UNIVERSITATEA "TRANSILVANIA" DIN BRAŞOV
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

FIBRATUL OLOMORF AL JETURILOR DE ORDIN DOI

TEZĂ DE DOCTORAT
REZUMAT

THE HOLOMORPHIC JET BUNDLES OF ORDER TWO

PHD THESIS
ABSTRACT

AUTOR: **Violeta Zaluţchi**

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC
Prof. Univ. Dr. **Gheorghe MUNTEANU**

Braşov
2013

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
Universitatea "Transilvania" din Braşov
Bd. Eroilor 29, 500036, Braşov, Romania,
Tel/Fax: +40 268 410525, +40 268 412088
www.unitbv.ro

D-lui (D-nei) ....

COMPONENŢA
Comisiei de doctorat
Numită prin ordinul Rectorului Universităţii "Transilvania" din Braşov
Nr. 6086 din 17.10.2013

PREŞEDINTE:	- Prof. univ. dr. Marin MARIN DECAN Facultatea de Matematică şi Informatică Universitatea "Transilvania" din Braşov
CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC:	- Prof. univ. dr. Gheorghe MUNTEANU Universitatea "Transilvania" din Braşov
REFERENŢI:	- Prof. univ. dr. Ion BUCĂTARU Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi - Prof. univ. dr. Ion MIHAI Universitatea din Bucureşti - Prof. univ. dr. Gheorghe PITIŞ Universitatea "Transilvania" din Braşov

Data, ora şi locul susţinerii publice a tezei de doctorat: 07.12.2013, ora 11:00, sala PP6, Facultatea de Matematică şi Informatică, Strada Iuliu Maniu nr.50.

Eventualele aprecieri sau observaţii asupra conţinutului lucrării vă rugăm să le transmiteţi în timp util, pe adresa zalvio@yahoo.com.

Totodată vă invităm să luaţi parte la şedinţa publică a tezei de doctorat.

Vă mulţumim.

Cuprins

Introducere **ii**

1 Fibrate de jeturi peste o varietate complexă **1**

2 Geometria fibratului olomorf $J^{(2,0)}M$ **8**

3 Probleme variaţionale pe fibrate olomorfe de ordin doi **23**

Bibliografie **32**

Rezumat **38**

Curriculum vitae **40**

TABLE OF CONTENTS

Introduction

1. Jets bundle over a complex manifold 1

2. The geometry of the holomorphic fiber bundle $J^{(2,0)}M$ 8

3. Variational problems over holomorphic first order fiber bundle 23

References 32

Summary (in English and Romanian) 38

Curriculum vitae (in English and Romanian) 40

Introducere

Prin această teză de doctorat intitulată "FIBRATUL OLOMORF AL JETURILOR DE ORDIN DOI" dorim să aducem rezultate noi privind geometria jeturilor de ordin doi, de funcţii olomorfe.

În matematică, noţiunea de jet este legată de dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii. Din punctul de vedere al geometriei, funcţiile care au aceeaşi dezvoltare în serie Taylor până la un ordin k, în fiecare punct al unei varietăţi, se structurează ca un spaţiu fibrat, numit şi fibrat de jeturi. Noţiunea este atribuită lui Ch. Ehresmann, [27], 1953, deşi ideea apare şi la E. Cartan în metoda prelungirii. Rezultate remarcabile în teoria fibratelor de jeturi au fost obţinute ulterior de P. Libermann, P. Saunders, M. Crampin, W. Sarlet, P. Cantrajin ([36],[63],[25]) şi mai recent de către M. de Leon, I. Kolar si D. Krupka ([35],[32],[33]). Fibratul jeturilor de ordinul întâi coincide cu fibratul tangent al varietăţii.

Noţiunea de spaţiu fibrat este una de geometrie diferenţială, dar suportul său este unul de mecanica sistemelor dependente de un parametru timp. Probleme importante în mecanica sistemelor Lagrange de ordin superior au impulsionat studiul geometriei fibratului jeturilor de ordin superior, el constituind suportul natural al acestor teorii din mecanică. Teoria jeturilor de ordin superior a fost extinsă în ultimele decade la teorii clasice de câmp şi mai recent la teorii cuantice de câmp, ([62]). Din câte se cunoaşte, o bună parte din mecanica cuantică utilizează un aparat matematic ce se referă la variabile complexe. Acesta este un motiv pentru care studiul jeturilor de funcţii olomorfe prezintă un interes aparte şi merită toată atenţia.

Considerăm că fibratul jeturilor de ordin k (numit şi *fibratul osculator de ordin* k) capătă o semnificaţie geometrică deosebită dacă pe el este definită o metrică dedusă dintr-un Lagrangian regulat de ordin k. Ideea a fost dezvoltată cu deosebit succes de către Acad. R. Miron şi colaboratori ai domniei sale (M. Anastasiei, G. Atanasiu, V. Blanuţă, I. Bucătaru, M. Crâşmăreanu, D. Hrimiuc, T. Kawaguchi, I. Maşca, M. Roman, S. Sabău, H. Shimada, s.a.) la începutul anilor '90 şi ulterior, geometria obţinută numindu-se *Geometrie*

Lagrange de ordin superior. Geometria Lagrange de ordin superior cunoaşte astăzi o recunoaştere de sine, în ea fiind cunoscute rezultate semnificative: [42, 43, 12, 13, 14, 19, 20, 22, 60, 18], etc. Putem afirma că germenii acestei geometrii se pot găsi în lucrarea Prof. G. Munteanu din 1988, [51], continuată apoi în [52].

Noţiunea de ”fibrat de jeturi olomorf” a fost introdusă prima dată de către M. Green şi P. Griffiths, [28], cu scopul de a obţine o filtrare naturală a fasciculului $k-$ jeturilor diferenţiale de funcţii complexe. Sunt cunoscute două structuri diferite de fibrate jeturi de funcţii complexe. Conform lui P-M. Wong şi W. Stoll, [65], prima structură se numeşte *fibratul total de jeturi*, (şi coincide cu fibratul olomorf de ordin k), iar cea de-a doua se numeşte *fibratul de jeturi parametrizat*, care are o anumită semnificaţie geometrică pe care o să o schiţăm în mod special.

În lucrările [23, 65, 80] sunt studiate problemele geometriei algebrice pentru fibratul de jeturi olomorf. Fibratul de jeturi olomorf are o structură naturală de varietate complexă a cărui spaţiu total reprezintă obiectul de studiu al acestei teze. În studiul său vom folosi tehnici asemănătoare cu cele utilizate în cazul real pentru fibratul $k-$ osculator, ([42, 43, 19, 60, 18]).

Ne vom ocupa cu precădere de fibratul jeturilor de ordin doi, dar lucrurile se pot generaliza la jeturi de ordin k.

*

*   *

În încheiere, aş dori să-mi exprim profunda recunostinţă şi preţuire domnului Prof. dr. Gheorghe Munteanu, conducătorul ştiinţific al acestei Teze, pentru încrederea investită, pentru încurajările, răbdarea dovedită şi mai ales pentru discuţiile extrem de utile de care am beneficiat pe toată perioada activităţii mele de doctorand.

Doresc să mulţumesc domnului Prof. dr. Ion Mihai pentru competenta orientare şi amabilitatea pe care a avut-o în perioada de pregătire a tezei.

Doresc să mulţumesc în mod deosebit domnilor Prof. dr. Emil Stoica şi Prof. dr. Gheorghe Pitiş pentru atenţia şi amabilitatea oferite analizând lucrările mele premergătoare tezei, sugerându-mi noi direcţii de studiu.

Doresc să mulţumesc doamnelor Lect. dr. Nicoleta Aldea şi Lect. dr. Adelina Manea pentru sprijinul şi valoroasele sugestii acordate în procesul de elaborare a tezei.

Doresc să mulţumesc doamnei Lector dr. Adela Mihai pentru sprijinul permanent pe care mi l-a acordat şi vasta bibliografie pusă la dispoziţie.

Aş dori să adresez sincere mulţumiri tuturor profesorilor Facultăţii de Matematică - Informatică din cadrul Universităţii "Transilvania" care au contribuit la îmbogăţirea bagajului meu ştiinţific.

Aduc sincera mea recunoştinţă şcolii de geometrie de la Iaşi, Acad. R. Miron, Prof. M. Anastasiei, Prof. I. Bucătaru, pentru modul cum m-au primit cu diverse ocazii şi pentru faptul că lucrările domniilor lor au constituit sursa de inspiraţie în elaborarea tezei.

Doresc să mulţumesc soţului şi fiului meu pentru înţelegerea, răbdarea şi sprijinul pe care mi le-au dat.

Capitolul 1

Fibrate de jeturi peste o varietate complexă

Capitolul I are un caracter monografic. Acest capitol este dedicat prezentării noţiunilor fundamentale care stau la baza următoarelor capitole. Primele două secţiuni prezintă noţiuni generale despre jeturi de funcţii complexe, contribuţiile originale apar în secţiunea a treia, unde sunt prezentate câteva rezultate cuprinse în [71]. Menţionăm rezultatele obţinute de M. Green şi P. Griffiths, W. Stoll, K. Chandler şi P-M. Wong, privind fibrate de jeturi pe varietăţi complexe.

Secţiunea 1.1 are ca subiect geometria fibratului total şi cea a fibratului parametrizat al jeturilor de curbe olomorfe. Prezentăm fasciculul germenilor câmpurilor vectoriale tangente olomorfe.

Definiţia 1. *[65] Fie M o varietate complexă de dimensiune n. Fasciculul germenilor de k- jeturi olomorfe (operatori diferenţiali de ordin k), notat cu T^kM, este un subfascicul al fasciculului homomorfismelor $Hom_{\mathbf{C}}(O_M, O_M)$ reprezentat prin elemente (operatori diferenţiali) de forma:*

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i_j \in N} D_{i_1} \circ ... \circ D_{i_j}$$

unde $D_{i_j} \in T^1M$.

Un element din T^kM este exprimat în coordonatele olomorfe $z^1, ..., z^n$ astfel:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_j \leq n} a_{i_1, ..., i_j} \frac{\partial^j}{\partial z^{i_1} ... \partial z^{i_j}}$$

unde coeficienţii $a_{i_1},...,_{i_j}$ sunt funcţii olomorfe.

Schimbarea olomorfă de coordonate din $z = (z^1, ..., z^n)$ în $\omega = (\omega^1, ..., \omega^n)$ este dată de funcţia de trecere (pentru $k = 2$):

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{1\leq i\leq n} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^k}\right)_{1\leq i\leq k\leq n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \omega^j}\right)_{1\leq j\leq n} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \omega^j \partial \omega^l}\right)_{1\leq j\leq l\leq n} \end{pmatrix},$$

unde A este o matrice $n \times n$:

$$A = \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial z^i}\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

B şi C sunt matricele

$$B = \left(\frac{\partial^2 \omega^j}{\partial z^i \partial z^k}\right)_{1\leq i\leq k\leq n} \quad ; \quad C = \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial z^i}\frac{\partial \omega^l}{\partial z^k}\right)_{1\leq i\leq k\leq n, 1\leq j\leq l\leq n}$$

în număr de $C^2_{n+1} \times n$, respectiv $C^2_{n+1} \times C^2_{n+1}$, unde $C^2_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}$ este coeficientul binomial.

Din injecţia lui $T^{k-1}M$ în T^kM şi din existenţa şirului exact de fascicule:

$$0 \to T^{k-1}M \to T^kM \to T^kM/T^{k-1}M \to 0,$$

unde

$$T^kM/T^{k-1}M \cong \odot^k T^1M$$

este fasciculul de germeni al k- produsului direct al lui T^1M, adică fasciculul de germeni al operatorilor de forma:

$$\sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_j\leq n} a_{i_1},...,_{i_j} \frac{\partial^k}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_k}},$$

se obţine că T^kM este fibrat local trivial (spaţiu fibrat vectorial), numit *fibratul total al k-jeturilor*, [65].

Propoziţia 1. *[65] Pentru spaţiul fibrat cât avem izomorfismul:*

$$T^kM/T^{k-1}M \cong \odot^k T^1M$$

unde $\odot^k T^1M$ este k- produsul simetric direct al fibratului tangent.

Definiţia 2. *[28] Fibratul k-jeturilor parametrizat este definit ca fiind J^kM împreună cu $\mathbf{C}^*$-acţiunea definită mai sus şi va fi notat tot cu J^kM.*

Teorema 1. *[65] Fie M o varietate complexă de dimensiune n. Atunci T^kM este un fibrat vectorial olomorf de rang $r = n + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^3 + ... + C_{n+k-1}^k = \sum_{i=1}^k C_{n+i-1}^i$ în timp ce, J^kM este un $\mathbf{C}^*$-fibrat olomorf de rang $r = kn$ iar secţiunea nulă a lui J^kM este bine definită.*

Nu există nici o incluziune trivială a lui $J^{k-1}M$ în J^kM, dar observăm că există o proiecţie naturală $p_{kj} : J^kM \to J^jM$, $\forall j \leq k$ definită astfel

$$p_{kj}\left(j^k f(0)\right) = j^j f(0). \tag{1.1}$$

Această proiecţie respectă $\mathbf{C}^*$-acţiunea definită de relaţia

$$\lambda \cdot j^k f(0) = \left(f(0), \lambda f'(0), ..., \lambda^k f^{(k)}(0)\right) \tag{1.2}$$

de unde rezultă că ea este un $\mathbf{C}^*$-morfism de fibrate, [65].

Definiţia 3. *[65] Prin dualul fibratului total al jeturilor T^kM înţelegem fasciculul germenilor formelor $k-$ jet şi se notează cu T_k^*M. Secţiunile globale sunt formele $k-$ jet. Pentru un $m \in \mathbf{N}$ notăm cu $\odot^m T_k^*M$ $m-$produsul simetric direct, iar prin secţiuni globale întelegem formele $k-$jet de dimensiune m.*

Dualul şirului $0 \to T^{k-1}M \to T^kM \to T^kM/T^{k-1}M \to 0$ este şirul exact:

$$0 \to \odot^k T_1^*M \to T_k^*M \to T_{k-1}^*M \to 0.$$

În [65] se arată că primul număr Chern este:

Teorema 2. *Primul număr Chern al fibratului $k-$formelor jet este dat de formula:*

$$c_1\left(T_k^*M\right) = \sum_{j=1}^k c_1\left(\odot^j T_1^*M\right).$$

Dacă M este o suprafaţă Riemanniană atunci

$$c_1\left(T_k^*M\right) = \sum_{j=1}^k j c_1\left(T_1^*M\right) = \frac{k(k+1)}{2} c_1\left(\mathcal{K}_M\right) = k(k+1)(g-1)$$

unde $\mathcal{K}_M = T_1^*M$ este fibratul canonic al lui M iar g este genul.

Definiţia 4. *[65] Dualul lui J^kM, adică germenii lui $\omega : j^kM \mid_U \to \mathbf{C}$ care îndeplinesc condiţia $\omega\left(\lambda \cdot j^k f\right) = \lambda^m \omega\left(j^k f\right)$ pentru $m \in \mathbf{N}$, poartă numele de fasciculul germenilor $k-$jeturilor diferenţiale şi este notat cu $\mathcal{J}_k^*M$. Un jet diferenţial ω care îndeplineşte condiţia de omogenitate de mai sus, cu m întreg, se numeşte $k-$jet diferenţial de dimensiune m. $\mathcal{J}_k^mM$ reprezintă fasciculul $k-$jetului diferenţial de dimensiune m.*

În Secţiunea 1.2 am extins fibratul total de jeturi de funcţii olomorfe peste o varietate complexă, urmând idei dezvoltate de D.J. Saunders şi A. Manea, [63, 37]. Pentru mai multă claritate am considerat cazul $k = 2$.

Fie M este o varietate complexă $n-$ dimensională, $(z^1, ..., z^n)$ sistemul de coordonate complexe şi respectiv $(x^1, y^1, ..., x^n, y^n)$ sistemul de coordonate reale unde $z^k = x^k + i \cdot y^k,\ i^2 = -1$.

Spaţiul tangent complexificat $T_C M = T_R M \otimes C$ se descompune în suma directă dintre fibratul tangent olomorf $T^{1,0}M$ şi fibratul tangent antiolomorf $T^{0,1}M$:

$$T_C M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

Într-o hartă locală $(U, (x^1, y^1, ..., x^n, y^n))$ în jurul lui z, $2-$ jetul lui u în z este de forma:

$$\begin{aligned} j^2 u = \frac{\partial u}{\partial x^k}(z) j_z^2 x^k + \frac{\partial u}{\partial y^k}(z) j_z^2 y^k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(z) j_z^2 x^k \cdot j_z^2 x^l + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial y^l}(z) j_z^2 x^k \cdot j_z^2 y^l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^k \partial y^l}(z) j_z^2 y^k \cdot j_z^2 y^l \end{aligned} \tag{1.3}$$

În spaţiul vectorial al 2-jeturilor reale pe M în z avem reperul format din 2-jeturile reale $\left\{ j_z^2 x^k, j_z^2 y^k, j_z^2 x^k \cdot j_z^2 x^l, j_z^2 x^k \cdot j_z^2 y^l, j_z^2 y^k \cdot j_z^2 y^l \right\}$. Mulţimea 2-jeturilor de ordin 2 este notată cu $\mathcal{T}_z^2(M)$. Mulţimea $\mathcal{T}^2(M) =_{z\in M} \cup \mathcal{T}_z^2(M)$ este un fibrat peste M, numit fibratul $2-$*jeturilor reale ale lui* M, conform lui D.J. Saunders, [63]. Secţiunile în acest fibrat se numesc *câmpuri reale ale 2-jeturilor pe* M şi mulţimea acestora este notată cu $\mathcal{T}^2 M$.

Local, câmpul 2- jet al lui u în z are următoarea expresie:

$$\begin{aligned} j^2 u = \frac{\partial u}{\partial x^k} j^2 x^k + \frac{\partial u}{\partial y^k} j^2 y^k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l} j^2 x^k \cdot j^2 x^l + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial y^l} j^2 x^k \cdot j^2 y^l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^k \partial y^l} j^2 y^k \cdot j^2 y^l \end{aligned} \tag{1.4}$$

iar câmpul real al 2- jeturilor pe M este:

$$\begin{aligned} \alpha^2_{\mathbf{R}} = a_k \cdot j^2 x^k + b_k j^2 y^k + \frac{1}{2} a_{kl} \cdot j^2 x^k \cdot j^2 x^l + \\ + c_{kl} \cdot j^2 x^k \cdot j^2 y^l + \frac{1}{2} b_{kl} \cdot j^2 y^k \cdot j^2 y^l \end{aligned} \tag{1.5}$$

unde $a_k,\ b_k,\ a_{kl},\ b_{kl},\ c_{kl}$ sunt funcţii diferenţiabile pe U astfel încât $a_{kl} = a_{lk},\ b_{kl} = b_{lk}$.

Definiţia 5. *[37] Două funcţii complexe $f, g \in \Omega^0(M)$ determină acelaşi 2-jet într-un punct fixat z dacă părţile reale şi cele imaginare determină aceleaşi 2-jeturi reale în z. Dacă $f = u + i \cdot v$, definim*

$$j_z^2 f = j_z^2 u + i \cdot j_z^2 v.$$

În aceste condiţii, obţinem că:

Propoziţia 2. *[37] Dacă $f, g \in \Omega^0(M)$ atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) $j_z^2 f = j_z^2 g$;
b) $f(z) = g(z) = 0$ şi, local, avem că:

$$\frac{\partial f}{\partial z^k}(z) = \frac{\partial g}{\partial z^k}(z), \frac{\partial f}{\partial \overline{z^k}}(z) = \frac{\partial g}{\partial \overline{z^k}}(z), \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial z^l}(z) = \frac{\partial^2 g}{\partial z^k \partial z^l}(z), \tag{1.6}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial \overline{z^l}}(z) = \frac{\partial^2 g}{\partial z^k \partial \overline{z^l}}(z), \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z^k} \partial \overline{z^l}}(z) = \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{z^k} \partial \overline{z^l}}(z),$$

unde $k, l = 1, ..., n$.

Ţinând cont de schimbarea de coordonate reale, de expresiile locale ale lui $j^2 f$ şi ale funcţiilor de coordonate z^k obţinem, conform lui [37], următoarea semnificaţie geometrică:

$$j^{2,0} f = \frac{\partial f}{\partial z^k} j^2 z^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial z^l} j^2 z^k \cdot j^2 z^l, \tag{1.7}$$
$$j^{1,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial \overline{z^l}} j^2 z^k \cdot j^2 \overline{z^l}$$
$$j^{0,2} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z^k}} j^2 \overline{z^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z^k} \partial \overline{z^l}} j^2 \overline{z^k} \cdot j^2 \overline{z^l}.$$

Observaţia 1. *[37] Din relaţiile de mai sus avem relaţia*

$$j^{0,2} f = \overline{j^{2,0} \overline{f}}.$$

Definiţia 6. *[37] Două funcţii $f, g \in \Omega^0(M)$ determină acelaşi*
a) $(2,0)-jet$ în $z \in M$ dacă $f(z) = g(z) = 0$ şi într-o hartă locală complexă avem

$$\frac{\partial f}{\partial z^k} = \frac{\partial g}{\partial z^k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial z^l} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^k \partial z^l};$$

b) $(1,1)-jet$ în $z \in M$ dacă $f(z) = g(z) = 0$ şi într-o hartă locală complexă avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial \overline{z^l}} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^k \partial \overline{z^l}};$$

c) $(0,2)-jet$ *în* $z \in M$ *dacă* $f(z) = g(z) = 0$ *şi într-o hartă locală complexă avem*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z^k}} = \frac{\partial g}{\partial \overline{z^k}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z^k} \partial \overline{z^l}} = \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{z^k} \partial \overline{z^l}};$$

pentru orice $k, l = 1, ..., n$.

Teorema 3. *[37] Fibratul* $\mathcal{T}^2(M)$ *admite următoarea descompunere*

$$\mathcal{T}^2(M) = \mathcal{T}^{2,0}(M) \oplus \mathcal{T}^{1,1}(M) \oplus \mathcal{T}^{0,2}(M). \tag{1.8}$$

În Secţiunea 1.3, intitulată "Fibratul olomorf $J^{(k,0)}M$ pe curbe", punem în evidenţă structura diferenţiabilă a celui de-al doilea tip de fibrat introdus în prima secţiune şi anume $J^{(k,0)}M$. Rezultatele originale au fost publicate în lucrarea [71]. Geometria spaţiului total al lui $J^{(2,0)}M$ este studiată în capitolul următor.

Reamintim că cel de al de-al doilea tip de fibrat olomorf, cel parametrizat, introdus pe curbe de Green şi Griffiths în [28], este pentru jeturile diferenţiale de ordin k. Fie $(z^i), i = \overline{1,n}$ coordonate complexe pe M într-o hartă locală (U, φ) şi (z'^i) coordonate complexe în harta locală (U', φ'), cu $det\frac{\partial z'^i}{\partial z^j} \neq 0$, iar din olomorfie obţinem că $\frac{\partial z'^i}{\partial \bar{z}^j} = 0, \ \ \forall i, j = \overline{1,n}$.

Am notat cu $\mathcal{H}_{z_0}$ germenii de funcţii ce definesc curbe pe M depinzând de parametrul θ, $\mathcal{H}_{z_0} = \{f : \Delta_r \to M, \ f \in \mathcal{H}_{z_0}, \ f(0) = z_0\}$ şi $f^i = z^i \circ f$, $\forall i = \overline{1,n}, \ f \in \mathcal{H}_{z_0}$. Două curbe $f, g \in \mathcal{H}_{z_0}$ sunt echivalente $f \overset{k}{\sim} g$, dacă $f^i(0) = g^i(0)$ şi $\dfrac{d^p f^i}{d\theta^p}(0) = \dfrac{d^p g^i}{d\theta^p}(0)$, $\forall i = \overline{1,n}, \ p = \overline{1,k}$. Clasa lui f este $[f]_{\underset{\sim}{k}}$ şi mulţimea tuturor claselor am notat-o cu $J^{(k,0)}M = \cup_{z_0 \in M} \mathcal{H}_{z_0} / _{\underset{\sim}{k}}$. Prin $j^k f(0) = \left(f(0), \frac{df}{d\theta}(0), ..., \frac{d^p f}{d\theta^p}(0)\right)$ se notează $k-$jetul lui $f \in [f]_{\underset{\sim}{k}}$.

Dacă $\pi^{(k,0)} : J^{(k,0)}M \to M$ este proiecţia canonică, atunci am văzut că $\left(J^{(k,0)}M, \pi^{(k,0)}\right)$ are o structură de spaţiu fibrat care nu este fibrat vectorial, exceptând cazul $k = 1$ când se identifică cu fibratul tangent olomorf $T'M$.

Dacă $c : \Delta_r \to M$ este o curbă olomorfă parametrizată prin $z^i = z^i(\theta)$, $i = \overline{1,n}$, cu $z^i(0) = z_0$ şi $\frac{dz^i}{d\theta}(0) = 0$, atunci $\overset{*}{c}$ dată de:

$$\overset{*}{z^i}(0) = z^i(0) + \frac{dz^i}{d\theta}(0)\theta + \frac{d^2 z^i}{d\theta^2}(0)\frac{\theta^2}{2!} + ... + \frac{d^k z^i}{d\theta^k}(0)\frac{\theta^k}{k!} \tag{1.9}$$

descrie clasa $[f]_{\underset{\sim}{k}}$ dacă $f^i = \overset{*}{z^i} \circ f$.

Este evidenţiată structura de varietate diferenţiabilă a lui $J^{(k,0)}M$. Dacă

$(z^i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt coordonatele complexe în (U, φ) în vecinătatea lui $z \in U$, atunci

$$Z = \left(z^i = z^i(0), \overset{(1)}{\eta^i} = \frac{dz^i}{d\theta}(0), \overset{(2)}{\eta^i} = \frac{1}{2!}\frac{d^2 z^i}{d\theta^2}(0), \ldots.., \overset{(k)}{\eta^i} = \frac{1}{k!}\frac{d^k z^i}{d\theta^k}(0) \right)$$

reprezintă coordonatele complexe în (U, Φ) din $J^{(k,0)}M$. Funcţiile (Z^i) sunt olomorfe.

Mai mult, ţinând cont de condiţia de olomorfie, avem:

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\eta^i} &= \frac{dz^i}{d\theta} \\ \overset{(2)}{\eta^i} &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\overset{(1)}{\eta^i}) = \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{(1)}{\eta^i}}{\partial z^j}\overset{(1)}{\eta^j} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{(k)}{\eta^i} &= \frac{1}{k!}\frac{d}{d\theta}(\overset{(k-1)}{\eta^i}) = \frac{1}{k!}\frac{\partial \overset{(k-1)}{\eta^i}}{\partial z^j}\overset{(1)}{\eta^j}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Capitolul 2

Geometria fibratului olomorf $J^{(2,0)}M$

Capitolul II care cuprinde o bună parte din rezultatele importante ale tezei, acestea fiind conţinute în lucrările [72, 73, 75, 76, 77].

În acest capitol vom studia varietatea complexă $J^{(2,0)}M$ a jeturilor de ordin doi de funcţii olomorfe. Vom folosi idei asemănătoare ca cele utilizate în cazul fibratului real Osc^kM, studiind elementele importante ale acestei geometrii şi anume: fibratul tangent complexificat, descompunerea acestuia utilizând o conexiune neliniară complexă, $N-$ conexiunea liniară complexă, torsiunile şi curburile sale, precum şi ecuaţiile de structură. Studiem noţiunea de spray pe fibratul jeturilor olomorfe de ordin doi $J^{(2,0)}M$ şi legătura acestuia cu conexiunea neliniară complexă.

Conexiunea Chern-Lagrange şi conexiunea canonică au un rol important în studiul geometriei acestui fibrat, conexiuni ce sunt obţinute utilizând metoda variaţională în spaţiul Lagrange complex de ordin doi, pentru care facem un studiu detaliat. Aceste conexiuni atrag atenţia prin simplitatea scrierii lor (spre deosebire de cazul real), dar şi prin proprietăţile lor interesante.

O extindere a ideilor privind fibratul olomorf al jeturilor de ordin doi este cea a fibratelor afine având ca varietate bază fibratul olomorf $T'M$ al unei varietăţi complexe, care în particular conţine fibratul jeturilor olomorfe $J^{(2,0)}M$. Aici elementele introduse anterior au un caracter local. Problema globalizării câmpurilor Liouville, a sprayului complex şi a funcţiilor Lagrange definite local, a conexiunii neliniare, se reduce la anularea anumitor clase în coomologia Cèch.

În Secţiunea 2.1 introducem varietatea olomorfă $J^{(2,0)}M$, unde M este o varietate complexă, $dim_C M = n$, având coordonatele complexe $(z^i)_{i=\overline{1,n}}$. Complexificatul fibratului tangent se descompune astfel $T_C M = T'M \oplus T''M$. $\left\{\frac{\partial}{\partial z^i}\right\}_{i=\overline{1,n}}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\right\}_{i=\overline{1,n}}$, sunt repere locale pentru $T'_z M$, respectiv $T''_z M$.

$T'M$ este un fibrat vectorial olomorf.

O construcţie asemănătoare vom folosi pentru fibratul $T_C(J^{(2,0)}M)$, dar spaţiile corespunzătoare nu au o structură de fibrate vectoriale.

Fie $Z = \left(z^i, \eta^i =: \overset{(1)}{\eta^i}, \zeta^i =: \overset{(2)}{\eta^i}\right)$ coordonatele locale în harta (U, Φ) din $J^{(2,0)}M$.

O bază locală în $T'_Z(J^{(2,0)}M)$ este $\{\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \eta^i}, \frac{\partial}{\partial \zeta^i}\}_{i=\overline{1,n}}$ iar în $T''_Z(J^{(2,0)}M)$ conjugatele acestora $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^i}\}_{i=\overline{1,n}}$. Regulile de schimbare ale bazei locale din $T'_Z(J^{(2,0)}M)$ sunt următoarele:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z^j} &= \frac{\partial z'^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial z'^i} + \frac{\partial \eta'^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial \eta'^i} + \frac{\partial \zeta'^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial \zeta'^i} \\
\frac{\partial}{\partial \eta^j} &= \frac{\partial \eta'^i}{\partial \eta^j}\frac{\partial}{\partial \eta'^i} + \frac{\partial \zeta'^i}{\partial \eta^j}\frac{\partial}{\partial \zeta'^i} \\
\frac{\partial}{\partial \zeta^j} &= \frac{\partial \zeta'^i}{\partial \zeta^j}\frac{\partial}{\partial \zeta'^i}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Pe $T_C(J^{(2,0)}M)$ avem structura complexă naturală $J^2 = -I$ care acţionează astfel:

$$\begin{aligned}
J(\frac{\partial}{\partial z^j}) &= i\frac{\partial}{\partial z^j} \;\; ; \;\; J(\frac{\partial}{\partial \eta^j}) = i\frac{\partial}{\partial \eta^j} \;\; ; \;\; J(\frac{\partial}{\partial \zeta^j}) = i\frac{\partial}{\partial \zeta^j} \\
J(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}) &= -i\frac{\partial}{\partial z^j} \;\; ; \;\; J(\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^j}) = -i\frac{\partial}{\partial \eta^j} \;\; ; \;\; J(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^j}) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^j}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

şi structura aproape tangentă de ordin doi $F^3 = 0$, pentru care

$$F(\frac{\partial}{\partial z^j}) = \frac{\partial}{\partial \eta^j} \;\; ; \;\; F(\frac{\partial}{\partial \eta^j}) = \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \;\; ; \;\; F(\frac{\partial}{\partial \zeta^j}) = 0 \tag{2.3}$$

şi formulele analoage pentru conjugate.

Definiţia 7. *O conexiune neliniară complexă pe $J^{(2,0)}M$, notată (c.n.c.), este un subfibrat complex $H(J^{(2,0)}M)$, suplementar lui $W(J^{(2,0)}M)$ în $T'(J^{(2,0)}M)$.*

Obţinem că:

$$T_C(J^{(2,0)}M) = H(J^{(2,0)}M) \oplus W(J^{(2,0)}M) \oplus \overline{H}(J^{(2,0)}M) \oplus \overline{W}(J^{(2,0)}M). \tag{2.4}$$

$\pi^{(2,0)} : J^{(2,0)}M \to M$ are o structură de spaţiu fibrat peste $J^{(2,0)}M$ şi este identificat cu $T'M$. Fie $\pi^{*(2,0)}M$ fibratul imagine inversă al lui $T'M$ în $T'(J^{(2,0)}M)$. Secţiunile lui $\pi^{*(2,0)}M$ sunt identificate cu vectorii lui $T'(J^{(2,0)}M)$ de forma $\left\{\frac{\partial}{\partial z^j}\right\}$. Notăm cu $l^h : T'M \to H(J^{(2,0)}M) \subset T'(J^{(2,0)}M)$ izomorfismul care realizează egalitatea $\pi^{*(2,0)} \circ l^h = Id_{T'M}$.

Propoziţia 3. *Obţinem următorul şir exact:*

$$0 \to W(J^{(2,0)}M) \xrightarrow{i} T'(J^{(2,0)}M) \xrightarrow{p} \pi^{*(2,0)}M \to 0.$$

O scindare $\mathcal{C}$ în acest şir determină o (c.n.c.) pe $J^{(2,0)}M$ şi $Ker\ \mathcal{C} = H(J^{2,0)}M)$, iar vectorii $\left\{\frac{\delta}{\delta z^i} =: l^h(\frac{\partial}{\partial z^i})\right\}_{i=\overline{1,n}}$ determină o bază locală în fibratul orizontal $H(J^{(2,0)}M)$, purtând numele de *bază adaptată* a (c.n.c).

Teorema 4. *Funcţiile* $\overset{(1)}{N}{}^i_j, \overset{(2)}{N}{}^i_j$*, numite coeficienţii (c.n.c.), se schimbă după regulile:*

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{N'}{}^i_k \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} &= \frac{\partial z'^i}{\partial z^k}\overset{(1)}{N}{}^k_j - \frac{\partial \eta'^i}{\partial z^j} \\ \overset{(2)}{N'}{}^i_k \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} &= \frac{\partial z'^i}{\partial z^k}\overset{(2)}{N}{}^k_j + \frac{\partial \eta'^i}{\partial z^k}\overset{(1)}{N}{}^k_j - \frac{\partial \zeta'^i}{\partial z^j}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Utilizând o (c.n.c.) obţinem baza adaptată $\{\frac{\delta}{\delta z^i}, \frac{\delta}{\delta \eta^i}, \frac{\partial}{\partial \zeta^i}\}_{i=\overline{1,n}}$ şi duala acesteia $\{dz^i, \delta\eta^i, \delta\zeta^i\}_{i=\overline{1,n}}$. Dacă considerăm $\delta\eta^i = d\eta^i + \overset{(1)}{M}{}^i_j dz^j$ şi $\delta\zeta^i = d\zeta^i + \overset{(1)}{M}{}^i_j d\eta^j + \overset{(2)}{M}{}^i_j dz^j$, atunci obţinem că:

Propoziţia 4. $\overset{(1)}{M}{}^i_j = \overset{(1)}{N}{}^i_j$ *şi* $\overset{(2)}{M}{}^i_j = \overset{(2)}{N}{}^i_j + \overset{(1)}{N}{}^i_k \overset{(1)}{N}{}^k_j$*, unde* $\overset{(1)}{M}{}^i_j$ *şi* $\overset{(2)}{M}{}^i_j$ *se schimbă după următoarele reguli:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'^i}{\partial z^k}\overset{(1)}{M}{}^k_j &= \overset{(1)}{M'}{}^i_k \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} + \frac{\partial \eta'^i}{\partial z^j} \\ \frac{\partial z'^i}{\partial z^k}\overset{(2)}{M}{}^k_j &= \overset{(2)}{M'}{}^i_k \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} + \overset{(1)}{M'}{}^i_k \frac{\partial \eta'^k}{\partial z^j} + \frac{\partial \zeta'^{\,i}}{\partial z^j}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Propoziţia 5. *Croşetele bazei adaptate ale (c.n.c) sunt date de formulele:*

$$
\begin{aligned}
[\delta_{0j}, \delta_{0k}] &= \overset{(1)}{A}{}^{i}_{(jk)}\delta_{1i} + \overset{(2)}{A}{}^{i}_{(jk)}\delta_{2i} + \overset{(1)}{A}{}^{m}_{(jk)}\overset{(1)}{N}{}^{i}_{m}\delta_{2i}\\
\textit{unde } \overset{(\alpha)}{A}{}^{i}_{(jk)} &= \overset{(\alpha)}{A}{}^{i}_{jk} - \overset{(\alpha)}{A}{}^{i}_{kj} := \delta_{0k}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{j} - \delta_{0j}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{k}\\
[\delta_{0j}, \delta_{0\bar{k}}] &= \overset{(1)}{A}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{1i} - \overset{(1)}{A}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}j}\delta_{1\bar{i}} + \overset{(2)}{A}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{2i} + \overset{(1)}{A}{}^{m}_{j\bar{k}}\overset{(1)}{N}{}^{i}_{m}\delta_{2i} - \overset{(2)}{A}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}j}\delta_{2\bar{i}} - \overset{(1)}{A}{}^{\bar{m}}_{\bar{k}j}\overset{(1)}{N}{}^{\bar{i}}_{\bar{m}}\delta_{2\bar{i}}\\
\textit{unde } \overset{(\alpha)}{A}{}^{i}_{j\bar{k}} : &= \delta_{0\bar{k}}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{j}\ ;\ \overset{(\alpha)}{A}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = \overline{\overset{(\alpha)}{A}{}^{i}_{j\bar{k}}}\\
[\delta_{0j}, \delta_{1k}] &= -\overset{(1)}{A}{}^{i}_{kj}\delta_{2i} + \overset{(1)}{B}{}^{i}_{jk}\delta_{1i} + \overset{(2)}{B}{}^{i}_{jk}\delta_{2i} + \overset{(1)}{B}{}^{m}_{jk}\overset{(1)}{N}{}^{i}_{m}\delta_{2i}\\
\textit{unde } \overset{(\alpha)}{B}{}^{i}_{jk} : &= \delta_{1k}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{j}\ ;\ \alpha = 1, 2\\
[\delta_{0j}, \delta_{1\bar{k}}] &= -\overset{(1)}{A}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}j}\delta_{2\bar{i}} + \overset{(1)}{B}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{1i} + \overset{(2)}{B}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{2i} + \overset{(1)}{B}{}^{m}_{j\bar{k}}\overset{(1)}{N}{}^{i}_{m}\delta_{2i} \textit{ unde } \overset{(\alpha)}{B}{}^{i}_{j\bar{k}} := \delta_{1\bar{k}}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{j}\\
[\delta_{0j}, \delta_{2k}] &= \overset{(1)}{C}{}^{i}_{jk}\delta_{1i} + \overset{(2)}{C}{}^{i}_{jk}\delta_{2i} + \overset{(1)}{C}{}^{m}_{jk}\overset{(1)}{N}{}^{i}_{m}\delta_{2i} \textit{ unde } \overset{(\alpha)}{C}{}^{i}_{jk} := \delta_{2k}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{j}\\
[\delta_{0j}, \delta_{2\bar{k}}] &= \overset{(1)}{C}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{1i} + \overset{(2)}{C}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{2i} + +\overset{(1)}{C}{}^{m}_{j\bar{k}}\overset{(1)}{N}{}^{i}_{m}\delta_{2i} \textit{ unde } \overset{(\alpha)}{C}{}^{i}_{j\bar{k}} := \delta_{2\bar{k}}\overset{(\alpha)}{N}{}^{i}_{j}\\
[\delta_{1j}, \delta_{1k}] &= \overset{(1)}{B}{}^{i}_{(jk)}\delta_{2i} := (\overset{(1)}{B}{}^{i}_{jk} - \overset{(1)}{B}{}^{i}_{kj})\delta_{2i}\\
[\delta_{1j}, \delta_{1\bar{k}}] &= \overset{(1)}{B}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{2i} - \overset{(1)}{B}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}j}\delta_{2\bar{i}}\\
[\delta_{1j}, \delta_{2k}] &= \overset{(1)}{C}{}^{i}_{jk}\delta_{2i}\ ;\ [\delta_{1j}, \delta_{2\bar{k}}] = \overset{(1)}{C}{}^{i}_{j\bar{k}}\delta_{2\imath}\\
[\delta_{2j}, \delta_{2k}] &= 0\ ;\ [\delta_{2j}, \delta_{2\bar{k}}] = 0.
\end{aligned}
$$

Se consideră structura tangentă reciprocă F^*.

Propoziţia 6. *F^* este o structură aproape tangentă de ordin doi bine definită, $F^{*3} = 0$, iar restricţia sa la $T'(J^{(2,0)}M)$ satisface relaţiile:*

i) $F^*h = 0,\ FF^* = v + h_1\ ;\ FF^* = h + h_1\ ;$

ii) $vF^* = 0\ ;\ F^*h = 0\ ;\ (h_1 + v)F^{*2} = 0\ ;$

iii) $F^2F^* = vF\ ;\ F^{*2}F = hF^*\ ;\ F^2F^{*2} = v\ ;\ F^{*2}F^2 = h.$

Propoziţia 7. *D este o $d-$(c.l.c.) dacă şi numai dacă $DJ = 0$ şi $Dh = Dh_1 = Dv = D\bar{h} = D\bar{h}_1 = D\bar{v} = 0$.*

Teorema 5. *D este o $N-$(c.l.c) dacă şi numai dacă* $DJ = DF = DF^{*} = 0$.

Propoziţia 8. *Pentru orice N -(c.l.c.) D, tensorul curburii* $\mathbf{R}$ *satisface relaţiile:*

i) $F\left[R\left(X,Y\right)Z\right] = R\left(X,Y\right)\left(FZ\right)$

ii) $F^{2}\left[R\left(X,Y\right)Z\right] = R\left(X,Y\right)\left(F^{2}Z\right),\ \forall\ \ X,Y,Z \in \mathcal{X}\left(J^{(2,0)}M\right).$

Propoziţia 9. *Tensorul curburii* $\mathbf{R}$ *a N -(c.l.c.) D are proprietăţile*

$$\begin{aligned}
vR\left(X,Y\right)Z^{H} &= 0;\ h_1R\left(X,Y\right)Z^{H} = 0\ ;\ vR\left(X,Y\right)Z^{H_1} = 0\ ;\\
hR\left(X,Y\right)Z^{H_1} &= 0\ ;hR\left(X,Y\right)Z^{V} = 0\ ;\ h_1R\left(X,Y\right)Z^{V} = 0\ ;\\
hR\left(X,Y\right)Z^{\overline{H}} &= 0\ ;\ \overline{h}R\left(X,Y\right)Z^{H} = 0\ ;h_1R\left(X,Y\right)Z^{\overline{H}_1} = 0\ ;\\
\overline{h}_1R\left(X,Y\right)Z^{H_1} &= 0\ ;vR\left(X,Y\right)Z^{\overline{V}} = 0\ ;\overline{v}R\left(X,Y\right)Z^{V} = 0;\\
\overline{v}R\left(X,Y\right)Z^{H} &= 0\ ;\ \overline{v}R\left(X,Y\right)Z^{H_1} = 0\ ;\ \overline{v}R\left(X,Y\right)Z^{\overline{H}} = 0\ ;\\
\overline{v}R\left(X,Y\right)Z^{\overline{H}_1} &= 0\ ;\overline{h}R\left(X,Y\right)Z^{\overline{V}} = 0\ ;\ \overline{h}R\left(X,Y\right)Z^{\overline{H}_1} = 0\ ;\\
\overline{h}_1R\left(X,Y\right)Z^{\overline{H}} &= 0\ ;\ \overline{h}_1R\left(X,Y\right)Z^{\overline{V}} = 0\ ;\overline{h}R\left(X,Y\right)Z^{H_1} = 0\ ;\\
\overline{h}R\left(X,Y\right)Z^{V} &= 0\ ;\ \overline{h}_1R\left(X,Y\right)Z^{H} = 0\ ;\ \overline{h}_1R\left(X,Y\right)Z^{V} = 0.
\end{aligned}$$

Propoziţia 10. *Componentele nenule ale tensorului de curbură ale N -(c.l.c) D sunt:*

$$\begin{aligned}
R(\delta_{0m},\delta_{0j})\delta_{\alpha h} &= R^{i}_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;R(\delta_{0m},\delta_{0j})\delta_{\alpha\overline{h}} = R^{\bar{i}}_{\overline{h}jm}\delta_{\alpha\bar{i}}\ ;\\
R(\delta_{0m},\delta_{0\bar{j}})\delta_{\alpha h} &= R^{i}_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i};R(\delta_{\beta m},\delta_{0j})\delta_{\alpha h} = \overset{(\beta)}{P}{}^{i}_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
R(\delta_{\beta m},\delta_{0j})\delta_{\alpha\overline{h}} &= \overset{(\beta)}{P}{}^{\bar{i}}_{\overline{h}jm}\delta_{\alpha\bar{i}}\ ;R(\delta_{\beta m},\delta_{0\bar{j}})\delta_{\alpha h} = \overset{(\beta)}{P}{}^{i}_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i};\\
R(\delta_{\beta m},\delta_{0\bar{j}})\delta_{\alpha\overline{h}} &= \overset{(\beta)}{Q}{}^{\bar{i}}_{\overline{h}\bar{j}m}\delta_{\alpha\bar{i}}\ ;\ R(\delta_{1m},\delta_{1j})\delta_{\alpha h} = S^{i}_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
R(\delta_{1m},\delta_{1j})\delta_{\alpha\overline{h}} &= S^{\bar{i}}_{\overline{h}jm}\delta_{\alpha\bar{i}}\ ;\ R(\delta_{1m},\delta_{1\bar{j}})\delta_{\alpha h} = S^{i}_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\\
R(\delta_{2m},\delta_{2j})\delta_{\alpha h} &= O^{i}_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\ R(\delta_{2m},\delta_{2j})\delta_{\alpha\overline{h}} = O^{\bar{i}}_{\overline{h}jm}\delta_{\alpha\bar{i}};\\
R(\delta_{2m},\delta_{2\bar{j}})\delta_{\alpha h} &= O^{i}_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\ R(\delta_{2m},\delta_{1j})\delta_{\alpha h} = G^{i}_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
R(\delta_{2m},\delta_{1j})\delta_{\alpha\overline{h}} &= G^{\bar{i}}_{\overline{h}jm}\delta_{\alpha\bar{i}}\ ;\ R(\delta_{2m},\delta_{1\bar{j}})\delta_{\alpha h} = G^{i}_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\\
R(\delta_{2m},\delta_{1\bar{j}})\delta_{\alpha\overline{h}} &= N^{\bar{i}}_{\overline{h}\bar{j}m}\delta_{\alpha\bar{i}},
\end{aligned}$$

şi conjugatele corespunzătoare, unde $\alpha = 0,1,2$ *şi* $\beta = 1,2$.

Propoziţia 11. *Dacă* $D'' = d''$ *atunci N-(c.l.c.) D este de tip* $(1,0)$, $L^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = F^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = C^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = 0$, *şi conjugatele lor corespunzătoare.*

Propoziţia 12. *D este de tip $(1,0)$ dacă şi numai dacă structura naturală complexă îndeplineşte condiţia $D_{JX}Y = JD_XY$.*

Lema 1. *Diferenţialele exterioare ale 1-formelor dz^i, $\delta\eta^i$, $\delta\zeta^i$ se exprimă în felul următor:*

$$\begin{aligned}
d(dz^i) &= 0; \qquad (2.7)\\
d(\delta\eta^i) &= \frac{1}{2}\overset{(1)}{A}{}^i_{(jm)}dz^m \wedge dz^j + \overset{(1)}{B}{}^i_{jm}\,\delta\eta^m \wedge dz^j + \overset{(1)}{C}{}^i_{jm}\,\delta\zeta^m \wedge dz^j\\
&+ \overset{(1)}{A}{}^i_{j\overline{m}}\,d\overline{z}^m \wedge dz^j + \overset{(1)}{B}{}^i_{j\overline{m}}\,\delta\overline{\eta}^m \wedge dz^j + \overset{(1)}{C}{}^i_{j\overline{m}}\,\delta\overline{\zeta}^m \wedge dz^j;\\
d(\delta\zeta^i) &= \frac{1}{2}R^i_{mj\,(2)}dz^m \wedge dz^j + P^i_{jm\,(12)}dz^m \wedge \delta\eta^j - P^i_{j\bar{m}\,(12)}\delta\overline{\eta}^m \wedge dz^j\\
&+ (L^i_{mj} - P^i_{mj\,(22)})\delta\zeta^m \wedge dz^j - R^i_{j\overline{m}\,(02)}d\overline{z}^m \wedge dz^j + \overset{(1)}{C}{}^i_{j\overline{m}}\delta\overline{\zeta}^m \wedge \delta\eta^j\\
&- P^i_{j\bar{m}\,(21)}\delta\overline{\zeta}^m \wedge dz^j + \overset{(1)}{C}{}^i_{jm}\delta\zeta^m \wedge \delta\eta^j + \overset{(1)}{A}{}^i_{j\overline{m}}d\overline{z}^m \wedge \delta\eta^j\\
&+ \frac{1}{2}\overset{(1)}{B}{}^i_{(jm)}\delta\eta^m \wedge \delta\eta^j + \overset{(1)}{B}{}^i_{j\overline{m}}\delta\overline{\eta}^m \wedge \delta\eta^j
\end{aligned}$$

unde coeficienţii lui $\delta\zeta^{(\alpha)j} \wedge \delta\zeta^{(\alpha)m}$ sunt anti-simetrici ($\alpha, \beta = 0, 1, 2,\ \zeta^0 = z,\ \zeta^1 = \eta,\ \zeta^2 = \zeta$).

Teorema 6. *Ecuaţiile de structură ale N- conexiunii liniare D pe spaţiul total sunt date de:*

$$\begin{aligned}
d(dz^i) - dz^k \wedge \omega^i_k &= -\overset{(0)}{\Omega}{}^i;\\
d(\delta\eta^i) - \delta\eta^k \wedge \omega^i_k &= -\overset{(1)}{\Omega}{}^i;\\
d(\delta\zeta^i) - \delta\zeta^k \wedge \omega^i_k &= -\overset{(2)}{\Omega}{}^i;\\
d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k &= -\Omega^i_j
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

unde $\overset{(\alpha)}{\Omega}{}^i$, $\alpha = 1, 2, 3$ sunt 2-formele torsiunii

$$\begin{aligned}
\overset{(0)}{\Omega}{}^i &= \frac{1}{2}T^i_{jk}dz^j \wedge dz^k + P^i_{jk\,(11)}dz^j \wedge \delta\eta^k - C^i_{kj\,(2)}dz^j \wedge \delta\zeta^k\\
&- T^i_{j\overline{k}\,(01)}dz^j \wedge d\overline{z}^k - C^i_{j\overline{k}\,(01)}dz^j \wedge \delta\overline{\eta}^k - C^i_{j\overline{k}\,(02)}dz^j \wedge \delta\overline{\zeta}^k;
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(1)}{\Omega^i} &= \frac{1}{2}R^i_{jk(1)}dz^j \wedge dz^k - C^i_{jk(1)}dz^j \wedge \delta\eta^k - P^i_{kj(21)}dz^j \wedge \delta\zeta^k \\
&- R^i_{j\bar{k}(00)}dz^j \wedge d\overline{z}^k - P^i_{j\bar{k}(01)}dz^j \wedge \delta\overline{\eta}^k - P^i_{j\bar{k}(20)}dz^j \wedge \delta\overline{\zeta}^k \\
&+ \frac{1}{2}Q^i_{jk(11)}\delta\eta^j \wedge \delta\eta^k - Q^i_{kj(21)}\delta\zeta^j \wedge \delta\eta^k + T^i_{k\bar{j}(01)}d\overline{z}^j \wedge \delta\eta^k \\
&+ C^i_{k\bar{j}(01)}\delta\overline{\eta}^j \wedge \delta\eta^k; \\
\overset{(2)}{\Omega^i} &= \frac{1}{2}R^i_{jm}dz^m \wedge dz^j + P^i_{mj(12)}\delta\eta^m \wedge dz^j + P^i_{mj(22)}\delta\zeta^m \wedge dz^j \\
&+ R^i_{j\overline{m}(02)}d\overline{z}^m \wedge dz^j + P^i_{j\overline{m}(12)}\delta\overline{\eta}^m \wedge dz^j + P^i_{j\overline{m}(21)}\delta\overline{\zeta}^m \wedge dz^j \\
&+ Q^i_{mj(22)}\delta\zeta^m \wedge \delta\eta^j - C^i_{m\bar{j}(01)}\delta\zeta^m \wedge \delta\overline{\eta}^j + R^i_{j\overline{m}(00)}d\overline{z}^m \wedge \delta\eta^j \\
&+ P^i_{j\overline{m}(01)}\delta\overline{\eta}^m \wedge \delta\eta^j + P^i_{j\overline{m}(20)}\delta\overline{\zeta}^m \wedge \delta\eta^j - T^i_{m\bar{j}(01)}\delta\zeta^m \wedge d\overline{z}^j \\
&- \frac{1}{2}Q^i_{mj(12)}\delta\eta^m \wedge \delta\eta^j + \frac{1}{2}S^i_{mj(2)}\delta\zeta^m \wedge \delta\zeta^j - C^i_{m\bar{j}(02)}\delta\zeta^m \wedge \delta\overline{\zeta}^j.
\end{aligned}
$$

iar Ω^i_j sunt 2-formele curburii

$$
\begin{aligned}
\Omega^i_j &= \frac{1}{2}R^i_{jmr}\ dz^m \wedge dz^r + \overset{(1)}{P}{}^i_{j\bar{m}\bar{r}}\ d\overline{z}^m \wedge \delta\overline{\eta}^r + \overset{(2)}{P}{}^i_{j\bar{m}\bar{r}}\ d\overline{z}^m \wedge \delta\overline{\zeta}^r \\
&+ O^i_{j\bar{m}r}\ \delta\overline{\zeta}^m \wedge \delta\zeta^r + \frac{1}{2}S^i_{j\bar{m}\bar{r}}\ \delta\overline{\eta}^m \wedge \delta\overline{\eta}^r + \overset{(1)}{P}{}^i_{jmr}\ dz^m \wedge \delta\eta^r \\
&+ \overset{(2)}{P}{}^i_{jmr}\ dz^m \wedge \delta\zeta^r + G^i_{jmr}\ \delta\eta^m \wedge \delta\zeta^r + \frac{1}{2}S^i_{jmr}\ \delta\eta^m \wedge \delta\eta^r \\
&+ R^i_{j\bar{m}r}\ d\overline{z}^m \wedge dz^r + \overset{(1)}{Q}{}^i_{jm\bar{r}}\ dz^m \wedge \delta\overline{\eta}^r + \overset{(2)}{Q}{}^i_{jm\bar{r}}\ dz^m \wedge \delta\overline{\zeta}^r \\
&+ \frac{1}{2}O^i_{jmr}\ \delta\zeta^m \wedge \delta\zeta^r + \overset{(1)}{P}{}^i_{j\bar{m}r}\ d\overline{z}^m \wedge \delta\eta^r + \overset{(2)}{P}{}^i_{j\bar{m}r}\ d\overline{z}^m \wedge \delta\zeta^r \\
&+ N^i_{jm\bar{r}}\ \delta\eta^m \wedge \delta\bar{\zeta}^r + \frac{1}{2}R^i_{j\bar{m}\bar{r}}\ d\overline{z}^m \wedge d\overline{z}^r + S^i_{j\bar{m}r}\ \delta\overline{\eta}^m \wedge \delta\eta^r \\
&+ G^i_{j\bar{m}r}\ \delta\overline{\eta}^m \wedge \delta\zeta^r + G^i_{j\bar{m}\bar{r}}\ \delta\overline{\eta}^m \wedge \delta\overline{\zeta}^r + \frac{1}{2}O^i_{j\bar{m}\bar{r}}\delta\overline{\zeta}^m \wedge \delta\overline{\zeta}^r.
\end{aligned}
$$

Considerăm *câmpurile Liouville* pe $T_C(J^{(2,0)}M)$:

$$\overset{(1)}{C} = \eta^i\frac{\partial}{\partial\zeta^i} \ \text{ şi } \ \overset{(2)}{C} = \eta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i} + 2\zeta^i\frac{\partial}{\partial\zeta^i} \tag{2.10}$$

şi conjugatele acestora, care sunt global definite pe $T_C(J^{(2,0)}M)$.

Spunem că un câmp complex $S \in T'(J^{(2,0)}M)$ este un *2-spray complex* dacă şi numai dacă $F \circ S = \overset{(2)}{C}$.

Propoziţia 13. *Orice* 2−*spray complex, este local de forma* $S = \eta^i \frac{\partial}{\partial z^i} + 2\zeta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} - 3G^i(z, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta^i}$, *unde* G^i *sunt coeficienţii acestui spray şi la schimbările de coordonate ei se schimbă după regulile*

$$3G'^i = 3\frac{\partial z'^i}{\partial z^j} G^j - (\eta^j \frac{\partial \zeta'^i}{\partial z^j} + 2\zeta^j \frac{\partial \zeta'^i}{\partial \eta^j}). \tag{2.11}$$

Propoziţia 14. *Un spray complex pe* $J^{(2,0)}M$ *este dat de:*

$$3G^i = \overset{(2)}{M}{}^i_j \eta^j + 2\overset{(1)}{M}{}^i_j \zeta^j, \tag{2.12}$$

unde $\overset{(1)}{M}{}^i_j$ *şi* $\overset{(2)}{M}{}^i_j$ *sunt coeficienţii corespunzători în cobaza adaptată a (c.n.c.).*

Propoziţia 15. *Dacă* S *este un spray complex care are coeficienţii* G^i *ce se tranformă în funcţie de formulele (2.11), atunci*

$$\overset{(1)}{M}{}^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial \zeta^j} \ , \ \overset{(2)}{M}{}^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial \eta^j} \tag{2.13}$$

determină o (c.n.c) care are coeficienţii duali $\overset{(1)}{M}{}^i_j$ *şi* $\overset{(2)}{M}{}^i_j$, *unde* $\overset{(1)}{N}{}^i_j = \overset{(1)}{M}{}^i_j$ *şi* $\overset{(2)}{N}{}^i_j = \overset{(2)}{M}{}^i_j - \overset{(1)}{M}{}^i_k \overset{(1)}{M}{}^k_j$.

În Secţiunea 2.2 evidenţiem două (c.n.c.) pe $J^{(2,0)}M$ care au un rol important în geometria (2,0)- fibratului olomorf.

Definiţia 8. *Un spaţiu Lagrange complex de ordin doi este o pereche* (M, L), *unde* $L : J^{(2,0)}M \to \mathbf{R}$ *este o funcţie diferenţiabilă de ordin cel puţin doi cu matricea Hermitiană*

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^i \partial \overline{\zeta}^j} \tag{2.14}$$

nedegenerată.

Fie $c(t)$ o curbă diferenţiabilă de clasă C^∞ pe M şi $\widetilde{c}(t)$ extensia sa la $J^{(2,0)}M$ definită astfel $t \in \mathbf{R} \to (z^i(t), \eta^i(t) = \frac{dz^i}{dt}, \zeta^i(t) = \frac{1}{2}\frac{d^2 z^i}{dt^2})$. Deoarece t este un parametru real, problema variaţională pentru Lagrangianul complex de ordin doi L ne conduce la calcule similare celor din cazul real, i.e. la ecuaţiile Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial z^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta^i} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial L}{\partial \zeta^i}) = 0 \tag{2.15}$$

$L(z, \eta, \zeta)$ depinde implicit de conjugatele acestor variabile. În aceste condiţii, de-a lungul curbei $\widetilde{c}$ avem $\frac{d}{dt} = \frac{dz^j}{dt}\frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{d\overline{z}^j}{dt}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j} + \frac{d\eta^j}{dt}\frac{\partial}{\partial \eta^j} + \frac{d\overline{\eta}^j}{dt}\frac{\partial}{\partial \overline{\eta}^j} + \frac{d\zeta^j}{dt}\frac{\partial}{\partial \zeta^j} + \frac{d\overline{\zeta}^j}{dt}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}^j}$ sau, ţinând cont că $\eta^j = \frac{dz^j}{dt}$ şi $2\zeta^j = \frac{d^2z^j}{dt^2} = \frac{d\eta^j}{dt}$, utilizând (ca în cazul real) operatorul $\Gamma = \eta^j\frac{\partial}{\partial z^j} + 2\zeta^j\frac{\partial}{\partial \eta^j}$ de-a lungul curbei $\widetilde{c}$, obţinem: $\frac{d}{dt} = \Gamma + \overline{\Gamma} + 3\frac{d^3z^j}{dt^3}\frac{\partial}{\partial \zeta^j} + 3\frac{d^3\overline{z}^j}{dt^3}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}^j}$. Ca o consecinţă, ecuaţiile Euler-Lagrange (2.15) se rescriu astfel:

$$\frac{\partial L}{\partial z^i} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \eta^i} - \frac{1}{2}\Gamma(\frac{\partial L}{\partial \zeta^i}) - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}(\frac{\partial L}{\partial \zeta^i}) - \frac{3}{2}g_{ij}\frac{d^3z^j}{dt^3} - \frac{3}{2}g_{i\overline{j}}\frac{d^3\overline{z}^j}{dt^3}\right\} = 0 \tag{2.16}$$

unde $g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^i \partial \zeta^j}$. În cele ce urmează, paranteza din (2.16) se anulează, şi va fi numită, ca în cazul real, covectorul complex Craig-Synge:

$$E_i(L) = -\frac{\partial L}{\partial \eta^i} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \zeta^i}) \tag{2.17}$$

care are un rol fundamental în determinarea (c.n.c.).

Teorema 7. *Perechea* $\overset{(1)}{M}{}^i_j$, $\overset{(2)}{M}{}^i_j$ *determină coeficienţii duali ai (c.n.c.), ce poartă numele de conexiune Chern-Lagrange, unde*

$$\overset{(1)}{M}{}^i_j = g^{\overline{m}i}\frac{\partial^2 L}{\partial \eta^j \partial \overline{\zeta}^m} \quad ; \quad \overset{(2)}{M}{}^i_j = g^{\overline{m}i}\frac{\partial^2 L}{\partial z^j \partial \overline{\zeta}^m}. \tag{2.18}$$

Corolarul 1. *Funcţiile* G^i *date de (2.18) definesc un spray complex pe* $J^{(2,0)}M$, *ce poartă numele de spray canonic şi este notat cu* $\overset{c}{G}{}^i$. *Ţinând cont de Propoziţia 15, putem obţine un şir de (c.n.c.). Funcţiile* $\overset{(1)c}{M}{}^i_j = \frac{\partial \overset{c}{G}{}^i}{\partial \zeta^j}$ *şi* $\overset{(2)c}{M}{}^i_j = \frac{\partial \overset{c}{G}{}^i}{\partial \eta^j}$ *se vor numi coeficienţii (c.n.c.) canonice.*

Propoziţia 16. *Dacă* $\frac{\delta}{\delta \eta^i}$ *este baza adaptată conexiunii neliniare complexe Chern-Lagrange, atunci*

$$[\frac{\delta}{\delta \eta^j}, \frac{\delta}{\delta \eta^k}] = 0. \tag{2.19}$$

Teorema 8. *Următorii coeficienţi:*

$$L^i_{jk} = g^{\overline{m}i}\frac{\delta g_{j\overline{m}}}{\delta z^k} \quad ; \quad F^i_{jk} = g^{\overline{m}i}\frac{\delta g_{j\overline{m}}}{\delta \eta^k} \quad ; \quad C^i_{jk} = g^{\overline{m}i}\frac{\delta g_{j\overline{m}}}{\delta \zeta^k} \tag{2.20}$$

şi $L^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = F^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = C^{\bar{i}}_{\bar{j}k}$, definesc o N -(c.l.c.) pe $J^{(2,0)}M$, care este metrică pe $T_{\mathbf{C}}(J^{(2,0)}M)$ şi este de tip (1,0), conexiune ce poartă numele de conexiunea liniară Chern-Lagrange.

Propoziţia 17. *Avem $F^i_{jk} = \frac{\partial \overset{(1)}{M^i_k}}{\partial \zeta^j}$ şi $L^i_{jk} = \frac{\partial \overset{(2)}{M^i_j}}{\partial \zeta^j} - \overset{(1)}{M^p_k} F^i_{jp} = \frac{\partial \overset{(2)}{N^i_k}}{\partial \zeta^j} + \overset{(1)}{N^p_k} F^i_{jp}$.*

Definiţia 9. O funcţie complexă f definită pe $J^{(2,0)}M$ spunem că este (α,β)-*omogenă* dacă

$$f(z,\lambda\eta,\lambda^2\zeta) = \lambda^\alpha \bar{\lambda}^\beta f(z,\eta,\zeta) \ , \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

Propoziţia 18. *Sprayurile complexe, care au coeficienţii G^i şi $\overset{*}{G^i}$, coincid dacă şi numai dacă G^i sunt $(3,0)$-omogeni oricare ar fi $i = \overline{1,n}$.*

Propoziţia 19. *Coeficienţii G^i ai sprayului complex sunt $(3,0)$-omogeni dacă şi numai dacă funcţiile $\overset{(1)}{M^i_j}$ şi $\overset{(2)}{M^i_j}$ din formulele (2.13) sunt $(1,0)$-, respectiv $(2,0)$-omogene oricare ar fi $j = \overline{1,n}$.*

Propoziţia 20. *Avem sistemul de identităţi $\overset{(1)CL}{M^i_j} \equiv \overset{(1)c}{M^i_j}$ şi $\overset{(2)CL}{M^i_j} \equiv \overset{(2)c}{M^i_j}$ dacă şi numai dacă (c.n.c.) Chern-Lagrange satisface relaţiile*

$$\frac{\partial \overset{(2)CL}{M^i_k}}{\partial \zeta^j}\eta^k + 2\frac{\partial \overset{(1)CL}{M^i_k}}{\partial \zeta^j}\zeta^k = \overset{(1)CL}{M^i_j} \ \text{şi} \ \frac{\partial \overset{(2)CL}{M^i_k}}{\partial \eta^j}\eta^k + 2\frac{\partial \overset{(1)CL}{M^i_k}}{\partial \eta^j}\zeta^k = 2\overset{(2)CL}{M^i_j}. \tag{2.21}$$

Definiţia 10. *Un spaţiu Finsler complex de ordin doi* este o pereche (M,F), unde $F : J^{(2,0)}M \to \mathbf{R}^+$ este o funcţie $(1,1)$-omogenă diferenţiabilă exceptând secţiunea nulă, i.e.

$$F(z,\lambda\eta,\lambda^2\zeta) = |\lambda|^2 F(z,\eta,\zeta) \ \ , \ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}^* \tag{2.22}$$

iar pătratul său $L := F^2$ defineşte o formă pătratică pozitiv definită care are coeficienţii Hermitieni $g_{i\bar{j}}(z,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 L}{\partial\zeta^i\partial\bar{\zeta}^j}$.

Propoziţia 21. *Dacă (M,F) este un spaţiu Finsler complex de ordin doi, avem că:*

i) $\frac{\partial L}{\partial \eta^k}\eta^k + 2\frac{\partial L}{\partial \zeta^k}\zeta^k = 2L$ şi respectiv conjugatele;

ii) tensorul metric $g_{i\bar{j}}$ şi inversul său $g^{\bar{j}i}$ sunt omogeni de tip $(0,0)$.

Propoziţia 22. *Dacă (M, F) este un spaţiu Finsler complex de ordin doi, atunci $\overset{(1)CL}{M_j^i}$ este $(1,0)$-omogen şi $\overset{(2)CL}{M_j^i}$ este $(2,0)$-omogen, cu:*

$$\frac{\partial \overset{(1)CL}{M_j^i}}{\partial \eta^k}\eta^k + 2\frac{\partial \overset{(1)CL}{M_j^i}}{\partial \zeta^k}\zeta^k = \overset{(1)CL}{M_j^i} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \overset{(2)CL}{M_k^i}}{\partial \eta^j}\eta^k + 2\frac{\partial \overset{(2)CL}{M_j^i}}{\partial \zeta^k}\zeta^k = 2\overset{(2)CL}{M_j^i}.$$

Teorema 9. *Dacă (M, F) este un spaţiu Finsler complex de ordin doi, atunci sprayul canonic $\overset{c}{G^i}$ este $(3,0)$-omogen, şi prin urmare $\overset{c}{G^i}$ coincide cu $\overset{*}{G^i}$.*

Propoziţia 23. *Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex de ordin doi. Dacă*

$$\frac{\partial \overset{(1)CL}{M_k^i}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \overset{(1)CL}{M_j^i}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \overset{(2)CL}{M_j^i}}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \overset{(2)CL}{M_k^i}}{\partial \zeta^j} \tag{2.23}$$

atunci $\overset{(1)CL}{M_j^i}$ coincide cu $\overset{(1)c}{M_j^i}$ şi $\overset{(2)CL}{M_j^i}$ coincide cu $\overset{(2)c}{M_j^i}$. Mai mult, (c.n.c.) Chern-Lagrange este obţinută din sprayul complex canonic.

Torsiunea $\mathbf{T}$ a N-(c.l.c.) este dată de:

$$\mathbf{T}(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}\left(J^{(2,0)}M\right).$$

Deoarece un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}\left(J^{(2,0)}M\right)$ poate fi scris $X = X^H + X^{H_1} + X^V + X^{\bar{H}} + X^{\bar{H}_1} + X^{\bar{V}}$, obţinem că:

Propoziţia 24. *Tensorul torsiunii $\mathbf{T}$ al (c.l.c) Chern-Lagrange D este dat de următoarele d- câmpuri tensoriale:*

$$\begin{aligned}
T^i_{jh} &= L^i_{jh} - L^i_{hj}; R^i_{jh_{(1)}} = \overset{(1)}{A^i_{(jh)}}; R^i_{jh_{(2)}} = \overset{(2)}{A^i_{(jh)}} + \overset{(1)}{A^k_{(jh)}}\overset{(1)}{N^i_k}; R^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}h_{(01)}} = \overset{(1)}{A^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}h}};\\
P^i_{jh_{(11)}} &= F^i_{jh};\;\; P^i_{jh_{(12)}} = \overset{(1)}{A^i_{jh}} - \overset{(2)}{B^i_{hj}} - \overset{(1)}{B^k_{hj}}\overset{(1)}{N^i_k};\;\; C^i_{jh_{(2)}} = -C^i_{hj};\\
P^i_{jh_{(21)}} &= -\overset{(1)}{C^i_{hj}};\;\; P^i_{jh_{(22)}} = L^i_{jh} - \overset{(2)}{C^i_{hj}} - \overset{(1)}{C^k_{hj}}\overset{(1)}{N^i_k};\;\; Q^i_{jh_{(21)}} = -C^i_{jh};\\
Q^i_{jh_{(11)}} &= F^i_{jh} - F^i_{hj};\;\; Q^i_{jh_{(22)}} = F^i_{jh} - \overset{(1)}{C^i_{jh}};\;\; S^i_{jh_{(2)}} = C^i_{jh} - C^i_{hj};\\
R^i_{h\bar{\jmath}_{(00)}} &= -\overset{(1)}{A^i_{h\bar{\jmath}}};\;\; C^i_{jh_{(1)}} = L^i_{jh} - \overset{(1)}{B^i_{hj}};\;\; R^i_{h\bar{\jmath}_{(02)}} = -(\overset{(2)}{A^i_{h\bar{\jmath}}} + \overset{(1)}{A^m_{h\bar{\jmath}}}\overset{(1)}{N^i_m});\\
R^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}h_{(12)}} &= \overset{(2)}{A^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}h}} + \overset{(1)}{A^{\bar{m}}_{\bar{\jmath}h}}\overset{(1)}{N^{\bar{\imath}}_{\bar{m}}};\;\; P^i_{h\bar{\jmath}_{(01)}} = -\overset{(1)}{B^i_{h\bar{\jmath}}};\;\; P^i_{h\bar{\jmath}_{(12)}} = -(\overset{(2)}{B^i_{h\bar{\jmath}}} + \overset{(1)}{B^m_{h\bar{\jmath}}}\overset{(1)}{N^i_m});\\
P^i_{h\bar{\jmath}_{(20)}} &= -\overset{(1)}{C^i_{h\bar{\jmath}}};\;\; Q^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}h_{(12)}} = \overset{(1)}{B^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}h}};\;\; P^i_{h\bar{\jmath}_{(21)}} = -(\overset{(2)}{C^i_{h\bar{\jmath}}} + \overset{(1)}{C^m_{h\bar{\jmath}}}\overset{(1)}{N^i_m}),
\end{aligned}$$

unde am utilizat notaţiile: $\overset{(\alpha)}{A}{}^i_{(jk)} := \delta_{0k}\overset{(\alpha)}{N}{}^i_j - \delta_{0j}\overset{(\alpha)}{N}{}^i_k$; $\overset{(\alpha)}{A}{}^i_{j\bar{k}} := \delta_{0\bar{k}}\overset{(\alpha)}{N}{}^i_j$ *şi* $\overset{(\alpha)}{B}{}^i_{jk} := \delta_{1k}\overset{(\alpha)}{N}{}^i_j$ $\overset{(\alpha)}{B}{}^i_{j\bar{k}} := \delta_{1\bar{k}}\overset{(\alpha)}{N}{}^i_j$; $\alpha = 1, 2$,

Tensorul curburii $\mathbf{R}$ al conexiunii D este dat de:

$$\mathbf{R}(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}\left(J^{(2,0)}M\right).$$

Avem descompunerea:

$$\mathbf{R}(X,Y)Z = \mathbf{R}(X,Y)Z^H + \mathbf{R}(X,Y)Z^{H_1} + \mathbf{R}(X,Y)Z^V$$

$$+\mathbf{R}(X,Y)Z^{\bar{H}} + \mathbf{R}(X,Y)Z^{\bar{H}_1} + \mathbf{R}(X,Y)Z^{\bar{V}}, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}\left(J^{(2,0)}M\right).$$

Propoziţia 25. *Tensorul curburii* $\mathbf{R}$ *este determinat de următoarele d-câmpuri tensoriale nenule:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\delta_{0m},\delta_{0j})\delta_{\alpha h} &= R^i_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\ \mathbf{R}(\delta_{\beta m},\delta_{0j})\delta_{\alpha h} = \overset{(\beta)}{P}{}^i_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
\mathbf{R}(\delta_{0m},\delta_{0\bar{j}})\delta_{\alpha h} &= R^i_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\ \mathbf{R}(\delta_{\beta m},\delta_{0\bar{j}})\delta_{\alpha h} = \overset{(\beta)}{P}{}^i_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i};\\
\mathbf{R}(\delta_{\beta m},\delta_{0\bar{j}})\delta_{\alpha\bar{h}} &= \overset{(\beta)}{Q}{}^{\bar{i}}_{\bar{h}\bar{j}m}\delta_{\alpha\bar{i}}\ ;\ \mathbf{R}(\delta_{1m},\delta_{1j})\delta_{\alpha h} = S^i_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
\mathbf{R}(\delta_{1m},\delta_{1\bar{j}})\delta_{\alpha h} &= S^i_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\ \mathbf{R}(\delta_{2m},\delta_{2j})\delta_{\alpha h} = O^i_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
\mathbf{R}(\delta_{2m},\delta_{2\bar{j}})\delta_{\alpha h} &= O^i_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\ \mathbf{R}(\delta_{2m},\delta_{1j})\delta_{\alpha h} = G^i_{hjm}\delta_{\alpha i}\ ;\\
\mathbf{R}(\delta_{2m},\delta_{1\bar{j}})\delta_{\alpha h} &= G^i_{h\bar{j}m}\delta_{\alpha i}\ ;\ \mathbf{R}(\delta_{2m},\delta_{1\bar{j}})\delta_{\alpha\bar{h}} = N^{\bar{i}}_{\bar{h}\bar{j}m}\delta_{\alpha\bar{i}},
\end{aligned}$$

şi respectiv conjugatele, unde $\alpha = 0, 1, 2$ *şi* $\beta = 1, 2$.

În Secţiunea 2.3 modelăm definiţia fibratului afin olomorf, peste varietatea complexă $\tilde{M} = T'M$, pentru fibratul olomorf de ordin doi $J^{(2,0)}M$. Rezultatele obţinute au fost publicate în [77], fiind o extensie a celor din [53] pentru cazul structurilor Lagrange afine pe $T'M$.

Definiţia 11. *Un fibrat olomorf afin peste* $T'M$ *având* r *dimensiunea fibrei* F *este o fibrare olomorfă* $\pi : E \to T'M$, *unde* E *este o varietate complexă de dimensiune* $2n + r$, *şi pentru orice punct* $\pi^{-1}(u)$ *există o secţiune locală* $s = \zeta^a s_a$ *astfel încât componentele sale locale au următoarea formulă de schimbare*

$$\zeta'^a = A^a_b(u)\zeta^b + B^a(u),\ a = 1, \ldots, r, \tag{2.24}$$

unde A^a_b *şi* B^a *sunt funcţii olomorfe pe* $T'M$ *şi* $\det A^a_b \neq 0$.

E este o varietate foliată complexă de dimensiune $2n+r$ şi codimensiune $2n$. Foile acestei varietăţi, notate prin $\mathcal{V}E$, sunt caracterizate de $u = const$, şi funcţiile definite pe $T'M$ se numesc proiectibile. Pe varietatea complexă E putem considera coordonatele locale complexe (z^i, η^i, ζ^a). Fibratul tangent complexificat al fibratului tangent real $T_R E$ are descompunerea $T_C E = T'E \oplus T''E$. O secţiune în $T'E$ va fi scrisă în funcţie de baza locală $\{\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \eta^i}, \frac{\partial}{\partial \zeta^a}\}$, iar o secţiune în $T''E$ va fi scrisă utilizând conjugatele acestora. $\mathcal{V}E$ este fibratul descris de $\{\frac{\partial}{\partial \zeta^a}\}$ care se numeşte distribuţie verticală. Ţinând cont de schimbările locale, avem următoarele schimbări într-un punct al lui $T'E$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^j} &= \frac{\partial z'^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial z'^i} + \frac{\partial \eta'^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial \eta'^i} + \frac{\partial \zeta'^a}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial \zeta'^a}; \\ \frac{\partial}{\partial \eta^j} &= \frac{\partial \eta'^i}{\partial \eta^j}\frac{\partial}{\partial \eta'^i} + \frac{\partial \zeta'^a}{\partial \eta^j}\frac{\partial}{\partial \zeta'^a}; \\ \frac{\partial}{\partial \zeta^b} &= \frac{\partial \zeta'^a}{\partial \zeta^b}\frac{\partial}{\partial \zeta'^a}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

unde

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'^i}{\partial z^j} &= \frac{\partial \eta'^i}{\partial \eta^j} \ ; \ \frac{\partial \zeta'^a}{\partial \zeta^b} = A^a_b \ ; \quad \frac{\partial \eta'^i}{\partial z^j} = \frac{\partial^2 z'^i}{\partial z^j \partial z^k}\eta^k \ ; \\ \frac{\partial \zeta'^a}{\partial z^j} &= \frac{\partial A^a_b}{\partial z^j}\zeta^b + \frac{\partial B^a}{\partial z^j} \ ; \ \ \frac{\partial \zeta'^a}{\partial \eta^j} = \frac{\partial A^a_b}{\partial \eta^j}\zeta^b + \frac{\partial B^a}{\partial \eta^j}. \end{aligned}$$

Baza din $T''E$ este obţinută prin conjugare.

Definiţia 12. *O secţiune locală afină în fibratul olomorf afin E este o funcţie olomorfă $s : U_\alpha \subset T'M \to E$ astfel încât $\pi \circ s = Id|_{U_\alpha}$ şi componentele sale locale se transformă după regula*

$$s'^a(u') = A^a_b(u)s^b(u) + B^a(u). \tag{2.26}$$

Potrivit lui [31, 58] o *secţiune Liouville* pe fibratul afin, este o secţiune $\Gamma^a = \zeta^a + C^a(u)$, definită global pe $\mathcal{V}E$. Din definirea globală avem că $\Gamma'^a = A^a_b\Gamma^b$ şi prin urmare obţinem, $\zeta'^a + C'^a(u') = A^a_b(\zeta^b + A^b(u))$, ceea ce ne conduce la $-C'^a = A^a_b(-C^b) + B^i(u)$. Deci, $\{-C^a\}$ îndeplineşte condiţia secţiunii afine pe E, adică:

Propoziţia 26. *Există o corespondenţă bijectivă între secţiunile afine ale lui E şi secţiunile Liouville pe $\mathcal{V}E$.*

Propoziţia 27. *Fibratul olomorf afin $\pi : E \to T'M$ este de tip vectorial olomorf (i.e. $B^a = 0$) dacă şi numai dacă $[\Gamma_\alpha] = 0$.*

Propoziţia 28. *Structura tangentă de ordin doi este definită global dacă şi numai dacă*

$$B^i = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z'^i}{\partial z^j \partial z^k}\eta^i\eta^j + D^i(z) \tag{2.27}$$

unde B^i_j şi D^i sunt funcţii olomorfe pe M.

Propoziţia 29. *Presupunem că structura aproape tangentă de ordin doi F este definită global. Atunci $[\mathcal{L}_\alpha] = 0$ dacă şi numai dacă fibratul afin olomorf E coincide cu fibratul jeturilor olomorfe $J^{(2,0)}M$. Mai mult, vectorul Liouville este definit global.*

Propoziţia 30. *S_α este definit global dacă şi numai dacă $A^i_2 = const.$, $A^i_3 = const.$, E coincide cu fibratul tangent olomorf $J^{(2,0)}M$ şi coeficienţii G^i se transformă după regula*

$$3G'^i = 3\frac{\partial z'^i}{\partial z^j}G^j - \left(\eta^j\frac{\partial \zeta'^i}{\partial z^j} + 2\zeta^j\frac{\partial \zeta'^i}{\partial \eta^j}\right). \tag{2.28}$$

Propoziţia 31. *Lagrangianul complex local de ordin doi $\{E, L_\alpha\}$ generează o structură Lagrange globală pe fibratul afin E dacă şi numai dacă $[L_\alpha]_1 = [L_\alpha]_2 = 0$.*

Coroborând cu Propoziţia 29, putem afirma

Teorema 10. *Familia $\{L_\alpha\}$ generează o structură Lagrange complexă globală de ordin doi pe $J^{(2,0)}M$ dacă şi numai dacă $[\mathcal{L}_\alpha] = [L_\alpha]_1 = [L_\alpha]_2 = 0$.*

În Secţiunea 2.4 am studiat problema prelungirii structurilor Hermitiene la fibratul jeturilor olomorfe $J^{(2,0)}M$, iar rezultatele au fost publicate in [76].

Problema prelungirii metricii Hermitiene $g(z)$ de la M la $J^{(2,0)}M$ constă în determinarea metricii Hermitiene G care acţionează pe secţiunile lui $T_C(J^{(2,0)}M)$ astfel încât $(G \circ \pi)(u) = g(z)$. Într-adevăr, avem $G(JX, JY) = G(X, Y)$ pentru orice secţiune a lui $T_C(J^{(2,0)}M)$.

Această problemă este similară prelungirii metricilor Riemanniene la fibratul osculator Osc^2M, discutată în [42, 43], care a rezolvat o problemă veche şi dificilă, [45].

Dacă considerăm $g_{i\bar{j}}(u)$ un $d-$tensor Hermitian pe $J^{(2,0)}M$, atunci problema prelungirii lui g este simplă dacă poate fi determinat un reper adaptat $\{\frac{\delta}{\delta z^i}, \frac{\delta}{\delta \eta^i}, \frac{\partial}{\partial \zeta^i}\}$, cu baza duală $\{dz^i, \delta\eta^i, \delta\zeta^i\}$. Atunci desigur,

$$G(u) = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}}\delta\eta^i \otimes \delta\bar{\eta}^j + g_{i\bar{j}}\delta\zeta^i \otimes \delta\bar{\zeta}^j \tag{2.29}$$

defineşte o metrică Hermitiană pe $J^{(2,0)}M$ numită, prin analogie cu fibratul osculator real, liftul de tip Sasaki al lui $g(z)$.

Considerăm simbolurile Cristoffel ai metricii $g(z)$ daţi de:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} &:= \frac{1}{2}g^{\bar{m}i}\{\frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial z^j}+\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial z^k}\}=\Gamma^i_{kj}; \\ \Gamma^i_{j\bar{k}} &:= \frac{1}{2}g^{\bar{m}i}\{\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial \bar{z}^k}-\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^m}\}\ ;\ \Gamma^i_{\bar{j}k}:=\frac{1}{2}g^{\bar{m}i}\{\frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial \bar{z}^j}-\frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial \bar{z}^m}\},\end{aligned} \tag{2.30}$$

şi conjugatele corespunzătoare. Coeficienţii Γ^i_{jk} se transformă după regula $\Gamma'^i_{rs}\frac{\partial z'^r}{\partial z^j}\frac{\partial z'^s}{\partial z^k}=\Gamma^r_{jk}\frac{\partial z'^i}{\partial z^r}-\frac{\partial^2 z'^i}{\partial z^j\partial z^k}$ iar ceilalţi sunt d -tensori. Mai mult, în cazul Kähler, avem $\Gamma^i_{jk}=g^{\bar{m}i}\frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial z^j}$ şi $\Gamma^i_{j\bar{k}}=\Gamma^i_{\bar{j}k}=0$.

Fie

$$\mathcal{L}=g_{i\bar{j}}(z)\xi^i\bar{\xi}^j \tag{2.31}$$

o funcţie Lagrange cu proprietatea $\mathcal{L}'=g'_{i\bar{j}}(z)\xi'^i\bar{\xi}'^j=g_{i\bar{j}}(z)\xi^i\bar{\xi}^j=\mathcal{L}$ şi tensorul metric definit de $\mathcal{L}$: $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\varsigma^i\partial\bar{\varsigma}^j}=g_{ij}(z)$ care este inversabil.

Teorema 11. *Conexiunea neliniară complexă Chern-Lagrange asociată funcţiei Lagrange (2.31) are următorii coeficienţi duali:*

$$\overset{1}{M}{}^i_j=\Gamma^i_{js}\eta^s \quad \text{şi} \quad \overset{2}{M}{}^i_j=\frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma^i_{rs}}{\partial z^j}\eta^r\eta^s+g^{\bar{m}i}\frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial z^j}\xi^k. \tag{2.32}$$

În reperul adaptat (c.n.c) Chern-Lagrange, structura Hermitiană $(J^{(2,0)}M\,,J,G)$ este prelungirea structurii Hermitiene (M,J,g).

Propoziţia 32. *(C.n.c) Chern-Lagrange şi (c.n.c.) canonică coincid dacă şi numai dacă*

$$\begin{aligned} g^{\bar{m}i}\frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial z^j}\eta^k &= \Gamma^i_{jk}\eta^k \\ R^i_{jks}\eta^k\eta^s &:= \left(\frac{\partial\Gamma^i_{ks}}{\partial z^j}-\frac{\partial\Gamma^i_{js}}{\partial z^k}+\Gamma^i_{jh}\Gamma^h_{ks}-\Gamma^i_{kh}\Gamma^h_{js}\right)\eta^k\eta^s=0.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Corolarul 2. *Dacă (M,J,g) este o varietate Kähler, atunci există doar o singură conexiune neliniară complexă astfel încât $(J^{(2,0)}M\,,J,G)$ este prelungirea lui (M,J,g), unde G este dat de (2.29).*

Teorema 12. *Conexiunea neliniară Chern-Lagrange complexă pe $J^{(2,0)}M$ asociată funcţiei Lagrange $\mathcal{L}_F$ are următorii coeficienţi duali:*

$$\begin{aligned}\overset{1}{M}{}^i_j &= C^i_{jk}\xi^k+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^j}\left(L^i_{rs}\eta^r\eta^s\right) \\ \overset{2}{M}{}^i_j &= \left(L^i_{jk}+N^h_jC^i_{hk}\right)\xi^k+\frac{1}{2}\frac{\partial L^i_{rs}}{\partial z^j}\eta^r\eta^s.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Capitolul 3

Probleme variaţionale pe fibrate olomorfe de ordin doi

În acest capitolul studiem prima variaţie a energiei pentru curbele din $J^{(2,0)}M$, în funcţie de structura metrică G şi de o N-conexiune liniară D, ceea ce ne conduce la curbele geodezice ale energiei, i.e. extremalele Lagrangianului energie. Într-un spaţiu Finsler complex de ordin doi (M, F), analizăm geodezicele orizontale ale lungimii de arc, numite $F-$geodezice. Un caz particular al curbelor geodezice îl reprezintă curbele autoparalele care depind de $N-$ conexiunea liniară D şi determinăm condiţiile în care aceste curbe sunt invariante la omotetii.

Ideile din această secţiune au fost publicate în [74].

Rezultate remarcabile despre geodezicele complexe ale unui spaţiu Finsler complex au fost obţinute de M. Abate şi G. Patrizio în [1].

În partea a doua a acestui capitol vom studia aplicaţii armonice între două fibrate de jeturi olomorfe de ordin doi.

Geometria funcţiilor armonice este vastă şi sunt cunoscute numeroase şi diverse aplicaţii. Au fost obţinute rezultate pentru varietăţi şi subvarietăţi Riemanniene în articolele [26, 29, 55] etc.

Noţiunea de funcţii armonice a fost extinsă, în ultimul deceniu, la varietăţi Finsler reale şi complexe, [45, 54, 69]. În principal, geometria aplicaţiilor armonice între varietăţi Finsler întâmpină o dificultate în faptul că spaţiul total TM pentru energie nu este compact. Astfel, integrala energiei este considerată pe fibratul indicatoarei, iar în cazul complex pe fibratul sferic proiectiv, [54, 2, 79].

În acest capitol, vom extinde teoria funcţiilor armonice la curbele parametrizate pentru $(2,0)$ - fibrate de jeturi olomorfe, evitând dificultatea legată de problema compacticităţii.

În Secţiunea 3.1 extindem abordarea făcută în [1], referitoare la curbele geodezice parametrizate pe $(2,0)$ -fibratele jet. Studiem cazul particular anume cel al spaţiilor Finsler complexe de ordin doi.

Fie $\sigma : [a,b] \to M$, $\sigma(t) = (z^k(t))$, o curbă regulată pe M. O curbă pe $J^{(2,0)}M$ este o funcţie diferenţiabilă $c : [a,b] \to J^{(2,0)}M$ dată de $t \to (z^k(t), \eta^k(t), \zeta^k(t))$, unde $\eta^k(t) = \frac{dz^k}{dt}$ şi $\zeta^k(t) = \frac{1}{2}\frac{d^2 z^k}{dt^2}$.
Notăm cu $t \to (z^k(t), \eta^k(t))$ o curbă în fibratul olomorf $\pi : T'M \to M$, care este varietate bază pentru $\pi_1 : J^{(2,0)}M \to T'M$.

Câmpul vectorilor tangenţi la curba c este dat de $V := \frac{dc}{dt}$, care, în reperul adaptat al (c.n.c.), se scrie astfel

$$\frac{dc}{dt} := \dot{c}_t + \overline{\dot{c}_t} = \frac{dz^k}{dt}\delta_{0k} + \frac{\delta\eta^k}{dt}\delta_{1k} + \frac{\delta\zeta^k}{dt}\delta_{2k} + \frac{d\bar{z}^k}{dt}\delta_{0\bar{k}} + \frac{\delta\bar{\eta}^k}{dt}\delta_{1\bar{k}} + \frac{\delta\bar{\zeta}^k}{dt}\delta_{2\bar{k}}. \quad (3.1)$$

Fie $\sigma : t \to (z^k(t))$ o curbă fixată pe M şi c extensia sa la $J^{(2,0)}M$. Considerăm $\sum : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [a,b] \to M$, o variaţie $(s,t) \to \sum^k(s,t) \equiv z^k(s,t)$ a curbei σ cu $\sum(0,t) = \sigma(t)$. Pentru un s fixat, curbele de mai sus, $\sum$, definesc curbele $\tilde{c}(s,t)$ pe $J^{(2,0)}M$. Astfel, avem următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*(J^{(2,0)}M) & \xrightarrow{\quad \Gamma \quad} & J^{(2,0)}M \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \sum^*(T'M) & \xrightarrow{\quad \gamma \quad} & T'M \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ [-\varepsilon, \varepsilon] \times [a,b] & \xrightarrow{\quad \sum \quad} & M \end{array}, \quad (3.2)$$

unde $\sum^*(T'M)$ şi $\gamma^*(J^{(2,0)}M)$ sunt fibratele reciproce ale lui $T'M$ şi $J^{(2,0)}M$ folosind funcţiile Γ şi respectiv γ. Funcţiile γ şi Γ sunt $\gamma : (s,t) \to (z^k(s,t), \eta^k(s,t))$ şi $\Gamma : (s,t) \to (z^k(s,t), \eta^k(s,t), \zeta^k(s,t))$.

Fie Ω_c mulţimea variaţiilor curbei c, $L : \Omega_c \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi $L_* : T\Omega_c \to T\mathbf{R}_{L(c)}$ aplicaţia sa tangentă cu $L_*(U) := \frac{dL(\tilde{c})}{ds}|_{s=0}\frac{d}{dt}|_{L(\tilde{c})}$.

Asemenea teoriei variaţionale clasice, spunem că *valoarea extremă* a lui L este o curbă $\tilde{c} \in \Omega_c$ cu $L_*(U) = 0$, i.e. $\frac{dL(\tilde{c})}{ds}|_{s=0} = 0$.

Pentru o $N-$(c.l.c.) D fixată şi o metrică G dată de relaţiile

$$G = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}}\delta\eta^i \otimes \delta\overline{\eta}^j + g_{i\bar{j}}\delta\zeta^i \otimes \delta\overline{\zeta}^j, \quad (3.3)$$

cu $DG = 0$, vom defini *energia* de-a lungul curbei $c : t \to (z^k(t), \eta^k(t), \zeta^k(t))$

ce are capete fixate, de forma

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_a^b G(\dot{c}_t, \overline{\dot{c}_t})dt. \tag{3.4}$$

Vom determina valorile extreme ale funcţiei energie, i.e.

$$\frac{1}{2}\frac{dE(\tilde{c})(s,t)}{ds}|_{s=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dG(\dot{c}_t, \overline{\dot{c}_t})}{ds}dt = 0. \tag{3.5}$$

Valorile extreme ale primei variaţii a energiei se numesc *curbe geodezice* ale metricii G care depind de $N-$ conexiunea liniară complexă D.
În relaţia

$$\frac{1}{2}\frac{dE(\tilde{c})(s,t)}{ds}|_{s=0} = \int_a^b Re\{G(\mathbf{T}(\dot{c}_s + \overline{\dot{c}}_s, \dot{c}_t), \overline{\dot{c}_t}) - G(\dot{c}_s, D_{\dot{c}_t + \overline{\dot{c}_t}}\overline{\dot{c}_t})dt = 0,$$

ţinând cont de proprietatea $\frac{dc}{dt} = \dot{c}_t + \overline{\dot{c}_t}$, deducem

Teorema 13. *Curbele geodezice ale metricii G verifică ecuaţia*

$$G(\dot{c}_s, D_{\frac{dc}{dt}}\overline{\dot{c}_t}) = G(\mathbf{T}(\frac{dc}{ds}, \dot{c}_t), \overline{\dot{c}_t}).$$

Fibratele $p_1 : \gamma^*(J^{(2,0)}M) \to \sum^*(T'M)$ şi $p : \sum^*(T'M) \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b]$ sunt fibrate peste varietăţi reale, astfel încât putem discuta doar despre $T_R\gamma^*(J^{(2,0)}M)$. Utilizând funcţia sa tangentă Γ^{-1}, câmpurile $\Gamma_*^{-1}(\delta_{\alpha i})$ vor genera distribuţiile reale $H^*(J^{(2,0)}M), V_1^*(J^{(2,0)}M)$ şi $V_2^*(J^{(2,0)}M)$ în care avem imaginile reale ale vectorilor adaptaţi.

Pe $\gamma^*(J^{(2,0)}M)$ considerăm produsul Hermitian $< X, Y >= G(\Gamma(X), \overline{\Gamma(Y)})$ şi obţinem că
$< d'\Gamma(\delta_t), d'\Gamma(\delta_t) >= G^H(\frac{d'\sum^j}{dt}\delta_{0j}, \frac{d'\overline{\sum^k}}{dt}\delta_{0\bar{k}}) = G(\frac{dz^j}{dt}\delta_{0j}, \frac{d'\bar{z}^k}{dt}\delta_{0\bar{k}})|_{\sum}$.

Definim lungimea curbei $l_{\sum}(s)$ ca fiind

$$\begin{aligned} l_{\sum}(s) &= \int_a^b (< d'\Gamma(\delta_t), d'\Gamma(\delta_t) >)^{\frac{1}{2}}\, dt \qquad (3.6) \\ &= \int_a^b \left(g_{j\bar{k}}\frac{d'\sum^j}{dt}\frac{d'\overline{\sum^k}}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \left(G(\overset{(0)}{V}, \overset{(0)}{\bar{V}})|_{\sum}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Spaţiul (M, F^*) se numeşte *slab Kähler* dacă $g^*_{i\bar{j}}\overset{*}{T}{}^i_{lk}\eta^l\bar{\eta}^j = 0$, [1], p. 94.

Similar, vom afirma că (M, F) este *slab Kähler* dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

$$g_{i\bar{l}}\eta^j\eta^k T^i_{jk}\bar{\eta}^l = 0 \quad ; \quad g_{i\bar{l}}\bar{\eta}^j\eta^k \overset{(1)}{A}{}^i_{k\bar{j}}\bar{\eta}^l = 0. \tag{3.7}$$

Prin urmare, avem

Teorema 14. *Valorile extreme ale lungimii de arc $l_{\sum}(s)$, a spaţiului Finsler complex de ordin doi Kähler slab, definesc o curbă pe $J^{(2,0)}M$, numită $F-$geodezică, ce are ecuaţiile*

$$D_{\overset{(0)}{V}+\overset{(0)}{\bar{V}}}\overset{(0)}{\bar{V}} = 0. \tag{3.8}$$

Corolarul 3. *$F-$geodezicele orizontale ale spaţiului Finsler de ordin doi, Kähler slab, sunt ecuaţiile*

$$\frac{d^2z^i}{dt^2} + L^i_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt} = 0. \tag{3.9}$$

Definiţia 13. *Fie c o curbă pe $J^{(2,0)}M$. Aceasta se numeşte o*

i) $h-$ curbă dacă $\overset{(1)}{V}{}^k = \overset{(2)}{V}{}^k = 0$;

ii) v_1- curbă dacă $\overset{(0)}{V}{}^k = \overset{(2)}{V}{}^k = 0$;

iii) v_2- curbă dacă $\overset{(0)}{V}{}^k = \overset{(1)}{V}{}^k = 0$.

Propoziţia 33. *Fie c o curbă pe $J^{(2,0)}M$. Atunci, c este o*

i) $h-$ curbă dacă şi numai dacă $\frac{dc}{dt} = (\frac{dc}{dt})^H + (\frac{dc}{dt})^{\bar{H}}$;

ii) v_1- curbă dacă şi numai dacă $\frac{dc}{dt} = (\frac{dc}{dt})^{V_1} + (\frac{dc}{dt})^{\bar{V}_1}$;

iii) v_2- curbă dacă şi numai dacă $\frac{dc}{dt} = (\frac{dc}{dt})^{V_2} + (\frac{dc}{dt})^{\bar{V}_2}$.

Definiţia 14. *Curba σ pe varietatea bază M se numeşte o curbă autoparalelă a conexiunii neliniare N dacă extensia sa la $J^{(2,0)}M$ este o $h-$ curbă.*

Teorema 15. *Curba autoparalelă a conexiunii neliniare N are coeficienţii* *duali* $(\overset{(1)}{M}{}^i_j, \overset{(2)}{M}{}^i_j)$ *caracterizaţi de sistemul de ecuaţii diferenţiale:*

$$
\begin{aligned}
\eta^k &= \frac{dz^k}{dt}, \quad \zeta^k = \frac{1}{2}\frac{d^2 z^k}{dt^2}; \\
\frac{\delta \eta^k}{dt} &= \frac{d\eta^k}{dt} + \overset{(1)}{M}{}^i_j \frac{dz^k}{dt} = 0; \\
\frac{\delta \zeta^k}{dt} &= \frac{d\zeta^k}{dt} + \overset{(1)}{M}{}^i_j \frac{d\eta^k}{dt} + \overset{(2)}{M}{}^i_j \frac{dz^k}{dt} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

şi respectiv conjugatele.

Definiţia 15. *Fie c o curbă pe* $J^{(2,0)}M$. *c este autoparalelă în raport cu D, dacă* $D_{(\dot c + \dot{\bar c})}(\dot c + \dot{\bar c}) = 0$.

Teorema 16. *O curbă parametrizată diferenţiabilă este o curbă autoparalelă în raport cu N - conexiunea liniară D dacă şi numai dacă funcţiile* $z^i(t)$, $\eta^i(t)$, $\zeta^i(t)$, $\bar z^i(t)$, $\bar\eta^i(t)$, $\bar\zeta^i(t)$, $t \in [a,b]$, *verifică următorul sistem de ecuaţii diferenţiale*

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 z^i}{dt^2} + \frac{dz^m}{dt}\frac{\omega^i_m}{dt} &= 0 \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\delta\eta^i}{dt} + \frac{\delta\eta^m}{dt}\frac{\omega^i_m}{dt} = 0; \\
\frac{d}{dt}\frac{\delta\zeta^i}{dt} + \frac{\delta\zeta^m}{dt}\frac{\omega^i_m}{dt} &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

şi conjugatele lor.

Definiţia 16. *Fie o curbă* $c : [0,1] \longrightarrow J^{(2,0)}M$, $t \longrightarrow c(t) = (z(t), \eta(t), \zeta(t))$ *şi un număr real* $\lambda > 0$. *Numim omotetia lui c, curba*

$$
\widetilde{c} : [0, \frac{1}{\lambda}] \longrightarrow J^{(2,0)}M, \quad \widetilde{c}(\frac{1}{\lambda}t) := h_\lambda(c(t)). \tag{3.12}
$$

Teorema 17. *Fie o conexiune neliniară N pe* $J^{(2,0)}M$, *cu* $\overset{(1)}{N}{}^i_j$ *omogeni de ordin întâi,* $\overset{(2)}{N}{}^i_j$ *omogeni de ordin doi, şi D o* $N-$ *conexiune liniară ce are coeficienţii* $D\Gamma(N) := (L^i_{jk}, L^i_{j\bar k}, F^i_{jk}, F^i_{j\bar k}, C^i_{jk}, C^i_{j\bar k})$. *Condiţiile necesare şi suficiente ca ecuaţiile autoparalelelor să fie invariante la omotetii sunt:*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad L^i_{mk},\ L^i_{m\bar k} \ \textit{omogene de ordin} \ 0; \\
&2) \quad F^i_{mk},\ F^i_{m\bar k} \ \textit{omogene de ordin} \ -1; \\
&3) \quad C^i_{mk},\ C^i_{m\bar k} \ \textit{omogene de ordin} \ -2.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Teorema 18. *Există W o vecinătate a punctului (p_1, V_1), şi un număr $\epsilon > 0$ astfel încât $\forall (p_0, V_0) \in W$ sistemul*

$$\begin{aligned}
\frac{dz^i}{dt} &= \overset{(0)}{V^i};\\
\frac{d\eta^i}{dt} &= \overset{(1)}{V^i} - \overset{(1)}{N^i_j}\overset{(0)}{V^j};\\
\frac{d\zeta^i}{dt} &= \overset{(2)}{V^i} - \overset{(1)}{N^i_j}\overset{(1)}{V^j} - \overset{(2)}{N^i_j}\overset{(0)}{V^j} + \overset{(1)}{N^i_j}\overset{(1)}{N^j_k}\overset{(0)}{V^k};\\
\frac{d\overset{(\alpha)}{V^i}}{dt} &= -(L^i_{mk}\overset{(0)}{V^k}\overset{(\alpha)}{V^m} + F^i_{mk}\overset{(1)}{V^k}\overset{(\alpha)}{V^m} + C^i_{mk}\overset{(2)}{V^k}\overset{(\alpha)}{V^m} + L^i_{m\bar{k}}\overset{(0)}{\bar{V}^k}\overset{(\alpha)}{V^m}\\
&+ F^i_{m\bar{k}}\overset{(1)}{\bar{V}^k}\overset{(\alpha)}{V^m} + C^i_{m\bar{k}}\overset{(2)}{\bar{V}^k}\overset{(\alpha)}{V^m}),\ \alpha = 0, 1, 2
\end{aligned}$$

are o singură soluţie $t \longrightarrow (p(t), V(t))$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ cu

$$p(0) = p_0 \ \text{şi} \ V(0) = V_0.$$

Obţinem

Teorema 19. *Pentru fiecare $p_0 := (z^i_0, \eta^i_0, \zeta^i_0, \bar{z}^i_0, \bar{\eta}^i_0, \bar{\zeta}^i_0) \in J^{(2,0)}M$, există $\epsilon > 0$ astfel încât pentru fiecare vector tangent $V \in T_{p_0}(J^{(2,0)}M)$ cu $\|V\| < \epsilon$ există doar o autoparalelă a lui D*

$$c : (-2, 2) \longrightarrow J^{(2,0)}M$$

cu $c(0) = p_0$, $\frac{dc}{dt}(0) = V$.

Definiţia 17. *Punctul $c(1) = (z^i_1, \eta^i_1, \zeta^i_1, \bar{z}^i_1, \bar{\eta}^i_1, \bar{\zeta}^i_1)$ se numeşte $D-$exponenţialul vectorului V în p şi este de forma*

$$c(1) = exp^D_p(V). \tag{3.14}$$

În Secţiunea 3.2 studiem aplicaţii armonice între două fibrate de jeturi olomorfe de ordin doi.

O aplicaţie armonică între două varietăţi Riemanniene este o aplicaţie diferenţiabilă cu proprietatea că divergenţa diferenţialei sale este nulă.

Fie $f : M \to N$ o funcţie diferenţiabilă, unde (M, g) este o varietate Riemann compactă iar N are o metrică Riemanniană h. Definim funcţionala *energie* ca fiind

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M |df|^2 d\mu=\frac{1}{2}\int_M g^{ij}(x)h_{\alpha\beta}(f(x))\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}d\mu$$

şi extremele corespunzătoare, utilizând variaţia Euler-Lagrange, care ne conduce la câmpul *tensorial* al lui f,

$$\tau(f)=div(df)=g^{ij}(\nabla df)_{ij}.$$

Asemenea varietăţilor complexe, notăm cu $(z^i,\ \eta^i,\ \zeta^i)$, $i=\overline{1,m}$ şi $(u^\alpha,v^\alpha,w^\alpha)$, $\alpha=\overline{1,n}$ coordonatele complexe pe $J^{(2,0)}M$ şi respectiv $J^{(2,0)}N$.

Fie $f:M\to N$ o funcţie omomorfă, dată local de $u^\alpha=f^\alpha(z)$, $\alpha=\overline{1,n}$, şi $\sigma:t\to(z^i(t))$ o curbă pe M. Din olomorfie avem $\frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar z^i}=0$.

Funcţia f poate fi extinsă, ca în ([56]), la o funcţie $f'^*:T'M\to T'N$, definită prin $\eta^i\frac{\partial}{\partial z^i}\xrightarrow{f'^*}\eta^i\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial v^\alpha}$. Astfel, pe $T'N$ putem considera următoarele coordonate complexe ($u^\alpha=f^\alpha(z),\ v^\alpha=\eta^i\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}$). Prin conjugare, acest raţionament poate fi luat în considerare pe $T''N$.

Această metodă poate fi aplicată pentru $J^{(2,0)}N$.

Propoziţia 34. *Funcţia $f'^{**}:J^{(2,0)}M\to J^{(2,0)}N$ care în coordonatele locale este de forma*

$$(z^i,\eta^i,\zeta^i)\xrightarrow{f'^{**}}(u^\alpha=f^\alpha(z),\ v^\alpha=\eta^i\frac{\partial u^\alpha}{\partial z^i},\ w^\alpha=\zeta^i\frac{\partial v^\alpha}{\partial \eta^i}) \tag{3.15}$$

este bine definită.

Astfel, avem următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} J^{(2,0)}M & \xrightarrow{f'^{**}} & J^{(2,0)}N \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \Pi_1 \\ T'M & \xrightarrow{f'^{*}} & T'N \\ \downarrow \pi & & \downarrow \Pi \\ M & \xrightarrow{\Sigma} & N \end{array}. \tag{3.16}$$

Fie $\sigma:[a,b]\to M$ o curbă pe M şi extensia sa $c:[a,b]\to J^{(2,0)}M$. Prin combinarea diagramelor (3.2) şi (3.16), obţinem o curbă $l=f\circ c:[a,b]\to J^{(2,0)}N$.

Curba $f\circ\Sigma:[-\varepsilon,\varepsilon]\times[a,b]\to N$ este o variaţie $(s,t)\to u^\alpha(s,t)=(f^\alpha(z^k(s,t)))$, cu $u^\alpha(0,t)=f^\alpha(\sigma(t))$.

Funcţiile $f'^*\circ\gamma$ şi $f'^{**}\circ\Gamma$ transportă fibratele $\Sigma^*(T'M)$ şi $\gamma^*(J^{(2,0)}M)$ în $T'N$ şi respectiv $J^{(2,0)}N$.

Definiţia 18. *O funcţie armonică din $J^{(2,0)}M$ în $J^{(2,0)}N$ este o funcţie olomorfă $f : M \to N$ care furnizează extremele integralei*

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\int_a^b \sum_{p,q=0,1,2} g^{\bar{j}i} \overset{(p)}{X}{}^{\alpha}_{(q)i} \overset{(p)}{\bar{X}}{}^{\alpha}_{(q)\bar{j}} h_{\alpha\bar{\beta}} dt := \frac{1}{2}\int_a^b E(l(s,t))|_{s=0} dt \qquad (3.17)$$

de-a lungul curbei $l : t \to (u^\alpha(t), v^\alpha(t), w^\alpha(t))$, construită mai sus, iar $\overset{(0)}{X}{}^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}$, $\overset{(1)}{X}{}^\alpha = \frac{\overset{N}{\delta} v^\alpha}{dt}$, $\overset{(2)}{X}{}^\alpha = \frac{\overset{N}{\delta} w^\alpha}{dt}$ sunt vectori tangenţi la curbele variaţie.

Teorema 20. *Fie $c : t \to (z^k(t), \eta^k(t), \zeta^k(t))$ o curbă dată pe $J^{(2,0)}M$ şi $l : t \to (u^\alpha(t), v^\alpha(t), w^\alpha(t))$ o curbă indusă pe $J^{(2,0)}N$ de funcţia olomorfă $f : M \to N$. Atunci,*

i) $f : M \to N$ este o funcţie armonică dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} & Re\ \{H(\mathbf{T}^N(\dot{l}_s + \overline{\dot{l}_s}, \dot{l}_t), \overline{\dot{l}_t}) - E(l(t))G\left(\mathbf{T}^M(\dot{c}_s + \overline{\dot{c}_s}, \dot{c}_t), \overline{\dot{c}_t}\right)\}_{|s=0} \\ = \ & Re\ \{H(\dot{l}_s, \overset{N}{D}_{\dot{l}_t + \overline{\dot{l}_t}} \overline{\dot{l}_t}) - E(l(t))G(\dot{c}_s, \overset{M}{D}_{\dot{c}_t + \overline{\dot{c}_t}} \overline{\dot{c}_t})\}_{|s=0} \end{aligned}$$

şi

$$Im\ E(l(t))\ Re\ \{G\left(\mathbf{T}^M(\dot{c}_s + \overline{\dot{c}_s}, \dot{c}_t), \overline{\dot{c}_t}\right) - G(\dot{c}_s, \overset{M}{D}_{\dot{c}_t + \overline{\dot{c}_t}} \overline{\dot{c}_t})\}_{|s=0} = 0.$$

ii) Dacă c este o curbă geodezică pe $J^{(2,0)}M$ şi f este o funcţie armonică, atunci l este o curbă geodezică pe $J^{(2,0)}N$.

Corolarul 4. *Dacă $f : M \to N$ induce o funcţie total geodezică între $J^{(2,0)}M$ şi $J^{(2,0)}N$, (i.e., care transportă geodezice din $J^{(2,0)}M$ în geodezice din $J^{(2,0)}N$), atunci f este o funcţie armonică din $J^{(2,0)}M$ în $J^{(2,0)}N$.*

*

*

Aşadar, am studiat geometria varietăţii complexe $J^{(2,0)}M$, prin descompunerea fibratului tangent complexificat utilizând o conexiune neliniară complexă. Am definit şi studiat o $N-$ conexiune liniară complexă pentru care am calculat torsiunile şi curburile acesteia. Am stabilit relaţia dintre spray şi conexiunea neliniară complexă. Utilizând metoda variaţională în spaţiul Lagrange complex de ordin doi, am obţinut conexiunea Chern-Lagrange şi cea canonică care au rol important în studiul geometriei acestui fibrat. Am identificat condiţiile în care cele două conexiuni coincid.

Din coeficienţii (c.n.c.) am obţinut un spray, care la rândul lui generează o (c.n.c.) prin coeficienţii duali care generează un alt spray, generând un şir de (c.n.c.). Am studiat structurile Lagrange afine pe $J^{(2,0)}M$ care sunt o extensie a structurilor Lagrange afine pe $T'M$.

Am realizat prelungirea structurilor Hermitiene la fibratul jeturilor olomorfe $J^{(2,0)}M$, determinând metrica Hermitiană G care acţionează pe secţiunile lui $T_C(J^{(2,0)}M)$.

Am studiat prima variaţie a energiei pentru curbele din $J^{(2,0)}M$, în funcţie de structura metrică G şi de $N-$ conexiunea liniară D Chern-Finsler, obţinând curbele geodezice ale energiei. Am extins teoria funcţiilor armonice la curbele parametrizate pentru două (2,0)- fibrate de jeturi olomorfe.

Bibliografie

[1] M. Abate, G. Patrizio, *Finsler Metrics - A Global Approach*, Lecture Notes in Math., **1591**, Springer-Verlag, 1994.

[2] T. Aikou, *Finsler geometry on complex vector bundles*, Riemannian Finsler Geometry, MSRI Pub. **50**, 2004.

[3] T. Aikou, *Averaged Riemannian metrics and connection with application to locally conformal Berwald manifolds*, Publ. Math. Debrecen **80** (2012, 179-198.

[4] T. Aikou, L. Kozma, *Global aspects of Finsler geometry*, Handbook of Global Analysis, ed. D. Krupka and D. Saunders, 2008, 1-39.

[5] N. Aldea, *Curvature tensors on complex Lagrange spaces*, Finsler and Lagrange Geometries (Iasi, 2001), 3–8, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[6] N. Aldea, *Complex Finsler spaces of constant holomorphic curvature*, Proc. Differential Geometry and Its Applications, 179–190, Matfyzpress, Prague, 2005.

[7] N. Aldea, G. Munteanu, *On complex Landsberg and Berwald spaces*, Journal of Geometry and Physics, **62** (2012), 2, 368-380.

[8] N. Aldea, G. Munteanu, *On projective invariants of the complex Finsler spaces*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 6, 562–575.

[9] N. Aldea, G. Munteanu, *Projectively related complex Finsler metrics*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **13** (2012), 5, 2178–2187.

[10] N. Aldea, G. Munteanu, *Some classes of complex Cartan spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **57** (2012), 1, Tome LV, 5-15.

[11] N. Aldea, G. Munteanu, *On complex Finsler spaces with Randers metrics*, Journal Korean Math. Soc., **46** (2009), no. 5, 949-966.

[12] M. Anastasiei, *Selected papers*,arXiv:1202.6202v2, math.DG.

[13] M. Anastasiei, I. Comic, *Geometry of k-Lagrange spaces of second order*, Mat. Vesnik **49** (1997), no. 1, 15–22.

[14] G. Atanasiu, *New aspects in differential geometry of the second order*, Seminarul de Mecanica, Univ. din Timisoara, 2001, 1-81.

[15] G. Atanasiu, M. Neagu, *Canonical nonlinear connections in the multi-time Hamilton Geometry*, BJGA, Vol **14**(2009), nr. 2, 1-12.

[16] G. Atanasiu, M. Neagu, *Distinguished torsion, curvature and deflection tensors in the multi-time Hamilton Geometry*, Diff. Geometry and Dynamical Systems, **11** (2009), 20-40.

[17] D. Bao, S.S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemannian Finsler Geom.*, Graduate Texts in Math., **200**, Springer-Verlag, 2000.

[18] N. Brinzei (Voicu), *Geodesics and Jacobi fields in second order geometry*, Ed. Univ. Transilvania Brasov, 2007.

[19] I. Bucătaru, *Characterisation of the nonlinear connection in the higher order geometry*, BJGA Vol. **2**(1997), nr. 2, 13-22.

[20] I. Bucătaru, O.A. Constantinescu and M.F. Dahl, *A geometric setting for systems of ordinary diferential equations*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **8** (6) (2011), 1291–1327.

[21] I. Bucătaru, *A setting for higher order differential equations fields and higher order Lagrange and Finsler spaces* , arXiv:1205.0920, 2012.

[22] I. Bucătaru, R. Miron, *Finsler-Lagrange Geometry. Applications to dynamical systems*, Ed. Acad. Române, 2007.

[23] K. Chandler, P-M. Wong, *Finsler geometry of holomorphic jet bundles*, Riemann-Finsler geometry, MSRI Publ., **50** (2004), 107-196.

[24] I. Čomić, M. Anastasiei, *Curvature theory of generalized connection in* $J^2_k M$, Novi Sad, J. Math. Vol. **36**, No 1, (2006), 1-13.

[25] M. Crampin, W. Sarlet, F. Cantrijn, *Higher-order equations and higher-order Lagrangian mechanics*, Math. proc. Cambridge Phil. Soc., 1986 (99), 565-587.

[26] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board of Math. Sc. AMS, **50** (1983), 85 p.

[27] Ch. Ehresmann, *Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differentiable*, colloq. de Topol. CBRM, Bruxelles, 1953, 29-55.

[28] M. Green, P. Griffiths, *Two aplications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symp. Berkeley, 1979, Springer, New York, 1980.

[29] F. Helen, J. C. Wood, *Harmonic maps,* Handbook of Global Analysis, Elsevier, 2007, 417-492.

[30] C. Ida, *Some global results on holomorphic Lagrangian fibrations*, Bull. Math. Analysis and Applications, **3**, 2011, 35-44.

[31] C. Ida, P. Popescu, *Local and global structures on affine holomorphic bundles*, Bull. Transilvania University of Brasov, **5(54)**, no 2 (2012), 27-40.

[32] I. Kolar, J. Slovak, *Prolongation of vector fields to jet bundles*, Proceedings of the Winter School "Geometry and Physics", Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1990, 102-111.

[33] D. Krupka, *Some Geometric Aspects of Variational Problems in Fibred Manifolds*, Folia Fac. Sci Nat. Univ. Purk. Brunensis, Physica 14, Brno, 1973.

[34] O. Krupkova, *Second order ordinary differential equations in jet bundles and the inverse problem of the calculus of variations*, Handbook of global analysis, 2008, 837-904

[35] M. de Leon, P.R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, 1989.

[36] P. Libermann, Ch. Marle *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publ. Co., 1987.

[37] A. Manea, *A decomposition of the bundle of second order jets on a complex manifold,* Analele St. Univ. Al. I. Cuza, Iasi, Tome **LVI** (2010), 151-162.

[38] A. Manea, C. Ida, *A V-Cohomology with respect to complex Liouville distribution*, Int. Electronic J. of Geometry. **5**, No. 1, 2012, 151-162.

[39] I.M. Masca, V.S. Sabau, H. Shimada, *The L-dual of an (α, β) Finsler space of order two*, BJGA, Vol. **12**(2007), nr. 1, 85-99.

[40] I. Mihai, *Capitole Speciale de Geometria Varietatilor Complexe*, Ed. Univ. Bucuresti, 1995.

[41] I. Mihai, *Complex Differential Geometry*, Handbook of Differential Geometry, vol. II, Eds. F. Dillen and L. Verstraelen, 383-435, North-Holland, 2006.

[42] R. Miron, *The geometry of higher order Lagrange spaces. Aplications to Mechanics and Physics*, Kluwer Acad. Publ., FTPH, **82**, 1997.

[43] R. Miron, G. Atanasiu, *Higher-order Lagrange spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., T.**41, 3-4** (1996), 251-263.

[44] R. Miron, V. Balan, P.C. Stavrinos, G. Tsagas, *Deviations of stationary curves in the bundles* $Osc^{(2)}M$, Balkan J. of Geometry and Its Appl., **2** (1997), nr. 1, 51-60.

[45] X. Mo, *Harmonic maps from Finsler manifolds*, Illinois J. Math., **45** (2001), 1331-1345.

[46] X. Mo, *An introduction to Finsler geometry*, World Scientific, 2006.

[47] A. Morimoto, *Prolongations of geometric structures*, Lectures Notes, Math. Inst. Nagoya Univ., 1969.

[48] F. Munteanu, *Second order partial differential equations (SOPDEs) and nonlinear connections on the tangent bundle of* k^1*-velocities of a manifold*, Diff. Geometry-Dynamical Systems, vol. **8**(2006), 166-180.

[49] G. Munteanu, *Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries*, Kluwer Acad. Publ., FTPH **141**, 2004.

[50] G. Munteanu, *On almost tangent structure of the second order*, Bul. Univ. din Brasov, **31**, 1989, 23-28.

[51] G. Munteanu, *Lagrange geometry of second order*, The Proc. of the fifth Nat. Sem. on Finsler and Lagrange spaces, Brasov, 1988, 285-295.

[52] G. Munteanu, G. Atanasiu, *On Miron connections on Lagrange space of second order*, Tensor N.S. , **56**, 1995, 166-174.

[53] G. Munteanu, C. Ida, *Affine structure on complex foliated manifolds*, Analele St. Univ. "Al. I.Cuza", Iasi, **51**, s.I Math. (2005), 147-154.

[54] S. Nishikawa, *Harmonic maps of Finsler Manifolds*, Topics in differential Geometry, Ed. Academiei Române, 2008, 207-247.

[55] C. Oniciuc. *Tangency and Harmonicity Properties.* PhD Thesis, Geometry Balkan Press 2003, http: //www.mathem.pub.ro /dgds/mono /dgdsmono.htm.

[56] V. Oproiu, *Harmonic maps between tangent bundles*, De. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, **47**, Nr. 1, (1989), 47-55.

[57] G. Pitis, *Geometry of Kenmotsu manifolds*, Ed. Transilvania Brasov, 2007.

[58] M. Popescu, P. Popescu, *Lagrangians and higher order tangent spaces*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, **15** (2010), 142-148.

[59] M. Popescu, P. Popescu, *A general background of higher order geometry and induced objects on subspaces*, Balkan J. Geom. Appl., **7**, no 1 (2002), 79-90.

[60] M. Roman, *Special higher order Lagrange spaces. Applications*, Ph.D. Thesis, Univ. Al. I. Cuza, Iasi, 2001.

[61] H. L. Roydan, *Complex Finsler Metrics*, Contemporary Math., **49** (1984), 119-124.

[62] G.Sardanashvily, *Advanced Differential Geometry for theoreticians*, Lambert Acad. Publ., 2013.

[63] D.J. Saunders, *The geometry of Jet Bundles*, London Math. Soc., Lecture Note Series, **142**, Cambridge U.P. 1989.

[64] D. J. Sauders, *Jet fields, connections and second-order differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen. 20 3261, 1987.

[65] W. Stoll, P.-M. Wong, *On Holomorphic jet bundles*, preprint, arxiv: math/0003226v1/2000.

[66] I. Vaisman, *Cohomology and Differential Forms*, M. Dekker Publ. House, 1973.

[67] I. Vaisman, d_f *cohomology of Lagrangian foliations*, Monatshefte fur Math., **106** (1988), 221-244.

[68] I. Vaisman, *Lagrange geometry on tangent manifolds*, Int. J. of Math. and Math. Sci., **51** (2003), 3241-3266.

[69] N. Voicu, *Biharmonic maps from Finsler spaces*, arXiv:1210.2068v3, 2012.

[70] N. Voicu, G. Atanasiu, *Lifts of the almost tangent structures to* Osk^2M, Novi Sad J. Math **29**, 3 (1999), 35-53.

[71] V. Zaluţchi, *The geometry of* $(2,0)$*-jet Bundles*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **12** (2010), 311-320.

[72] V. Zaluţchi, *The d-torsions and curvatures on 2-jet holomorphic bundles*, Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III **3(52)** (2010), 163-175.

[73] V. Zaluţchi, *The Chern-Lagrange connection in the holomorphic jets bundle of order two*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **13** (2011), 208-219.

[74] V. Zaluţchi, *On the geodesic curves of second order holomorphic jets bundle*, Riemannian geometry and applications-Proceeding RIGA 2011, Ed. Univ. Bucureşti, Bucharest, 2011, 303-314.

[75] V. Zaluţchi, G. Munteanu, *Connections in the holomorphic jets bundle of order two*, Analele St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, Mat. (N.S.), Tome **LVII** (2011), Suppl.1, 279-290.

[76] V. Zaluţchi, *Prolongation of hermitian structures to* $J^{(2,0)}M$ *holomorphic jets bundle*, Bull. Transilvania University of Brasov, Vol. **5(54)**, No. 2 (2012), 125-132.

[77] V. Zaluţchi, *Local structures on affine bundles over holomorphic tangent bundle*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **15** (2013), 121-128.

[78] V. Zaluţchi, *Harmonic maps between two second order holomorphic jets bundle*, acceptată la Novi-Sad J. of Math.

[79] C. Zhong, T. Zhong, *Hodge decomposition theorem on strongly Kahler Finsler manifolds*, Science in China, series A: Mathematics, **49** (2006) nr. 11, 1696-1714.

[80] P.-Mann Wong, *A survey of complex Finsler geometry*, Advanced Studied in Pure Math., Vol. **48**, Math. Soc. of Japan, (2007), 375-433.

Rezumat

REZUMAT

În această Teză este studiată geometria fibratului $J^{(2,0)}M$ al jeturilor de ordin doi, de funcţii olomorfe. $J^{(2,0)}M$ are o structură de fibrat olomorf, iar pe spaţiul său total se introduc obiecte geometrice specifice: conexiuni liniare, structuri metrice determinate de un Lagrangian complex de ordin doi, sunt studiate probleme variaţionale.

Lucrarea este împărţită în 3 capitole.

Capitolul 1 are un caracter monografic şi prezintă cunoaşterea în domeniul jeturilor de funcţii olomorfe. În ultima secţiune sunt prezente contribuţii originale şi se evidenţiază structura olomorfă a lui $J^{(2,0)}M$.

Capitolul 2 studiază geometria varietăţii complexe $J^{(2,0)}M$. Studiul se referă la: - fibratul tangent complexificat; - conexiunile neliniare complexe; - N-conexiunile liniare complexe; -calculul torsiunilor şi curburilor unei astfel de N- conexiuni; - deducerea conexiunilor metrice. Studiul devine consistent în cazul spaţiilor Lagrange şi Finsler complexe de ordin doi, în care două conexiuni prezintă interes: conexiunea Chern-Lagrange şi conexiunea canonică. Conexiunea neliniară se determină din problema variaţională folosind teoria spraylui complex. Un studiu aparte se referă la obţinerea unor condiţii de globalizare a unor structuri Lagrange afine.

Capitolul 3 prezintă problemele variaţionale pe fibrate olomorfe de ordin doi. Din prima variaţie a energiei pentru curbele din $J^{(2,0)}M$ se obţin geodezicele unui spaţiu Finsler complex de ordin doi. Se studiază diversele tipuri de curbe pe $J^{(2,0)}M$. Studiul aplicaţiilor armonice între două spaţii Finsler complexe de ordin doi este făcut în ultima secţiune a capitolului.

SUMMARY

This PhD thesis comprises the geometry of the jets bundle of order two $J^{(2,0)}M$, of the holomorphic maps. $J^{(2,0)}M$ has a holomorphic fiber bundle

structure, and on its total space we introduce specific geometric objects: linear connections, metric structures given by a complex Lagrangian structure of order two, and there are studied the variational problems.

The thesis is divided in 3 chapters.

Chapter 1 has a monographic feature and presents knowledge in the holomorphic maps. New results are offered in the last section where the holomorphic structure of the $J^{(2,0)}M$ stands out.

Chapter 2 describes the geometry of the complex manifold $J^{(2,0)}M$. The study refers to: - the complexified tangent bundle; -the complex nonlinear connections; -N- complex linear connections; -the calculus of the curvature and torsion tensors of a N- connection; the calculus of the metric connections. The study becomes consistent in the complex second order Lagrange and Finsler spaces, in which we obtain two important connections: the Chern-Lagrange connection and the canonical connection. Using the variational problem we obtain the nonlinear connection, from a complex spray. We obtain the globalization conditions for the affine Lagrange structures.

Chapter 3 presents the variational problems on the holomorphic fiber bundles of order two. Using the first variation of the energy for the curves from the $J^{(2,0)}M$, we obtain the geodesics of the second complex Finsler space. We study different types of curves on the $J^{(2,0)}M$. The study of the harmonic maps between two second complex Finsler spaces is presented in the last section of this chapter.

Curriculum vitae

Data naşterii: 11.05.1976
Locul naşterii: Bucureşti, România
Contact: zalvio@yahoo.com

EDUCAŢIE

1. 2007-2013 Doctorand, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea "Transilvania" din Braşov, Braşov, România

2. 1998-2000 Licenţă (Informatică), Postuniversitara de Informatică, Universitatea Bucureşti, Bucureşti, România

3. 1994-1998 Licenţă (Matematică), Facultatea de Matematică, Universitatea Bucureşti, Bucureşti, România

PUBLICAŢII

Articole

1. V. Zaluţchi, *The geometry of* $(2,0)$*-jet Bundles*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **12** (2010), 311-320.

2. V. Zaluţchi, *The d-torsions and curvatures on 2-jet holomorphic bundles*, Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III **3(52)** (2010), 163-175.

3. V. Zaluţchi, *The Chern-Lagrange connection in the holomorphic jets bundle of order two*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **13** (2011), 208-219.

4. V. Zaluţchi, *On the geodesic curves of second order holomorphic jets bundle*, Riemannian geometry and applications-Proceeding RIGA 2011, Ed. Univ. Bucureşti, Bucharest, 2011, 303-314.

5. V. Zaluţchi, G. Munteanu, *Connections in the holomorphic jets bundle of order two*, Analele St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, Mat. (N.S.), Tome **LVII** (2011), Suppl.1, 279-290.

6. V. Zaluţchi, *Prolongation of hermitian structures to $J^{(2,0)}M$ holomorphic jets bundle*, Bull. Transilvania University of Brasov, Vol. **5(54)**, No. 2 (2012), 125-132.

7. V. Zaluţchi, *Local structures on affine bundles over holomorphic tangent bundle*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **15** (2013), 121-128.

8. V. Zaluţchi, *Harmonic maps between two second order holomorphic jets bundle*, acceptată la Novi-Sad J. of Math.

ACTIVITATE PROFESIONALĂ

Profesor de Matematică, Şcoala nr.141, Bucureşti, 1997-2001.

Profesor de Informatică, Şcoala Gimnazială nr.193, Bucureşti, 2012-2013.

Trainer MS Office, IT Learning, Bucureşti, 2011-2013.

Inginer, S.C. ROMTELECOM S.A., Bucureşti, 2001-2011. Responsabilităţile mele au inclus întreţinerea bazei de date pentru reţeaua de telecomunicaţii, administrare server pentru o aplicaţie GIS, actualizare bază de date, training pentru angajaţii din companie care utilizau aplicaţia Smallworld precum şi coordonarea echipelor la nivel naţional în vederea colectării şi introducerii datelor în aplicaţie.

FORMARE

Certificat de acordare a definitivării, 2000, Universitatea Bucureşti, România

Curs "Planning design and new tehnologies in access network", 2001, Bucureşti, S.C. ROMTELECOM S.A., România

Curs "Microsoft Access", 2002, Bucureşti, S.C. ROMTELECOM S.A., România

Curs "SQL-Admis de MS. Access", 2002, Bucureşti, S.C. ROMTELECOM S.A., România

Curs "Business English- nivel intermediar", 2003, Bucureşti, S.C. ROMTELECOM S.A., România

Curs "Optical Fiber Mapping" , 2007, Bucureşti, S.C. ROMTELECOM. S.A., România

Curs "PNI 4.1, O.N.A., FRM User training", 2008, Varsovia, Polonia.

Curs "Smallworld PNI 4.1 and Globema FO modules", 2009, Bucureşti, Globema, România

Curs "Smallworld Administrator Training", 2009, Bucureşti, S.C. ROMTELECOM. S.A., România

Curs ”Train the Trainers”, 2009, Bucureşti, Globema, România

Curs ”Smallworld PNI Advance User Training”, 2009, Bucureşti, Globema, România

Curs ”Communication course in English for European Trade Unionists”, 2010, Northumbria University, Marea Britanie

Curs ”Microsoft Office Specialist EXCEL 2010-VBA”, Bucureşti, România

MOS Specialist - 2010, 2011, Microsoft, Bucureşti, România

Curs ”Management”, 2011, INCSMPS, Bucureşti, România

Curs formator CNFPA, 2012, Bucureşti, România

Curs Dezvoltator e-learning, ANC, 2013, Bucureşti, România

Curs Formator de formator, CNFPA, 2013, Bucureşti, România

LIMBI STRĂINE

Română (limba maternă)

Engleză

Franceză (competenţe profesionale limitate)

LIMBAJE DE PROGRAMARE

Pascal, C++, Latex

SOFTWARE

MS Office, PNI Smallworld, AutoCAD, TruInfo Viewer, SmartLF, Nero, Interim Network Inventory, Oracle Financiar

Curriculum vitae

Birth date: 11 May 1976

Place of birth: Bucharest, Romania

Contact info: zalvio@yahoo.com

EDUCATION

1. 2007-2013 Ph.D. student, The Faculty of Matematics and Informatics, "Transilvania" University of Braşov, Braşov, Romania

2. 1998-2000 BA (Computer Science), Informatics Academic, University of Bucharest, Bucharest, Romania

3. 1994-1998 BA (Mathematics), Facultatea de Matematică, University of Bucharest, Bucharest, Romania

PUBLICATIONS

Papers

1. V. Zaluţchi, *The geometry of* $(2,0)$*-jet Bundles*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **12** (2010), 311-320.

2. V. Zaluţchi, *The d-torsions and curvatures on 2-jet holomorphic bundles*, Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III **3(52)** (2010), 163-175.

3. V. Zaluţchi, *The Chern-Lagrange connection in the holomorphic jets bundle of order two*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **13** (2011), 208-219.

4. V. Zaluţchi, *On the geodesic curves of second order holomorphic jets bundle*, Riemannian geometry and applications-Proceeding RIGA 2011, Ed. Univ. Bucureşti, Bucharest, 2011, 303-314.

5. V. Zaluţchi, G. Munteanu, *Connections in the holomorphic jets bundle of order two*, Analele St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, Mat. (N.S.), Tome **LVII** (2011), Suppl.1, 279-290.

6. V. Zaluţchi, *Prolongation of hermitian structures to* $J^{(2,0)}M$ *holomorphic jets bundle*, Bull. Transilvania University of Brasov, Vol. **5(54)**, No. 2 (2012), 125-132.

7. V. Zaluţchi, *Local structures on affine bundles over holomorphic tangent bundle*, Differ. Geom. Dyn. Syst., **15** (2013), 121-128.

8. V. Zaluţchi, *Harmonic maps between two second order holomorphic jets bundle*, accepted by Novi-Sad J. of Math.

PROFESSIONAL CAREER

Professor of Mathematics, School no.141, Bucharest, 1997-2001.

Professor of Informatics, School no.193, Bucharest, 2012-2013.

Trainer MS Office, IT Learning, Bucharest, 2011-2013.

Engineer, S.C. ROMTELECOM S.A., Bucharest, 2001-2011. My responsabilities included database maintenance for telecommunications network, management server for GIS application, updating the database, training for employees in the company who were using the Smallworld software and coordinating national teams for collecting and entering data into database.

TRAINING

Finalized certificate Teacher in mathematics department, 2000, University of Bucharest

Course "Planning design and new technologies in access network", Telecommunications network design, 2001, Bucharest, S.C. ROMTELECOM S.A.

Course "Microsoft Access", 2002, Bucharest, S.C. ROMTELECOM S.A.

Course "SQL-Allowed by MS. Access", 2002, Bucharest, S.C. ROMTELECOM S.A.

Course Business English- intermediary level, 2003, Bucharest, S.C. ROMTELECOM S.A

Course "Optical Fiber Mapping" , 2007, Bucharest, S.C. ROMTELECOM. S.A.

Course "PNI 4.1, O.N.A., FRM User training", 2008, , Warszawa, Poland.

Course "Smallworld PNI 4.1 and Globema FO modules", 2009, Bucharest, Globema

Course "Smallworld Administrator Training", 2009, Bucharest, S.C. ROMTELECOM. S.A.

Course "Train the Trainers", 2009, Bucharest, Globema

Course "Smallworld PNI Advance User Training", 2009, Bucharest, Globema

Course "Communication course in English for European Trade Unionists", 2010, Northumbria University, Great Britain

Course "Microsoft Office Specialist EXCEL 2010-VBA", Bucharest, Romania

MOS Specialist - 2010, 2011, Microsoft, Bucharest

Course "Management", 2011, INCSMPS, Bucharest

Course ”Training”-Adult training, CNFPA, 2012, Bucharest

Course Developer eLearning platform, ANC, 2013, Bucharest

Course ”Train the trainers” -Adult training, CNFPA, 2013, Bucharest

LANGUAGES

Romanian (native)

English

French (limited working proficiency)

PROGRAMMING LANGUAGES

Pascal, C++, Latex

SOFTWARE

MS Office, PNI Smallworld, AutoCAD, TruInfo Viewer, SmartLF, Nero, Interim Network Inventory, Oracle Financiar,