



**Universitatea
Transilvania
din Brașov**
FACULTATEA DE MATEMATICĂ
ȘI INFORMATICĂ

Str. Iuliu Maniu 50
500091 – Brașov
tel.: (+40) 268.414.016
f-mi@unitbv.ro | www.unitbv.ro/mi

**Conexiunile anumitor inegalități referitoare la funcțiile convexe și la
spațiile cu produs scalar**

TEZĂ DE ABILITARE

Domeniu: Matematică

Autor: Conf. dr. Nicușor Minculete

Universitatea *Transilvania* din Brașov

BRAȘOV, 16 Martie 2018





- **Abilități organizatorice, competențe și activitate științifică**
- **Subiectele de cercetare conținute în teză**
- **Rezultatele principale**
- **Planuri academice viitoare**



Abilitați organizatorice, competențe și activitate științifică

a) Experiența profesională

Studii:

- 1984-1988 Liceul industrial „Electroargeș” din Curtea de Argeș, diplomă de bacalaureat.
- 1989-1994 Universitatea București, Facultatea de Matematică, diplomă de licență.

Specializări și titluri științifice:

- 2004-2009, doctorand al Facultății de Matematică a Universității București, sub coordonarea științifică a prof. univ. dr. Laurențiu Panaitopol.
- 2009-2012, doctorand al Institutului de Matematică „Simion Stoilow” al Academiei Române, sub coordonarea științifică a prof. univ. dr. Toma Albu.

În data de 16 martie 2012 am susținut teza de doctorat cu titlul: *Contribuții la studiul proprietăților analitice ale funcțiilor aritmetice – Utilizarea e-divizorilor* (www.imar.ro/~purice/Inst/2012/Minculete-Dr.pdf.)

b) Experiența de lucru

- 2015 - până în prezent, conferențiar univ. dr. la Universitatea *Transilvania* din Brașov;
- 2013 - 2015, lector univ. dr. la Universitatea *Transilvania* din Brașov;
- 2007 - 2013, lector univ. la Universitatea Creștină *Dimitrie Cantemir* din Brașov;
- 2004 - 2007, profesor de matematică, gradul I, la Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Sfântu Gheorghe, Covasna;
- 1998 - 2004, profesor de matematică, gradul II, la Grupul școlar „Constantin Brâncuși” din Sfântu Gheorghe, Covasna;
- 1994 - 1997, profesor de matematică, definitivat, la Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Sfântu Gheorghe, Covasna.

Membru în organizații științifice

- Membru al Societății de Științe Matematice din România

În acest moment, mai îndeplinesc următoarele activități științifice:

- Recenzor pentru *Mathematical Reviews*
- Editor al revistei *International Journal of Geometry*
- Secretar științific al revistei *General Mathematics*.

Membru în comitetul de organizare al unor conferințe/școli de vară internaționale



- 3rd International Conference on Mathematics and Computer Science – MACOS 2018, 14-16 June 2018, Braşov
- 2nd International Conference on Mathematics and Computer Science – MACOS 2016, 8-10 September 2016, Braşov
- Alterman Conference on Geometric Algebra and Summer School on Kähler Calculus, August 1st- 9th, Braşov, 2016

Participarea la organizarea altor evenimente în cadrul Facultăţii de Matematică şi Informatică:

- WORKSHOP DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ - ediţia a IV-a, 28 februarie 2018
- WORKSHOP DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ - ediţia a III-a, 28 februarie 2017
- Invitarea profesorului universitar Bogdan Suceavă de la California State University, SUA, pentru a susţine o conferinţă în cadrul Facultăţii de Matematică şi Informatică, pe 29 mai 2017.

Activitatea de cercetare științifică

Preocuparea mea principală de cercetare științifică se regăsește în domeniul teoriei inegalităților (aritmetice, algebrice, geometrice și analitice), dar și în domeniul teoriei numerelor, unde am studiat proprietățile funcțiilor aritmetice multiplicative ce utilizează e-divizorii.

Aceasta s-a materializat prin publicarea a peste 60 de articole științifice în reviste specialitate din țara și din străinătate, **15 dintre ele fiind indexate ISI Web of Science** (în jurnale cu factorul de impact peste 0,5), altele indexate BDI, B+ sau B și indexate în Mathematical Review și Zentralblatt Math.

În același timp am participat la peste 20 de conferințe internaționale desfășurate în țară sau străinătate, studiile prezentate fiind apreciate de specialiștii în domeniu.

Principalele rezultate care alcătuiesc teza de doctorat se regăsesc în articolele:

[1] **Minculete, N.**, *A note about properties of exponential divisors*, Appl. Math. Inf. Sci. **7**, No. 1, 319-322(2013).

[2] **Minculete, N.**, *On certain inequalities about arithmetic functions which use exponential divisors*, International Journal of Number Theory, Vol. 8, No. 6 (2012), 1527-1535.

[3] **Minculete, N.**, *Divisors of order k*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., Vol. **39** (2), 2012, 257-265.

[4] **Minculete, N.**, Pozna, C., *On some properties of divisors of order k*, Int. J. Res. Rev. Appl. Sci., Vol. **8**, Issue 3 (2011), 283-287.

[5] **Minculete, N.**, Tóth, L., *Exponential unitary divisors*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **35** (2011), 205-216.

[6] **Minculete, N.**, *Concerning some arithmetic functions which use exponential divisors*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform **28** (2011), 125-133.

[7] **Minculete, N.**, *Some inequalities about certain arithmetical functions which use e-divisors and the e-unitary divisors*, Gaz. Mat. Ser. A., **1-2** (2011), 8-15.

Ulterior tezei de doctorat am continuat studiul în direcția teoriei inegalităților aritmetice, algebrice, geometrice și analitice etc, obținând rezultate care rafinează sau generalizează inegalități consacrate, precum următoarele tipuri:

a) inegalități aritmetice: inegalitatea Sándor-Tóth ($\sqrt{n^k} \leq \frac{\sigma_k^*(n)}{\tau^*(n)} \leq \frac{n^k + 1}{2}$),

inegalitatea lui Landau ($\pi(2x) \leq 2\pi(x)$), în articolele:

[1] **Minculete, N.**, Pozna, C., Precup, E., *A refinement of Sándor-Tóth's inequality*, J. Inequal. Appl. 2012:4, 2012.

[2] **Minculete, N.**, *Two generalizations of Landau's inequality*, Math. Inequal. Appl., Vol. 15, No. 3, 2012, 591-598.

b) inegalități algebrice: inegalitatea lui Radon ($\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{p-1}}$), în

articolul:

[1] Rațiu, A., **Minculete, N.**, *Several refinements and counterparts of Radon's inequality*, Mathematica Bohemica, Vol. **140**, No. 1, 2015, 71-82.

c) inegalități geometrice: inegalitatea Ionescu-Weitzenböck

$(a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S)$, inegalitatea Erdős-Mordell

$(MA + MB + MC \geq 2(x + y + z))$, în articolele:

[1] Băținețu-Giurgiu, D., **Minculete, N.**, Stanciu, N., Some geometric inequalities of Ionescu-Weitzenböck's inequality, *International Journal of Geometry*, Vol. **2** (2013), No. 1.

[2] **Minculete, N.**, Bursuc, I., *Several proofs of the Weitzenböck Inequality*, Octagon Mathematical Magazine, Vol. 16, no. 1/A, 2008.

[3] **Minculete, N.**, *Several geometric inequalities of Erdős-Mordell type in the convex polygon*, International Journal of geometry, Vol. **1** (2012), No. 1, 20-36.

[4] **Minculete, N.**, Gobej, A., *Inegalități geometrice de tipul Erdős-Mordell într-un poligon convex*, Gazeta Matematică Seria A, nr. **1-2** (2010), 1-8.

[5] **Minculete, N.**, *O nouă demonstrație a inegalității Erdős-Mordell și extinderea ei*, Gazeta Matematică Seria A, nr. 3, 2008;

d) inegalități analitice: inegalitatea lui Grüss

$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) \leq \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2)$, inegalitatea lui Cauchy-Schwarz

pentru variabile aleatoare discrete ($|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$), inegalitatea

lui Young și inegalitatea lui Kittaneh-Manasrah

$(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq a^\lambda b^{1-\lambda} + r(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, inegalitatea Féjer

$\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx \right)$, în articolele:

[1] **Minculete, N.**, Rațiu, A., Pečarić, J., *A refinement of Grüss inequality via Cauchy-Schwarz's inequality for discrete random variables*, Appl. Math. Inf. Sci. **9**, No. 1 (2015), 39-45.

[2] **Minculete, N.**, Ciurdariu, L., *A generalized form of Grüss type inequality and other integral inequalities*, J. Inequal. Appl. 2014:**119**, 2014.

[3] Furuichi, S., **Minculete, N.**, *Alternative reverse inequalities for Young's inequality*, J. Math. Inequal., vol. **5**, No. 4 (2011), 595-600.

[4] **Minculete, N.**, Mitroi, C., *Fejer-type inequalities*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **9**, Issue 1, Article 12, 2012, 1-8.

[5] **Minculete, N.**, *A refinement of the Kittaneh – Manasrah inequality*, Creat. Math. Inform. **20** (2011), No. 2, 157-162;

e) inegalități referitoare la entropii generalizate, în articolele:

[1] Mitroi, F. C., **Minculete, N.**, *Mathematical inequalities for biparametric extended information measures*, J. Math. Inequal., vol. **7**, No. 1 (2013), 63-71.

[2] Furuichi, S., **Minculete, N.**, Mitroi, C., *Some inequalities on generalized entropies*, J. Inequal. Appl. 2012:**226**, 2012.

f) inegalități demonstrate cu ajutorul seriilor de puteri, în articolul:

[1] Ciurdariu, L., **Minculete, N.**, *Inequalities for Power Series*, Appl. Math. Inf. Sci. **9**, No. 4 (Jul. 2015), 1823-1832.

g) inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar, în articolele:

[1] Minculete, N., Păltănea, R., *Improved estimates for the triangle inequality*, J. Inequal. Appl. 2017:**17**, 2017.

[2] Minculete, N., Considerations about the several inequalities in an inner product space, *J. Math.Ineq.*, Volume 12, Number 1 (2018), 155–161.

În domeniile *Inteligenței artificiale* și cel al *Modelării proceselor economice* am colaborat la câteva articole, ocupându-mă de partea matematică a fenomenelor, cu nume consacrate în domeniile respective, precum; Prof. univ. dr. Radu-Emil Precup de la Departamentul de Automatică și Informatică Aplicată al Universității „Politehnica” din Timișoara; Prof. univ. dr. Laszlo Koczy, de la Departamentul de Informatică al Universității „Szechenyi Istvan” din Győr-Ungaria; Prof. univ. dr. Claudiu Pozna, de la Departamentul de Informatică al Universității „Szechenyi Istvan” din Győr-Ungaria și de la Departamentul de Automatică al Universității Transilvania din Brașov.

Printre articolele publicate avem:

- [1] Pozna, C., **Minculete, N.**, Precup, E., Kóczy, L., Ballagi, L., *Signatures: Definitions, operators and applications to fuzzy modelling*, Fuzzy Set and Systems, **201**(2012), 86-104. FI: 1,880
- [2] Fântână, R., **Minculete, N.**, Precup, R. E., *Extention of Liskov Substitution Principle and Application to Curriculum Management*, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. **11**, No. 7, 2014, 25-42. FI:0,471
- [3] Pozna, C.; Precup, R.-E.; **Minculete, N.**; Alexandru, C., *Modelling the Intelligence Phenomenon*, Acta Technica Jaurinensis, vol 4/1, 2011.
- [4] Pozna, C.; Precup, R.-E.; **Minculete, N.**; Antonya, C., *Characteristic of a New Abstraction Model*, 4th International Symposium on Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 21-25 October 2009, Egypt, ISBN 978-1-4244-5382-5.

Rezultatele cercetării științifice și relevanța pentru cunoașterea în domeniu a acestor rezultate este evidențiată prin interesul altor cercetători asupra acestora, fiind materializat prin diverse citări în articole publicate în reviste consacrate, peste **200 de citări**, dintre care **33 sunt jurnale cu factorul de impact mai mare de 0,5**.

În cadrul studiilor pe care le-am întreprins în domeniile de cercetare evidențiate mai sus am colaborat cu următorii cercetători:

- **Prof. univ. dr. Josip Pečarić** de la Universitatea din Zagreb și membru al Academiei Croate;
- **Prof. univ. dr. Silvestru Sever Dragomir**, Școala Ingineriei și științei, Universitatea Victoria, Melbourne, Australia
- **Prof. univ. dr. Shigeru Furuichi** de la Departamentul de Știința calculatoarelor și Analiza sistemelor din cadrul Universității Nihon din Tokyo – Japonia;
- **Prof. univ. dr. Laszlo Tóth** de la Departamentul de Matematică al Universității din Pecs – Ungaria;
- **Prof. univ. dr. Dorin Andrica** de la Departamentul de Matematică al Facultății de Matematică și Știința Calculatoarelor din cadrul Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, și de la Departamentul de Matematică al Universității „King Saud” din Riad – Arabia Saudita;
- **Prof. univ. dr. Radu Păltănea**, de la Departamentul de Matematică și Informatică al Universității „Transilvania” din Brașov;
- **Prof. univ. dr. Emil Stoica**, de la Departamentul de Matematică și Informatică al Universității „Transilvania” din Brașov;
- **Prof. univ. dr. Claudiu Pozna**, de la Departamentul de Informatică al Universității „Szechenyi Istvan” din Győr-Ungaria și de la Departamentul de Automatică al Universității Transilvania din Brașov;

- **Conf. univ. dr. Alina Țenescu**, de la Facultatea de Științe Sociale a Universității din Craiova;
- **Lect. univ. dr. Marek Niezgoda** de la Departamentul de Matematică Aplicată și Informatică al Universității de Științe Sociale din Lublin – Polonia;
- **Lect. univ. dr. Loredana Ciurdariu**, de la Departamentul de Matematică al Universității din Politehnica din Timișoara;
- **Asist. univ. dr. Flavia Corina Mitroi-Symeonidis** de la Departamentul de Matematică al Universității Politehnice din București;
- **Asist. univ. Petrică Dicu** de la Departamentul de Matematică și Informatică al Universității „Lucian Blaga” din Sibiu;
- **Asist. univ. Augusta Rațiu** de la Departamentul de Matematică și Informatică al Universității „Lucian Blaga” din Sibiu;
- **Dr. Ovidiu T. Pop** de la Colegiul Național „Mihai Eminescu” din Satu-Mare;
- **Dr. Mihaly Bencze** de la Colegiul Național „Aprily Lajos” din Brașov;
- **Dr. Cătălin Barbu** de la Colegiul Național „Vasile Alecsandri” din Bacău;
- **Prof. Adrian Gobej** de la Colegiul Național „Vlaicu Vodă” din Curtea de Argeș.

Pentru a extinde aria de acțiune în domeniul didactic, dar și de stabilire de noi contacte între Universitatea Transilvania din Brașov și unele universități din țară și din afara țării am participat la diverse conferințe și simpozioane naționale și internaționale, precum:

- [1] **Minculete, N.**, *An improvement of Gruss inequality*, The eight Congress of Romanian Mathematicians, Iași, June 26th-1 Julyst, 2015.
- [2] **Minculete, N.**, *About two reverse inequalities of Bullen's inequality*, The Thirteenth Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, Târgoviște, June 5th-6th, 2015.
- [3] **Minculete, N.**, *Several Bounds for some statistical indicators*, Proceedings of 14-th Conference on Applied Mathematics APLIMAT, Paper 56, 8 pp., 3-5 February 2015, Bratislava, ISBN 978-80-227-4143-3 Institute of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava.
- [4] **Minculete, N.**, *A note on two inequalities with the convex functions*, International Conference on Mathematics and Computer Science MACOS 2014, Brașov, June 26-28, 2014.
- [5] **Minculete, N.**, *Some considerations on Jensen's inequality and several applications*, Twelfth Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, June, 13th-14th 2014, Târgoviște, România.
- [6] **Minculete, N.**, *Two reverse inequalities of Bullen's inequality and several applications*, RoGer, 29 May- 1 June 2014, Sibiu, România.
- [7] **Minculete, N., Rațiu, A.**, *A refinement of Cauchy-Schwarz's inequality for discrete random variables in finite case*, Joint International Meeting of The American Mathematical Society and The Romanian Mathematical Society, June 27-30, 2013, Alba-Iulia, Romania.
- [8] Furuichi, S., **Minculete, N.**, Mitroi, F. C., *Mathematical inequalities on generalized entropies and divergences*, The Sixth conference Information'2013, May 8-11, Tokyo, Japan.
- [9] **Minculete, N.**, *Asupra numerelor armonice*, A XVI-a Conferință anuală a SSMR, 19-21 octombrie 2012, Ploiești.

- [10] **Minculete, N.**, Lixăndroi, D. I., Bârsan-Pipu, N., *Certain inequalities of some arithmetic functions*, GYSCI 2012: Fifth Győr Symposium & First Hungarian-Polish Joint Conference on Computational Intelligence, 24-26 September 2012, Győr, Hungary.
- [11] **Minculete, N.**, Dicu, P., *Bounds to a sequence which use Euler's constant*, The 10th Romanian-German seminar on Approximation Theory and its Applications, 24 -27 May 2012, Sibiu.
- [12] **Minculete, N.**, *A Note about Properties of Exponential Divisors*, A XV-a Conferință anuală a SSMR, 29 septembrie-2 octombrie 2011, Hunedoara.
- [13] Pozna, C., **Minculete, N.**, Precup, R. E., Alexandru, C., *Research on cognition systems based on experimenting the causal relations*, The Third Győr Symposium on Computational Intelligence, 26-30 September 2010, Győr, Hungary.
- [14] **Minculete, N.**, Dicu, P., *A Note on Several Inequalities of the Arithmetic Functions*, International Symposium *Twenty years of mathematics in the "Lucian Blaga" University of Sibiu*, 14 -15 May 2010, Sibiu.

De asemenea am fost în două deplasări pentru documentare și cercetare, enumerate mai jos:

- în perioada 28.08.2011-11.09.2011, la Széchenyi István University, Győr, Ungaria
- în perioada 08.12.2011-21.12.2011, la Széchenyi István University, Győr, Ungaria

Activitatea didactică este susținută de:

- predarea cursurilor următoare: *Algebră liniară și geometrie analitică și diferențială, Matematică aplicată în economie, Aritmetică și teoria numerelor, Convexitate și Inegalități, Geometrie sintetică, Soft matematic*
- publicarea următoarelor cărți:
 1. **Minculete, N.**, *Egalități și inegalități geometrice în triunghi*, Editura Eurocarpatica, Sfântu Gheorghe, 2003, ISBN 973-85929-2-5 (170 p.).
 2. **Minculete, N.**, *Teoreme și probleme specifice de geometrie*, Editura Eurocarpatica, Sfântu Gheorghe, 2007, ISBN 978-973-1815-01-5 (253 p.).
 3. **Minculete, N.**, Bârsan-Pipu, N., *Matematică aplicată în economie. Manual de studiu individual* – 227 pag., 14 capitole, Editura Pro Universitaria, București, 2012, ISBN 978-606-647-340-8
 4. Pop, O., **Minculete, N.**, Bencze, M., *An introduction to quadrilateral geometry*, Editura Didactică si Pedagogică, București, 2013, ISBN 978-973-30-3324-0 (300 p.)
 5. Petriceanu, D., Petriceanu, A.-M., Radu, E., Bunget, M., **Minculete, N.**, *Matematică: Bacalaureat 2014*, Editura Corint, București, 2013.
 6. Petriceanu, D., Petriceanu, A.-M., Radu, E., Bunget, M., **Minculete, N.**, *Matematică: Bacalaureat 2015*, Editura Corint, București, 2014.
 7. Stoica, E., **Minculete, N.**, *Algebră liniară; Geometrie analitică*, Editura Fair Partners, București, 2016, ISBN 978-606-718-012-1 (218 p.).



8. Petriceanu, D., Petriceanu, A.-M., Radu, E., Bunget, M., **Minculete, N.**, *Matematică: Bacalaureat 2018*, Editura Corint, București, 2018.

- Probleme publicate în diverse reviste de matematică:

În revista **The American Mathematical Monthly** am publicat cinci probleme: *Problem 11990*, Vol. **124**, no.6, June-July 2017; *Problem 11714* (cu C. Barbu), Vol. **120**, no.6, June-July 2013; *Problem 11635*, (M, Tetiva), Vol. **119**, no.4, april 2012; *Problem 11531*, , vol. **117**, no.9, november 2010; *Problem 11541*, vol. **117**, no.10, december 2010.

De asemenea, am publicat în revista spaniolă, **La Gaceta de la RSME**, *Problema 181*, Vol. 14 (2011), Num. 3, 511.

Probleme și soluții publicate în alte reviste de matematică:

- Probleme publicate în **Gazeta Matematică Seria A**: 256 în nr.1/2008; 242 în nr.2/2007.
- Probleme publicate în **Gazeta Matematică Seria B**: 26311 în nr.5/2010, 26288 în nr.5/2010, 26177 în nr.7-8-9/2009, 26132 în nr.4/2009, 26024 în nr.7-8/2008, E:13614 în nr.2/2008, 25877 în nr.10/2007; C:3222 în nr.10/2007; 25803 în nr.6/2007; C:3164 în nr.5/2007; 25725 în nr.2/2007; O:1145, 25702 în nr.1/2007 ; O:1140 în nr.11/2006; 25600 în nr.8/2006; O:1124 în nr.6/2006; C:2995 în nr.3/2006 (în colaborare cu Marius Olteanu); C:2863 în nr.4/2005; C:2404 în nr.5-6/2001; C:2454, 24608 în nr.12/2001; 24714, 24704 în nr.5-6/2002; C:2951 în nr.11/2005.
- Probleme publicate în **Octogon Mathematical Magazine**: W14 (Vol. 16, no. 1/A), PP.14335, PP.14336.
- Probleme publicate în **Creații Matematice Seria B** nr. 2/2007: nr. 5(pag. 61), nr. 5(pag. 70).
- Probleme publicate în **Revista de Matematică din Galați**: CL:024, L:885, L:917 în nr.26/2006; G:898 în nr.25/2005; CL:002 în nr.26/2006; CG:061, CL:053, L:983 în nr.28/2007; L:1023, G:1036, CL:075 în nr.29/2007.
- Mi s-au publicat unele soluții în **Gazeta Matematică Seria A** la diverse probleme propuse aici de alți autori: problema 300, nr. 1-2/2011, problemele 280, 282, 283, 284, nr. 1-2/2010, problema 263, nr. 2/2009, problema 255, nr. 1/2009, problema 251, nr. 4/2008.
- Probleme date al concursul **Jozsef Wildt International Mathematical Competition 2009**: W15, W16.
- Peste 10 probleme propuse în cadrul concursului **ViitoriOlimpici.ro** organizat de **Societatea de Științe Matematice din România**.

Subiectele de cercetare conținute în teză

Teoria inegalităților reprezintă un subiect vechi al multor domenii matematice, care rămâne un domeniu de cercetare atractiv cu multe aplicații. Studiul funcțiilor convexe a ocupat și ocupă un rol central în *Teoria inegalităților*, deoarece funcțiile convexe dezvoltă o serie de inegalități.

Structura tezei de abilitare este alcătuită din următoarele tematici:

1. Inegalități dezvoltate de funcții convexe

1.1 Despre inegalitatea Hermite-Hadamard

1.2 Inegalități de tipul Fejér pentru funcții convexe

1.3 Două inegalități inverse ale inegalității Hammer-Bullen

1.4 Inegalități de tip Young

1.5 Inegalități de tipul Grüss în formă discretă și formă integrală

1.5.1 O rafinare a inegalității lui Grüss utilizând inegalitatea Cauchy-Schwarz pentru variabile aleatoare discrete în caz finit

1.5.2 Despre marginile unor indicatori statistici

1.5.3 O formă generalizată a unei inegalități de tip Grüss și alte inegalități integrale

2. Inegalități pentru funcționale și operatori pozitivi inversabili

2.1 Inegalități pentru funcționale

2.1.1 Funcționala Jensen referitoare la funcții superpătratice și funcționala Jensen referitoare la funcții puternic convexe

2.1.2 Câteva inegalități despre entropiile generalizate

2.2 Inegalități pentru operatori pozitivi inversabili

3. Inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

3.1 Despre inegalitatea Cauchy - Schwarz într-un spațiu vectorial înzestrat cu produs scalar

3.2 Inegalități inverse ale inegalității Cauchy-Schwarz într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

3.3 Considerații asupra unor inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

4. Planuri academice viitoare



4.1 Direcții viitoare de cercetare referitoare la inegalitatea Hermite-Hadamard și inegalitatea Hammer-Bullen

4.2 Direcții viitoare de cercetare referitoare la inegalitatea lui Young și inegalitatea lui Hardy

4.3 Direcții viitoare de cercetare referitoare la inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar – Cauchy-Schwarz, Ostrowski, Buzano, Richard

Bibliografia este alcătuită din **211 de referințe**.

Rezultatele originale ale acestei teze de abilitate au fost publicate în reviste precum:

- Bull. Malays. Math. Sci. Soc.
- Aequat. Math.
- J. Inequal. Appl.
- Math. Inequal.
- J. Math. Inequal.
- Gen. Math.
- Appl. Math. Inf. Sci.
- Creat. Math. Inform., etc.

În urma calculării factorului de impact relativ la publicarea în jurnale cu factorul de impact peste 0,5, am obținut un **factor de impact cumulat de 6,014**.

Rezultatele principale

Capitolul 1

Inegalități dezvoltate de funcții convexe

Studierea optimizării unor inegalități se bazează pe proprietăți caracterizate cu ajutorul funcțiilor convexe.

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este **convexă** pe intervalul I , dacă are loc

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

pentru orice $a, b \in I, t \in [0, 1]$.

- Funcția gama a lui Euler, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$ este convexă (de fapt funcția gama a lui Euler este o **funcție log-convexă**, adică, avem $f(ta + (1-t)b) \leq f^t(a)f^{(1-t)}(b)$, pentru orice $a, b \in I, t \in [0, 1]$)
- **inegalitatea lui Jensen**, stă la baza multor inegalități importante. Astfel, pentru o funcție reală convexă f , cu numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$ care aparțin domeniului lui f , și ponderile pozitive $w_1, w_2, \dots, w_n$, avem:

$$(1.1) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

- Când toate ponderile sunt egale în inegalitatea (1.1), atunci deducem varianta clasică a inegalității lui **Jensen**:

$$(1.3) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}.$$

1.1 Despre inegalitatea Hermite-Hadamard

Pentru $n = 2$ în inegalitatea (1.3), avem:

$$(1.1.1) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Hermite [107] și Hadamard [99], arată că pentru orice funcție continuă și convexă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$(1.1.2) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Relativ la **inegalitatea Hermite–Hadamard**, mulți matematicieni au lucrat cu mult interes ca să o generalizeze, să o rafineze sau să o extindă la diverse clase de funcții, precum: funcțiile cvasi-convexe, funcțiile log-convex, funcțiile r-convexe

- obținerea unor caracterizări ale mediilor generalizate: **media Hölder**,

$$A_p(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2} \right)^{1/p}, \quad p \neq 0, \quad \text{media Lehmer}, \quad L_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}},$$

$$\text{media Stolarsky}, \quad S_p(a, b) = \left(\frac{a^p - b^p}{p(a-b)} \right)^{1/(p-1)}, \quad p \neq 0, 1, \quad a \neq b.$$

În monografia [51], **Dragomir și Pearce** au prezentat mai multe caracterizări ale inegalității Hermite-Hadamard.

Ioan Raşa [165] arată că: dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție convexă, atunci

$$(1.1.4) \quad \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + c\right) \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt,$$

pentru orice $c \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$, și $c = \frac{b-a}{4}$ este maximul cu această proprietate.

- Alte îmbunătățiri și extinderi ale inegalității au fost date de: **Bessenyei, Bessenyei și Páles, Mihăilescu și Niculescu** etc.
- **Dragomir, Cerone și Sofo** prezintă în [56, 57] următoarele estimări ale inegalității Hermite-Hadamard:

Propoziția 1.1.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât există constantele reale m și M astfel încât $m \leq f'' \leq M$. Atunci

$$(1.1.5) \quad m \frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M \frac{(b-a)^2}{24}$$

și

$$(1.1.6) \quad m \frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Teorema 1.1.3 ([145] Minculete, N., Mitroi, C., Féjer-type inequalities, *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 9., Issue 1, Article 12, 2012, 1-8). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât există constantele reale m și M astfel încât $m \leq f'' \leq M$. Atunci

(1.1.7)

$$m \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} (b-a)^2 \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq M \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} (b-a)^2$$

pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

- Dacă integrăm de la $[0, 1]$ după λ în inegalitatea (1.1.7), atunci obținem (1.1.6).

Corolarul 1.1.5 (Minculete-Mitroi [145]). Păstrând condițiile din Teorema 1.1.3 avem:

(1.1.8)

$$m \frac{(1-2\lambda)^2}{8} (b-a)^2 \leq \frac{1}{2} (f(\lambda a + (1-\lambda)b) + f((1-\lambda)a + \lambda b)) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M \frac{(1-2\lambda)^2}{8} (b-a)^2$$

for all $\lambda \in [0, 1]$.

Corolarul 1.1.7 (Minculete-Mitroi [145]). Presupunem că $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și convexă. Atunci

$$(1.1.9) \quad \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \geq \frac{x-a}{b-a} \left(\frac{f(a) + f(x)}{2} - \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) g(t) dt \right) \geq 0$$

și

$$(1.1.10) \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{x-a}{b-a} \left(\frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt - f\left(\frac{a+x}{2}\right) \right) \geq 0,$$

pentru orice $x, y \in (a, b)$.

1.2 Inegalități de tipul Fejér pentru funcții convexe

Fejér [71], studiind polinoamele trigonometrice, obține niște inegalități care generalizează inegalitatea Hermite-Hadamard, astfel:

Teorema 1.2.1. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și convexă și dacă $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este integrabilă și simetrică în raport cu dreapta $x = (a+b)/2$. Atunci avem

$$(1.2.1) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(t)dt.$$

Motivați de rezultatele de mai sus, în articolul [145], arătăm alte inegalități de tip Fejér:

Teoremă 1.2.2 (Minculete-Mitroi [145]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât există constantele reale m și M astfel încât $m \leq f'' \leq M$. Presupunem că $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este integrabilă și simetrică în raport cu dreapta $x = (a+b)/2$. Atunci au loc următoarele inegalități:

$$(1.2.2) \quad \frac{m}{2} \int_a^b (t-a)(b-t)g(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \frac{M}{2} \int_a^b (t-a)(b-t)g(t)dt$$

și

$$(1.2.3) \quad \frac{m}{8} \int_a^b (2t-a-b)^2 g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(t)dt \leq \frac{M}{8} \int_a^b (2t-a-b)^2 g(t)dt.$$

- Pentru cazul particular $g(x)=1$, dacă aplicăm teorema 1.2.2 pe intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, deducem:

$$(1.2.4) \quad m \frac{(b-a)^2}{48} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M \frac{(b-a)^2}{48},$$

care reprezintă o îmbunătățire a **inegalității Hammer-Bullen** [166], dată de:

$$(1.2.5) \quad \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Următoarele teoreme dau noi inegalități de tipul Fejér.

Teorema 1.2.4 (Minculete-Mitroi [145]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori diferențiabilă, cu $f'' \geq 0$ și $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă. Atunci au loc următoarele inegalități:

i) Dacă g este monoton descrescătoare, atunci

$$(1.2.6) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt \geq \frac{f(a)+f(x)}{2} \int_a^x g(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt \geq 0;$$

ii) Dacă g este monoton crescătoare, atunci

$$(1.2.7) \quad \int_a^b f(t)g(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt \geq \int_a^x f(t)g(t)dt - f\left(\frac{a+x}{2}\right)\int_a^x g(t)dx \geq 0,$$

pentru orice $x, y \in (a, b)$.

- Din inegalitatea (1.2.6) aplicată funcției convexe t^p , cu $p \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$, avem (vezi [145])

$$(1.2.9) \quad (b-a)[A_p(a, b)]^p - [S_p(a, b)]^p \geq (x-a)[A_p(a, x)]^p - [S_p(a, x)]^p \}$$

unde $x \in [a, b]$. Aici $A_p(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}$ este media Hölder sau media putere de ordin p și $S_p(a, b) = \left(\frac{a^p - b^p}{p(a-b)}\right)^{1/(p-1)}$, $p \neq 0, 1, a \neq b$, este media Stolarsky.

- Pentru $p \rightarrow -1$ rezultă

$$(1.2.10) \quad (b-a)\left[\frac{1}{H(a, b)} - \frac{1}{L(a, b)}\right] \geq (x-a)\left[\frac{1}{H(a, x)} - \frac{1}{L(a, x)}\right],$$

unde $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$ este media armonică și $L(a, b) = \frac{b-a}{\log b - \log a}$ este media logaritmică pentru $a \neq b$.

- Niezgoda stabilește câteva inegalități de tip Fejér pentru șiruri convexe, Kunt *et al.* găsesc o nouă inegalitate de tipul Hermite-Hadamard-Fejér

1.3 Două inegalități inverse ale inegalității Hammer-Bullen

Pentru anumite restricții ale lui f , în [51], Dragomir și Pearce găsesc o îmbunătățire a inegalității Hammer-Bullen dată de următoarea:

Teorema 1.3.1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât există constantele reale m și M astfel încât $m \leq f'' \leq M$. Atunci:

$$(1.3.1) \quad m \frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M \frac{(b-a)^2}{24}.$$

În continuare, vom dovedi două inegalități inverse ale inegalității Hammer-Bullen.

Lema 1.3.2 ([146] Minculete, N., Dicu, P., Rațiu, A., Two reverse inequalities of Bullen's inequality, *General Mathematics*, Vol. 22, No. 1 (2014), 69–73.). Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă, atunci are loc egalitatea:

$$(1.3.2) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) q(x) f''(x) dx,$$

unde

$$q(x) = \begin{cases} a-x, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right) \\ b-x, & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}.$$

- Pentru $x \in [a, b]$, avem $\left(x - \frac{a+b}{2}\right) q(x) \geq 0$, iar prin câteva calcule elementare obținem:

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) q(x) dx = \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Prin urmare, pentru $x \in [a, b]$, putem scrie

$$m \left(x - \frac{a+b}{2}\right) q(x) \leq \left(x - \frac{a+b}{2}\right) q(x) f''(x) \leq M \left(x - \frac{a+b}{2}\right) q(x).$$

Prin integrare de la a la b , înmulțind cu $1/(b-a)$ și utilizând relația (1.3.2), obținem inegalitățile de la (1.3.1).

- Inegalitățile de la relația (1.3.1) pot fi obținute prin aplicarea inegalității Hammer-Bullen pentru funcțiile convexe $f(x) - m \frac{x^2}{2}$ și $f(x) - M \frac{x^2}{2}$.

Teorema 1.3.4 (Minculete-Dicu-Rațiu [146]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și convexă. Atunci are loc inegalitatea

$$(1.3.3) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \frac{(b-a)(f'(b)-f'(a))}{16}.$$

Inegalitatea lui Grüss $\Rightarrow$

Theorem 1.3.5 (Minculete-Dicu-Rațiu [146]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât există constantele reale m și M astfel încât $m \leq f'' \leq M$. Atunci:

(1.3.4)

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)(f'(b)-f'(a))}{16} \right| \leq \frac{(M-m)(b-a)^2}{64}.$$

- Dacă vom considera funcția $f(x) = x^p$, $p > 1$. Evident că funcția f este convexă. Ținând cont de teorema 1.3.4 avem:

$$A(a^p, b^p) + A^p(a, b) - 2S_p^p(a, b) \leq \frac{p(b-a)(b^{p-1} - a^{p-1})}{16},$$

unde $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ este media aritmetică și $S_p(a, b) = \left[\frac{a^p - b^p}{p(a-b)} \right]^{1/(p-1)}$,
 $p \neq 0, 1$, $a \neq b$ este media Stolarsky.

- Pentru $f(x) = -\log x$, $x > 0$, obținem

$$A(a, b)G(a, b)e^{\frac{(b-a)^2}{16ab}} \geq I^2(a, b),$$

unde $G(a, b) = \sqrt{ab}$ este media geometrică și $I(a, b) = \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{1/(b-a)}$ este media identrică.

În [[147] Minculete, N., Florea, A., Furuichi, S., Bounds and estimates on convex inequalities, *Journal of Inequalities and Special Functions*, Volume 8, Issue 4 (2017), 1-9], scopul nostru a fost să determinăm noi caracterizări referitoare la inegalitatea Hermite-Hadamard.

Fie funcțiile $H_a[f], H_b[f]: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

$$H_a[f](x) = (x-a) \frac{f(a)+f(x)}{2} - \int_a^x f(t)dt$$

și

$$H_b[f](x) = (b-x) \frac{f(b)+f(x)}{2} - \int_x^b f(t)dt.$$

Lema 1.3.6. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci funcțiile $H_a[f]$ și $H_b[f]$ sunt nenegative și convexe.

$$H_a[f], H_b[f] \Rightarrow$$

Teorema 1.3.7 (Minculete-Florea-Furuichi [147]). . Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci avem

$$(1.3.5) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b H_a[f](x)dx \geq$$

$$\frac{f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} - \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt \geq 0$$

și

$$(1.3.6) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b H_b[f](x)dx \geq$$

$$\frac{f(b)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} - \frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt \geq 0.$$

- Prin adunarea relațiilor (1.3.5) și (1.3.6) deducem:

$$(1.3.7) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \geq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b H_a[f](x) + H_b[f](x)dx \geq$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt \right) \geq 0.$$

Pentru a generaliza inegalitățile de mai sus extindem funcțiile $H_a[f], H_b[f]: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funcțiile $H_a[f, g], H_b[f, g]: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt definite prin:

$$H_a[f, g](x) = \left(\int_a^x g(t)dt \right) \frac{f(a)+f(x)}{2} - \int_a^x f(t)g(t)dt$$

și

$$H_b[f, g](x) = \left(\int_x^b g(t)dt \right) \frac{f(b)+f(x)}{2} - \int_x^b f(t)g(t)dt.$$

De asemenea, considerăm funcțiile: $\overline{H}_a[f, g], \overline{H}_b[f, g]: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

$$\overline{H}_a[f, g](x) = \int_a^x f(t)g(t)dt - f\left(\frac{a+x}{2}\right)\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

și

$$\overline{H}^b[f, g](x) = \int_x^b f(t)g(t)dt - f\left(\frac{b+x}{2}\right)\left(\int_x^b g(t)dt\right).$$

Rezultă următoarea:

Teorema 1.3.10 (Minculete-Florea-Furuichi [147]). *Fie funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă și funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ derivabilă și simetrică în raport cu $\frac{a+b}{2}$. Atunci au loc inegalitățile:*

$$(1.3.10) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\int_a^b g(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(t)dt.$$

Viitoare direcții de cercetare referitoare la inegalitatea Hammer-Bullen sunt preconizate în articolul [\[142\] Minculete, N., Niezgoda, M., Mitroi-Symeonidis, F. C., About reverse inequalities of Hammer-Bullen's inequality, în lucru.](#)

1.4 Inegalități de tip Young

Inegalitatea lui Young în formă integrală este o sursă de inspirație pentru multe inegalități fundamentale. [Young](#) [208] demonstrează următorul rezultat:

Teorema 1.4.1. *Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție strict crescătoare și continuă astfel încât $f(0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Atunci*

$$(1.4.1) \quad ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx = Y(f; a, b).$$

Există multe demonstrații diferite și mai multe generalizări ale acestei inegalități: [Bullen](#) [27] și [Mitrinović et al.](#) [155]).

- ab este o margine inferioară pentru funcționala Young $Y(f; a, b)$.

În anul 1974, **Merkle** [138] arată că nu există o margine superioară a lui $Y(f; a, b)$ care să fie independentă de f . El dovedește că:

$$(1.4.2) \quad Y(f; a, b) \leq \max\{af(a), bf^{-1}(b)\}.$$

În condițiile teoremei 1.4.1, avem

$$(1.4.3) \quad af(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = Y(f; a, f(a)).$$

- (1.4.4) $Y(f; a, b) + Y(f; f^{-1}(b), f(a)) = af(a) + bf^{-1}(b).$

Witkowski, [206]

$$(1.4.5) \quad ab \leq Y(f; a, b) \leq af(a) + f^{-1}(b)(b - f(a)).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $b = f(a)$.

În [140], **Minguzzi** generalizează această inegalitate.

Witkowski [206]

$$(1.4.7) \quad ab \geq \min\left\{1, \frac{b}{f(a)}\right\} \int_0^a f(x)dx + \min\left\{1, \frac{a}{f^{-1}(b)}\right\} \int_0^b f^{-1}(x)dx.$$

Cerone, în [33], dovedește că marginea superioară obținută de Witkowski, dată în relația (1.4.5) este mai bună decât cea a lui Merkle, dată în (1.4.2).

- Pentru $f(x) = x^{p-1}$, $p > 1$, în teorema 1.4.8, deducem inegalitatea:

$$(1.4.8) \quad ab \geq \min\left\{1, \frac{ab}{a^p}\right\} \frac{a^p}{p} + \min\left\{1, \frac{ab}{b^q}\right\} \frac{b^q}{q}.$$

- Pentru $f(x) = x^{p-1}$, $p > 1$, în teorema 1.4.1, obținem *inegalitatea lui Young*:

$$(1.4.9) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

pentru orice $a, b \geq 0$ și $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Minguzzi, în [140], demonstrează o inegalitate inversă pentru inegalitatea lui Young:

$$(1.4.10) \quad 0 \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \leq (b - a^{p-1})(b^{q-1} - a),$$

pentru orice $a, b \geq 0$ și $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Această inegalitate pentru $a, b > 0$ și $p \in (0, 1)$, cu substituțiile: $p \rightarrow \frac{1}{p}$, $a \rightarrow a^p$ și $b \rightarrow b^{1-p}$ este echivalentă cu următoarea:

$$(1.4.11) \quad a^p b^{1-p} \leq pa + (1-p)b,$$

Dar, aceasta este adevărată și pentru $p \in \{0, 1\}$.

În mod special, când vorbim despre *inegalitatea lui Young* ne vom referi la ultima formă.

Tominaga în [200], utilizează raportul Specht:

$$(1.4.12) \quad pa + (1-p)b \leq S\left(\frac{a}{b}\right) a^p b^{1-p},$$

unde

$$S(h) \equiv \frac{h^{\frac{1}{h-1}}}{e \log h^{\frac{1}{h-1}}}, h \neq 1,$$

pentru orice număr întreg pozitiv h .

- **Tominaga** arată în lucrarea [200] inegalitatea:

$$(1.4.13) \quad pa + (1-p)b \leq L(a, b) \log S\left(\frac{a}{b}\right) + a^p b^{1-p},$$

pentru orice două numere pozitive a, b și orice $p \in [0, 1]$, unde $L(x, y)$ este media logaritmică.

În [[76] Furuichi, S., Minculete, N., *Alternative reverse inequalities for Young's inequality*, *J. Math. Inequal.*, vol. 5, No. 4 (2011), 595-600.], am prezentat două inegalități inverse ale inegalității Young, și anume:

$$(1.4.14) \quad 0 \leq \lambda a + (1-\lambda)b - a^\lambda b^{1-\lambda} \leq a^\lambda b^{1-\lambda} \exp\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)(a-b)^2}{m^2}\right\} - a^\lambda b^{1-\lambda},$$

și

$$(1.4.15) \quad 0 \leq \lambda a + (1 - \lambda)b - a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda(1 - \lambda) \left\{ \log \frac{a}{b} \right\}^2 M,$$

unde $a, b > 0$, $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$, pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

Rezultatele de mai sus sunt cazuri particulare ale teoremei următoare [Furuichi-Minculete, 76]:

Teorema 1.4.3. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și există constanta reală M astfel încât $0 \leq f'' \leq M$, pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$(1.4.16) \quad 0 \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) - f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq M\lambda(1 - \lambda)(b - a)^2,$$

pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

Inegalitatea lui Young a fost îmbunătățită de Kittaneh și Manasrah, în [116], astfel

$$(1.4.20) \quad pa + (1 - p)b \geq a^p b^{1-p} + r(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2,$$

unde $p \in [0, 1]$ și $r = \min\{p, 1 - p\}$.

- Ei studiază această inegalitate pentru a stabili inegalități utilizând norma unei matrice.

În [78], Furuichi:

$$(1.4.21) \quad pa + (1 - p)b \geq S \left(\left(\frac{a}{b} \right)^r \right) a^p b^{1-p}.$$

Kober demonstrează în [119] un rezultat general referitor la îmbunătățirea inegalității dintre media aritmetică și media geometrică, care pentru $n = 2$ generează inegalitatea:

$$(1.4.22) \quad a^p b^{1-p} + r(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq pa + (1 - p)b \leq a^p b^{1-p} + (1 - r)(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Această inegalitate a fost redescoperită de Kittaneh și Manasrah, în [116].

Aldaz [11] – generalizează Young.

În [[151] Minculete, N., A result about Young's inequality and several applications, *Sci. Magna*, Vol. 7 (2011), No. 1, 61-68.], prezentăm o altă încadrare a inegalității lui Young,

$$(1.4.23) \quad a^p b^{1-p} \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2r} \leq pa + (1 - p)b \leq a^p b^{1-p} \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2(1-r)}.$$

Această inegalitate poate fi scrisă cu ajutorul constantei Kantorovich:

$$(1.4.24) \quad K^r(h,2)a^pb^{1-p} \leq pa + (1-p)b \leq K^{1-r}(h,2)a^pb^{1-p},$$

unde $a, b > 0, p \in [0,1], r = \min\{p, 1-p\}, K(h,2) = \frac{(h+1)^2}{4h}$ și $h = \frac{b}{a}$.

Menționăm că prima inegalitate în (1.4.24) a fost obținută de [Zou et al.](#) în [211] iar cea de-a doua a fost obținută de [Liao et al.](#) [124].

În [[152] Minculete, N., A refinement of the Kittaneh – Manasrah inequality, *Creat. Math. Inform.* **20** (2011), No. 2, 157-162.], prezentăm altă rafinare a inegalității lui Young, dată de următoarea:

$$(1.4.25) \quad r(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + A(p)\ln^2\left(\frac{a}{b}\right) \leq pa + (1-p)b - a^pb^{1-p} \leq$$

$$(1-r)(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + B(p)\ln^2\left(\frac{a}{b}\right),$$

unde $a, b \geq 1, p \in (0,1), r = \min\{p, 1-p\},$

$$A(p) = \frac{p(1-p)}{2} - \frac{r}{4} \quad \text{și} \quad B(p) = \frac{p(1-p)}{2} - \frac{1-r}{4}.$$

- Observăm că $A(p) = \frac{p(1-p)}{2} - \frac{r}{4} \geq 0$ și

$$B(p) = \frac{p(1-p)}{2} - \frac{1-r}{4} \leq 0.$$

- Alți matematicieni care s-au ocupat recent de inegalitatea lui Young: [Dragomir, Zhao și Wu](#), [Sababheh și Moslehian](#), [Furuichi](#), [Ghaemi and Gharakhanlu](#)

1.5 Inegalități de tipul Grüss în formă discretă și formă integrală

În această secțiune vom prezenta câteva rafinări ale inegalității lui Grüss în variantă discretă. Acestea au fost incluse în lucrările:

- [143] Minculete, N., Rațiu, A., Pečarić, J., A refinement of Grüss inequality via Cauchy-Schwarz's inequality for discrete random variables, *Appl. Math. Inf. Sci.* **9**, No. 1 (2015), 39-45.
- [149] Minculete, N., Ciurdariu, L., A generalized form of Grüss type inequality and other integral inequalities, *J. Inequal. Appl.* 2014:**119**, 2014.

Versiunea discretă a inegalității lui Grüss:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right| \leq \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2),$$

unde x_i, y_i sunt numere reale astfel încât $\gamma_1 \leq x_i \leq \Gamma_1$ și $\gamma_2 \leq y_i \leq \Gamma_2$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Varianta integrală a inegalității lui Grüss:

Fie f și g două funcții mărginite pe $[a, b]$ cu $\gamma_1 \leq f(x) \leq \Gamma_1$ și $\gamma_2 \leq g(x) \leq \Gamma_2$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ sunt patru constante. Atunci, avem:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2)$$

După numărul de articole publicate observăm că această inegalitate este de mare interes pentru specialiștii în inegalități:

- **Peng și Miao** [181] – stabilesc o altă formă a inegalității Grüss
- **Dragomir** [60] – câteva inegalități de tip Grüss în spațiile înzestrate cu produs scalar
- **Mercer** [136] dă o îmbunătățire a inegalității Grüss
- **Liu** [125] arată alte forme ale inegalităților de tip Ostrowski-Grüss
- **Kechriniotis and Delibasis** [113] rafinează inegalitatea lui Grüss în spațiile înzestrate cu produs scalar utilizând rezultatele lui Kurepa's pentru gramian.
- Noi generalizări [47] **Dahmani–Tabharit–Taf** utilizând integralele fracționale Riemann-Liouville.

1.5.1 O rafinare a inegalității lui Grüss utilizând inegalitatea Cauchy-Schwarz pentru variabile aleatoare discrete în caz finit

Varianța (dispersia) unei variabile aleatoare discrete în caz finit $X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}$

cu probabilitățile $P(X = x_i) = p_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$ este media pătratelor abaterilor

individuale de la media $\mu_X = E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$:

$$Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2.$$



Expresie echivalentă:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E^2[X].$$

Notăm prin **RV** mulțimea variabilelor aleatoare de tipul $X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}$ cu probabilitățile $P(X = x_i) = p_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$.

Covarianța măsoară modul cum se schimbă în același timp două variabile aleatoare și este definită, astfel:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])],$$

care este echivalentă cu forma

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Inegalitatea **Cauchy-Schwarz**:

$$|\text{Cov}(X, Y)|^2 \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$$

Câteva rezultate:

(1.5.1)

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(1.5.2)

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

(1.5.3)

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y).$$

(1.5.4)

$$\text{Var}(X + Y) + \text{Var}(X - Y) = 2\text{Var}(X) + 2\text{Var}(Y).$$

(1.5.5)

$$\text{Cov}(aX + bY, cZ + dT) = ac\text{Cov}(X, Z) + ad\text{Cov}(X, T) + bc\text{Cov}(Y, Z) + bd\text{Cov}(Y, T)$$

Teorema 1.5.5 (Minculete-Rațiu-Pečarić, [143]). *Dacă X , Y și Z sunt variabile aleatoare discrete în caz finit cu $X \neq kZ$, atunci avem inegalitatea*

(1.5.6)

$$0 \leq \frac{[\text{Cov}(X, Y)\text{Cov}(X, Z) - \text{Cov}(Y, Z)\text{Var}(X)]^2}{\text{Var}(X)\text{Var}(Z) - [\text{Cov}(X, Z)]^2} \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y) - [\text{Cov}(X, Y)]^2.$$

- $\text{Var}(Y) \neq 0$ și $\text{Var}(Z) \neq 0$, **rezultă:**

(1.5.8)

$$0 \leq \frac{[Cov(X, Y)Cov(Y, Z) - Cov(X, Z)Var(Y)]^2}{Var(Y)Var(Z)} \leq Var(X)Var(Y) - [Cov(X, Y)]^2.$$

Fie numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$, astfel încât $\gamma_1 \leq x_i \leq \Gamma_1$ pentru orice

$$i = \overline{1, n} \text{ și } \mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

În 1935, **Popoviciu** (vezi e.g. [20, 84]) demonstrează inegalitatea

$$(1.5.9) \quad Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \leq \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \gamma_1)^2.$$

Inegalitatea Grüss are forma:

$$(1.5.10) \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right| \leq \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2),$$

unde x_i, y_i sunt numere reale astfel încât $\gamma_1 \leq x_i \leq \Gamma_1$ și $\gamma_2 \leq y_i \leq \Gamma_2$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

$$\text{Observăm: } Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Utilizând inegalitatea Cauchy-Schwarz $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$, se obține o demonstrație a inegalității lui Grüss.

- **Bhatia și Davis** prezintă în [20]:

$$(1.5.11) \quad Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \leq (\Gamma_1 - \mu_X)(\mu_X - \gamma_1).$$

Inegalitatea lui Bhatia și Davis reprezintă o îmbunătățire a inegalității lui Popoviciu, deoarece $(\Gamma_1 - \gamma_1)^2 \geq 4(\Gamma_1 - \mu_X)(\mu_X - \gamma_1)$.

Prin urmare se poate obține o rafinare a inegalității lui Grüss:

$$(1.5.12)$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right| \leq \sqrt{(\Gamma_1 - \mu_X)(\mu_X - \gamma_1)(\Gamma_2 - \mu_Y)(\mu_Y - \gamma_2)} \leq \frac{1}{4} (\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2)$$

Fie numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$, $z_1, z_2, \dots, z_n$, astfel încât $x_1, x_2, \dots, x_n$ și $z_1, z_2, \dots, z_n$ nu sunt proporționale. Aplicând inegalitatea (1.5.8) deduce o îmbunătățirea a inegalității lui Grüss:



(1.5.14)

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right]^2 + S \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right),$$

unde $S = \frac{[A-B]^2}{C}$ cu

$$A = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i z_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right),$$

$$B = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i z_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

și

$$C = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right)^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i z_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right)^2$$

1.5.2 Despre marginile unor indicatori statistici

Media aritmetică ponderată (valoarea medie) a lui $X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}$ cu

probabilitățile $P(X = x_i) = p_i$ și $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ este dată prin $\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.

Varianța:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \bar{X})^2] = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{X})^2.$$

Deviația standard ($\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\text{Var}(X)}$)

Coeficientul de variație ($C_V(X)$):

$$C_V(X) = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E[X]}.$$

Coeficientul de corelație este dat prin:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Este ușor de văzut că $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Fie $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Utilizând inegalitățile anterioare avem:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 \leq \frac{1}{4}(M - m)^2, \sigma_{\bar{X}} \leq \frac{1}{2}(M - m), C_v(X) \leq \frac{M - m}{2\bar{X}}$$

și

$$|Cov(X, Y)| \leq \frac{1}{4}(M - m)(Q - q),$$

unde $Q = \max\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ și $q = \min\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Bhatia și Davis:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 \leq (M - \bar{X})(\bar{X} - m),$$

ne generează alte margini ale indicatorilor statistici

$$\sigma_{\bar{X}}^2 \leq (M - \bar{X})(\bar{X} - m), \sigma_{\bar{X}} \leq \sqrt{(M - \bar{X})(\bar{X} - m)}, C_v(X) \leq \frac{\sqrt{(M - \bar{X})(\bar{X} - m)}}{\bar{X}}$$

A. McD. Mercer [136] arată că:

$$(1.5.2.4) \quad \sigma_{\bar{X}}^2 \leq 2M(\bar{X} - \bar{X}_h),$$

unde $\bar{X}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ este *media armonică*.

În lucrarea [144] obținem o altă caracterizare a varianței:

$$(1.5.2.5) \quad 2m(\bar{X} - \bar{X}_g) \leq \sigma_{\bar{X}}^2 \leq 2M(\bar{X} - \bar{X}_g),$$

unde $\bar{X}_g = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$ cu $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

1.5.3 O formă generalizată a unei inegalități de tip Grüss și alte inegalități integrale

În anul 1935, Grüss demonstrează inegalitatea:

Fie f și g două funcții mărginite pe $[a, b]$ cu $\gamma_1 \leq f(x) \leq \Gamma_1$ și $\gamma_2 \leq g(x) \leq \Gamma_2$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ sunt patru constante. Atunci, avem:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2).$$

Rezultate despre rafinarea inegalității lui Grüss au fost extrase din lucrarea [[149] Minculete, N., Ciurdariu, L., *A generalized form of Grüss type inequality and other integral inequalities*, J. Inequal. Appl. 2014:**119**, 2014.].

Florea și Niculescu în [70] tratează problema estimării deviației valorilor funcției de la valoarea medie.

Notăm prin $R([a, b])$ spațiul funcțiilor integrabile Riemann pe intervalul $[a, b]$ și prin $C^0([a, b])$ spațiul funcțiilor continue pe $[a, b]$.

Media aritmetică pentru o funcție integrabilă Riemann $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este numărul

$$M_1[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dacă $h \in R([a, b])$ și $\int_a^b h(x)dx > 0$, atunci definim **media aritmetică generalizată** a unei funcții $f \in R([a, b])$:

$$M_h[f] = \frac{\int_a^b f(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)dx}$$

Proprietăți:

$$M_h[f \pm k] = M_h[f] \pm k$$

unde k este o constantă.

Varianța unei funcții $f \in R([a, b])$ este dată astfel:

$$\text{var}(f) = M_1[(f - M_1(f))^2]$$

Ca urmare, obținem:

$$\text{var}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right)^2 dx.$$

- **h -varianța** lui f :

$$\text{var}_h(f) = M_h[(f - M_h(f))^2] \Leftrightarrow$$

$$var_h(f) = \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b \left(f(x) - \frac{\int_a^b f(t)h(t)dt}{\int_a^b h(t)dt} \right)^2 h(x)dx.$$

Proprietăți:

$$var_h(f) = M_h[f^2] - M_h^2[f]$$

$$var_h(f \pm k) = var_h(f),$$

unde k este o constantă.

$$cov(f, g) = M_1[(f - M_1[f])(g - M_1[g])],$$

Covarianța a două funcții $f, g \in R([a, b])$ este dată astfel:

$$\begin{aligned} cov(f, g) &= M_1[fg] - M_1[f]M_1[g] = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

• De fapt, covarianța este **funcționala Cebâșev** atașată funcțiilor f și g . În [113] este scrisă ca $T(f, g)$. Proprietățile funcționalei Cebâșev au fost studiate de **Elezović, Marangunić and Pečarić** în [66].

h -covarianța a două funcții $f, g \in R([a, b])$ este dată astfel:

$$cov_h(f, g) = M_h[(f - M_h[f])(g - M_h[g])],$$

care este echivalentă cu

$$\begin{aligned} cov_h(f, g) &= M_h[fg] - M_h[f]M_h[g] = \\ &= \frac{\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)} - \frac{\int_a^b f(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)} \frac{\int_a^b g(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)}. \end{aligned}$$

În [174], Pečarić utilizează o generalizare a funcționalei Cebâșev notată prin $T(f, g; h)$. Astfel, observăm că $T(f, g; h) = cov_h(f, g)$.

În termenii covarianței, inegalitatea lui Gruss devine

$$(1.5.3.2) \quad |cov(f, g)| \leq \frac{1}{4}(\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2)$$

- ([Minculete-Ciurdariu, 149]). Fie $f \in R([a, b])$ cu $\gamma_1 \leq f(x) \leq \Gamma_1$, unde γ_1, Γ_1 sunt două constant reale. Atunci avem:

$$(1.5.3.3) \quad \text{var}_h(f) \leq \frac{1}{4}(\Gamma_1 - \gamma_1)^2,$$

$$(1.5.3.4) \quad \text{var}_h(f) \leq \left(\Gamma_1 - \frac{\int_a^b f(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)dx} \right) \left(\frac{\int_a^b f(x)h(x)dx}{\int_a^b h(x)dx} - \gamma_1 \right).$$

- Dacă $f, g, h \in R([a, b])$, atunci avem

$$(1.5.3.5) \quad |\text{cov}_h(f, g)|^2 \leq \text{var}_h(f)\text{var}_h(g).$$

$$(1.5.3.6)$$

$$|\text{cov}_h(f, g)| = |T(f, g)| \leq \sqrt{(\Gamma_1 - M_h[f])(M_h[f] - \gamma_1)(\Gamma_2 - M_h[g])(M_h[g] - \gamma_2)} \\ \leq \frac{1}{4}(\Gamma_1 - \gamma_1)(\Gamma_2 - \gamma_2).$$

- Dacă $f, g, q \in R([a, b])$, cu $f \neq kq$ și $\text{var}_h(f) \neq 0$, atunci avem:

$$(1.5.3.7)$$

$$0 \leq \frac{[\text{cov}_h(f, g)\text{cov}_h(f, q) - \text{cov}_h(g, q)\text{var}_h(f)]^2}{\text{var}_h(f)\text{var}_h(q) - [\text{cov}_h(f, q)]^2} \leq \text{var}_h(f)\text{var}_h(g) - [\text{cov}_h(f, g)]^2.$$

$$(1.5.3.8)$$

$$M_h^2[fg] \leq M_h[f^2]M_h[g^2]$$

$$(1.5.3.9)$$

$$0 \leq \text{var}_h(f)\text{var}_h(g) - [\text{cov}_h(f, g)]^2 \leq M_h[f^2]M_h[g^2] - M_h^2[fg]$$

Prezentăm în [149] extinderea inegalității lui Grüss pentru *funcționale liniare izotonice normalizate*:

Fie E o mulțime nevidă, L o clasă liniară de funcții cu valori reale și $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$(L1) \quad f, g \in L \text{ implică } (\alpha f + \beta g) \in L, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(L2) \quad \mathbf{1} \in L, \text{ i.e. dacă } f_0(t) = 1, (\forall) t \in E, \text{ atunci } f_0 \in L.$$

O *funcțională liniară izotonică* $A : L \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcțională care are proprietățile:

$$(A1) \quad A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g), (\forall) f, g \in L \text{ și } (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(A2) Dacă $f \in L$ și $f \geq 0$, atunci $A(f) \geq 0$.

(A3) Aplicația A spunem că este *normalizată* dacă $A(1) = 1$.

Teorema 1.5.3.7 ([Minculete-Ciurdariu, 149]). *Fie $f \in L$ astfel încât $f^2 \in L$ și presupunem că există numerele reale γ_1 și Γ_1 astfel încât $\gamma_1 \leq f \leq \Gamma_1$. Atunci pentru orice funcțională liniară izotonică normalizată $A : L \rightarrow \mathbb{R}$ are loc inegalitatea*

$$(1.5.3.10) \quad A(f^2) - [A(f)]^2 \leq (\Gamma_1 - A(f))(A(f) - \gamma_1).$$

În [52], **Dragomir** arată inegalitatea:

$$(1.5.3.11) \quad [A(fg)]^2 \leq A(f^2)A(g^2).$$

- În lucrarea [149], demonstrăm o extindere a inegalității lui Grüss:

$$(1.5.3.12) \quad A(fg) - A(f)A(g) \leq \sqrt{(\Gamma_1 - A(f))(A(f) - \gamma_1)(\Gamma_2 - A(g))(A(g) - \gamma_2)}.$$

Capitolul 2

Inegalități pentru funcționale și operatori pozitivi inversabili

În teoria inegalităților, printre cele mai utilizate funcționale remarcăm *funcționala Jensen* și *funcționala Cebâșev*. În continuare, vom studia funcționala Jensen în condiții de superpătraticitate și pentru funcții puternic convexe.

2.1 Inegalități pentru funcționale

Dacă f este o funcție cu valori reale definită pe un interval I , $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ și

$p_1, p_2, \dots, p_n \in (0, 1)$ astfel încât $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, atunci *funcționala Jensen* este definită prin:

$$J(f, \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)$$

- *Funcționala Cebâșev* este definită de:

$$T(f, \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) f(x_i).$$

Introducem:

- *Funcționala Jensen generalizată:*

$$J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) := \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} p_{ij_1} \dots p_{kj_k} f\left(\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i}\right) - f\left(\sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij}\right)$$

și *funcționala Cebâșev generalizată:*

$$T_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) := \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} p_{ij_1} \dots p_{kj_k} \sum_{i=1}^k q_i \left(x_{ij_i} - \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij} \right) f\left(\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i}\right).$$

- în [179], **Pečarić și Beesack** discută despre proprietățile de monotonie ale funcționalei Jensen
- **Dragomir** ([58]) investighează proprietățile de mărginire ale funcționalei Jensen normalizată, adică $J(f, \mathbf{p}, \mathbf{x})$ satisfăcând $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

$$0 \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} J(\Phi, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq J(\Phi, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} J(\Phi, \mathbf{q}, \mathbf{x}),$$

unde $\Phi: K \subset X \rightarrow X$ este o funcție convexă definită pe o mulțime convexă a spațiului liniar X , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ și $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ sunt n -upluri pozitive cu $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$.

2.1.1 Funcționala Jensen referitoare la funcții superpătratică și funcționala Jensen referitoare la funcții puternic convexe

Rezultatele ce caracterizează funcționala Jensen referitoare la funcții superpătratică și funcționala Jensen referitoare la funcții puternic convexe au fost prezentate în articolele:

- [158] Mitroi-Symeonidis, Fl. C., Minculete, N., On the Jensen functional and superquadracity, *Aequationes Mathematicae*, August 2016, Volume 90, Issue 4, pp 705–718
- [159] Mitroi-Symeonidis, Fl. C., Minculete, N., On the Jensen Functional and Strong Convexity, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1-9, 2016.

În [1], **Abramovich și Dragomir** analizează funcțiile superpătratică.

O funcție f definită pe un interval $I = [0, a]$ sau $[0, \infty)$, este **superpătratică** dacă pentru orice x din I există un număr real $C(x)$ astfel încât

$$(2.1.1.1) \quad f(y) - f(x) \geq f(|y - x|) + C(x)(y - x), (\forall) y \in I.$$

Mulțimea funcțiilor superpătratică este închisă la adunare și înmulțirea cu scalari pozitivi.

Exemple ([3]). Funcția $f(x) = x^p$, $p \geq 2$ este superpătratică cu $C(x) = f'(x) = px^{p-1}$.

De asemenea $h(x) = x^2 \ln x$ cu $C(x) = h'(x) = x(2 \ln x + 1)$ este o funcție superpătratică (dar nu este nici monotonă nici convexă).

Lema 2.1.1.2 ([2]). Fie f o funcție superpătratică cu $C(x)$ definit mai sus.

- Atunci $f(0) \leq 0$.
 - Dacă $f(0) = f'(0) = 0$, atunci $C(x) = f'(x)$, când f este derivabilă pentru $x > 0$.
 - Dacă $f \geq 0$, atunci f este convexă și $f(0) = f'(0) = 0$.
- Dacă f este o funcție cu valori reale definită pe un interval I , $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ și $p_1, p_2, \dots, p_n \in (0, 1)$ astfel încât $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, atunci

funcționala Jensen este definită prin:

$$J(f, \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)$$

Propoziția 2.1.1.4 ([1]). Fie $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, și $p_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, cu $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Dacă f este superpătratică, atunci

$$(2.1.1.5) \quad J(f, \mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq \sum_{i=1}^n p_i f\left(x_i - \sum_{j=1}^n p_j x_j\right).$$

Teorema 2.1.1.5 ([Mitroi-Symeonidis-Minculete, 158]). Fie f o funcție superpătratică definită pe un interval $I = [0, a]$ sau $[0, \infty)$, $x_1, \dots, x_n \in I$ și

$p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$ astfel încât $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ și un număr real $\lambda \in [0, 1]$. Atunci avem

$$(2.1.1.6) \quad \sum_{i=1}^n p_i f\left((1-\lambda)\sum_{i=1}^n p_i x_i + \lambda x_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n p_i f\left(\lambda \left|x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i\right|\right).$$

- Pentru $\lambda = 1$, obținem inegalitatea din Propoziția 2.1.1.4.

Corolarul 2.1.1.7 ([Mitroi-Symeonidis-Minculete, 158]).

$$(2.1.1.8) \quad J(f, p, x) \geq 2 \sum_{i=1}^n p_i f\left(\frac{1}{2} \left|x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i\right|\right).$$

Motivați de rezultatele de mai sus vom introduce, în mod natural, alte funcționale:

Definiția 2.1.1.8. Fie f o funcție definită pe un interval I cu valori reale,

numerele reale p_{ij} , $i = \overline{1, k}$ și $j = \overline{1, n_i}$ sunt astfel încât $p_{ij} > 0$, $\sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1$

$(\forall) i = \overline{1, k}$ (cu $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in_i})$), $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}) \in I^{n_i}$ $(\forall) i = \overline{1, k}$ și $\mathbf{q} =$

$(q_1, q_2, \dots, q_k)$, $q_i > 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^k q_i = 1$. Definim **funcționala generalizată**

Jensen astfel:

$$(2.1.1.10)$$

$$J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) := \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} p_{ij_1} \dots p_{kj_k} f\left(\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i}\right) - f\left(\sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij}\right)$$

În [160], Mitroi-Symeonidis demonstrează că: dacă f este o funcție convexă, atunci

$$(2.1.1.12) \quad \min_{\substack{1 \leq j_1 \leq n_1 \\ \dots \\ 1 \leq j_k \leq n_k}} \left\{ \frac{p_{1j_1} \dots p_{kj_k}}{r_{1j_1} \dots r_{kj_k}} \right\} J_k(f, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \leq$$

$$J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$$

$$\leq \max_{\substack{1 \leq j_1 \leq n_1 \\ \dots \\ 1 \leq j_k \leq n_k}} \left\{ \frac{p_{1j_1} \dots p_{kj_k}}{r_{1j_1} \dots r_{kj_k}} \right\} J_k(f, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$$

- În această secțiune, investigăm marginea inferioară și marginea superioară a funcționalei Jensen generalizate când f este superpătratică.

$$(2.1.1.13) \quad J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \geq \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} p_{ij_1} \dots p_{kj_k} f\left(\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i} - \bar{x}\right)$$

$$\text{unde } \bar{x} = \sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij}.$$

$$(2.1.1.14) \quad J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \geq \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} p_{ij_1} \dots p_{kj_k} f\left(\frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i} - \bar{x} \right| \right).$$

Teorema 2.1.11 ([Mitroi-Symeonidis-Minculete, 158]). *Let $\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{q}$ be as in Definition 2.1.1.8 and the positive real numbers $r_{ij}, i = \overline{1, k}$ and $j = \overline{1, n_i}$ be such*

that $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} = 1$ for all $i = \overline{1, k}$. We put $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{in_i})$ for all

$$i = \overline{1, k}, m = \min_{\substack{1 \leq j_1 \leq n_1 \\ \dots \\ 1 \leq j_k \leq n_k}} \left\{ \frac{p_{1j_1} \dots p_{kj_k}}{r_{1j_1} \dots r_{kj_k}} \right\} \text{ and } M = \max_{\substack{1 \leq j_1 \leq n_1 \\ \dots \\ 1 \leq j_k \leq n_k}} \left\{ \frac{p_{1j_1} \dots p_{kj_k}}{r_{1j_1} \dots r_{kj_k}} \right\}.$$

Dacă f este o funcție superpătratică, atunci:

$$(2.1.1.15) \quad J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) - m J_k(f, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ \geq m f\left(\left|\sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} (r_{ij} - p_{ij}) x_{ij}\right|\right) + \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} (p_{ij_1} \dots p_{kj_k} - m r_{ij_1} \dots r_{kj_k}) f\left(\left|\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i} - \bar{x}\right|\right)$$

și

$$(2.1.1.16) \quad M J_k(f, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) - J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ \geq f\left(\left|\sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} (r_{ij} - p_{ij}) x_{ij}\right|\right) + \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} (M r_{ij_1} \dots r_{kj_k} - p_{ij_1} \dots p_{kj_k}) f\left(\left|\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i} - \bar{x}\right|\right)$$

$$\text{unde } \bar{x} = \sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij} .$$

- fie $\mathbf{p}_1 = \dots = \mathbf{p}_k = \mathbf{p}$ și $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, aceasta implică Propoziția 2.1.1.4.

Definiția 2.1.1.13. Fie f o funcție definită pe un interval I cu valori reale, este puternic convexă cu modulul $c > 0$ [sau c -puternic convexă] dacă

$$(2.1.1.17) \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - c\lambda(1-\lambda)(y-x)^2,$$

$$(\forall) x, y \in I, \lambda \in [0,1].$$

- Convexitatea puternică a fost introdusă de **Polyak [182]**.
- Evident că, orice funcție puternic convexă este convexă.
- **Hiriart-Urruty și Lemaréchal [109]**, arată că: o funcție f este puternic convexă cu modulul c dacă și numai dacă funcția $g(x) = f(x) - cx^2$ este convexă.

În [137], **Merentes și Nikodem** justifică inegalitatea:

$$(2.1.1.18) \quad J(f, \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq c \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x})^2 .$$

Aceasta fiind redemonstrată utilizând abordare probabilistică prin **Rajba și Wasowicz [187]**.

$$(2.1.1.19)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i f((1-\lambda\mu)\bar{x} + \lambda\mu x_i) \leq (1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda \sum_{i=1}^n p_i f((1-\mu)\bar{x} + \mu x_i) - c\lambda(1-\lambda)\mu^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x})^2, (\forall) \lambda, \mu \in [0,1].$$

$$(2.1.1.20)$$

$$J(f, \mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq 2 \left[\sum_{i=1}^n p_i f\left(\frac{\bar{x} + x_i}{2}\right) - f(\bar{x}) \right] + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x})^2 \geq c \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x})^2 .$$

$$(2.1.1.21) \quad J_k(f, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \geq c \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n_1, \dots, n_k} p_{ij_1} \dots p_{kj_k} \left(\sum_{i=1}^k q_i x_{ij_i} - \bar{x} \right)^2 ,$$

$$\text{unde } \bar{x} = \sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} x_{ij} .$$

- Arătăm o aplicație a funcției gama a lui Euler.

Se știe că

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad (\forall) t \geq 0,$$

Weierstrass dă o altă formulare cu produsul infinit,

$$\Gamma(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{t} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-1} e^{\frac{t}{n}},$$

unde $\gamma = 0.577216\dots$ este constanta Euler-Mascheroni.

$$(2.1.1.24) \quad \ln \Gamma(t) = -\gamma t - \ln t - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{n} - \ln \left(1 + \frac{t}{n} \right) \right).$$

Propoziția 2.1.1.20 ([Mitroi-Symeonidis-Minculete, 159]). *Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin, $f(t) = \log \Gamma(t^2 + 1) + \gamma t^2 + t \arctan t$ este puternic convexă cu modulul 1 pe $[0, \infty)$.*

- Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \log \Gamma(t^2 + 1) + t \arctan t$ este puternic convexă cu modulul $1 - \gamma$ pe $[0, \infty)$.

2.1.2 Câteva inegalități despre entropiile generalizate

Entropiile generalizate au fost explorate de mulți cercetători. Entropiile **Rényi** [191] și **Tsallis** [201] sunt cele mai cunoscute generalizări cu un parametru ale entropiei Shannon.

Despre entropia relativă Tsallis se găsesc studii în [81], [85] și [86].

În articolul [[75] Furuichi, S., Minculete, N., Mitroi, C., *Some inequalities on generalized entropies*, *J. Inequal. Appl.* **2012:226**, 2012.], analizăm câteva entropii generalizate bazate pe entropiile Tsallis și Rényi și studiem câteva proprietăți matematice ale acestora.

Media cvasi-liniară ponderată data cu ajutorul unei funcții continue și strict monotonă $\psi : I \rightarrow \mathbb{I}$, definite prin

$$(2.1.2.1) \quad M_{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi(x_j) \right),$$

unde $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, $p_j > 0$, $x_j \in I$, pentru $j = \overline{1, n}$, și $n \geq 1$.

- Dacă luăm $\psi(x) = x$, atunci $M_\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ coincide cu media aritmetică ponderată $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{j=1}^n p_j x_j$.
- Dacă luăm $\psi(x) = \log x$, atunci $M_\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ coincide cu media geometrică ponderată $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \prod_{j=1}^n x_j^{p_j}$.
- If $\psi(x) = x$ și $x_j = \ln_q \frac{1}{p_j}$, atunci $M_\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este egală cu **entropia Tsallis** [201]:

$$(2.1.2.2) \quad H_q(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv -\sum_{j=1}^n p_j^q \ln_q p_j = \sum_{j=1}^n p_j \ln_q \frac{1}{p_j}, \quad (q \geq 0, q \neq 1),$$

unde $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ sunt probabilități, $p_j > 0 \quad (\forall) j = \overline{1, n}$ și funcția q -logaritmică, pentru $x > 0$ este definită de $\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}$, care converge uniform la funcția logaritmică uzuală $\ln(x)$ când $q \rightarrow 1$. Prin urmare, entropia Tsallis converge la **entropia Shannon** când $q \rightarrow 1$:

$$(2.1.2.3) \quad \lim_{q \rightarrow 1} H_q(p_1, p_2, \dots, p_n) = H(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv -\sum_{j=1}^n p_j \log p_j.$$

Observăm că entropia cvasi-liniară [6] este altă generalizare a entropiei Shannon. Entropia cvasi-liniară este dată prin

$$(2.1.2.4) \quad I^\phi(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv -\log \phi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \phi(p_j) \right).$$

- Dacă luăm $\phi(x) = \log x$ în (2.1.2.4), atunci avem $I^{\log}(p_1, p_2, \dots, p_n) = H_1(p_1, p_2, \dots, p_n)$.
- Putem redefine entropia cvasi-liniară prin

$$(2.1.2.5) \quad I^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \log \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{1}{p_j} \right) \right),$$

pentru o funcție ψ continuă și strict monotonă pe $(0, \infty)$.

- Dacă luăm $\psi(x) = \log x$ în (2.1.2.5), avem

$$I_1^{\log}(p_1, p_2, \dots, p_n) = H_1(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

- Cazul $\psi(x) = x^{1-q}$ face ca să recapturăm entropia Rényi, și anume

$$I_1^{x^{1-q}}(p_1, p_2, \dots, p_n) = R_q(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

unde entropia Rényi [191] este definită astfel

$$(2.1.2.6) \quad R_q(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^n p_j^q \right).$$

Motivați de rezultatele de mai sus am investigat unele proprietăți ale entropiilor generalizate, cu referire la entropiile Tsallis și entropiile cvasi-liniare, utilizând inegalități obținute cu ajutorul unor îmbunătățiri ale inegalității lui Young.

- Definim *entropia cvasi-liniară relativă* prin:

$$(2.1.2.7) \quad D_1^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv -\log \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{r_j}{p_j} \right) \right).$$

Entropia cvasi-liniară relativă coincide cu entropia Shannon relativă dacă $\psi(x) = \log x$, i.e.,

$$D_1^{\log}(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv -\sum_{j=1}^n p_j \log \frac{r_j}{p_j} = D_1(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n).$$

Denumim prin $R_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n)$ *entropia Rényi relativă* [3] definită prin:

$$(2.1.2.6) \quad R_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv \frac{1}{q-1} \log \left(\sum_{j=1}^n p_j^q r_j^{1-q} \right).$$

Acesta este alt caz particular al entropiei cvasi-liniare relative, și anume pentru $\psi(x) = x^{1-q}$ avem:

$$\begin{aligned} D_1^{x^{1-q}}(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) &\equiv -\log \left(\sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{r_j}{p_j} \right)^{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \frac{1}{q-1} \log \left(\sum_{j=1}^n p_j^q r_j^{1-q} \right) = R_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \end{aligned}$$

Utilizând (1.4.23), obținem

$$p_j^q r_j^{1-q} \left(\frac{p_j + r_j}{2\sqrt{p_j r_j}} \right)^{2r} \leq q p_j + (1-q) r_j \leq p_j^q r_j^{1-q} \left(\frac{p_j + r_j}{2\sqrt{p_j r_j}} \right)^{2(1-r)},$$

unde $q \in (0,1)$ și $r = \min\{q, 1-q\}$, deci rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q-1} \log \left(\sum_{j=1}^n (qp_j + (1-q)r_j) \left(\frac{p_j + r_j}{2\sqrt{p_j r_j}} \right)^{2(r-1)} \right) &\leq R_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \\ &\leq \frac{1}{q-1} \log \left(\sum_{j=1}^n (qp_j + (1-q)r_j) \left(\frac{p_j + r_j}{2\sqrt{p_j r_j}} \right)^{-2r} \right). \end{aligned}$$

Observăm că entropia Tsallis relativă,

$$(2.1.2.7) \quad D_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv \sum_{j=1}^n p_j^q (\ln_q p_j - \ln_q r_j) = - \sum_{j=1}^n p_j \ln_q \frac{r_j}{p_j},$$

converge la entropia relativă (**divergența, informația Kullback-Leibler**) când $q \rightarrow 1$:

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) = D_1(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) = - \sum_{j=1}^n p_j \log \frac{r_j}{p_j}.$$

- Definim **entropia Tsallis cvasi-liniară** (entropia q -cvasi-liniară) astfel:

$$(2.1.2.8) \quad I_q^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \ln_q \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{1}{p_j} \right) \right).$$

$$\bullet \quad \lim_{q \rightarrow 1} I_q^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n) = I^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Pentru $x > 0$ și $q > 0$ cu $q \neq 1$, definim funcția q -exponențială ca $\exp_q(x) = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}$, dacă $1 + (1-q)x > 0$.

- Dacă luăm $\psi(x) = \ln_q(x)$, atunci avem

$$I_q^{\ln_q}(p_1, p_2, \dots, p_n) = H_q(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Mai mult, avem

$$\begin{aligned} I_q^{x^{1-q}}(p_1, p_2, \dots, p_n) &= \ln_q \left(\sum_{j=1}^n p_j p_j^{q-1} \right)^{\frac{1}{1-q}} = \ln_q \left(\sum_{j=1}^n p_j^q \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \frac{\left[\left(\sum_{j=1}^n p_j^q \right)^{\frac{1}{1-q}} \right]^{1-q} - 1}{1-q} = \frac{\sum_{j=1}^n (p_j^q - p_j)}{1-q} = H_q(p_1, p_2, \dots, p_n). \end{aligned}$$

- *Entropia cvasi-liniară Tsallis este nenegativă:*

$$I_q^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0.$$

Pentru o funcție ψ continuă și strict monotonă pe $(0, \infty)$ și două distribuții de probabilitate $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ și $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ cu $p_j > 0, r_j > 0, (\forall) j = \overline{1, n}$, **entropia cvasi-liniară relativă Tsallis** este definită prin:

$$(2.1.2.11) \quad D_q^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv -\ln_q \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{r_j}{p_j} \right) \right)$$

- pentru $\psi(x) = \ln_q(x)$, entropia cvasi-liniară relativă Tsallis devine entropia relativă Tsallis,

$$D_q^{\ln_q}(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv -\sum_{j=1}^n p_j \ln_q \left(\frac{r_j}{p_j} \right) = D_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n),$$

- pentru $\psi(x) = x^{1-q}$, avem

$$\begin{aligned} D_q^{x^{1-q}}(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) &= -\ln_q \left(\sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{r_j}{p_j} \right)^{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q}} = -\ln_q \left(\sum_{j=1}^n p_j^q r_j^{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= -\frac{1}{1-q} \left[\left[\sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{r_j}{p_j} \right)^{1-q} \right]^{\frac{1}{1-q}} - 1 \right] = \frac{\sum_{j=1}^n (p_j - p_j^q r_j^{1-q})}{1-q} = D_q(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \end{aligned}$$

Propoziția 2.1.2.7 ([157]). Pentru două distribuții de probabilitate

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \text{ și } \mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \text{ astfel încât } p_j > 0, r_j > 0, \sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n r_j = 1$$

și $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ astfel încât $x_j \geq 0$, avem

$$(2.1.2.13) \quad 0 \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{r_i}{p_i} \right\} T(f, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq T(f, \mathbf{x}, \mathbf{r}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{r_i}{p_i} \right\} T(f, \mathbf{x}, \mathbf{p}),$$

$$\text{unde } T(f, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j) - f \left(\psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi(x_j) \right) \right),$$

pentru orice funcție continuă strict crescătoare $\psi : I \rightarrow I$ și o funcție $f : I \rightarrow J$ astfel încât

$$f(\psi^{-1}((1-\lambda)\psi(a) + \lambda\psi(b))) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

$(\forall) a, b \in I$ și $(\forall) \lambda \in [0, 1]$.

Teorema 2.1.2.8 ([Furuichi-Minculete-Mitroi, 75]). Pentru $q \geq 0$, o funcție ψ continuă și strict monotonă pe $(0, \infty)$ și o distribuție de probabilitate $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ cu $r_j > 0$ ($\forall j = \overline{1, n}$), $\sum_{j=1}^n r_j = 1$, avem

$$(2.1.2.14) \quad \begin{aligned} 0 &\leq n \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} \left\{ \ln_q \psi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi \left(\frac{1}{r_j} \right) \right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln_q \frac{1}{r_j} \right\}, \\ &\leq I_q^\psi(r_1, r_2, \dots, r_n) - H_q(r_1, r_2, \dots, r_n) \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} \left\{ \ln_q \psi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi \left(\frac{1}{r_j} \right) \right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln_q \frac{1}{r_j} \right\}. \end{aligned}$$

$$(2.1.2.15) \quad 0 \leq n \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} T(f, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq T(f, \mathbf{x}, \mathbf{r}) \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} T(f, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

Corolarul 2.1.2.9 ([Furuichi-Minculete-Mitroi, 75]). Pentru $q \geq 0$ și o distribuție de probabilitate $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ cu $r_j > 0$, ($\forall j = \overline{1, n}$) și $\sum_{j=1}^n r_j = 1$, avem

$$(2.1.2.16) \quad \begin{aligned} 0 &\leq n \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} \left\{ \ln_q \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln_q \frac{1}{r_j} \right\}, \\ &\leq \ln_q n - H_q(r_1, r_2, \dots, r_n) \\ &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} \left\{ \ln_q \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln_q \frac{1}{r_j} \right\}. \end{aligned}$$

Propoziția 2.1.2.18 ([Furuichi-Minculete-Mitroi, 75]). Pentru distribuțiile de probabilitate $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ și $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ astfel încât

$$p_j > 0, r_j > 0, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n r_j = 1, \text{ avem}$$

$$(2.1.2.24) \quad \sum_{j=1}^n (1 - p_j) \log \frac{1}{1 - r_j} \geq \sum_{j=1}^n (1 - p_j) \log \frac{1}{1 - p_j}.$$

Pentru distribuțiile de probabilitate $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ și $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ astfel încât $p_j > 0, r_j > 0, j = \overline{1, n}$, entropia relativă Tsallis (divergența) este dată prin:

$$D_q(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) = D_q(p_1, p_2, \dots, p_n \parallel r_1, r_2, \dots, r_n) = - \sum_{j=1}^n p_j \ln_q \frac{r_j}{p_j}.$$

Aceasta converge la clasică informație Kullback-Leibler:

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) = D_1(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^n p_j \log \frac{r_j}{p_j}.$$

Divergența Jeffreys este definită ca:

$$(2.1.2.25) \quad J_1(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) \equiv D_1(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) + D_1(\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}),$$

iar divergența Jensen-Shannon este dată de:

$$(2.1.2.26) \quad JS_1(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2} D_1\left(\mathbf{p} \parallel \frac{\mathbf{p} + \mathbf{r}}{2}\right) + \frac{1}{2} D_1\left(\mathbf{r} \parallel \frac{\mathbf{p} + \mathbf{r}}{2}\right),$$

(vezi e.g. [161]).

Extindem funcția logaritmică cu un parametru [[161] Mitroi, F. C., Minculete, N., *Mathematical inequalities for biparametric extended information measures*, *J. Math. Inequal.*, vol. 7, No. 1 (2013), 63-71.] la funcția logaritmică cu doi parametri, adică definim funcția (r, q) -logaritmică pentru $x > 0$ astfel:

$$\ln_{r,q}(x) \equiv \ln_q \exp \ln_r x = \frac{\exp \frac{1-q}{1-r} (x^{1-r} - 1) - 1}{1-q},$$

care converge uniform la funcția logaritmică uzuală $\ln(x)$ când $q \rightarrow 1$ și $r \rightarrow 1$.

Funcția inversă funcției $\ln_{r,q}(x)$ este notată prin:

$$\exp_{r,q}(x) \equiv \exp_q \ln \exp_r x.$$

Furuichi și Mitroi în [89] definesc **entropia (r, q) -cvasi-liniară Tsallis** și **divergența (r, q) -cvasi-liniară Tsallis**:

$$(2.1.2.27) \quad I_{r,q}^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \ln_{r,q} \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{1}{p_j} \right) \right), \quad q, r > 0, \quad q, r \neq 1,$$

- Pentru $\psi(x) = \ln_{r,q}(x)$ avem următoarea funcțională entropică:

$$(2.1.2.28) \quad H_{r,q}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n p_j \ln_{r,q} \frac{1}{p_j}.$$

- O aplicație interesantă este următoarea:

$$I_{\frac{2r-1}{r},q}^{x^{1-r}}(\mathbf{p}) = \ln_q \exp \ln_{\frac{2r-1}{r}} \left(\sum_{j=1}^n p_j^r \right)^{\frac{1}{1-r}} = \ln_q \exp \left(\frac{r}{1-r} \left(\left(\sum_{j=1}^n p_j^r \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right) \right),$$

care în caz particular coincide cu **entropia Arimoto**, adică, pentru

$$\lim_{q \rightarrow 1} I_{\frac{1-r}{2r-1}, q}^{1-r}(\mathbf{p}) = \lim_{q \rightarrow 1} \ln_q \exp \left(\frac{r}{1-r} \left(\left(\sum_{j=1}^n p_j^r \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right) \right) = \frac{r}{1-r} \left(\left(\sum_{j=1}^n p_j^r \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right) = H_n^r(\mathbf{p}).$$

Când $r \rightarrow 1$ entropia Arimoto este echivalentă cu entropia Shannon.

Pentru o funcție ψ continuă și strict monotonă pe $(0, \infty)$, $q, r > 0$, $q, r \neq 1$, și două distribuții de probabilitate $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ și $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ cu $p_j > 0$, $r_j > 0$ $(\forall) j = \overline{1, n}$, **divergența (r, q) -cvasi-liniară** este definită prin

$$(2.1.2.29) \quad D_{r,q}^\psi(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) \equiv -\ln_{r,q} \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{r_j}{p_j} \right) \right).$$

- Pentru $\psi(x) = \ln_{r,q}(x)$ avem:

$$(2.1.2.30) \quad D_{r,q}(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) = -\sum_{j=1}^n p_j \ln_{r,q} \frac{r_j}{p_j}.$$

Propoziția 2.1.2.21 ([Mitroi-Minculete, 161]). Fie r un număr real, $p > 0, q > 0$ astfel încât $p = \frac{1}{q}$. Dacă $1 < p < 2$ sau dacă $1 < q < 2$, atunci avem

$$(2.1.2.31) \quad D_{r,q}(\mathbf{p} \parallel \mathbf{r}) + H_{2-r, 2-q}(\mathbf{p}) \geq 1 - \sum_{j=1}^n p_j \exp \left(\ln_r \frac{r_j}{p_j} + \ln_r p_j \right).$$

2.2 Inegalități pentru operatori pozitivi inversabili

În Teoria Operatorilor găsim numeroase caracterizări și relații între monotonia operatorilor și convexitatea operatorilor, dată de **Hansen și Pedersen** [104], **Chansangiam** [34].

În [121], **Kubo și Ando** au studiat conexiunile dintre funcțiile monotone de operatori și operatorii de tip medie. Teoria operatorilor medie joacă un rol central în inegalitățile dintre operatori, ecuațiile cu operatori, teoria rețelelor și teoria cuantică a informațiilor.

Fie H un spațiu Hilbert real. Notăm cu $B(H)$ algebra operatorilor liniari mărginiți pe H . Dacă scriem $A > 0$ atunci înseamnă că A este un operator strict pozitiv sau echivalent cu $A \geq 0$ și A este inversabil. Notăm cu I operatorul identitate.

În [19], găsim *media putere cvasi-aritmetică* $\#_{\alpha,p}$ cu exponent α și pondere p dată prin:

$$A\#_{\alpha,p} B = \left[(1-p)A^\alpha + pB^\alpha \right]^{1/\alpha}, \quad A, B \geq 0.$$

Câteva cazuri speciale ale familiei de medii putere cvasi-aritmetice sunt următoarele:

- pentru $\alpha = 1$, avem *media aritmetică ponderată*:

$$A\nabla_p B := A\#_{1,p} B = (1-p)A + pB, \quad A, B \geq 0$$

- pentru $\alpha = -1$, *media armonică ponderată*:

$$A!_p B := A\#_{-1,p} B = \left[(1-p)A^{-1} + pB^{-1} \right]^{-1}, \quad A, B \geq 0$$

- Pentru $\alpha \rightarrow 0$, obținem *media geometrică ponderată*:

$$A\#_p B = \lim_{\alpha \downarrow 0} A\#_{\alpha,p} B = A^{1-p} B^p, \quad A, B \geq 0 \text{ și } A, B \text{ comută.}$$

Media geometrică a fost definită de *Pusz și Woronowicz* în [186], astfel:

$$A\# B = \max \{ T \geq 0 : \langle Tx, y \rangle \leq \|A^{1/2}x\| \cdot \|B^{1/2}y\|, \forall x, y \in H \}, \quad A, B \geq 0.$$

În fapt, aceasta este aceeași cu formula dată de *Ando* în [15]:

$$A\# B = A^{1/2} \left(A^{-1/2} B A^{-1/2} \right)^{1/2} A^{1/2}, \quad A, B > 0.$$

O importantă observație [14] este că media geometrică $A\# B$ este unica soluție pozitivă a ecuației *Riccati*:

$$XA^{-1}X = B.$$

Media geometrică p-ponderată este definită [16] prin

$$A\#_p B = A^{1/2} \left(A^{-1/2} B A^{-1/2} \right)^p A^{1/2},$$

unde $p \in (0,1)$ și $A, B > 0$.

Furuta-Yanagida demonstrează, în [92], următoarea inegalitate:

$$A!_p B \leq A\#_p B \leq A\nabla_p B.$$

Plecând de la cunoscuta inegalitate

$$\left\{ (1-p) + pt^{-1} \right\}^{-1} \leq t^p \leq (1-p) + pt,$$

implică relația

$$\{(1-p)+pt^{-\alpha}\}^{-1/\alpha} \leq t^p \leq \{(1-p)+pt^\alpha\}^{1/\alpha}, \quad p \in (0,1), \alpha > 0,$$

de unde deduce o inegalitate pentru media putere cvasi-aritmetică $\#_{\alpha,p}$

$$A\#_{-\alpha,p} B \leq A\#_p B \leq A\#_{\alpha,p} B.$$

Tominaga [200] arată că: pentru operatorii pozitivi inversabili A și B cu $0 < mI \leq A, B \leq MI$, avem

$$(2.2.1) \quad (1-p)A + pB \leq S(h)A\#_p B$$

și

$$(2.2.2) \quad (1-p)A + pB \leq A\#_p B + L(1,h)S(h)B,$$

unde $p \in [0,1]$.

În continuare, prezentăm două inegalități inverse care sunt diferite de cele de mai sus și care au fost analizate în [[76] Furuichi, S., Minculete, N., *Alternative reverse inequalities for Young's inequality, J. Math. Inequal.*, vol. 5, No. 4 (2011), 595-600.].

Teorema. 2.2.1 ([Furuichi-Minculete, 76]). Fie $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât există o constantă reală M astfel încât $0 \leq f''(x) \leq M$, $(\forall) x \in [a,b]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$0 \leq pf(a) + (1-p)f(b) - f(pa + (1-p)b) \leq Mp(1-p)(b-a)^2, \quad (\forall) p \in [0,1].$$

- Dacă luăm, în inegalitatea de mai sus, $f(x) = -\ln x$, atunci obținem

$$0 \leq pa + (1-p)b - a^p b^{1-p} \leq a^p b^{1-p} \exp\left\{\frac{p(1-p)(a-b)^2}{m^2}\right\} - a^p b^{1-p},$$

și

$$0 \leq pa + (1-p)b - a^p b^{1-p} \leq p(1-p)\left\{\log \frac{a}{b}\right\}^2 M.$$

Dacă un operator liniar mărginit A satisface relația $A = A^*$, atunci A se numește *operator autoadjunct*. Dacă un operator autoadjunct A îndeplinește condiția $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad (\forall) x \in H$, atunci A este numit *operator pozitiv*. În plus, $A \geq B$ înseamnă $A - B \geq 0$.

Teorema 2.2.2 ([Furuichi-Minculete, 76]). Pentru $p \in [0,1]$, și doi operatori pozitivi A și B care îndeplinește $0 < mI \leq A, B \leq MI \leq I$, $h = \frac{M}{m}$, avem

$$(2.2.3) \quad A \#_p B \leq (1-p)A + pB \leq \exp \left(p(1-p) \left(1 - \frac{1}{h} \right)^2 \right) A \#_p B$$

și

$$(2.2.4) \quad A \#_p B \leq (1-p)A + pB \leq A \#_p B + p(1-p)(\log^2 h)B.$$

- Este natural să analizăm dacă inegalitățile obținute în articolul [76] sunt mai bune decât cele obținute de **Tominaga**.

Dacă luăm $h = \frac{1}{2}$ și $p = \frac{1}{20}$, atunci avem

$$\exp \left\{ p(1-p) \left(1 - \frac{1}{h} \right)^2 \right\} - S(h) \cong -0.0128295.$$

Dacă luăm $h = \frac{1}{2}$ și $p = \frac{1}{10}$, atunci obținem

$$\exp \left\{ p(1-p) \left(1 - \frac{1}{h} \right)^2 \right\} - S(h) \cong 0.0326986.$$

În concluzie, nu există o ordine între inegalitățile (2.2.3) și (2.2.1).

Similar cu entropia relativă Tsallis, **Fujii and Kamei** în [73] au introdus *entropia operator relativă*, astfel:

$$S(A | B) := A^{1/2} \log(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$$

pentru doi operatori pozitivi inversabili A și B pe un spațiu Hilbert. Extinderea parametrică a entropiei operator relativă a fost introdusă de **Furuta** în [91] ca:

$$S_p(A | B) := A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^p \log(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

pentru $p \in \mathbb{R}$ și doi operatori pozitivi inversabili A și B pe un spațiu Hilbert.

Observăm că $S_0(A | B) = S(A | B)$.

În [207], **Yanagi, Kuriyama și Furuichi** introduce conceptual de *entropie relativă Tsallis pentru operatori*, astfel

$$T_p(A | B) := \frac{A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^p A^{1/2} - A}{p}, p \in (0, 1],$$

unde A și B sunt doi operatori pozitivi inversabili A și B pe un spațiu Hilbert.

Relația dintre entropia operator relativă, $S(A | B)$, și entropia relativă Tsallis pentru operatori, $T_p(A | B)$, a fost subliniată în [82], prin următoarea:

$$(2.2.5) \quad A - AB^{-1}A \leq T_{-p}(A|B) \leq S(A|B) \leq T_p(A|B) \leq B - A.$$

O proprietate referitoare la entropia relativă Tsallis pentru operatori a fost dată de **Isa, Ito, Kamei, Toyama, Watanabe** în [108]:

Propoziția 2.2.4. *Pentru orice operatori strict pozitivi A și B , iar $p, q \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ cu $p \leq q$, avem*

$$(2.2.6) \quad T_p(A|B) \leq T_q(A|B).$$

Principalele rezultate din articolul **[[163] Moradi, H. R., Furuichi, S., Minculete, N., Estimates for Tsallis relative operator entropy, Math. Ineq. Appl., Volume 20, Number 4 (2017), 1079–1088]** se referă la determinarea unor margini care îmbunătățesc inegalitatea (2.2.5).

Printre aceste inegalități avem, dacă A, B sunt operatori pozitivi inversabili și $p \in (0, 1]$, atunci

$$A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} + I}{2} \right)^{p-1} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} - I \right) A^{\frac{1}{2}} \leq T_p(A|B) \leq \frac{1}{2} (A \#_p B - A \#_{p-1} B + B - A)$$

care este o rafinare considerabilă a inegalității (2.2.5), unde I este operatorul identitate.

Teorema 2.2.5 ([Moradi-Furuichi-Minculete, 163]). *Pentru orice doi operatori pozitivi inversabili A și B astfel încât $A \leq B$ și $p \in (0, 1]$, avem*

$$(2.2.7)$$

$$A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} + I}{2} \right)^{p-1} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} - I \right) A^{\frac{1}{2}} \leq T_p(A|B) \leq \frac{1}{2} (A \#_p B - A \#_{p-1} B + B - A)$$

- $A \geq B$ și $p \in (0, 1]$, atunci

$$(2.2.9) \quad A \#_p B - A \#_{p-1} B \leq \frac{1}{2} (A \#_p B - A \#_{p-1} B + B - A) \leq T_p(A|B)$$

$$\leq A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} + I}{2} \right)^{p-1} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} - I \right) A^{\frac{1}{2}} \leq A \#_{p+1} B - A \#_p B \leq 0.$$

- $A \leq B$ și $p \in (0, 1)$, atunci

$$(2.2.16) \quad 4 \left[T_p \left(A \left| \frac{A+B}{2} \right. \right) - T_{p-1} \left(A \left| \frac{A+B}{2} \right. \right) \right] \leq \frac{1}{p-1} [T_p(A|B) - T_1(A|B)]$$

$$\leq \frac{1}{2} [T_p(A|B) - T_{p-1}(A|B)] + \frac{1}{4} A\#_2(B-A)$$

sau, înmulțind cu $p-1 < 0$, obținem

(2.2.17)

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{2} [T_p(A|B) - T_{p-1}(A|B)] + \frac{p-1}{4} A\#_2(B-A) &\leq T_p(A|B) - T_1(A|B) \\ &\leq 4(p-1) \left[T_p\left(A \middle| \frac{A+B}{2}\right) - T_{p-1}\left(A \middle| \frac{A+B}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$(2.2.18) \quad \frac{1}{2} [T_p(A|B) - T_{p-1}(A|B)] \leq \frac{1}{p-1} [T_p(A|B) - T_1(A|B)]$$

$$\leq \frac{1}{2} [T_p(A|B) - T_{p-1}(A|B)] + \frac{1}{4} A\#_2(B-A).$$

În niște cercetări recente, **Furuichi and Minculete** [Inequalities for Relative Operator Entropies and Operator Means, *Acta Mathematica Vietnamica*, 2018] arată că:

Teorema 2.2.12. Pentru orice doi operatori strict pozitivi A și B astfel încât $A \leq B$ și $p \in (0,1)$, avem

$$(2.2.19) \quad \frac{A\nabla_p B - A\#_p B}{p(1-p)} \leq \frac{A\nabla_q B - A\#_q B}{q(1-q)}.$$

Teorema 2.2.13 ([Moradi-Furuichi-Minculete, 163]). Fie A și B doi operatori pozitivi inversabili astfel încât $I < h' I \leq A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \leq h I$ sau $0 < h I \leq A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \leq h' I < I$, atunci avem

$$(2.2.20) \quad K^r(h', 2) A\#_p B \leq A\nabla_p B \leq K^{1-r}(h', 2) A\#_p B.$$

unde $p \in [0,1]$, $r = \min\{p, 1-p\}$.

- Margini alternative pentru entropia relative Tsallis pentru operatori:

Teorema 2.2.18 ([Furuichi-Minculete, 79]). Fie A și B doi operatori strict pozitivi și $-1 \leq p \leq 1$ cu $p \neq 0$. Dacă $A \leq B$, atunci

$$(2.2.29) \quad S_{p/2}(A|B) \leq T_p(A|B) \leq \frac{S(A|B) + S_p(A|B)}{2}.$$

Dacă $B \leq A$, atunci

$$(2.2.30) \quad \frac{S(A|B) + S_p(A|B)}{2} \leq T_p(A|B) \leq S_{p/2}(A|B).$$

(2.2.32)

$$S(A|B) \leq S_{p/2}(A|B) \leq T_p(A|B) \leq \frac{S(A|B) + S_p(A|B)}{2} \leq S_p(A|B)$$

În continuare vom face câteva considerații asupra **constantei Kantorovich generalizate $K(h, p)$** dată în relația (2.2.20), și anume:

$$K(h, p) := \frac{h^p - h}{(p-1)(h-1)} \left(\frac{p-1}{p} \frac{h^p - 1}{h^p - h} \right)^p,$$

$(\forall) p \in \mathbb{R}, p \neq 0, 1.$

- Dacă luăm $a = h^p - 1$ și $b = \frac{p}{p-1}(h^p - h)$, atunci avem
 $pa + (1-p)b = p(h^p - 1) - p(h^p - h) = p(h-1)$, deci rezultă următoarea relație:

$$K(h, p) = \frac{a^p b^{1-p}}{pa + (1-p)b},$$

$(\forall) p \in \mathbb{R}, p \neq 0, 1.$

Ținând cont de cele de mai sus observăm că putem estima constanta Kantorovich generalizată utilizând câteva inegalități referitoare la inegalitatea lui Young. Ca exemplu, utilizând inegalitatea dată de **Kittaneh și Manasrah** [116], în forma:

$$\frac{r(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{pa + (1-p)b} \leq 1 - \frac{a^p b^{1-p}}{pa + (1-p)b} \leq \frac{(1-r)(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{pa + (1-p)b},$$

unde $p \in [0, 1]$ and $r = \min\{p, 1-p\}$, găsim

(2.2.34)

$$\frac{r(\sqrt{(1-p)(h^p - 1)} - \sqrt{p(h - h^p)})^2}{p(1-p)(h-1)} \leq 1 - K(h, p) \leq \frac{(1-r)(\sqrt{(1-p)(h^p - 1)} - \sqrt{p(h - h^p)})^2}{p(1-p)(h-1)},$$

unde $h \geq 1$, $p \in (0, 1)$ și $r = \min\{p, 1-p\}$.

În [Minculete, 151], am prezentat altă rafinare a inegalității lui Young, astfel:

$$\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^{2r} \leq \frac{pa+(1-p)b}{a^p b^{1-p}} \leq \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^{2(1-r)},$$

pentru numerele reale pozitive a, b și $p \in [0,1]$ și $r = \min\{p, 1-p\}$.

Aceasta implică estimarea:

$$\left(\frac{1}{p(1-p)} \frac{(p+ph+h^p-1)^2}{4(h-h^p)(h^p-1)}\right)^r \leq \frac{1}{K(h,p)} \leq \left(\frac{1}{p(1-p)} \frac{(p+ph+h^p-1)^2}{4(h-h^p)(h^p-1)}\right)^{1-r},$$

deci, obținem

(2.2.35)

$$\left(p(1-p) \frac{4(h-h^p)(h^p-1)}{(p+ph+h^p-1)^2}\right)^{1-r} \leq K(h,p) \leq \left(p(1-p) \frac{4(h-h^p)(h^p-1)}{(p+ph+h^p-1)^2}\right)^r,$$

unde $p \in (0,1)$ și $r = \min\{p, 1-p\}$.

Utilizând inegalitatea (1.4.24) care este dată de constanta Kantorovich, avem:

$$K^r(h',2) \leq \frac{pa+(1-p)b}{a^p b^{1-p}} \leq K^{1-r}(h',2),$$

unde $a, b > 0, p \in [0,1]$, $r = \min\{p, 1-p\}$, $K(h',2) = \frac{(h'+1)^2}{4h'}$ și $h' = \frac{b}{a}$. Aceasta

implică inegalitatea

$$(2.2.36) \quad K^{r-1}(h',2) \leq K(h,p) \leq K^{-r}(h',2),$$

unde $p \in (0,1)$, $r = \min\{p, 1-p\}$, $K(h',2) = \frac{(h'+1)^2}{4h'}$ și $h' = \frac{p}{p-1} \frac{h^p-1}{h^p-1}$.

Capitolul 3

Inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

Obiectivul acestei secțiuni este să evidențiem rezultate noi despre inegalitatea Cauchy - Schwarz într-un spațiu vectorial înzestrat cu un produs scalar și să facem multe alte estimări ale unor inegalități clasice.

De asemenea, vom prezenta o îmbunătățire a inegalității triunghiului într-un spațiu normat utilizând integrale și **semi-produsul Tapia**.

Analizăm o rafinare a inegalității lui **Buzano** și una a inegalității lui **Richard**, care sunt extinderi ale inegalității **Cauchy - Schwarz**.

În această secțiune sunt prezentate rezultate din lucrările:

- [148] [Minculete, N., Păltănea, R., Improved estimates for the triangle inequality, *J. Inequal. Appl.* 2017:17, 2017.
- [197] Stoica, E., Minculete, N., Barbu, C., New aspects of Ionescu–Weitzenbock’s inequality, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol. 21, No. 2, 2016, 95-101.

3.1 Despre inegalitatea Cauchy - Schwarz într-un spațiu vectorial înzestrat cu produs scalar

Niculescu [167] face o radiografie a inegalităților care joacă un rol important în *Teoria Inegalităților*.

În 1773–**Lagrange**, 1821–**Cauchy** [31] demonstrează următoarea egalitate:

$$(3.1.1) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

O consecință directă a identității lui Lagrange este inegalitatea **Cauchy-Buniakovski-Schwarz** Inequality (CBS).

$$(3.1.3) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

Aceasta a fost studiată în mai multe articole [8], [12], [17].

Dacă $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu vectorial înzestrat cu produs scalar, atunci inegalitatea Cauchy-Schwarz, este dată de:

$$(3.1.4) \quad \|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y \rangle|.$$

Pentru orice $x, y \in X$ și $a, b \in \mathbb{R}$, avem

$$(3.1.5) \quad \|ax + by\|^2 = (a\|x\| + b\|y\|)^2 - 2ab(\|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle).$$

În această relație, pentru vectorii nenuli x și y , dacă luăm $a = \|x\|^{-1}$ și $b = -\|y\|^{-1}$, atunci obținem

$$(3.1.6) \quad \frac{1}{2}\|x\| \cdot \|y\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle \Rightarrow \text{demonstrează C-S}$$

Maligranda dovedește în [130] următoarea:

Teoremă. Pentru vectorii nenuli x și y într-un spațiu normat $X = (X, \|\cdot\|)$ au loc inegalitățile

$$(3.1.9) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \min(\|x\|, \|y\|)$$

și

$$(3.1.10) \quad \|x + y\| \geq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \max(\|x\|, \|y\|).$$

Egalitatea are loc pentru: $\|x\| = \|y\| = 1$ sau $y = cx$ cu $c > 0$.

Teorema 3.1.2. Dacă $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu euclidian și norma $\|\cdot\|$ este generate de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, atunci avem

$$(3.1.11) \quad \frac{\|x\| + \|y\| + \|x + y\|}{2} \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \min(\|x\|, \|y\|) \leq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle \leq$$

$$\frac{\|x\| + \|y\| + \|x + y\|}{2} \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \max(\|x\|, \|y\|),$$

pentru orice vectori nenuli x și y din X .

- Din inegalitatea (3.1.11) și utilizând inegalitatea triunghiului, avem
 $2\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| + \|x + y\| \geq 2(\|x\| + \|y\|) \Rightarrow \text{o rafinare a inegalității lui C-S}$

(3.1.13)

$$\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \|x + y\| \min(\|x\|, \|y\|) \leq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle \leq \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) (\|x\| + \|y\|) \max(\|x\|, \|y\|)$$

- Alt rezultat:

$$(3.1.14) \quad \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \|x\| \cdot \|y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle$$

În articolul [[148] Minculete, N., Păltănea, R., Improved estimates for the triangle inequality, *J. Inequal. Appl.* 2017:17, 2017.], obținem estimări rafinate ale inegalității triunghiului în spații normate utilizând integralele și semi-produsul Tapia.

Inegalitatea triunghiului este următoarea:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

pentru orice doi vectori x și y într-un spațiu vectorial normat $X = (X, \|\cdot\|)$ peste mulțimea numerelor reale sau peste mulțimea numerelor complexe.

- **Diaz and Metcalf** [49] $\Rightarrow$ o inegalitate inversă a inegalității triunghiului
- **Dragomir** în [51] $\Rightarrow$ inegalitatea triunghiului utilizând funcții integrabile Bochner
- **Maligranda** [130, 131] $\Rightarrow$ o îmbunătățire a inegalității triunghiului
- **Kato, Saito și Tamura** [112] $\Rightarrow$ o inegalitate directă și una inversă spații Banach – **generalizează inegalitățile obținute de Maligranda**.
- Alte rezultate: **Mitani și Saito** [154], **Mineno, Nakamura și Ohwada** [153], **Dadipour et al.** [46], **Sano et al.** [195] și alții.

În articolul [Minculete-Păltănea, 148] obținem următoarele rezultate:

Fie $X = (X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat real.

Lema 3.1.5. Pentru orice $x, y \in X$, funcția $g(s) = \|x + sy\|$, $s \in \mathbb{R}$, este convexă.

– **Hermite-Hadamard + Hammer-Bullen** $\Rightarrow$

Teorema 3.1.6 ([Minculete-Păltănea, 148]). Pentru orice $x, y \in X$, avem

$$(3.1.16) \quad \|x + y\| \leq 2 \int_0^1 \|(1 - \lambda)x + \lambda y\| d\lambda \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$(3.1.17) \quad \|x\| + \|y\| + \|x + y\| \geq 4 \int_0^1 \|(1 - \lambda)x + \lambda y\| d\lambda.$$

Corolarul 3.1.7 ([Minculete-Păltănea, 148]). Pentru orice doi vectori nenuli x, y dintr-un spațiu înzestrat cu produs scalar $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, avem

(3.1.18)

$$\frac{2(\|x\|\|y\| - \langle x, y \rangle)}{\|x\| + \|y\| + 2 \int_0^1 \|(1-\lambda)x + \lambda y\| d\lambda} \leq \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \leq \frac{2(\|x\|\|y\| - \langle x, y \rangle)}{\|x + y\| + 2 \int_0^1 \|(1-\lambda)x + \lambda y\| d\lambda}.$$

Semi-produsul Tapia pe un spațiu normat X (vezi [199]) este o aplicație $(\cdot, \cdot)_T : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$(x, y)_T := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\varphi(x + ty) - \varphi(x)}{t},$$

unde $\varphi(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$, $x \in X$.

Semi-produsul Tapia îndeplinește proprietatea: $|(x, y)_T| \leq \|x\|\|y\|$ $(\forall) x, y \in X$. În cazul când norma $\|\cdot\|$ este generată de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, atunci $(x, y)_T = \langle x, y \rangle$, $(\forall) x, y \in X$.

Inegalitățile lui Maligranda pot fi scrise ca:

(3.1.19)

$$\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \min(\|x\|, \|y\|) \leq \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \leq \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \max(\|x\|, \|y\|).$$

Dacă în inegalitatea de mai sus înlocuim y prin ty cu $t > 0$, atunci obținem

$$\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \min(\|x\|, t\|y\|) \leq \|x\| + t\|y\| - \|x + ty\| \leq \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \max(\|x\|, t\|y\|),$$

care este echivalentă cu

$$\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \frac{1}{t} \min(\|x\|, t\|y\|) \leq \|y\| - \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \frac{1}{t} \max(\|x\|, t\|y\|)$$

Prin trecere la limită pentru $t \rightarrow 0, t > 0$, deducem

$$\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} \min(\|x\|, t\|y\|) \leq \|y\| - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \leq \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} \max(\|x\|, t\|y\|)$$

Cum $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{t(\|x+ty\| + \|x\|)} = \frac{(x, y)_T}{\|x\|}$ și pentru $t \rightarrow 0, t > 0$, avem

$\min(\|x\|, t\|y\|) = t\|y\|$, deci $\frac{1}{t} \min(\|x\|, t\|y\|) = \|y\|$, adică

$$(3.1.20) \quad \left(2 - \frac{\|x\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|y\|}\right) \|x\| \|y\| \leq \|x\| \|y\| - (x, y)_T.$$

Aceasta poate fi rescrisă ca:

$$(3.1.21) \quad \|x\| \|y\| + (x, y)_T \leq \|x\| \|y\| + y \|x\|.$$

$$\text{Pentru } x \rightarrow \frac{x}{\|x\|} \text{ și } y \rightarrow \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow$$

$$(3.1.22) \quad \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)_T \leq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| - 1.$$

Pentru vectorii nenuli $x, y \in X$ notăm $v(x, y) = \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}$. Atunci

inegalitatea (3.1.20) devine:

Teorema. 3.1.8 ([Minculete-Păltănea, 148]). *Fie vectorii nenuli $x, y \in X$. Atunci avem*

$$(3.1.24) \quad (x, y)_T \leq \|x\| \|y\| (\|v(x, y)\| - 1).$$

Teorema. 3.1.9 ([Minculete-Păltănea, 148]). *Fie vectorii nenuli $x, y \in X$ astfel încât $\|y\| \leq \|x\|$ și $x\|y\| \neq -y\|x\|$. Atunci avem*

$$(3.1.25) \quad \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \geq (2 - \|v(x, y)\|) \|x\| - \left(1 - \left(\frac{x + y}{\|x + y\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)_T\right) (\|x\| - \|y\|),$$

$$(3.1.26) \quad \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \leq (2 - \|v(x, y)\|) \|x\| - \left(1 - \left(\frac{v(x, y)}{\|v(x, y)\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)_T\right) (\|x\| - \|y\|),$$

$$(2.1.27) \quad \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \geq (2 - \|v(x, y)\|) \|y\| - \left(1 - \left(\frac{x + y}{\|x + y\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)_T\right) (\|x\| - \|y\|)$$

și

$$(3.1.28) \quad \|x\| + \|y\| - \|x + y\| \leq \left(2 - \|v(x, y)\|\right) \|y\| - \left(1 - \left(\frac{v(x, y)}{\|v(x, y)\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)_T\right) (\|x\| - \|y\|).$$

Distanța unghiulară sau distanța Clarkson (vezi e.g. [40]) dintre doi vectori nenuli x și y este dată astfel: $\alpha[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$, deci $\alpha[x, y] = v(x, -y)$.

- Pentru vectorii nenuli x și y astfel încât $x\|y\| \neq -y\|x\|$, avem

$$(3.1.29) \quad \frac{\|x - y\| - \|x\| - \|y\|}{\min(\|x\|, \|y\|)} + A \leq \alpha[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\|x - y\| + \|x\| - \|y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)} - B,$$

unde

$$A = \left(1 - \left(\frac{x - y}{\|x - y\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)_T\right) \frac{\|x\| - \|y\|}{\min(\|x\|, \|y\|)} \geq 0,$$

$$B = \left(1 - \left(\frac{v(x, -y)}{\|v(x, -y)\|}, -\frac{y}{\|y\|}\right)_T\right) \frac{\|x\| - \|y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)} \geq 0.$$

3.2 Inegalități inverse ale inegalității Cauchy-Schwarz într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

Rezultatele din această secțiune au fost extrase din lucrarea:

[197] Stoica, E., Minculete, N., Barbu, C., New aspects of Ionescu–Weitzenböck's inequality, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol. 21, No. 2, 2016, 95-101.

Fie X un spațiu înzestrat cu produs scalar peste mulțimea numerelor reale. Produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce o normă dată prin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $(\forall) x \in X$, astfel X este un spațiu vectorial normat.

Teorema 3.2.1. Dacă $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu vectorial euclidian și norma $\|\cdot\|$ este generate de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, atunci avem

$$(3.2.2) \quad \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle \leq \frac{2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|x - y\|^2}{[\max(\|x\|, \|y\|)]^2},$$

pentru orice doi vectori nenuli X .

- **Massera-Schäffer** [134] arată că:

$$(3.2.3) \quad \alpha[x, y] \cdot \max(\|x\|, \|y\|) \leq 2\|x - y\|.$$

- **Dunkl and Williams** [65], demonstrează că:

$$(3.2.4) \quad \alpha[x, y] \leq \frac{4\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

Lema 2.2.3 ([Stoica-Minculete-Barbu, 197]). *Într-un spațiu euclidian X avem*

$$(3.2.5) \quad \left\| y \left\| x + \frac{1}{2} y \right\| \right\| \geq \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}, \quad (\forall) x, y \in X.$$

sau

$$(3.2.6) \quad \left\| y \left\| x - \frac{1}{2} y \right\| \right\| \geq \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}, \quad (\forall) x, y \in X.$$

Teorema 3.2.5 ([Stoica-Minculete-Barbu, 197]). *Într-un spațiu euclidian X avem*

$$(3.2.7) \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 2\sqrt{3} \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

$(\forall) x, y \in X$

• *Alte inegalități:*

$$(3.2.9) \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} (\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x - y\|^2) \geq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle,$$

$$(3.2.10) \quad \|y\| \cdot \left\| x - \frac{1}{2} y \right\| \geq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle,$$

$$(3.2.11) \quad \min \left\{ \left\| x \left\| y - \frac{1}{2} x \right\| \right\|, \left\| y \left\| x - \frac{1}{2} y \right\| \right\| \right\} \geq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle, \quad (\forall) x, y \in X$$

3.3 Considerații asupra unor inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

Obiectivul acestei secțiuni este să prezentăm câteva rezultate recente referitoare la inegalitatea Cauchy - Schwarz într-un spațiu vectorial înzestrat cu produs scalar. Aici vom prezenta o îmbunătățire a inegalității lui Buzano și a inegalității lui Richard, care sunt generalizări ale inegalității Cauchy – Schwarz.

Rezultatele din această secțiune au fost extrase din lucrarea:

[141] Minculete, N., Considerations about the several inequalities in an inner product space, *J. Math.Ineq.*, Volume 12, Number 1 (2018), 155–161.

Inegalitatea *Cauchy-Schwarz-Buniakowski*: dacă $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ și $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ sunt n -upluri de numere reale, atunci

$$(3.3.1) \quad \sqrt{(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1 b_1 + \dots + a_n b_n|.$$

Întâlnim multe rafinări ale inegalității Cauchy-Schwarz-Buniakowski ([8], [12], [17] și [154]).

- **Ostrowski** [171], în 1952, arată că: dacă $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ și $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ sunt n -upluri de numere reale astfel încât $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ nu sunt proporționale și

$$(3.3.2) \quad \sum_{k=1}^n y_k z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k z_k = 1, \text{ atunci}$$

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 / \sum_{k=1}^n z_k^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2.$$

Pentru orice $x, y \in X$ într-un spațiu înzestrat cu produs scalar $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peste mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ sau numerelor reale $\mathbb{R}$, atunci avem inegalitatea lui Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

- **Aldaz** [8] și **Niculescu** [167], arată că:

$$(3.3.3) \quad \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \left(1 - \frac{1}{2} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right),$$

pentru orice doi vectori nenuli $x, y \in X$.

- **Buzano** [28] prezintă o extindere a inegalității Cauchy-Schwarz:

$$(3.3.4) \quad |\langle a, x \rangle \langle x, b \rangle| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 (|\langle a, b \rangle| + \|a\| \cdot \|b\|).$$

- **Precupanu** [185] și **Dragomir** [62]:

$$(3.3.5) \quad \frac{1}{2} \|x\|^2 (|\langle a, b \rangle| - \|a\| \cdot \|b\|) \leq \langle a, x \rangle \langle x, b \rangle \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 (|\langle a, b \rangle| + \|a\| \cdot \|b\|),$$

- **Gavrea** [95], altă extindere
- **Richard** [192] :

$$(3.3.6) \quad \left| \langle a, x \rangle \langle x, b \rangle - \frac{1}{2} \|x\|^2 \langle a, b \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\|,$$

- **Popa** și **Raşa** [183]:

$$(3.3.7) \quad \left| \operatorname{Re} \left(\langle a, x \rangle \langle x, b \rangle - \frac{1}{2} \|x\|^2 \langle a, b \rangle \right) \right| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 \sqrt{\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (\operatorname{Im} \langle a, b \rangle)^2}$$

- **Dragomir** [61] prezintă inegalitatea:

$$(3.3.8) \quad \left| \langle a, b \rangle \|x\|^2 - \alpha \langle a, x \rangle \langle x, b \rangle \right| \leq \max\{1, |1 - \alpha|\} \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|x\|^2$$

- **Lupu and Schwarz** [129], demonstrează rezultatul următor:

(3.3.9)

$$\left| \|a\|^2 \langle b, c \rangle \right| + \left| \|b\|^2 \langle c, a \rangle \right| + \left| \|c\|^2 \langle a, b \rangle \right| \leq \|a\|^2 \|b\|^2 \|c\|^2 + 2 \langle a, b \rangle \langle b, c \rangle \langle c, a \rangle$$

Lema 3.3.1 ([Minculete, 141]). *Într-un spațiu înzestrat cu produs scalar X peste mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, avem*

$$(3.3.10) \quad \|x + \alpha y\|^2 = \left| \alpha \|y\| + \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|} \right|^2 + \left\| x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2,$$

$(\forall) x, y \in X, y \neq 0, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}$.

- Pentru $x, e \in X$ cu $\|e\| = 1$, obținem

$$\|x - \lambda e\|^2 = \left| \lambda - \langle x, e \rangle \right|^2 + \|x - \langle x, e \rangle e\|^2$$

adică $\|x - \langle x, e \rangle e\|^2 = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|x - \lambda e\|^2$, rezultat pe care-l găsim în [129].

Lema 3.3.3 ([Minculete, 141]). *Într-un spațiu înzestrat cu produs scalar X peste mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, avem*

$$(3.3.11) \quad \left\| \langle a, x \rangle x - \frac{1}{2} \|x\|^2 a \right\| = \frac{1}{2} \|x\|^2 \|a\|,$$

$(\forall) x, a \in X$.

- Dăm o demonstrație simplă inegalității lui Richard:

$$\begin{aligned} \left| \langle a, x \rangle \langle x, b \rangle - \frac{1}{2} \|x\|^2 \langle a, b \rangle \right| &= \left| \left\langle \langle a, x \rangle x - \frac{1}{2} \|x\|^2 a, b \right\rangle \right| \leq \\ &\left\| \langle a, x \rangle x - \frac{1}{2} \|x\|^2 a \right\| \|b\| = \frac{1}{2} \|x\|^2 \|a\| \|b\|. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.5 ([Minculete, 141]). *Într-un spațiu înzestrat cu produs scalar X peste mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, avem*

$$(3.3.12) \quad |\alpha|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 + \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \geq 2 \operatorname{Re} \left(\overline{\alpha} (\langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \langle x, z \rangle \|y\|^2) \right),$$

$(\forall) x, y, z \in X, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}$.

Corolarul 3.3.6. Într-un spațiu înzestrat cu produs scalar X peste mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, avem

$$(3.3.13) \quad \frac{\|y\|^2}{\|z\|^2} \left(\frac{\langle x, y \rangle \langle y, z \rangle}{\|y\|^2} - \langle x, z \rangle \right)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 ,$$

$(\forall) x, y, z \in X, y \neq 0, z \neq 0$.

- Dacă luăm $\langle x, z \rangle = 1$ și $\langle y, z \rangle = 0$, obținem inegalitatea lui Ostrowski:

$$(3.3.14) \quad \|y\|^2 / \|z\|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 ,$$

$(\forall) x, y, z \in X, y \neq 0, z \neq 0$.

Teorema 3.3.8 ([Minculete, 141]). Într-un spațiu înzestrat cu produs scalar X peste mulțimea numerelor complexe sau peste mulțimea numerelor reale, pentru orice trei vectori nenuli $x, a, b \in X$, avem

$$(3.3.15) \quad \frac{1}{2} \|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\| - \left| \langle a, x \rangle \langle x, b \rangle - \frac{1}{2} \|x\|^2 \langle a, b \rangle \right| \geq \frac{A}{\|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\|} \geq 0 ,$$

unde

$$A = \left(|\langle a, x \rangle| (\|x\|^2 \|b\|^2 - |\langle x, b \rangle|^2) - \frac{1}{2} \|x\|^2 (\|a\|^2 \|b\|^2 - |\langle a, b \rangle|^2) \right)^2 .$$

- Este îmbunătățită inegalitatea lui Richard:

$$\left| \langle a, x \rangle \langle x, b \rangle - \frac{1}{2} \|x\|^2 \langle a, b \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\| - \frac{A}{\|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\|} ,$$

unde

$$A = \left(|\langle a, x \rangle| (\|x\|^2 \|b\|^2 - |\langle x, b \rangle|^2) - \frac{1}{2} \|x\|^2 (\|a\|^2 \|b\|^2 - |\langle a, b \rangle|^2) \right)^2 .$$

- Also, utilizând inegalitatea $|\alpha - \beta| \geq \|\alpha\| - \|\beta\|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, deducem:

(3.3.16)

$$\frac{1}{2} \|x\|^2 (|\langle a, b \rangle| - \|a\| \cdot \|b\|) + \frac{A}{\|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\|} \leq |\langle a, x \rangle \langle x, b \rangle| \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 (|\langle a, b \rangle| + \|a\| \cdot \|b\|) - \frac{A}{\|x\|^2 \|a\| \cdot \|b\|} ,$$

care reprezintă o rafinare a inegalității Buzano.

Capitolul 4

Planuri academice viitoare

Scopul acestui capitol este acela de a trasa niște direcții viitoare de cercetare și unele direcții didactice.

- continuarea cercetărilor în domeniul teoriei inegalităților referitoare la: inegalități pentru funcționale, inegalități pentru operatori pozitivi inversabili și inegalități în spații vectoriale înzestrate cu produs scalar. În același timp urmărim și aplicațiile acestora la mediile generalizate și la entropiile generalizate
- elaborarea de noi articole științifice în ariile de cercetare menționate anterior
 - elaborarea unei monografii științifice cu contribuțiile mele în teoria inegalităților referitoare la inegalități clasice, inegalități pentru funcționale, inegalități pentru operatori pozitivi inversabili și inegalități în spații vectoriale înzestrate cu produs scalar
 - Doresc să public un curs de matematică aplicată în economie
 - Diseminarea rezultatelor pe care le voi obține în cadrul unor conferințe internaționale sau naționale, precum și studenților pe care-i voi îndruma.

4.1 Direcții viitoare de cercetare referitoare la inegalitatea Hermite-Hadamard și inegalitatea Hammer-Bullen

În această secțiune, vom analiza alte variante de rafinare a rezultatelor referitoare la inegalitatea Hammer-Bullen, astfel, continuând cercetările din lucrarea [Minculete-Rațiu-Pečarić, 143].

În [Minculete-Rațiu-Pečarić, 143] obținem două inegalități inverse pentru inegalitatea Hammer-Bullen:

$$(4.1.3) \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(b-a)(f'(b)-f'(a))}{16},$$

$$(4.1.4) \quad \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)(f'(b)-f'(a))}{24} \right| \leq \frac{(M-m)(b-a)^2}{64}$$

iar **Acu și Gonska**, în [5], extind inegalitatea Hammer-Bullen la funcții continue utilizând modulul de continuitate de ordinul doi.

Inspirat de lucrarea anterioară, am început un nou proiect de cercetare în colaborare cu **F. C. Mitroi-Symeonidis și M. Niezgoda** referitor la inegalitatea Hermite-Hadamard. Vom urmări generarea de noi inegalități pentru mediile generalizate.

Lema 4.1.1 ([Minculete-Niezgoda-Mitroi, 142]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Atunci avem egalitatea:

$$(4.1.5) \quad \int_a^b (x-c)q_c(x)f''(x)dx = (b-a)f(c) + (c-a)f(a) + (b-c)f(b) - 2\int_a^b f(x)dx,$$

unde $a < c < b$ și

$$q_c(x) := \begin{cases} a-x, & x \in [a, c] \\ b-x & x \in [c, b] \end{cases}.$$

- Este ușor de văzut că pentru $x \in [a, b]$, avem $(x-c)q_c(x) \geq 0$, iar

$$(4.1.6) \quad \int_a^b (x-c)q_c(x)dx = \frac{b-a}{6}(a^2 + b^2 + 3c^2 + ab - 3bc - 3ac).$$

Prin urmare, obținem:

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} & \frac{m(b-a)}{6}(a^2 + b^2 + 3c^2 + ab - 3bc - 3ac) \leq \\ & (b-a)f(c) + (c-a)f(a) + (b-c)f(b) - 2\int_a^b f(x)dx \leq \\ & \frac{M(b-a)}{6}(a^2 + b^2 + 3c^2 + ab - 3bc - 3ac) \end{aligned}$$

Teorema 4.1.3 ([Minculete-Niezgoda-Mitroi, 142]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și $f''(x) \geq 0$. Atunci avem

$$(4.1.9) \quad \begin{aligned} 0 & \leq (b-a)f(c) + (c-a)f(a) + (b-c)f(b) - 2\int_a^b f(x)dx \leq \\ & \frac{1}{4} \max\{(a-c)^2, (b-c)^2\} [f'(b) - f'(a)], \end{aligned}$$

unde $a < c < b$.

Teorema 4.1.4 ([Minculete-Niezgoda-Mitroi, 142]). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și există constantele reale m și M astfel încât $m \leq f''(x) \leq M$, $(\forall) x \in [a, b]$. Atunci

$$(4.1.10) \quad \begin{aligned} & \left| (b-a)f(c) + (c-a)f(a) + (b-c)f(b) - 2\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + 3c^2 + ab - 3bc - 3ac) \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} \right| \\ & \leq \frac{M-m}{16} \max\{(a-c)^2, (b-c)^2\} \end{aligned}$$

unde $a < c < b$.

- Dacă alegem $c = \lambda a + (1-\lambda)b$, cu $\lambda \in (0,1)$ atunci inegalitățile (4.1.9) și (4.1.10) devin:

$$(4.1.11) \quad 0 \leq (b-a)f(\lambda a + (1-\lambda)b) + (b-a)[(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)] - 2 \int_a^b f(x) dx \\ \leq \frac{(b-a)^2}{4} \max\{(1-\lambda)^2, \lambda^2\} [f'(b) - f'(a)],$$

$$(4.1.12) \quad |(b-a)f(\lambda a + (1-\lambda)b) + (b-a)[(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)] - \\ 2 \int_a^b f(x) dx - \frac{(1-3\lambda(1-\lambda))(b-a)(f'(b) - f'(a))}{6}| \\ \leq \frac{(b-a)^2(M-m)}{16} \max\{(1-\lambda)^2, \lambda^2\};$$

- Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ în inegalitățile (4.1.11) and (4.1.12), we deduce the inequalities (4.1.3) and (4.1.4).
- Pentru $f(x) = x^p$, cu $p > 1$, rezultă:

$$(4.1.13) \quad \frac{(\lambda a + (1-\lambda)b)^p + (1-\lambda)a^p + \lambda b^p}{2} - \frac{p(b-a)(b^{p-1} - a^{p-1})}{8} \max\{(1-\lambda)^2, \lambda^2\} \leq \\ [S_{p+1}(a, b)]^p \leq \frac{(\lambda a + (1-\lambda)b)^p + (1-\lambda)a^p + \lambda b^p}{2},$$

unde $S_p(a, b) = \left[\frac{a^p - b^p}{p(a-b)} \right]^{\frac{1}{p-1}}$ este media Stolarsky, $a \neq b$.

O altă direcție de cercetare o identific ca fiind un nou proiect de colaborare cu **S. Furuichi și F.C. Mitroi-Symeonidis** referitor la inegalitatea Hermite-Hadamard, cu scopul de a obține o nouă îmbunătățire a inegalității lui Young.

Intenționez să studiez proprietățile funcționalei Jensen și ale funcționalei

Cebășev pentru funcția $f(t) = \log \Gamma(t+1) + \gamma t$, unde $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, (\forall)$

$t \geq 0$, iar $\gamma = 0.577216...$ este constanta **Euler-Mascheroni**.

Pentru această funcție, vom aplica inegalitatea Hermite-Hadamard și inegalitatea Hammer-Bullen. Vom studia de asemenea funcționala Jensen și funcționala Cebășev pentru funcțiile log-convexe ((A, G) -convexe) sau, mult mai general, pentru **funcții** (M, N) -convexe, unde M și N sunt medii.

Legat de funcționala Jensen, în viitor, aș dori să studiez alte proprietăți ale entropiilor generalizate, precum:

a) **entropia Tsallis** [201] definită de:

$$H_q(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{j=1}^n p_j^q \ln_q \frac{1}{p_j}, \quad (q \geq 0, q \neq 1),$$

unde $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ este o distribuție de probabilitate cu $p_j > 0 \quad (\forall) \quad j = \overline{1, n}$ și funcția q -logaritmică pentru $x > 0$;

b) **entropia Rényi** definită prin:

$$R_q(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^n p_j^q \right);$$

c) **entropia cvasi-liniară relativă** dată prin:

$$D_1^\psi(p_1, p_2, \dots, p_n \| r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv -\log \psi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \psi \left(\frac{r_j}{p_j} \right) \right);$$

etc

4.2 Direcții viitoare de cercetare referitoare la inegalitatea lui Young și inegalitatea lui Hardy

Inspirat de metoda folosită de **Elliott** în demonstrarea inegalității lui **Hardy**, începem o nouă investigație asupra inegalității lui Young și a aplicațiilor sale.

Considerăm funcția $f(t) = t^{p-1}$, $p \in (0, 1]$, care este convexă pe $[1, \infty)$. Ținând cont că

$$\int_1^x t^{p-1} dt = \frac{x^p - 1}{p}$$

și utilizând inegalitatea Hermite-Hadamard, deducem

$$\frac{x^p - 1}{p} \leq (x-1) \frac{x^{p-1} + 1}{2} \leq x - 1.$$

În inegalitatea de mai sus dacă înlocuim x prin $\frac{a}{b}$, cu $a \geq b$, atunci obținem inegalitatea lui *Young*, care, în formă generală, sună că, dacă $a, b > 0$ și $p \in [0, 1]$, atunci

$$a^p b^{1-p} \leq pa + (1-p)b.$$

Această inegalitate, pentru $p = \frac{1}{u}$, $a = x^u$, $b = y^{\frac{u}{u-1}}$, este echivalentă cu următoarea inegalitate:

$$\frac{x^u}{u} + \frac{y^v}{v} \geq xy,$$

$$(\forall) x, y \geq 0 \text{ și } u, v > 1 \text{ cu } \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1.$$

Pentru $u = \alpha + 1$, $v = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$, cu $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$, $x \rightarrow x^{\alpha+1}$, $y \rightarrow y^\alpha$, și utilizând Young deduce următoarea relație:

$$(4.2.1) \quad x^{\alpha+1} + \alpha y^{\alpha+1} \geq (\alpha + 1)xy^\alpha,$$

care este utilizată de Elliott [67] în demonstrarea inegalității lui Hardy [173]:
Dacă $q > 1$ și $a_n \geq 0$, atunci

$$(4.2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^q \leq \left(\frac{q}{q-1} \right)^q \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q$$

cu excepția cazului când toți a_i sunt zero.

În 1926, Copson [41] generalizează inegalitatea lui Hardy prin înlocuirea mediei aritmetice a unui șir cu media aritmetică ponderată, astfel:

Dacă $q > 1, \lambda_n > 0, a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^q$ converge, atunci

$$(4.2.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \right)^q \leq \left(\frac{q}{q-1} \right)^q \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^q.$$

cu excepția cazului când toți a_i sunt zero.

Inspirat de abordarea de mai sus, aș dori să încep un nou studiu referitor la inegalitatea Hardy. Vom investiga o nouă rafinare a inegalității lui Young care poate fi utilizată în demonstrarea inegalității lui Hardy și în inegalitatea lui Carleman.

Inegalitatea lui Young a fost îmbunătățită de Kittaneh și Manasrah în [116] sau dată ca un caz particular al inegalității lui Kober [119], astfel:

$$(4.2.4) \quad \min\{p, 1-p\}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq pa + (1-p)b - a^p b^{1-p} \leq \max\{p, 1-p\}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2,$$

unde a, b sunt numere reale nenegative și $p \in [0, 1]$.

Pentru $p = \frac{1}{\alpha + 1}$, avem $1 - p = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$, și pentru, $a = x^{\alpha+1}$, $b = y^\alpha$, utilizăm inegalitatea (4.2.4), de unde deducem relația:



$$(4.2.5) \quad \left(x^{\frac{\alpha+1}{2}} - y^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \leq x^{\alpha+1} + \alpha y^{\alpha+1} - (\alpha+1)xy^\alpha \leq \alpha \left(x^{\frac{\alpha+1}{2}} - y^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2,$$

$(\forall) \alpha \geq 1$ și $x, y \geq 0$.

Lema 4.2.1. Dacă $q > 1$, $\alpha_n \geq 0, n = 1, 2, \dots, N$ și $M_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$, atunci

$$(4.2.6) \quad \sum_{n=1}^N M_n^q \leq \left(\frac{q}{q-1} \right)^q \sum_{n=1}^N \alpha_n^q - \frac{1}{q-1} \left(\sum_{n=1}^N (n-1) (M_{n-1}^{q/2} - M_n^{(q-1)/2})^2 \right)^q \left(\sum_{n=1}^N M_n^q \right)^{(1-q)}.$$

Teorema 4.2.2. Dacă $q > 1$, $\alpha_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ și $M_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$, atunci

$$(4.2.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n^q \leq \left(\frac{q}{q-1} \right)^q \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^q - \frac{1}{q-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) (M_{n-1}^{q/2} - M_n^{(q-1)/2})^2 \right)^q \left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n^q \right)^{(1-q)}.$$

- Inegalitatea lui **Copson** (vezi (4.2.3)), care este o generalizare a inegalității lui **Hardy**, poate fi rafinată prin aceeași metodă. Astfel, identificăm o nouă direcție de cercetare.

În continuare, vom da o altă îmbunătățire a inegalității integrale a lui Young:

Teorema 4.2.5. Presupunem că au loc condițiile din teorema 1.4.1 și mai mult $a < f^{-1}(b)$ și f este convexă sau $a > f^{-1}(b)$ și f este concavă. Atunci

$$(4.2.16) \quad ab \leq ab + \frac{(b-f(a))(f^{-1}(b)-a)}{2} \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx = Y(f; a, b).$$

În [Minculete, 151], am prezentat altă rafinare a inegalității lui Young:

$$a^p b^{1-p} \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2r} \leq pa + (1-p)b \leq a^p b^{1-p} \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2(1-r)},$$

$a, b > 0$, $p \in [0, 1]$ și $r = \min\{p, 1-p\}$.

Aceasta implică inegalitatea

$$(4.2.19) \quad a^p b^{1-p} \left[\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2r} - 1 \right] \leq pa + (1-p)b - a^p b^{1-p} \leq a^p b^{1-p} \left[\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2(1-r)} - 1 \right],$$



unde $0 < b \leq a$, $p \in [0,1]$ și $r = \min\{p, 1-p\}$.

Dar, cum

$$\log t \leq \frac{t^p - 1}{p} \leq t^{p-1} \log t, t \geq 1, p \in [0,1],$$

adică

$$2r \log \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right) \leq \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2r} - 1$$

și

$$2(1-r)a^p b^{1-p} \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{1-2r} \log \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right) \geq \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{2(1-r)} - 1.$$

Deci, avem

(4.2.20)

$$\begin{aligned} 2ra^p b^{1-p} \log \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right) &\leq pa + (1-p)b - a^p b^{1-p} \leq \\ &2(1-r)a^p b^{1-p} \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right)^{1-2r} \log \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \right). \end{aligned}$$

Această inegalitate poate fi utilizată pentru a determina noi inegalități pentru operatorii pozitivi. Altă idee de lucru este rafinarea inegalității lui Young în următorul mod: pentru $x > 1, p \neq 0$, avem

$$\begin{aligned} \frac{x^p - 1}{p} &= \int_1^x t^{p-1} dt = \int_1^x t^p (\log t) dt = x^p \log x - p \int_1^x t^{p-1} \log t dt = \\ &x^p \log x - p \int_1^x t^p \log t (\log t) dt = x^p \log x - px^p \log^2 x + p \int_1^x t^{p-1} (p \log t + 1) \log t dt \end{aligned}$$

care implică inegalitatea

$$(4.2.21) \quad x^p \log x - px^p \log^2 x \leq \frac{x^p - 1}{p} \leq x^p \log x,$$

$$(\forall) x > 1, p > 0.$$

$$(4.2.22) \quad x^p \log x \leq \frac{x^p - 1}{p} \leq x^p \log x - px^p \log^2 x,$$

$$(\forall) x > 1, p < 0.$$

Inspirat de munca de mai sus, doresc să încep un nou proiect de colaborare cu **Shigeru Furuichi** referitor la alte inegalități de tipul Young. Rezultatele de mai jos au fost dezvoltate împreună cu Shigeru Furuichi în comunicări private:

Lema 4.2.6. Dacă $a > 0$, atunci funcția $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$h(x) = \frac{a^x - 1}{x} \text{ este crescătoare.}$$

Propoziția 4.2.7. Pentru $a \geq b$ și $p, q, s \in \mathbb{R}$ cu $q \leq p \leq s$, avem următoarea inegalitate:

(4.2.23)

$$\frac{1}{s} [sa + (1-s)b - a^s b^{1-s}] \leq \frac{1}{p} [pa + (1-p)b - a^p b^{1-p}] \leq \frac{1}{q} [qa + (1-q)b - a^q b^{1-q}].$$

4.3. Direcții viitoare de cercetare referitoare la inegalități într-un spațiu înzestrat cu produs scalar

Fie X un spațiu înzestrat cu produs scalar peste mulțimea numerelor reale. Produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce o normă dată prin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $(\forall) x \in X$, astfel X este un spațiu vectorial normat.

(4.3.14)

$$\frac{1}{2[\max(\|x\|, \|y\|)]^2} \|\|y\| \cdot x - \|x\| \cdot y\|^2 \leq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle \leq \frac{1}{2[\min(\|x\|, \|y\|)]^2} \|\|y\| \cdot x - \|x\| \cdot y\|^2$$

Aplicăm acest rezultat pentru diverse spații cu produs scalar:

- $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ rezultă

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \text{ și } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Dar, avem

$$n \min_{i=1, n} (\|y\| \cdot x_i - \|x\| \cdot y_i)^2 \leq \|\|y\| \cdot x - \|x\| \cdot y\|^2 = \sum_{i=1}^n (\|y\| \cdot x_i - \|x\| \cdot y_i)^2 \leq n \max_{i=1, n} (\|y\| \cdot x_i - \|x\| \cdot y_i)^2$$

Combinând această inegalitate cu inegalitatea (4.3.14), deducem

$$(4.3.15) \quad \frac{n \min_{i=1, n} (\|y\| \cdot x_i - \|x\| \cdot y_i)^2}{2 [\max(\|x\|, \|y\|)]^2} \leq \|x\| \cdot \|y\| - \langle x, y \rangle \leq \frac{n \max_{i=1, n} (\|y\| \cdot x_i - \|x\| \cdot y_i)^2}{2 [\min(\|x\|, \|y\|)]^2},$$

$$(\forall) x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- $(C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$: pentru $f, g \in C^0[a, b]$ avem

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ and } \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Inspirat de abordările de mai sus, doresc să încep un nou proiect de colaborare cu prof. dr. **Radu Păltănea** referitor la inegalități între elementele unor spații vectoriale înzestrate cu produs scalar.

Proiecția unui vector este o operațiune importantă în procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Proiecția unui vector x pe un vector y este dată de $proj_y x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$.

Dacă în $(R^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, denumim prin u , vectorul $u = (1, 1, \dots, 1)$, atunci

$$proj_u x = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

În $(R^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, definim **varianța unui vector x** prin

$$var(x) = \frac{1}{\|u\|^2} \|x - proj_u x\|^2$$

și **covarianța vectorilor x și y** prin

$$cov(x, y) = \frac{1}{\|u\|^2} \langle x - proj_u x, y - proj_u y \rangle.$$

Fie $(C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, unde pentru $f, g \in C^0[a, b]$ avem

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ și } \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Proiecția unui vector f pe un vector g este dat prin $proj_g f = \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2} g$.

În $(C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dacă luăm $g(x) = 1$, avem

$$proj_1 f = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Astfel, în $(C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, definim *varianța unei funcții* f prin

$$\text{var}(f) = \frac{1}{\|1\|^2} \|f - \text{proj}_1 f\|^2$$

și *covarianța funcțiilor* f și g prin:

$$\text{cov}(f, g) = \frac{1}{\|1\|^2} \langle f - \text{proj}_1 f, g - \text{proj}_1 g \rangle.$$

Alte direcții viitoare de cercetare se pot trasa investigând inegalități pentru combinații liniare de vectori.

Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un sistem ortonormat de vectori în spațiul euclidian $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Pentru $x \in X$, punem

$$\bar{x} = x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \quad \text{și} \quad S_n(x, y) = \langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle,$$

unde $x, y \in X$.

În [63], Dragomir demonstrează următoarea inegalitate:

$$(4.3.16) \quad [S_n(x, y)]^2 \leq S_n(x, x) S_n(y, y)$$

unde $x, y \in X$.

Din [113] găsim următoarea identitate:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle = S_n(x, y).$$

Dar, remarcăm că $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, y \rangle = \langle x, \bar{y} \rangle$, deci rezultă

$$\|\bar{x}\|^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle \bar{x}, x \rangle = \langle x, \bar{x} \rangle = S_n(x, x) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

Propoziția 4.3.3. *Cu notațiile de mai sus, avem*

(4.3.18)

$$0 \leq \frac{S_n(y, y)}{S_n(z, z)} \left(\frac{S_n(x, y) S_n(y, z)}{S_n(y, y)} - S_n(x, z) \right)^2 \leq S_n(x, x) S_n(y, y) - [S_n(x, y)]^2,$$

$(\forall) x, y, z \in X, \{y, e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{z, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sunt linear independente.

Similar cu cele menționate mai sus pentru $n = 1$, aplicăm (4.3.16) pe $L_2(a, b)$ pentru $\left\{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, x = \frac{1}{\sqrt{b-a}} f, y = \frac{1}{\sqrt{b-a}} g, z = \frac{1}{\sqrt{b-a}} h \right\}$, unde $f, g \in L_2(a, b)$, și obținem o inegalitate în termenii funcționalei Cebâșev, precum:

$$(4.3.19) \quad 0 \leq \frac{T(g, g)}{T(h, h)} \left(\frac{T(f, g)T(g, h)}{T(g, g)} - T(f, h) \right)^2 \leq T(f, f)T(g, g) - [T(f, g)]^2,$$

unde $f, g, h \in L_2(a, b)$, $T(g, g), T(h, h) > 0$, și

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx.$$

Fie $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian.

Pentru $n = 1$ în inegalitatea (4.3.16) și vectorul $e \in X$ cu $\|e\| = 1$, avem

$$(4.3.20) \quad [\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle]^2 \leq (\|x\|^2 - \langle x, e \rangle^2) (\|y\|^2 - \langle y, e \rangle^2).$$

În continuare, vom rafina inegalitatea (4.3.20), astfel:

Corolarul 4.3.4. Pentru orice $e, x, y, z \in X$ cu $\|e\| = 1$ și $\{y, e\}, \{z, e\}$ sunt linear independente, avem

$$(4.3.21) \quad 0 \leq A \leq (\|x\|^2 - \langle x, e \rangle^2) (\|y\|^2 - \langle y, e \rangle^2) - [\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle]^2,$$

unde

$$A = \frac{\|y\|^2 - \langle y, e \rangle^2}{\|z\|^2 - \langle z, e \rangle^2} \left(\frac{(\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle)(\langle y, z \rangle - \langle y, e \rangle \langle e, z \rangle)}{\|y\|^2 - \langle y, e \rangle^2} - \langle x, z \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, z \rangle \right)^2.$$

Teorema 4.3.5. Pentru orice $e, x, y, z \in X$ cu $\|e\| = 1$, avem

$$(4.3.22) \quad \begin{aligned} & [\langle x, y \rangle (\|z\|^2 - \langle z, e \rangle^2) + (\langle z, e \rangle (\langle x, z \rangle \langle y, e \rangle + \langle y, z \rangle \langle x, e \rangle) - \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle - \|z\|^2 \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle)]^2 \\ & \leq \|x\|^2 (\|z\|^2 - \langle z, e \rangle^2) - (\langle x, z \rangle - \langle x, e \rangle \langle z, e \rangle)^2 \|y\|^2 (\|z\|^2 - \langle z, e \rangle^2) - (\langle y, z \rangle - \langle y, e \rangle \langle z, e \rangle)^2 \end{aligned}$$

Concluzii

În prezenta lucrare descriem rezultate referitoare la inegalități matematice și aplicațiile lor. Aici obținem o serie de inegalități referitoare la funcționale, operatori pozitivi inversabili și la spațiile înzestrate cu produs scalar. Descriem câteva aplicații întâlnite la probabilități și în statistică.

Această teză de abilitare conține un număr de rezultate noi ce caracterizează inegalitatea Hermite-Hadamard, inegalitatea lui Grüss, inegalitatea Hammer-Bullen, și inegalitatea Cauchy-Schwarz (în spațiile înzestrate cu produs scalar).

Încheiem cu o listă de elemente care fac parte din cercetarea direcțiilor actuale și viitoare. Domeniul inegalităților matematice este destul de activ, și poate genera întotdeauna elemente de noutate și aplicații interesante.

Rezumăm lista direcțiilor noastre actuale și viitoare de cercetare, după cum urmează:

- O primă direcție de cercetare se referă la reconsiderarea inegalității lui Hermite-Hadamard și la o nouă abordare, astfel găsim o îmbunătățire și noi aplicații ale acesteia. Am dori să propunem noi inegalități pentru media lui Stolarsky, media logaritmică, media identrică etc.
- În legătură cu inegalitatea lui Jensen, în viitor, dorim să studiem alte proprietăți ale entropiei generalizate, cum ar fi entropia Tsallis, entropia Rényi, entropia relativă quasilinară, entropia relativă Rényi, entropia relativă Tsallis, Tsallis entropia cvasi-linară (entropia q-cvasi-linară), entropia relativă cvasi-linară Tsallis.
- Inspirat de lucrarea de mai sus și de rezultatele recente, aș dori să încep un nou proiect legat de inegalitatea Hardy. Am dori să propunem o nouă îmbunătățire a inegalității lui Young, care poate fi folosită la demonstrarea inegalității lui Hardy și a inegalității lui Carleman.
- O altă direcție viitoare pentru cercetarea inegalităților dintre elementele unui spațiu înzestrat cu produs scalar este legată de inegalitatea lui Cauchy-Schwarz și de aplicațiile acesteia. Ca punct principal de plecare, ne referim la inegalitatea, $[S_n(x, y)]^2 \leq S_n(x, x)S_n(y, y)$, dată de Dragomir în [63].

Bibliografie

- [1] Abramovich, S., Dragomir, S.S., Normalized Jensen functional, superquadracity and related inequalities, *Int. Ser. Numer. Math.*, **157**, 2009, 217–228.
- [2] Abramovich, S., Jameson, G., Sinnamon, G., Refining Jensen's inequality, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum. (N.S.)* **47**(95), no. 1–2, 2004, 3–14.
- [3] Abramovich, S., Ivelić, S., Pečarić, J., Refinement of inequalities related to convexity via superquadraticity, weaksuperquadraticity and superterzaticity. In: *Inequalities and Applications 2010*, pp. 191–207, International Series of Numerical Mathematics, 161. Birkhauser/Springer, Basel, 2012.
- [4] Acu, A., Gonska, H., Raşa, I., Gruss-type and Ostrowski-type inequalities in approximation theory, *Ukr. Math. J.* **63**, 2011, 843-864.
- [5] Acu, A. M., Gonska, H., *On Bullen's and related inequalities*, General Mathematics, Vol. 22, No. 1 (2014), 19-26.
- [6] Aczél, J., Daróczy, Z., *On Measures of Information and Their Characterizations*, Academic Press, San Diego, 1975.
- [7] Agarwal, R. P., Dragomir, S. S., A survey of Jensen type inequalities for functions of selfadjointoperators in Hilbert spaces, *Comput. Math. Appl.*, vol. **59**, Issue 12, 2010, 3785-3812.
- [8] Aldaz, J. M., Strengthened Cauchy-Schwarz and Hölder inequalities, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **10** (4), art. 116, 2009.
- [9] Aldaz, J. M., A refinement of the inequality between arithmetic and geometric means, *J. Math. Inequal.*, **2**(4), 2008, 473-477.
- [10] Aldaz, J. M., Self-improvement of the inequality between arithmetic and geometric means, *J. Math. Inequal.* **3**, 2009, 213-216.
- [11] Aldaz, J. M., Comparison of differences between arithmetic and geometric means, *Tamkang J. Math.*, **42**, 2011, 445-451.
- [12] Alzer, H, A Refinement of the Cauchy-Schwarz Inequality, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **168**, 1992, 596-604.
- [13] Andrica, D., Badea, C., Gruss' inequality for positive linear functional, *Period. Math. Hung.*, **19**(2), 1998, 155-167.
- [14] Anderson Jr., W. N., Morley, T. D., Trapp, G. E., Positive solutions to $X = A - BX^{-1}B^*$, *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 134, 1990, pp. 53–62.



- [15] Ando, T., *Topics on Operator Inequalities*, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 1978.
- [16] Ando, T., Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, *Linear Algebra Appl.*, 26 (1979), 203–241.
- [17] Băţinetu-Giurgiu, D. M., Marghidanu, D., Pop, O. T., A new generalization of Radon's inequality and applications, *Creative Math. Inform.*, 2, 2011, 111-116.
- [18] Bencze, M., Inequalities in Triangle, *Octagon Math. Magazine*, vol.7, no.1, 1999, pp. 99-107.
- [19] Bhatia, R., *Matrix Analysis*, Springer, New York, NY, USA, 1996.
- [20] Bhatia, R., Davis, C., A better bound on the variance, *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, April 2000, 353-357.
- [21] Bessenyei, M., Páles, Z., Hermite-Hadamard inequalities for generalized convex functions, *Aequationes Math.* **69** (2005), 32-40.
- [22] Bessenyei, M., The Hermite-Hadamard inequality on Simplices, *Amer. Math. Monthly*, vol. **115**, april 2008, 339-345.
- [23] Boucheron, S., Lugosi, G., Bousquet, O., Concentration inequalities. In: *Advanced Lectures on Machine Learning*, Springer, Berlin, 2003, 208-240.
- [24] Bourin, J.C., Lee, E.-Y. Fujii, M., Seo, Y., A matrix reverse Holder inequality, *Linear Algebra Appl.*, 431(11) (2009), 2154–2159.
- [25] Brenner, J. L., Alzer, H., Integral inequalities for concave functions with applications to special functions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 118 (1991), 173–192.
- [26] Bullen, P. S., *Handbook of Mean and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003.
- [27] Bullen, P. S., The inequality of Young, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **357–380** (1971), 51–54.
- [28] Buzano, M.L., Generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Italian), *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino* **31** (1974) 405–409.
- [29] Carleman, T., *Sur les fonctions quasi-analytiques*, Comptes rendus du V e Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Helsingfors, (1922), 181–196.
- [30] Cartwright, D. I. Field., M. J., A refinement of the arithmetic mean-geometric mean inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **71** (1978) 36-38.
- [31] Cauchy, A.-L., *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, I ère partie, Analyse Algébrique*, Paris, 1821. Reprinted by Ed. Jacques Gabay, Paris, 1989.
- [32] Cerone, P., Dragomir, S.S., *Mathematical Inequalities: A Perspective*, CRC Press, Taylor & Francis, New York, 2011.

- [33] Cerone, P., On Young's inequality and its reverse for bounding the Lorenz curve and Gini mean, *J. Math. Inequal.*, Volume 3, Number 3 (2009), 369–381.
- [34] Chansangiam, P., A Survey on Operator Monotonicity, Operator Convexity, and Operator Means, *International Journal of Analysis*, Volume 2015, Article ID 649839, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/649839>
- [35] Ciurdariu, L. Some inequalities in pseudo-Hilbert spaces, *Tamkang Journal of Mathematics*, vol.42, no. 4, 2011, 438-492.
- [36] Ciurdariu, L., Integral forms for some inequalities, *Int. J. Math. Anal.* **7** (53), 2611-2618 (2013)
- [37] Ciurdariu, L., On several inequalities deduced using a power series approach, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* **8**(18), 2013, 855-864.
- [38] Ciurdariu, L., On several inequalities obtained from generalizations of Young's inequality by a power series approach, *Int. J. Algebra* **7** (18), 2013, 847-856.
- [39] Ciurdariu, L., On integral forms of several inequalities, *J. Sci. Arts* **2** (23), 2013, 159-166.
- [40] Clarkson, J. A., Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), 396-414.
- [41] Copson, E.T., Note on series of positive terms, *J. London Math. Soc.* **2** (1927), 9–12 and **3** (1928), 49–51.
- [42] Cover, T. M., Thomas, J. A., *Elements of Information Theory*, 2nd edn. Wiley, New York, 2006.
- [43] Csiszár, I., Axiomatic characterizations of information measures, *Entropy* **10**, 2008, 261-273.
- [44] Csiszár, I., *Information measures: a critical survey*. In: Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Reidel, Dordrecht 1978, 73-86.
- [45] Csiszár, I., Shields, P. C., Information theory and statistics: a tutorial, *Found. Trends Commun. Inf. Theory* **1**, 2004, 417-528.
- [46] Dadipour, F., Moslehian, M. S., Rassias, J. M., Takahasi, S. E., Characterization of a generalized triangle inequality in normed spaces, *Nonlinear Anal.* **75**, 2012, 735-741.
- [47] Dahmani, Z., Tabharit, L., Taf, S., New generalizations of Grüss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals, *Bull. Math. Anal. Appl.* **2**(3), 2010, 93-99.
- [48] Daróczy, Z., General information functions, *Inf. Control* **16**, 1970, 36-51.

- [49] Diaz, J. B., Metcalf, F. T., A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces, *Proc. Am. Math. Soc.*, 17, 1966, 88-97.
- [50] Dragomir, S. S., Reverses of the triangle inequality in Banach space, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 6(5), Article ID 139, 2005.
- [51] Dragomir, S. S., Pearce, Ch. E. M., *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000, <http://rgmia.org/papers/monographs/Master2.pdf>.
- [52] Dragomir, S. S., A survey of Jessen's type inequalities for positive functional,
RGMIA Res. Rep. Collect. (2011). 46 pp.
- [53] Dragomir, S. S., A note on new refinements and reverses of Young's inequality, *TJMM* 8 (2016), No. 1, 45-49.
- [54] Dragomir, S. S., Pečarić, J. E., Persson, L.- E., Some inequalities of Hadamard type, *Soochow J. Math. (Taiwan)*, **21** (1995), pp. 335-341.
- [55] Dragomir, S. S., Fitzpatrick, S., The Hadamard's inequality for s - convex functions in the second sense, *Demonstration Math.*, 32 (**4**) (1999), pp. 687–696.
- [56] Dragomir, S. S., Cerone, P., Sofo, A., Some remarks on the midpoint rule in numerical integration, *Studia Univ. Babes-Bolyai, Math.*, XLV(1) (2000), pp. 63-74.
- [57] Dragomir, S. S., Cerone, P., Sofo, A., Some remarks on the trapezoid rule in numerical integration, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 31 (**5**) (2000), pp. 475-494.
- [58] Dragomir, S. S., Bounds for the Normalized Jensen Functional, *Bull. Austral. Math. Soc.* **74** (2006), no. 3. 471-478.
- [59] Dragomir, S. S., Some integral inequalities of Gruss type, *Indian J. Pure Appl. Math.* 31(4), 2000, 397-415.
- [60] Dragomir, S. S., Some Gruss type inequalities in inner product spaces, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.* 4(2), 2003.
- [61] Dragomir, S.S., A potpourri of Schwarz related inequalities in inner product spaces (II), *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **7** (1) (2006), Article 14.
- [62] Dragomir, S.S., Refinements of Buzano's and Kurepa's inequalities in inner product spaces, *FACTA UNIVERSITATIS (NIS) Ser. Math. Inform.* **20** (2005), 65-73.
- [63] Dragomir, S. S., On Bessel and Gruss inequalities for orthonormal families in inner product spaces, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 69, no. 2, 2004, 327–340.
- [64] Dragomir, S. S., Upper and lower bounds for the p -angular distance in normed spaces with applications, *J. Math. Inequal.*, **8**, 2014, 947-961.

- [65] Dunkl, C. F., Williams, K. S., A simple norm inequality, *The American Mathematical Monthly*, **71**, 1964, 53-54.
- [66] Elezović, N., Marangunić, L., Pečarić, J., Some improvements of Gruss type inequality, *J. Math. Inequal.* 1(3), 2007, 425-436.
- [67] Elliott, E.B., A simple exposition of some recently proved facts as to convergency, *J. London Math. Soc.* 1 (1926), 93–96.
- [68] El Farissi, A., Latreuch, Z., Balaidi, B., Hadamard Type Inequalities For Near Convex Functions, *Gazeta Matematică Seria A*, No. 1-2/2010.
- [69] Evans, J. R., *Statistics, Data Analysis and Decision Modeling*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2007.
- [70] Florea, A., Niculescu, C.P., A note on Ostrowski's inequality, *J. Inequal. Appl.* 2005(5), 459-468.
- [71] Fejér, L., Über die Fourierreihen, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.*, **24** (1906), pp. 369–390.
- [72] Fujii, M., Mičić, L., Pečarić, J. , Seo, Y., Reverse inequalities on chaotically geometric mean via Specht ratio II, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.* **4** (2003), Art. 40.
- [73] Fujii, J.I., Kamei, E., Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japonica*, Vol. **34** (1989), pp. 341-348.
- [74] Furuichi, S., Information theoretical properties of Tsallis entropies, *J. Math. Phys.*, Vol. **47**, 2006.
- [75] Furuichi, S., Minculete, N., Mitroi, C., Some inequalities on generalized entropies, *J. Inequal. Appl.* 2012:**226**, 2012.
- [76] Furuichi, S., Minculete, N., Alternative reverse inequalities for Young's inequality, *J. Math. Inequal.*, vol. **5**, No. **4** (2011), 595-600.
- [77] Furuichi, S., On refined Young inequalities and reverse inequalities, *J. Math. Ineq.* **5** (2011), 21–31
- [78] Furuichi, S., Refined Young inequalities with Specht's ratio, [*Journal of the Egyptian Mathematical Society*, Volume 20, Issue 1](#), April 2012, Pages 46-49.
- [79] Furuichi, S., Minculete, N., Alternative estimates for Tsallis relative operator entropy, arXiv: 1706.03334v1 [math. FA], 11 june 2017.
- [80] Furuichi, S., Trace inequalities in nonextensive statistical mechanics, *Linear Algebra Appl.*, **418** (2006), 821–827.
- [81] Furuichi, S., Yanagi, K., Kuriyama, K., Fundamental properties of Tsallis relative entropy, *J. Math. Phys.*, **45** (2004), 4868–4877.

- [82] Furuichi, S., Yanagi, K., Kuriyama, K., A note on operator inequalities of Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra Appl.*, **407** (2005), 19–31.
- [83] Furuichi, S., Ghaemi, M. B., Gharakhanlu, N., Generalized Reverse Young and Heinz Inequalities, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2017, 1-18.
- [84] Furuichi, S., A note on a parametrically extended entanglement-measure due to Tsallis relative entropy, *Information*, 9, 2006, 837-844.
- [85] Furuichi, S., On uniqueness theorems for Tsallis entropy and Tsallis relative entropy, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 47, 2005, 3638-3645.
- [86] Furuichi, S., An axiomatic characterization of a two-parameter extended relative entropy., *J. Math. Phys.*, 51, 2010, 123302.
- [87] Furuichi, S., Matrix trace inequalities on Tsallis entropies, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(1), Article 1, 2008.
- [88] Furuichi, S., On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics, *J. Math. Phys.*, 50, 2009.
- [89] Furuichi, S., Mitroi, F.-C., Mathematical inequalities for some divergences, *Physica A* 391, 2012, 388-400.
- [90] Furuichi, S., Inequalities for Tsallis relative entropy and generalized skew information, *Linear Multilinear Algebra*, 59, 2012, 1143-1158.
- [91] T. Furuta, Two reverse inequalities associated with Tsallis relative operator entropy via generalized Kantorovich constant and their applications, *Linear Algebra Appl.*, **412** (2006), 526–537.
- [92] Furuta T., Yanagida, M., Generalized means and convexity of inversion for positive operators, *Amer. Math. Monthly*, Vol.105, 1998, 258-259.
- [93] Furuta, T., Specht ratio $S(1)$ can be expressed by Kantorovich constant $K(p)$: $S(1) = \exp[K'(1)]$ and its application, *Math. Inequal. Appl.*, **6** (2003), 521–530.
- [94] Furuta, T., Basic properties of the generalized Kantorovich constant
- $$K(h, p) := \frac{h^p - h}{(p-1)(h-1)} \left(\frac{p-1}{p} \frac{h^p - 1}{h^p - h} \right)^p, \text{ Acta Sci. Math (Szeged)., 70 (2004),}$$
- 319–337.
- [95] Gavrea, I., An extention of Buzano’s inequality in inner product space, *Math. Inequal. Appl.*, 10 (2007), 281-285.
- [96] Gavrea, I, Ivan, M., An inequality for continuous linear functionals, *Applied Mathematics Letters*, 23: 381-384, 2010.

- [97] Ghazanfari, AG, Barani, A: Some Hermite-Hadamard type inequalities for the product of two operator preinvex functions. *Banach J. Math. Anal.* 9(2), 9-20 (2015)
- [98] Grüss, G. Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$, *Math. Z.* **39** (1935), 215-226.
- [99] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, *J. Math. Pures Appl.*, **58** (1893), pp. 171–215.
- [100] Halliwell, G. T., Mercer, P.R., A refinement of an inequality from information theory, *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **5** (1), Article ID 3, 2004.
- [101] Halmos, P., *Finite dimensional vector spaces*, Springer, Berlin, 1974 .
- [102] Hammer, P.C., The mid-point method of numerical integration, *Math. Mag.* 31 (1957/1958), 193–195.
- [103] Han, T., Nonnegative entropy measures of multivariate symmetric correlations, *Inf. Control* 36, 1978,133-156.
- [104] Hansen, F., Pedersen, G. K., Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem, *Mathematische Annalen*, vol. 258, no. 3, pp. 229–241, 1982.
- [105] Hardy, G.H., Note on a theorem of Hilbert, *Math. Z.* **6** (1920), 314–317.
- [106] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G., *Inequalities*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 1952.
- [107] Hermite, Ch., Sur deux limites d'une intégrale définie, *Mathesis*, **3** (1883), 82.
- [108] Isa, H. Ito, M. Kamei, E. Toyama, H. Watanabe, M., Shannon type inequalities of a relative operator entropy including Tsallis and Rényi ones, *Ann. Funct. Anal.*, **6** (2015), 289–300.
- [109] Hiriart-Urruty, J.B., Lemaréchal, C., *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg, 2001.
- [110] Izumio, S., Pečarić, J., Tepeš, B., Some extensions of Gruss's inequality. *Math. J. Toyama Univ.*, 26, 2003, 61-73.
- [111] Johansson, M., Persson, L.-E., Wedestig, A., Carleman's inequality – history, proofs and some new generalizations, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, **4** (3) Art. 53, 2003.
- [112] Kato, M., Saito, K. S., Tamura, T., Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces, *Math. Inequal. Appl.*, 10, 2007, 451-460.

- [113] Kechriniotis, A., Delibasis, K. On generalizations of Grüss inequality in inner product spaces and applications, *J. Inequal. Appl.*, Vol. 2010, Article ID 167091, 18 pages.
- [114] Khosravi, M., Drnovšek, R., Moslehian, M., S., A commutator approach to Buzano's inequality, *Filomat* **26**:4 (2012), 827–832, DOI 10.2298/FIL1204827K.
- [115] Kirk, W.A., Smiley, M.F., Mathematical Notes: Another characterization of inner product spaces, *Amer. Math. Monthly* **71** (1964), no. 8, 890–891.
- [116] Kittaneh, F., Manasrah, Y., Improved Young and Heinz inequalities for matrix, *J. Math. Anal. Appl.* **361** (2010), 262–269.
- [117] Kittaneh, F., Manasrah, Y., Reverse Young and Heinz inequalities for matrices, *Linear Multilinear Algebra*, **59** (2011), 1031–1037.
- [118] Kluza, P., Niezgoda, M., Generalizations of Crooks and Lin's results on Jeffreys–Csiszár and Jensen–Csiszár f-divergences, [*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 463](#), 2016, 383–393.
- [119] Kober, H., On the arithmetic and geometric means and Hölder inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), 452–459.
- [120] Kouba, O., Solution of the problem 11632, *The American Mathematical Monthly* 121, Issue 1, 87–88, 2014.
- [121] Kubo, F., Ando, T., Means of positive linear operators, *Mathematische Annalen*, vol. 246, no. 3, pp. 205–224, 1980.
- [122] Kunt, M., Işcan, I., Yazici, N., *et al.*, On new inequalities of Hermite–Hadamard–Fejer type for harmonically convex functions via fractional integrals, *SpringerPlus*, 5: 635, 2016.
- [123] Lee, E.-Y., A matrix reverse Cauchy-schwarz inequality, *Linear Algebra Appl.*, 430(2) (2009), 805–810.
- [124] Liao, W., Wu, J. and Zhao, J., New versions of reverse Young and Heinz mean inequalities with the Kantorovich constant, *Taiwanese J. Math.*, **19** (2015), No. 2, pp. 467–479.
- [125] Liu, Z., Some sharp Ostrowski-Grüss type inequalities, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 18, 2006, 14–21.
- [126] Lukaszyk, S. *Measurement metric, examples of approximation applications in experimental mechanics*, PhD thesis, Cracow University of Technology, submitted December 31, 2001, completed March 31, 2004.
- [127] Lukaszyk, S. A new concept of probability metric and its applications in approximation of scattered data sets, *Computational Mechanics*, Vol. 33, No. 4, Springer-Verlag, 2003, 299–304.
- [128] Lupaş, A., A generalization of Hadamard inequalities for convex functions, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* (1976), no. 544–576, pp. 115–121.

- [129] Lupu, C. Schwarz, D., Another look at some new Cauchy-Schwarz type inner product inequalities, *Applied Mathematics and Computation*, **231** (2014), 463-477.
- [130] Maligranda, L., Simple Norm Inequalities, *The American Mathematical Monthly*, 113, March, 2006, 256-260.
- [131] Maligranda, L., Some remarks on the triangle inequality for norms, *Banach J. Math. Anal*, 2, 2008, 31-41.
- [132] Masi, M., A step beyond Tsallis and Rényi entropies, *Phys. Lett. A* 338, 2005, 217-224.
- [133] Masjed-Jamei, M., Omei E., On some statistical and probabilistic inequalities, *Journal of Inequalities and Special Functions*, Volume 7 Issue 4 (2016), Pages 49-76.
- [134] Massera, J. L., Schäffer, J. J., Linear differential equations and functional analysis. I., *Ann. of Math.* **67** (1958), 517-573,
- [135] Mercer, A. McD., Bounds for A-G, A-H, G-H, and a family of inequalities of Ky Fan's type, using a general method, *J. Math. Anal. Appl.* 243 (2000), 163-173.
- [136] Mercer, A. McD., An improvement of the Gruss inequality, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.* 6(4), Article ID 93, 2005.
- [137] Merentes, N., Nikodem, K., Remarks on strongly convex functions, *Aequationes Math.* **80**(1-2), 2010, 193-199.
- [138] Merkle, M. J., A contribution to Young's inequality, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz*, **461-697** (1974), 265-267.
- [139] Mihăilescu, M., Niculescu, C. P., An extension of the Hermite-Hadamard inequality through subharmonic function, *Glasgow Math. J.* (2007) **49**, Issue 03, 509-514.
- [140] Minguzzi, E., An equivalent form of Young's inequality with upper bound, *Appl. Anal. Discrete Math.* 2 (2008), 213-216.
- [141] Minculete, N., Considerations about the several inequalities in an inner product space, *accepted for publishing in Journal of Mathematical Inequalities*, 2017.
- [142] Minculete, N., Niezgoda, M., Mitroi-Symeonidis, F. C., About reverse inequalities of Hammer-Bullen's inequality, *it is in progress*.
- [143] Minculete, N., Rațiu, A., Pečarić, J., A refinement of Grüss inequality via Cauchy-Schwarz's inequality for discrete random variables, *Appl. Math. Inf. Sci.* **9**, No. 1 (2015), 39-45.
- [144] Minculete, N., About the bounds for several statistical indicators, *Proceedings of 15-th Conference on Applied Mathematics APLIMAT*, 2-4 February 2016,

- Bratislava, Institute of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava.
- [145] Minculete, N., Mitroi, C., Féjer-type inequalities, *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. **9**., Issue 1, Article 12, 2012, 1-8.
- [146] Minculete, N., Dicu, P., Rațiu, A., Two reverse inequalities of Bullen's inequality, *General Mathematics*, Vol. **22**, No. 1 (2014), 69–73.
- [147] Minculete, N., Florea, A., Furuichi, S., Bounds and estimates on convex inequalities, *Journal of Inequalities and Special Functions*, Volume 8, Issue 4 (2017), 1-9.
- [148] [Minculete, N., Păltănea, R., [Improved estimates for the triangle inequality](#), *J. Inequal. Appl.* 2017:**17**, 2017.
- [149] Minculete, N., Ciurdariu, L., *A generalized form of Grüss type inequality and other integral inequalities*, *J. Inequal. Appl.* 2014:**119**, 2014.
- [150] Minculete, N., Furuichi, S., Several applications of Cartwright-Field's inequality, *Int. J. Pure Appl. Math.*, Vol. **71**, No. 1 (2011), 19-30.
- [151] Minculete, N., A result about Young's inequality and several applications, *Sci. Magna*, Vol. **7** (2011), No. 1, 61-68.
- [152] Minculete, N., A refinement of the Kittaneh – Manasrah inequality, *Creat. Math. Inform.* **20** (2011), No. 2, 157-162.
- [153] Mineno, K., Nakamura, Y., Ohwada, T. Characterization of the intermediate values of the triangle inequality, *Math. Inequal. Appl.*, 15, 2012, 1019-1035.
- [154] Mitani, K. I., Saito, K.S., On sharp triangle inequalities in Banach spaces II, *J. Inequal. Appl.*, 2010, Article ID 323609.
- [155] Mitrinović, D. S., Pečarić, J., Fink, A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
- [156] Mitrinović, D. S., Pečarić, J., Comments on an inequality of M. Masuyama, *SUT J. Math.* (Formerly TRU Math.) **27** (1991), 89-91.
- [157] Mitroi, F. C., About the precision in Jensen-Steffensen inequality, *Annals of University of Craiova Mathematics and Computer Science Series*, vol. **37**(4), 2010, 74-84.
- [158] Mitroi-Symeonidis, Fl. C., Minculete, N., On the Jensen functional and superquadraticity, *Aequationes Mathematicae*, August 2016, Volume 90, [Issue 4](#), pp 705–718
- [159] Mitroi-Symeonidis, Fl. C., Minculete, N., [On the Jensen Functional and Strong Convexity](#), *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1-9, 2016.

- [160] Mitroi, F.-C., Estimating the normalized Jensen functional. *J. Math. Inequal.* **5**(4), 2011, 507–521.
- [161] Mitroi, F. C., Minculete, N., Mathematical inequalities for biparametric extended information measures, *J. Math. Inequal.*, vol. **7**, No. **1** (2013), 63-71.
- [162] Moslehian, M. S., Dadipour, F., Rajić, R., Marić, A., A glimpse at the Dunkl-Williams inequality, *Banach J. Math. Anal.*, **5**, 2011, 138-151.
- [163] Moradi, H. R., Furuichi, S., Minculete, N., Estimates for Tsallis relative operator entropy, *accepted for publishing in Mathematical Inequalities & Applications 2017*.
- [164] Mortici, C., A new refinement of the Radon inequality, *Math. Commun.*, **16**, 2011, 319-324.
- [165] Niculescu, C. P., Persson, L.-E., Old and new on the Hermite-Hadamard inequality, *Real Analysis Exchange*, vol. **29**(2), 2003/2004, pp. 663-685.
- [166] Niculescu, C. P., Persson, L.-E., *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, Vol. **23**, Springer-Verlag, NewYork, 2006.
- [167] Niculescu, C. P., *Inequalities and Identities. A Journey into Mathematics.*, Mostar, November 11-15, 2015.
- [168] Niezgoda, M., Sherman, Hermite-Hadamard and Fejér like Inequalities for Convex Sequences and Nondecreasing Convex Functions, *Filomat* **31**:8 (2017), 2321–2335.
- [169] Niezgoda, M., Inequalities for convex sequences and nondecreasing convex functions, *Aequationes mathematicae*, Vol. **91**, Issue **1**, 2017, 1-20.
- [170] Nikodem, K., Páles, Zs., On t-Convex Functions, *Real Analysis Exchange*, **29**(1), 2003/2004, 219-228.
- [171] Ostrowski, A., *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*, Vol. **2**, Birkhauser, Basel, 1951.
- [172] Ostrowski, A. Über die Absolutabweichung einer differenzierbaren Funktion von ihrem Integalmittelwert, *Comment. Math. Helv.* **10** (1938), 226-227 (German).
- [173] Pachpatte, B., *Mathematical Inequalities*, Elsevier, 2005.
- [174] Pečarić, J., On the Ostrowski Generalization of Čebyšev's Inequality, *J. Math. Anal. Appl.* **102** (1984), 479-487.
- [175] Pečarić, J., Some further remarks on the Ostrowski Generalization of Čebyšev's Inequality. *J. Math. Anal. Appl.* **123** (1987), 18-33.

- [176] Pečarić, J., Proschan, F., Tong, Y. L., *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Mathematics in Science and Engineering*, 187 Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.
- [177] Pečarić, J., Perić, J., Remarks on the paper “Jensen’s inequality and new entropy bounds” of S. Simić, *J. Math. Inequal.*, 6(4), 2012, 631-636.
- [178] Pečarić, J., Rajić, R., The Dunkl-Williams equality in pre-Hilbert C^* -modules. *Lin. Algebra Appl.*, **425** (2007). 16-25.
- [179] Pečarić, J., Beesack P.R., On Jessen’s inequality for convex functions II, *J. Math. Anal. Appl.* (118) 1, (1986), 125-144.
- [180] Pedersen, G. K., Some operator monotone functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 36, pp. 309–310, 1972.
- [181] Peng, G.-H., Miao, Y., A note on Gruss type inequality, *Appl. Math. Sci.* 3(8), 2009, 399-402.
- [182] Polyak, B.T., Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, *Soviet. Math. Dokl.* **7**, 1966, 72–75.
- [183] Popa, D, Raşa, I., Inequalities involving the inner product, *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **8** (3) (2007), Article 86, 4 pp.
- [184] Popoviciu, T., Sur Les Equations Algebriques Avant Toutes Leurs Racines Reelles, *Mathematica*, 9, 1935, 129-145.
- [185] Precupanu, T, On a generalisation of Cauchy-Buniakowski-Schwarz inequality, *Anal. St. Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi*, **22**(2) (1976), 173-175.
- [186] Pusz, W., Woronowicz, S. L., Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, *Reports on Mathematical Physics*, vol. 8, no. 2, pp. 159–170, 1975.
- [187] Rajba, T., Wasowicz, Sz., Probabilistic characterization of strong convexity, *Opusc. Math.*, **31**(1), 2011, 97–103.
- [188] Rajić, R, Characterization of the norm triangle equality in pre-Hilbert C^* -modules and applications, *J. Math. Inequal.*, 3, 2009, 347-355.
- [189] Raţiu, A., Minculete, N., Several refinements and counterparts of Radon's inequality, *Mathematica Bohemica*, Vol.**140**, No. 1, 2015, 71-82.
- [190] Redheffer, R.M., Recurrent inequalities, *Proc. London Math. Soc.* (3) **17** (1967), 683–699.
- [191] Rényi, A., On measures of entropy and information. In: *Proc. 4th Berkeley Symp., Mathematical and Statistical Probability*, vol. 1, 1961, 547-561.

- [192] Richard, U., *Sur des in égalités du type Wirtinger et leurs application aux équationnes diffrentielles ordinaires*, Colloquium of Anaysis held in Rio de Janeiro, (1972), 233–244.
- [193] Rusu, M. D., On Gruss-type inequalities for positive linear operators, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.* 56, 2011, 551-565.
- [194] Sababheh, M., Moslehian, M., S., Advanced refinements of Young and Heinz inequalities, *J. Number Theory*, 172, 2017, 178-199.
- [195] Sano, H, Mineno, K, Hirota, Y, Izawa, S, Kimura, C, Ohwada, T: Characterization of the intermediate values of the triangle inequality III. *J. Nonlinear Convex Anal.* 17, 2016, 297-310.
- [196] Specht, W., Zur Theorie der elementaren Mittel, *Math. Z.*, 74 (1960), 91–98.
- [197] Stoica, E., Minculete, N., Barbu, C., New aspects of Ionescu–Weitzenbock’s inequality, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol. 21, No. 2, 2016, 95-101.
- [198] Sun, L.-H., Li, G.-X., Ficek, Z. Continuous variables approach to entanglement creation and processing, *Appl. Math. Inf. Sci.* 4, 2010, 315-339.
- [199] Tapia, R. A., A characterization of inner product spaces, *Proc. Am. Math. Soc.* 41, 1973, 569-574.
- [200] Tominaga, M., Specht’s ratio in the Young inequality, *Sci. Math. Japon.*, 55 (2002), 538–588.
- [201] Tsallis, C., Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J. Stat. Phys.*, 52 (1988), 479–487.
- [202] Tsallis, C., et al.: In: Abe, S, Okamoto, Y (eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*, Springer, Berlin, 2001.
- [203] Tsallis, C., *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*, Springer, Berlin, 2009.
- [204] Tsallis, C., Entropy. In: *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, Berlin, 2009.
- [205] Vasić, P. M., Lacković, I. B., Some complements to the paper: On an inequality for convex functions, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotech. Fak. Ser. Mat. Fiz.* No. 461-497 (1974), pp. 63-66; *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* (1976), no. 544-576, pp. 59-62.
- [206] Witkowski, A., On Young’s Inequality, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.* 7(5) Art. 164, 2006.
- [207] Yanagi, K., Kuriyama, K., Furuichi, S., Generalized Shannon inequalities

based on Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra Appl.*, **394** (2005), 109–118.

[208] Young, W. H., On classes of summable functions and their Fourier series, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 87 (1912), 225-229.

[209] Zhao, J., Wu, J., Operator inequalities involving improved Young and its reverse inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 421, 2015, 1779-1789.

[210] Zitikis, R., Gruss's inequality, its probabilistic interpretation, and a sharper bound, *J. Math. Inequal.* 3(1), 2009, 15-20.

[211] Zuo, G., Shi, G., and Fujii, M., Refined Young inequality with Kantorovich constant, *J. Math. Inequal.* 5 (2011), 551–556.

