de pierdere stabilitate pentru forta critica minima
plot(X(:,2),X(:,1),'ko--','linewidth',1);plot(forma1(:,2),X(:,1),'rh-','linewidth',1);
```

```
plot(forma2(:,2),X(:,1),'bo-','linewidth',1);plot(forma3(:,2),X(:,1),'m*-','linewidth',1);
fcr1=max(D(:,ifcr))*10^-3;fcr2=max(D(:,ifcr+1))*10^-3;fcr3=max(D(:,ifcr+2))*10^-3;
title('Fortele critice Euler (kN) si modurile proprii asociate');hold on
text(0,8*ld+200,(num2str(fcr1)),'Color','red');text(0,8*ld+400,(num2str(fcr2)),'Color','blue');
text(0,8*ld+600,(num2str(fcr3)),'Color','magenta');
```

4.4.Rezultate și concluzii:

• Din analiza comparativă a rezultatelor obținute pentru modelele teoretice și pentru modelele numerice, se observă erori relative sub 0,2%.Rezultă că programul Matlab are o convergență bună. Evident că precizia programului crește dacă numărul de elemente finite crește. Pe baza studiilor de convergență pe o bara cu secțiune constanta, se constata ca de la 4-patru elemente finite în sus, eroare relativă este sub 0,3%.

• Programul în cod Matlab se poate aplica pentru orice condiții la limită și pentru orice sistem de forțe axiale aplicate în nodurile discretizări barei.

• Pentru optimizarea secțiunilor transversale în lungul barei se poate utiliza modelarea în mai multe trepte. Astfel se pot obține variații de orice formă ale secțiunii transversale în lungul axei barei. Aplicații ale creșterii forței critice la bare comprimate se găsesc în lucrările [14], [8] și [3].

• Programul Matlab poate fi folosit și pentru optimizarea barelor cu variație continuă a secțiunii transversale [15], prin aproximarea funcției de variație a secțiunii transversale cu o variație în trepte. Dacă numărul treptelor crește aproximarea se aproprie de variația continuă.

Principalele contribuții ale autorului în cadrul acestui capitol sunt:

• Realizarea modelelor analitice pentru barele drepte cu secțiune constantă și variabilă în trepte pentru determinarea forței critice de pierdere a stabilității pentru diferite condiții cinematice la capete, care acoperă toate posibilitățile importante întâlnite în practică.

• A fost studiată și evidențiată creșterea forței critice de pierdere a stabilității în cazul barei cu secțiune variabilă în trepte în raport cu bara de secțiune constantă, pentru următoarele tipuri de condiții cinematice aplicate la capetele barei: articulat-rezemat (modele C1-C2), liber-încastrată (modele C3-C4), încastrată glisant-încastrată (modele C5-C6) și dublu încastrată (modele C7-C8).

• Realizarea unui algoritm de calcul general implementat în cod Matlab pentru calculul la stabilitate al structurilor de bare drepte. Programul de calcul a fost testat prin simulări numerice și validat în cazul barelor simple care au soluții analitice.

• Rezultatele obținute se pot aplica cu succes atât în cazul structurilor existente la care datorită modificării încărcărilor, trebuie mărită sarcina de pierdere a stabilității pentru anumite bare, cât și la structurile din bare foarte zvelte.

Bibliografie

[1] „Boyer, C.B. Leonhard Euler Swiss mathematician,” [Interactiv]. Available: https://www.britannica.com/biography/Leonhard-Euler. [Accesat 29 08 2022].

[2] „Joseph-Louis Lagrange, comte de l’Empire,” [Interactiv]. Available: https://www.britannica.com/biography/Joseph-Louis-Lagrange-comte-de-lEmpire. [Accesat 29 08 2022].

[3] M. Botis, L. Imre și M. Contiu, „Numerical Method of Increasing the Critical Buckling Load for Straight Beam-Type Elements with Variable Cross-Sections,” *Appl. Sci.,* vol. 13, nr. 1460, pp. 1-42, 2023.

[4] V. Năstăsescu, A. G. Ştefan și C. Lupoiu, Analiza neliniara a structurilor mecanice prin metoda elementelor finite, București: Editura Academiei Tehnice Militare, 2022.

[5] C. Marin, C. Hadăr, F. Popa și L. Albu, Modelarea cu metoda elementelor finitea structurilor mecanice, București: Academiei Române, 2002.

[6] A. Răduţă, M. Botiș și A. Dosa, „Studiul stabilităţii la compresiune a barelor cu secţiune variabilă,” *Sesiunea de comunicări ştiinţifice studenţeşti, 15 aprilie-Universitatea Transilvania din Braşov, Facultatea de Construcţii,* 2022.

[7] R. standard, *SR EN 1993-1-1 Design of steel structure,* 2006.

[8] M. Botiș și A. Doșa, „Comparative study statically determined trusses with trapezoidal and parabolic shape with large span,” *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering,* nr. 1, p. 769, 2020.

[9] S. Coskun și M. Atay, „Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method,” *Computers & Mathematics with Applications,* nr. 58, pp. 2260-2266, 2009.

[10] E. Ruocco, C. Wang, H. Zhang și N. Challamel, „An approximate model for optimizing Bernoulli columns against buckling.,” *Engineering Structures,* vol. 141, pp. 316-327, 2017.

[11] M. Saraçaoğlu și S. Uzun, „Stability analysis of columns with variable cross-sections.,” *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics,* vol. 3, pp. 169-179, 2020.

[12] „MathWorks Inc. MATLAB. Math. Graphics. Programming.,” [Interactiv]. Available: https://www.mathworks.com/ products/matlab.html. [Accesat 23 07 2022].

[13] V. Bănuț și M. E. Teodorescu, Calculul geometric neliniar al structurilor de rezistență, București: Cospress, 2010.

[14] M. Botis, L. Imre și C. Cerbu, „Computer-aided design of a tensegrity structure,” *Structures,* nr. 38, pp. 340-36, 2022.

[15] M. Botis și C. Cerbu, „Design solutions for slender bars with variable cross section to increase the critical buckling force,” *Materials,* vol. 15, nr. 17, 2022.

5. Realizări științifice, didactice și profesionale. Plan de evoluție și dezvoltare a carierei

5.1. Realizări științifice, didactice și profesionale

5.1.1.Studii

Studii universitare
1989-1993 Facultatea Ingineria și Managementul Sistemelor Tehnologice-București cu licență în domeniul **Inginerie mecanică**;
2004-2007 Facultatea de Construcții civile industriale și agricole-Brașov Universitatea Transilvania Brașov cu licență în domeniul **Inginerie civilă**;
Studii doctorale
2000-2004,Universitatea Transilvania Brașov, Facultatea de Inginerie mecanică, **titlul de doctor în domeniul fundamental Științe Inginerești, domeniul Inginerie Mecanică.**

5.1.2. Experiența profesională și didactică

După absolvirea Facultății, autorul tezei de abilitare s-a angajat prin concurs în 1994, la Fabrica Sterom Campina ca **inginer la atelierul de proiectare-cercetare**. În cadrul atelierul de proiectare am lucrat ca proiectant la un număr semnificativ de proiecte dintre care menționez: manipulator pentru vopsirea electrostatică a prăjinilor de pompare, instalație de îndreptat prăjinile de pompare după tratamentele termice, sistem de transfer pentru instalația de alicare a prăjinilor de pompare, vane pentru capetele de erupție, transformator de presiune pneumo-hidraulic etc.

În anul 2000 am fost admis prin concurs, pe postul de **asistent universitar în cadrul Catedrei de Rezistența Materialelor și Vibrații, Facultatea de Inginerie Mecanică, Universitatea Transilvania din Brașov**. Disciplinele din postul de concurs au fost: **Rezistența materialelor, Metoda elementelor finite, Teoria elasticității și plasticității și Metode numerice în mecanica solidului deformabil**. În același an încep elaborarea tezei de doctorat sub coordonarea științifică a domnului prof.dr,ing. Ioan Curtu. În vederea realizării lucrării de doctorat am accesat două burse de documentare-informare:

• 2001 Bursă de documentare informare - Aachen Germania la **Institut für Bergwerks und Hüttenmaschinenkunde-Reheinisch-WestfälischeTechnische-Hochschule**;

• 2002 Bursă de documentare informare - Poitiers Franța la **Laboratoire de Mécanique des Solides Universite de Poitiers**.

În anul 2004 autorul tezei de abilitare ocupă prin concurs, postul de **șef de lucrări în cadrul Catedre de Rezistența Materialelor și Vibrații** cu discipline în domeniul mecanicii solidului deformabil.

Începând cu anul 2008 am plecat prin concurs la Facultatea de Construcții la Catedra de Construcții din cadrul Universității Transilvania Brașov. Postul pentru care am concurat avea următoarele discipline: **Rezistența materialelor I și Rezistența materialelor II**.

Începând cu 2009 și până în prezent, autorul tezei de abilitare ocupă postul de **conferențiar universitar**, câștigat prin concurs, în cadrul **Catedrei de Construcții care în prezent este Departamentului de Inginerie Civilă**. Disciplinele din postul de concurs au fost: **Dinamică și elemente de inginerie seismică, Rezistența materialelor I și II și Proiectare asistată de calculator**.

Principalele activități și responsabilități didactice în cadrul Departamentului de Inginerie Civilă sunt:

- Predarea cursurilor de: **Dinamică și elemente de inginerie seismic**ă (C.C.I.A+C.F.D.P - III); **Rezistența Materialelor I și II** (C.C.I.A+C.F.D.P - I și II);
- Coordonarea de proiecte de diplomă și disertație la programul de studii C.C.I.A (8 proiecte);
- Activități de cercetare – coordonare a două granturi de cercetare, în calitate de director de proiect;
- Diseminarea rezultatelor obținute din cercetare (participare la conferințe, publicare de articole);
- **Pregătirea studenților și participarea la faza națională a Concursului „*C.C.* Teodorescu" în calitate de coordonator al echipei de studenți**;
- **Coordonatorul laboratoarelor de Rezistența materialelor și Dinamică și elemente de inginerie seismică**;
- Dezvoltarea bazei materiale prin investiții în echipamente de cercetare în scopul dotării laboratoarelor de Rezistența materialelor și Dinamică și elemente de inginerie seismică. **Din proiectul de cercetare IDEI CNCSIS 2009-2011 - cod 726 am achiziționat aparatură necesară analizei dinamice a structurilor: hammer test, placă de achiziție cu 16 canale pentru prelucrarea semnalelor de la accelerometre și 8 accelerometre unidirecționale. Din proiectul nr.18599/21.12.2018 am achiziționat un sistem Digital Image Correlation 2D pentru analiza stării de deformații, în cadrul laboratorului de Rezistența Materialelor**.

5.1.3. Principalele domenii de competență

Printre domeniile de competență profesională ale autorului prezentei teze de abilitare se menționează următoarele: **rezistența materialelor**, **elasticitatea și plasticitatea materialelor izotrope și anizotrope**; **dinamica structurilor și inginerie seismică**; **metode numerice aplicate în mecanica solidului deformabil; analiza**

experimentală a stărilor de tensiuni și deformații în structurile civile cu Digital Image Correlation; **optimizarea structurilor cu algoritmi numerici clasici și algoritmi euristici**.

5.1.4. Competențe manageriale și de organizare

- 2 contracte de cercetare în calitate de director de contract ;
- 2012-2019 **directorul Departamentului de Inginerie Civilă - Facultatea de Construcții Brașov**.

5.1.5. Aspecte privind activitate de cercetare desfășurată de autorul tezei de abilitare

• **Teza de doctorat**

Titlul tezei de doctorat: **Optimizarea structurală și a formei a unor piese cu configurație complexă pe criterii de rezistență și rigiditate**, susținută public în Catedra de Rezistența Materialelor și Vibrații la Universitatea Transilvania din Brașov, coordonator: Prof.dr.ing. Ioan Curtu.

Printre principalele contribuții din teza de doctorat menționez:

• optimizarea unor elemente din componența mașinilor de construcții, pe criterii de rezistență și rigiditate;

• dezvoltarea implementarea în cod Matlab a algoritmilor topologici pentru optimizarea structurilor;

• validarea rezultatelor simulărilor numerice cu algoritmi topologici, folosind analiza experimentala fotoelastică și tensometria rezistivă.

• **Cărți semnificative de-a lungul activității didactice și științifice:**

Botiș, M., Metoda elementelor finite. Editura Napoca-Star-2005. ISBN 973-635-443-1, 312 pagini.

Cartea tratează toate tipurile de elemente finite utilizate pentru analiza structurilor. Sunt prezentate elementele finite tip: bară articulată în plan și spațiu, bară cu noduri rigide în plan și in spațiu, elemente finite pentru starea plană de tensiune și deformații, elemente finite pentru analiza stării spațiale de tensiune și elemente finite pentru analiza plăcilor. Cartea prezintă atât analiza statică cât și analiza dinamică a structurilor prin utilizarea elementelor finite.

Botiș, M., Dinamica structurilor și inginerie seismică. Editura Napoca-Star-2009. ISBN 978- ISBN 978-973-647-648-8, 156 pagini.

Cartea tratează sistemele cu un grad de libertate dinamică, sistemele cu n grade de libertate și analiza seismică a structurilor din inginerie seismică cu metoda spectrelor de răspuns și metoda forțelor static echivalente de nivel.

Botiș, M., Aplicații în analiza dinamică a structurilor vol.1. Editura Napoca-Star-2012. ISBN 978-973-647-943-4,134 pagini

Botiș, M., Aplicații în analiza dinamică a structurilor vol.2. Editura Napoca-Star-2013. ISBN 978-606-690-047-8,202 pagini.

Botiș, M., Aplicații în analiza dinamică a structurilor vol.3. Editura Napoca-Star-2014. ISBN 978-606-690-176-5,113 pagini.

Cele 3 cărți menționate mai sus, conțin aplicații pentru sisteme dinamice cu un grad de libertate dinamică, sisteme cu două sau trei grade libertate dinamică și analiza seismică a structurilor. De asemenea în carte sunt prezentate programe de calcul numeric în Matlab pentru rezolvarea integralei de convoluție Duhamel cu metoda trapezelor în cazul acțiunilor aplicate direct sau indirect.

• **Contracte de cercetare derulate în calitate de director de contract**

Am coordonat în calitate de director 2 contracte de cercetare:

• **Proiect cercetare exploratorie IDEI CNCSIS 2009-2011 - cod 726 - cu titlul :Modelarea, optimizarea și testarea stâlpilor eolieni cu absorbitori dinamici pentru reducerea acțiunilor laterale din vânt și seism și a oboselii materialelor.**

Proiectul a avut drept obiectiv realizarea unui absorbitor de vibrații tip TMD care să reducă amplitudinea vibrațiilor stâlpilor eolieni la acțiunea vântului. Valoarea contractului a fost de: 347.659 lei.

• **Contract de cercetare științifică Nr.18599/21.12.2018 cu titlul: Analiza statică a unei structuri cu rigiditate geometrică**.

Contractul de cercetare a avut drept scop realizarea unei structuri noi tip tensegrity, la care rigiditatea este variabilă în funcție de gradul de pretensionarea al cablurilor. Valoarea contractului a fost de: 55.454 lei.

5.1.6. Impactul și vizibilitatea activității științifice

- **Publicații indexate Web of Science și BDI:**

• Număr lucrări indexate ISI Web of Science: 13 dintre acestea 6 articole – prim autor;

• Număr lucrări indexate BDI: 20 dintre acestea 11 articole – prim autor;

• Numărul total de citări obținute pentru articolele publicate - 25 citări.

- **Prelegeri la universități din afara țări:**

• 2015 Visiting Professor la **Tianjin University** -China . Prelegerea a avut drept temă: Aplicații ale structurilor tip tensegrity în inginerie civilă.

Imagini de la **Tianjin University -China**

• 2019 Mobilitate de predare Erasmus la **University Cadi Ayyad din Marrakech-Maroc**. Prelegerea a avut drept temă: Elemente finite pentru analiza stării de tensiune din corpurile solid deformabile.


Imagini de la **University Cadi Ayyad - Marrakech-Maroc**

- **Burse obținute:**

• 2001 Bursă de documentare informare - **Aachen Germania la Institut für Bergwerks und Hüttenmaschinenkunde-Reheinisch-WestfälischeTechnische-Hochschule**;

• 2002 Bursă de documentare informare - **Poitiers Franța la Laboratoire de Mécanique des Solides Universite de Poitiers**;

-2010 Stagiu de documentare-informare – **Germania la Fachhocschule Konstanz** ;

- **Referent științific:**

• Autorul teze de abilitare a recenzat 16 articole la reviste indexate WOS: **Sustainability, Buildings, Symmetry, Forests.**

• Conferința internațională CiBv indexată SCOPUS (5 recenzii);

• Membru în Comitetul Științific la Bulletin of the Transilvania University indexată EBSCO.

5.2. Plan de evoluție și dezvoltare a carierei universitare

Planuri de dezvoltare a activității didactice

Pentru îmbunătățirea rezultatelor în activitatea didactică, a dezvoltării de noi metode de interacțiune și transfer de cunoștințe către studenți îmi propun următoarele:

- ✓ implicarea și coordonarea studenților în vederea participări cu lucrări științifice la Sesiunile de comunicări științifice ale studenților;
- ✓ pregătirea, îndrumarea și coordonarea studenților pentru participarea la concursul „C.C. Teodorescu" faza națională;
- ✓ actualizarea materialului didactic pentru cursurile din postul didactic;
- ✓ realizarea de lucrări noi pentru laboratorul de Rezistența Materialelor care să utilizeze Digital Image Correlation pentru determinarea stării de tensiune la

solicitarea de întindere-compresiune, solicitarea de forfecare, solicitarea de torsiune și solicitarea de încovoierea simplă plană;

- ✓ realizarea de lucrări noi pentru laboratorul de Dinamică și Elemente de inginerie seismică: stand pentru evidențierea modurilor proprii de vibrații la structurile cu 3 GLD prin excitarea fiecărui mod de vibrație cu frecvența proprie utilizând ca excitație un shaker cu frecvență variabilă, realizarea unei platforme cu sisteme cu 1GLD care să fie excitată armonic sau după o accelerogramă de amplasament (naturală sau sintetică), pentru a pune în evidență rezonanța multiplă și spectrul de răspuns;
- ✓ publicarea suportului de laborator pentru disciplinele: Rezistența Materialelor și Dinamică și Elemente de inginerie seismică, după realizarea noilor lucrări de laborator.

Planuri de dezvoltare a activității de cercetare științifică

Activitatea de cercetare științifică stă la baza dezvoltării carierei academice prin actualizarea și modernizarea continuă a cursurilor universitare și studiul literaturii de specialitate pentru a menține un nivel științific corespunzător în cercetările pe care le voi disemina în continuare. În acest sens, pentru a fi la curent cu cercetările de actualitate și pentru a le compara cu rezultatele poprii de cercetare științifică, este necesar să se studieze în continuare literatura de specialitate pe topicul din domeniile mele de competență.

În vederea creșterii impactului și a vizibilității activității științifice se urmărește în continuare:

- ✓ atragerea de fonduri pentru cercetare prin participarea la competiții naționale și internaționale precum și dezvoltarea de proiecte de cercetare cu mediul privat, în vederea dotării cu de noi echipamente de cercetare și consumabile;
- ✓ dezvoltarea contactelor de cercetare cu centrele de cercetare de la universitățile din țară și străinătate cu care am deja colaborări științifice. Realizarea de noi parteneriate cu alte centre de cercetare din țară și străinătate care au același topic de cercetare ca și mine;
- ✓ atragerea în activitatea mea de cercetare științifică a cercetătorilor tineri (studenți, masteranzi și doctoranzi);
- ✓ stabilirea unor întâlniri în cadrul unor manifestări de tip work-shop, în care să aibă loc dezbateri și schimburi de idei pe topicul cercetărilor științifice de interes pentru mine;
- ✓ publicarea anuală a minimum 1 articol cotat ISI (Journal Core) și 2 articole

indexate BDI sau ISI Proceeding;

În continuare, se prezintă direcțiile viitoare de cercetare ale autorului acestei teze de abilitare.

- ✓ Determinarea experimentală a forței critice de pierdere a stabilității barelor drepte cu secțiune variabilă în lungul barei, prin utilizarea imprimantelor 3D;
- ✓ Studiul și analiza din punct de vedere al caracteristicilor mecanice a noi materiale compozite biodegradabile și ușor regenerabile;
- ✓ Modelarea numerică și simularea unui absorbitor de vibrații de tip giroscop care să absoarbă vibrațiile pe o bandă mare de frecvențe;
- ✓ Modelarea matematică și simularea sistemelor de izolarea a bazei utilizate în inginerie civilă pentru creșterea gradului de protecție la seism a structurilor civile de pe teritoriul României.

5.3. Listă de publicații - articole publicate de autorul tezei, relevante pentru cercetarea științifică din teză.

Activitatea de cercetare derulată în cadrul realizării tezei de abilitare a fost diseminată în următoarele articole relevante:

Articole ISI Journal Core:

1.Botiș M.,Cerbu C., (2020). A Method for Reducing of the Overall Torsion for Reinforced Concrete Multi-Storey Irregular Structures. Applied Sciences Journal, Appl. Sci. 2020, 10(16), 5555. https://doi.org/10.3390/app10165555. **(FI =2,474-Q2-WOS).**
2.Botiș M., Cerbu C.,(2022) Design Solutions for Slender Bars with Variable Cross-Sections to Increase the Critical Buckling Force. Materials 15(17). https://doi.org/10.3390/ma15176094**.(FI=3,748-Q1-WOS).**
3.Botiș M.,Cerbu C.,Imre L.,(2022).Computer-aided design of a tensegrity structure. Structures- Journal Elsiver. Volume 38.https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.01.084. **(FI= 4,01-Q1-WOS)**.
4.Botiș M., Imre L., Conțiu M.,(2023). Numerical method of increasing the critical buckling load for straight beam-type elements with variable cross-sections. Applied Sciences Journal 23, 1460. https://doi.org/10.3390/app13031460**.(FI=2.838-Q2).**

Articole ISI Proceeding:

1.Botiș M., Cerbu C., Shi H., (2018) Study on the reduction of the general / overall torsion on multi – story, rectangular, reinforced concrete structures. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 399 (2018) 012005.https://doi:10.1088/1757-899X/399/1/012005. **(WOS).**

Articole BDI:

1.C. Harbic , C. Cismas,,V. Dubasaru**, M. Botis** (2011). Aspects regarding reduction of general torsion in the structures of the Braşov campus. Bulletin of the Transilvania University of Braşov Series I: Engineering Sciences • Vol. 5 (54) No. 2 – 2011, ISSN 2065-2119,pag.153-160. http://webbut.unitbv.ro/BU2011/Series%20I/Contents_CE.html. **(BDI-EBSCO).**

2.Botiș, M., Dosa, A. (2020). Comparative study statically determined trusses with trapezoidal and parabolic shape with large span. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 789 (2020) 012006. https://doi.org/10.1088/1757-899X/789/1/012006. **(BDI-SCOPUS).**

3.Botiș, M., Plescan, C. (2022) .Increase the Load of Loss of Stability for the Pillars of Large-Opening Halls. The annals of "Dunarea de jos" University of Galati Fascicle IX. Metallurgy and Materials Science,No. 3 - 2022, ISSN 2668-4748; e-ISSN 2668-4756.https://doi.org/10.35219/mms.2022.3.06.**(BDI-EBSCO).**

4.Botiș, M., Plescan, C. (2022) .Consolidation of Central Columns of Civil Multistory Structures to Increase the Critical Buckling Force. The annals of "Dunarea de jos" University of Galati Fascicle IX. Metallurgy and Materials Science,No. 4 - 2022, ISSN 2668-4748; e-ISSN 2668-4756. https://doi.org/10.35219/mms.2022.4 **(BDI-EBSCO).**

5. Botis, M., Pleșcan, C. (2022) Determination of the Optimal Thickness of the Floors of Multi-storey Concrete Structures with Modal Analysis.. International Conference on Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG Târgu Mureș October October 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22375-4_20. **(BDI-SCOPUS).**

6.Botiș, M., Plescan, C.(2022)**.** Matlab Program for Determining the Inertia Characteristics of Flat Surfaces with Monte Carlo Algorithms.The annals of "Dunarea de jos" University of Galati Fascicle IX. Metallurgy and Materials Science,No. 2 - 2022, ISSN 2668-4748; e-ISSN 2668-4756. https://doi.org/10.35219/mms.2022.2. **(BDI-EBSCO).**