Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Alexandru Codrin IONESCU

Operatori diferențiali pe spații Finsler complexe

Differential operators on complex Finsler spaces

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător științific

Prof. dr. Gheorghe MUNTEANU

BRAȘOV, 2018

UNIUNEA EUROPEANĂ
Fondul Social European POSDRU 2007-2013
Instrumente Structurale 2007-2013
OIPOSDRU
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
Universitatea TRANSILVANIA din Braşov

Investeşte în oameni!

FONDUL SOCIAL EUROPEAN – Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013

Axa prioritară 1 Educaţie şi formare profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere

Domeniul major de intervenţie 1.5. Programe doctorale şi post-doctorale în sprijinul cercetării

Titlul proiectului: Burse doctorale şi postdoctorale pentru cercetare de excelenţă

Numărul de identificare al contractului: POSDRU/159/1.5/S/134378

Beneficiar: Universitatea *Transilvania* din Braşov

COMPONENŢA
Comisiei de doctorat
Numită prin ordinului Rectorului Universităţii Transilvania din Braşov
Nr. .... din ....

PREŞEDINTE:	Conf. dr. Eugen PĂLTĂNEA Decan, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea *Transilvania* din Braşov
CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC:	Prof. dr. Gheorghe MUNTEANU Universitatea *Transilvania* din Braşov
REFERENŢI:	Prof. dr. Ion MIHAI Universitatea din Bucureşti Prof. dr. Vladimir BALAN Universitatea *Politehnica* Bucureşti Conf. dr. Nicoleta-Codruţa ALDEA Universitatea *Transilvania* din Braşov

Data susţinerii publice a tezei de doctorat: 27.06.2018.

Eventualele aprecieri sau observaţii asupra conţinutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa alexandru-codrin.ionescu@unitbv.ro.

Totodată, vă invităm să luaţi parte la şedinţa publică de susţinere a tezei de doctorat.

Vă mulţumim!

Cuprins

		Pag. teză	Pag. rez.
	Introducere	ii	iii
1	**Operatorul Laplace pentru funcţii olomorfe pe grupuri Lie complexe**	1	1
	1.1 Operatorul Laplace pe varietăţi Finsler complexe	1	1
	1.1.1 Operatorul Laplace orizontal pentru funcţii	1	1
	1.1.2 Operatorul Laplace orizontal pentru forme orizontale	2	2
	1.2 Grupuri Lie complexe	4	4
	1.3 Operatori Laplace pentru funcţii olomorfe pe G	7	7
	1.4 Ultim multiplicatori olomorfi pentru câmpuri vectoriale olomorfe pe G	14	11
2	**Algebroizi Lie olomorfi**	17	13
	2.1 Noţiuni introductive	18	14
	2.2 Expresii locale	20	16
	2.3 Conexiuni liniare	24	18
	2.4 Lifturi verticale şi complete	27	21
	2.5 Semispray-uri şi spray-uri ale fibratelor olomorfe ancorate	28	22
3	**Conexiuni pe algebroizi Lie olomorfi**	34	25
	3.1 Geometria spacţiului total al algebroidului E	35	26
	3.1.1 Fibratul tangent al unui algebroid Lie olomorf	35	26
	3.1.2 Structura de algebroid Lie a fibratului $T'E$	38	28
	3.1.3 Conexiuni neliniare pe $T'E$	39	29
	3.1.4 Conexiuni liniare pe $T'E$	40	31
	3.2 Prelungirea unui algebroid Lie olomorf	42	32
	3.2.1 Semispray-uri şi spray-uri	44	34
	3.2.2 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}'E$	45	35
	3.3 Structuri Lagrange induse pe algebroizi Lie olomorfi	48	37

4 Structuri Finsler pe algebroizi Lie olomorfi 55 41
4.1 Fibratul prelungire complexificat al unui algebroid Lie olomorf 55 41
4.1.1 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ 57 43
4.2 Structuri Finsler complexe pe un algebroid Lie 59 44
4.1.1 Conexiunea Chern-Finsler a unui algebroid 60 45
4.1.2 Algebroizi Kähler Finsler 67 49

5 Operatori Laplace pe algebroizi Lie Finsler complecşi 69 51
5.1 Derivate covariante pe prelungire 70 51
5.2 Operatori Laplace verticali şi orizontali pentru funcţii definite pe E 71 52
5.3 Operatorul Laplace orizontal pentru forme definite pe $\mathcal{T}E$ 76 55

6 Teoreme de anulare pe algebroizi Lie olomorfi 80 59
6.1 Conexiunile Chern-Finsler şi Rund 81 59
6.2 Teoreme de anulare 83 61

7 Produsul "warped" al algebroizilor Lie olomorfi 87 63
7.1 Proprietăţi ale structurilor Finsler 88 63
7.2 Produsul "warped" al algebroizilor 90 64
7.2.1 Fibratul prelungire al fibratului produs "warped" . . . 91 65
7.2.2 Conexiunea Chern-Finsler a produsului "warped" . . . 92 66
7.3 Un model de produs Finsler "warped" pentru gravitaţie şi electromagnetism 95 68

8 Contribuţii originale. Diseminarea rezultatelor 99 71

Bibliografie 102 75

Anexe 110 81

Contents

		Thesis page	Abs. page
	Introduction	ii	iii
1	**The Laplace operator for holomorphic functions on complex Lie groups**	1	1
	1.1 The Laplace operator for complex Finsler manifolds	1	1
	1.1.1 The horizontal Laplace operator for functions	1	1
	1.1.2 The horizontal Laplace operator for horizontal forms	2	2
	1.2 Complex Lie groups	4	4
	1.3 Laplace operators for functions on G	7	7
	1.4 Holomorphic last multipliers for holomorphic vector fields on G	14	11
2	**Holomorphic Lie algebroids**	17	13
	2.1 Basic notions	18	14
	2.2 Local expressions	20	16
	2.3 Linear connections	24	18
	2.4 Vertical and complete lifts	27	21
	2.5 Semisprays and sprays of holomorphic anchored vector bundles	28	22
3	**Connections on holomorphic Lie algebroids**	34	25
	3.1 The geometry of the total space of the algebroid E	35	26
	3.1.1 The tangent bundle of a holomorphic Lie algebroid	35	26
	3.1.2 The Lie algebroid structure of the bundle $T'E$	38	28
	3.1.3 Nonlinear connections on $T'E$	39	29
	3.1.4 Linear connections on $T'E$	40	31
	3.2 The prolongation of a holomorphic Lie algebroid	42	32
	3.2.1 Semisprays and sprays	44	34
	3.2.2 Nonlinear connections on $\mathcal{T}'E$	45	35
	3.3 Induced Lagrange structures on holomorphic Lie algebroids	48	37

4	**Finsler structures on holomorphic Lie algebroids**	55	41
	4.1 The complexified prolongation bundle of a holomorphic Lie algebroid	55	41
	4.1.1 Nonlinear connections on $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$	57	43
	4.2 Complex Finsler structures on a Lie algebroid	59	44
	4.1.1 The Chern-Finsler connection of an algebroid	60	45
	4.1.2 Kähler Finsler algebroids	67	49
5	**Laplace operators on complex Lie Finsler algebroids**	69	51
	5.1 Covariant derivatives on the prolongation bundle	70	51
	5.2 Vertical and horizontal Laplace operators for functions defined of E	71	52
	5.3 The horizontal Laplace operator for forms on $\mathcal{T}E$	76	55
6	**Vanishing theorems on holomorphic Lie algebroids**	80	59
	6.1 The Chern-Finsler and Rund connections	81	59
	6.2 Vanishing theorems	83	61
7	**The warped product of holomorphic Lie algebroids**	87	63
	7.1 Properties of Finsler structures	88	63
	7.2 The warped product of algebroids	90	64
	7.2.1 The prolongation bundle of the warped product bundle	91	65
	7.2.2 The Chern-Finsler connection of the warped product	92	66
	7.3 A warped Finsler product model for gravitational and electromagnetic theories	95	68
8	**Original contributions. Dissemination of results**	99	71
	Bibliography	102	75
	Appendices	110	81

Introducere

Geometria spaţiilor Finsler îşi are originile istorice în renumita dizertaţie a lui P. Finsler din 1918. Pentru o perioadă îndelungată însă, puţini matematicieni, dintre care amintim pe E. Cartan, L. Berwald, S. S. Chern, H. Rund, au avut răbdarea de a studia mai în amănunt geometria Finsler. Abia în anii 1970, se dezvoltă interesul pentru geometria Finsler, o dată cu clarificarea noţiunii de conexiune neliniară, care devine instrumentul esenţial pentru studiul acestei geometrii. Unii dintre matematicienii care s-au remarcat în acest domeniu sunt M. Matsumoto din Japonia sau R. Miron din România.

În geometria complexă, noţiunea de metrică Finsler a fost introdusă prin analogie cu cazul real de G. Rizza, dar geometria Finsler complexă începe să prezinte interes mai ales după ce S. Kobayashi găseşte un exemplu de astfel de metrică. Alte contribuţii importante au fost aduse în acest domeniu de către H. L. Royden, J. Faran, T. Aikou.

Dintre monografiile de referinţă din domeniul geometriei Finsler complexe trebuie menţionate cea a lui M. Abate şi G. Patrizio ([A-P], 1994) sau cea a lui G. Munteanu ([MG1], 2004). Primii autori folosesc metode similare geometriei riemanniene pentru a caracteriza metrica lui Kobayashi cu ajutorul geodezicelor complexe ale spaţiilor Finsler cu curbura secţională olomorfă negativă. Motivată de numeroasele aplicaţii din fizica relativistă cuantică, monografia lui G. Munteanu [MG1] extinde geometria Finsler complexă la geometriile Lagrange şi Hamilton complexe.

O clasă deosebit de importantă de spaţii Finsler complexe o constituie algebroizii Lie olomorfi. Studiul acestora a fost realizat de autorul prezentei teze într-o serie de lucrări [IA3, I-M4, IA5, IA6, IA7, I-M8]. Ideea studiului a pornit de la construcţiile din cazul real. Teoria algebroizilor Lie reali a fost intens studiată în ultimele decenii, interesul fiind motivat de aplicaţiile speciale din mecanică, datorate proprietăţii de unificare a fibratelor tangente şi algebrelor Lie. Studiul a fost iniţiat de Weinstein [WA1, WA2], care a dezvoltat o teorie generalizată a lagrangienilor pe algebroizi Lie şi a obţinut ecuaţiile Euler-Lagrange utilizând structura dualului unui algebroid Lie şi transformări Legendre asociate unui lagrangian regulat. De asemenea, el ridică problema dezvoltării unui formalism similar celui al lui Klein [K] din mecanica lagrangienilor ordinari, fără a face referire la dual.

Un prim răspuns la problema lui Weinstein a fost oferit de E. Martinez [ME1, ME2], care a dezvoltat ideile anterior formulate de Klein folosind prelungiri ale algebroizilor Lie. Aceste construcţii au fost introduse sub o altă denumire de Higgins şi Mackenzie [H-M]. Abordarea lui Martinez s-a dovedit deosebit de aplicativă, ea fiind utilizată pentru a studia aproape toate aspectele teoriei clasice, spre exemplu condiţii vakonomice şi neolonome, teoria Hamilton-Jacobi, teoria controlului, sisteme de ordin superior (a se vedea [dL-M-M, ME3]).

O altă abordare a problemei lui Weistein utilizează structurile triplet Tulczyjew, iar legătura dintre cele două abordări a fost recent investigată în [J]. Aplicaţii recente ale algebroizilor au fost date în optimizarea controlului, probleme de interpolare, planificarea traiectoriilor şi multe altele, se pot consulta [CL, dL-M-M] şi numeroasele referinţe ale acestor lucrări.

* * *

În cadrul tezei de doctorat intitulate ”OPERATORI DIFERENŢIALI PE SPAŢII FINSLER COMPLEXE”, ne propunem să studiem operatori binecunoscuţi în geometria diferenţială definiţi pe anumite clase de spaţii Finsler complexe. Mai exact, introducem diferenţiale şi operatori diferenţiali complecşi de tip Laplace pentru funcţii şi forme diferenţiale definite pe grupuri Lie complexe, pe fibrate vectoriale şi algebroizi Lie complecşi, studiem geometriile acestor spaţii şi dăm aplicaţii din geometria complexă şi Finsler complexă.

Multiplele aplicaţii ale construcţiilor geometrice din teoria algebroizilor Lie, prezentate mai sus, vin să motiveze alegerea unuia dintre cadrele geometrice utilizate în prezenta lucrare pentru studiul operatorilor diferenţiali, acest cadru fiind reprezentat de algebroizii Lie olomorfi.

Am urmărit în realizarea tezei de doctorat direcţiile de studiu ale şcolii româneşti de geometrie Finsler complexă, iniţiată de domnul Prof. dr. Gheorghe Munteanu. Teza este structurată pe şapte capitole, cuprinzând rezultatele obţinute de autor.

Capitolul 1

Operatorul Laplace pentru funcţii olomorfe pe grupuri Lie complexe

Considerăm în acest prim capitol al tezei cazul grupurilor Lie complexe, pe care definim un operator Laplace pentru funcţii olomorfe definite pe un astfel de grup. Obţinem caracterizarea locală a acestui operator şi exemplificăm o serie de aplicaţii în teoria multiplicatorilor ultim olomorfi.

1.1 Operatorul Laplace pe varietăţi Finsler complexe

Reamintim pe scurt câteva noţiuni şi rezultate legate de operatorul Laplace, obţinute în cazul varietăţilor Finsler complexe [Z-Z1, Z-Z2]. Remarcăm că definiţii şi proprietăţi similare sunt prezentate în cazul fibratelor Finsler complexe în [IC2]. Notaţiile utilizate sunt cele clasice, din [A-P, AT1, AT4, MG1].

1.1.1 Operatorul Laplace orizontal pentru funcţii

Pe o varietate Finsler complexă n-dimensională M cu funcţia Finsler F, fie $\widetilde{T'M} = T'M - \{0\}$, cu coordonatele locale (z^k, η^k), şi $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$. Tensorul metric hermitian al varietăţii $\widetilde{T'M}$ este

$$\widehat{g} = g_{i\bar{j}}(z,\eta) dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}}(z,\eta) \delta v^i \otimes \delta \bar{v}^j,$$

unde $\{dz^i, d\bar{z}^j, \delta v^i, \delta\bar{v}^j\}$ este un reper dual reperului adaptat $\{\delta_i, \delta_{\bar{i}}, \partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ pe $T'\widetilde{T'M}$. Notăm $g = \det(g_{i\bar{j}})$.

Fie $dV = g^2 dz\wedge d\bar{z}\wedge\delta v\wedge\delta\bar{v}$, unde $dz = dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n$, $d\bar{z} = d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n$, $\delta v = \delta v^1 \wedge\cdots\wedge \delta v^n$, $\delta\bar{v} = \delta\bar{v}^1\wedge\cdots\wedge\delta\bar{v}^n$, forma volum asociată metricii hermitiene $\widehat{g}$ pe $\widetilde{T'M}$, şi fie L_X derivata Lie în raport cu $X \in \Gamma(T'\widetilde{T'M})$. Divergenţa câmpului vectorial $X = X^i\delta_i + \dot{X}^i\dot{\partial}_i \in \Gamma(T'\widetilde{T'M})$ este definită prin ecuaţia $L_X dV = (\operatorname{div} X)dV$. Aceasta se descompune în $\operatorname{div} X = \operatorname{div}_h X + \operatorname{div}_v X = \operatorname{div} X^h + \operatorname{div} X^v$, cu

$$\operatorname{div}_h X = \nabla_{\delta_i} X^i - X^i P_i, \quad \operatorname{div}_v X = \nabla_{\dot{\partial}_i}\dot{X}^i + \dot{X}^i C_i,$$

unde $P^i = L^j_{ij} - L^j_{ji}$, $C_i = C^j_{ij} = C^j_{ji}$, iar L^i_{jk} şi C^i_{jk} sunt coeficienţii conexiunii Chern-Finsler ∇ [A-P, MG1].

Gradientul unei funcţii $f \in C^\infty(\widetilde{T'M})$ este definit prin $\widehat{g}(X, \operatorname{grad} f) = Xf$, $\forall X \in \Gamma(T'\widetilde{T'M})$, iar acesta se descompune în $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}_h f + \operatorname{grad}_v f$, unde

$$\operatorname{grad}_h f = g^{\bar{j}i}(\delta_{\bar{j}} f)\delta_i, \quad \operatorname{grad}_v f = g^{\bar{j}i}(\dot{\partial}_{\bar{j}} f)\dot{\partial}_i.$$

Definiţia operatorului Laplace orizontal pentru funcţii este

$$\Delta_h f = \operatorname{div}_h \circ \operatorname{grad}_h f.$$

Expresia locală a acestuia este

$$\Delta_h f = \frac{1}{g}\delta_i[g g^{\bar{j}i}(\delta_{\bar{j}} f)]. \tag{1.1.1}$$

1.1.2 Operatorul Laplace orizontal pentru forme orizontale

Fie Ψ şi Φ două forme diferenţiale orizontale de tip (p, q) cu suport compact pe $\widetilde{T'M}$, exprimate local prin

$$\Psi = \frac{1}{p!q!}\Psi_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q} dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q},$$
$$\Phi = \frac{1}{p!q!}\Phi_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q} dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

Se defineşte produsul interior

$$\langle\Psi, \Phi\rangle = \frac{1}{p!q!}\Psi_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q}\overline{\Phi^{\bar{i}_1\ldots\bar{i}_p j_1\ldots j_q}},$$

unde $\Phi^{\bar{i}_1\ldots\bar{i}_p j_1\ldots j_q} = \Phi_{k_1\ldots k_p\bar{l}_1\ldots\bar{l}_q} g^{\bar{i}_1 k_1}\ldots g^{\bar{i}_p k_p} g^{\bar{l}_1 j_1}\ldots g^{\bar{l}_p j_p}$. Cu ajutorul acestuia, se poate defini un produs interior global,

$$(\Psi,\Phi) = \int_{\widetilde{T'M}} \langle \Psi,\Phi\rangle \, dV. \tag{1.1.2}$$

În definiţia operatorului Laplace orizontal, sunt necesari adjuncţii operatorilor

$$(\partial_h\Psi)_{i_1\ldots i_{p+1}\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}\delta_{i_k}\Psi_{i_1\ldots\widehat{i}_k\ldots i_{p+1}\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q},$$
$$(\bar{\partial}_h\Psi)_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q\bar{j}_{q+1}} = (-1)^p\sum_{k=1}^{q+1}(-1)^{k-1}\delta_{\bar{j}_k}\Psi_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\widehat{\bar{j}}_k\ldots\bar{j}_{q+1}},$$

în raport cu produsul interior (1.1.2). Dacă operatorii adjuncţi sunt, respectiv,

$$\partial_h^* : A^{p,q}(\widetilde{T'M}) \to A^{p-1,q}(\widetilde{T'M}),\ (\partial_h\Psi,\Phi) = (\Psi,\partial_h^*\Phi),$$
$$\bar{\partial}_h^* : A^{(p,q)}(\widetilde{T'M}) \to A^{p,q-1}(\widetilde{T'M}),\ (\bar{\partial}_h\Psi,\Phi) = (\Psi,\bar{\partial}_h^*\Phi),$$

atunci expresia operatorului $\bar{\partial}_h^*$ pentru $\Phi \in A^{p,q}(\widetilde{T'M})$, necesar definirii Laplacianului, este:

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}_h^*)_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q} =& (-1)^{p+1}\sum_{k,l=1}^{n} g^{\bar{l}k}\delta_k(\Phi_{i_1\ldots i_p\bar{l}\bar{j}_2\ldots\bar{j}_q})\\ &+ \text{termeni de ordin zero in } \Phi.\end{aligned}$$

Operatorul Laplace orizontal pentru forme orizontale este

$$\Box_h : A^{p,q}(\widetilde{T'M}) \to A^{p,q}(\widetilde{T'M}), \quad \Box_h = \bar{\partial}_h\circ\bar{\partial}_h^* + \bar{\partial}_h^*\circ\bar{\partial}_h. \tag{1.1.3}$$

Expresia acestui operator este dată în

Teorema 1.1.1. *[Z-Z1] Dacă (M,F) este o varietate Finsler complexă tare pseudoconvexă, iar Φ este o formă diferenţială orizontală de tip (p,q) pe $\widetilde{T'M}$, atunci*

$$\begin{aligned}(\Box_h\Phi)_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q} = &-\sum_{k,l=1}^{n} g^{\bar{l}k}\big\{\delta_k\circ\delta_{\bar{l}}(\Phi_{i_1\ldots i_p\bar{j}_1\ldots\bar{j}_q})\\ &-\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}[\delta_i,\delta_{\bar{j}_k}]\Phi_{i_1\ldots i_p\bar{l}\bar{j}_1\ldots\widehat{\bar{j}}_k\ldots\bar{j}_q}\big\}\\ &+ \textit{termeni de ordin } \le 1.\end{aligned}$$

Pe o varietate Finsler tare Kähler, datorită simetriei coeficienţilor orizontali ai conexiunii Chern-Finsler, $L^i_{jk} = L^i_{kj}$, rezultatul anterior devine

Teorema 1.1.2. *[Z-Z1] Dacă (M, F) este o varietate Finsler tare Kähler, iar Φ este o formă diferenţială orizontală de tip (p, q) pe $\widetilde{T'M}$, atunci*

$$(\Box_h \Phi)_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q} = -\sum_{k,l=1}^{n} g^{\bar{l}k} \nabla_{\delta_k} \circ \nabla_{\delta_{\bar{l}}} \Phi_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q} + \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{m=1}^{q} g^{\bar{l}k} [\nabla_{\delta_k}, \nabla_{\delta_{\bar{j}_m}}] \Phi_{i_1 \ldots i_p \bar{l} \bar{j}_1 \ldots \widehat{\bar{j}_m} \ldots \bar{j}_q}.$$

1.2 Grupuri Lie complexe

Un *grup Lie complex* este un grup G care este în acelaşi timp varietate complexă, astfel încât operaţia de înmulţire $\phi : G \times G \to G$, $\phi(u, v) = u \cdot v$ şi inversa $u \in G \mapsto u^{-1} \in G$ sunt olomorfe [WHC].

Fie G un grup Lie complex de dimensiune n. Algebra sa Lie, notată cu $\mathfrak{g}$, are ca spaţiu vectorial de bază spaţiul tangent olomorf $T^{1,0}_e G$ în elementul identitate $e \in G$.

Urmărind ideile din [GSI], considerăm $\{E_\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$ o bază a algebrei Lie $\mathfrak{g}$ şi χ^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, baza duală a 1-*formelor Maurer-Cartan*, adică $\chi^\alpha(E_\beta) = \delta^\alpha_\beta$, $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$. E_α sunt câmpuri vectoriale olomorfe, iar χ^α sunt 1-forme olomorfe stâng invariante.

O formă diferenţială η se numeşte *stâng-invariantă* dacă este invariantă la orice translaţie la stânga $L_a (a \in G)$, adică dacă $L^*_a \eta = \eta$ pentru orice element $a \in G$, unde L^*_a este aplicaţia cotangentă olomorfă a lui L_a. Rezultă că orice formă stâng invariantă trebuie să fie olomorfă. Pentru un element $U \in \mathfrak{g}$ şi un element η în spaţiul dual $\mathfrak{g}^*$, $\eta(U)$ este constant pe G. Dacă $d = \partial + \bar{\partial}$ este descompunerea uzuală a derivatei exterioare, atunci

$$\partial \eta(U, V) = -\eta([U, V]), \tag{1.2.4}$$

unde U, V sunt elemente ale algebrei $\mathfrak{g}$ şi η este un element al dualului. Notând

$$[E_\beta, E_\gamma] = \mathrm{C}_{\beta\,\gamma}^{\,\alpha} E_\alpha, \tag{1.2.5}$$

relaţia (1.2.4) implică

$$\partial \chi^\alpha = -\frac{1}{2} \mathrm{C}_{\beta\,\gamma}^{\,\alpha} \chi^\beta \wedge \chi^\gamma. \tag{1.2.6}$$

Constantele complexe $\mathrm{C}_{\beta\,\gamma}^{\,\alpha}$ se numesc *constantele de structură* ale algebrei Lie $\mathfrak{g}$ în raport cu baza olomorfă $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Aceste constante nu sunt arbitrare, ci trebuie să satisfacă relaţiile

$$[E_\alpha, E_\beta] + [E_\beta, E_\alpha] = 0 \tag{1.2.7}$$

şi

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + [E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]] + [E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]] = 0 \tag{1.2.8}$$

oricare ar fi $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$, adică

$$\mathrm{C}_{\beta\,\gamma}^{\,\alpha} + \mathrm{C}_{\gamma\,\beta}^{\,\alpha} = 0 \tag{1.2.9}$$

şi

$$\mathrm{C}_{\alpha\,\beta}^{\,\rho}\mathrm{C}_{\gamma\,\rho}^{\,\delta} + \mathrm{C}_{\beta\,\gamma}^{\,\rho}\mathrm{C}_{\alpha\,\rho}^{\,\delta} + \mathrm{C}_{\gamma\,\alpha}^{\,\rho}\mathrm{C}_{\beta\,\rho}^{\,\delta} = 0. \tag{1.2.10}$$

Ecuaţiile (1.2.6) se numesc *ecuaţiile Maurer-Cartan olomorfe.*

Datorită ecuaţiei (1.2.5), constantele de structură sunt componentele unui tensor olomorf pe $T_e^{1,0}G$ de tip $(1, 2)$. Putem defini un nou tensor olomorf pe $T_e^{1,0}G$ prin

$$\mathrm{C}_{\alpha\beta} = \mathrm{C}_{\alpha\,\sigma}^{\,\rho}\mathrm{C}_{\rho\,\beta}^{\,\sigma} \tag{1.2.11}$$

în raport cu baza olomorfă stâng-invariantă $\{E_\alpha\}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ a algebrei $\mathfrak{g}$. Este uşor de verificat faptul că acest tensor olomorf este simetric. De asemenea, se poate arăta că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca grupul Lie complex G să fie semisimplu este ca matricea complexă $(\mathrm{C}_{\alpha\beta})_{n\times n}$ să fie inversabilă.

În raport cu un sistem de coordonate locale complexe $(u^1, \ldots, u^n)$ pe grupul G, câmpurile vectoriale olomorfe E_α, $\alpha = 1, \ldots, n$, pot fi exprimate prin $E_\alpha = \chi_\alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Deoarece grupul Lie G este paralelizabil complex [WHC], matricea de tip $n \times n$ (χ_α^i) are rangul n şi prin urmare, notând

$$g^{ij} = \chi_\alpha^i \chi_\beta^j \mathrm{C}^{\alpha\beta}, \tag{1.2.12}$$

unde $(\mathrm{C}^{\alpha\beta})_{n\times n}$ este matricea inversă matricei $(\mathrm{C}_{\alpha\beta})_{n\times n}$, obţinem o matrice simetrică şi pozitiv definită, $(g^{ij})_{n\times n}$. Aşadar, putem defini o *metrică riemanniană olomorfă* g pe G prin intermediul formei pătratice complexe

$$ds^2 = g_{jk} du^j \otimes du^k, \tag{1.2.13}$$

unde $(g_{jk})_{n\times n}$ este matricea inversă matricei $(g^{jk})_{n\times n}$, mai exact, avem $g_{jk} = \mathrm{C}_{\beta\gamma}\chi_j^\beta \chi_k^\gamma$. Mai mult, această metrică olomorfă este complet determinată de grupul Lie complex G.

Definim n câmpuri vectoriale olomorfe covariante χ^α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ pe G, cu componentele locale $\chi_i^\alpha (i = 1, \ldots, n)$ date de

$$\chi_i^\alpha = C^{\alpha\beta} \chi_\beta^j g_{ij}. \tag{1.2.14}$$

Considerăm de asemenea cele n^2 1-forme liniare olomorfe $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^{\,i} du^k$ definite local de coeficienţii olomorfi

$$\Gamma_{jk}^{\,i} = \chi_\alpha^i \frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial u^k}, \tag{1.2.15}$$

care pot fi exprimaţi de asemenea prin

$$\Gamma_{jk}^{\,i} = -\chi_j^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha^i}{\partial u^k}. \tag{1.2.16}$$

Aceştia reprezintă coeficienţii locali ai unei conexiuni olomorfe stâng-invariante ∇ a grupului Lie G.

Se poate verifica uşor că pe intersecţia $U \cap U'$ a două hărţi locale, 1-formele olomorfe ω_j^i se schimbă după regulile

$$\frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \omega_k'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \omega_j^k - \frac{\partial^2 u'^i}{\partial u^l \partial u^j} du^l.$$

Următorul pas natural este considerarea torsiunii conexiunii definite anterior. Ca în cazul grupurilor Lie reale (vezi [GSI, RH]), tensorul olomorf de curbură se va scrie

$$T_{jk}^{\,i} = \frac{1}{2} \chi_\alpha^i \left(\frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial u^k} - \frac{\partial \chi_k^\alpha}{\partial u^j} \right) \tag{1.2.17}$$

sau, folosind ecuaţiile (1.2.5) şi ecuaţiile Maurer-Cartan olomorfe (1.2.6),

$$T_{jk}^{\,i} = \frac{1}{2} \mathrm{C}_{\beta\,\gamma}^{\,\alpha} \chi_\alpha^i \chi_j^\beta \chi_k^\gamma. \tag{1.2.18}$$

Totodată, considerând coeficienţii locali ai conexiunii Levi-Civita olomorfe $\overset{\circ}{\nabla}$ în raport cu metrica olomorfă $g = ds^2$ din (1.2.13) a grupului G, aceştia pot fi exprimaţi ca

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{\,i} = \frac{1}{2} \chi_\alpha^i \left(\frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial u^k} + \frac{\partial \chi_k^\alpha}{\partial u^j} \right), \tag{1.2.19}$$

de unde rezultă că

$$\Gamma_{jk}^{\,i} = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{\,i} + T_{jk}^{\,i}. \tag{1.2.20}$$

1.3 Operatori Laplace pentru funcţii olomorfe pe G

În această secţiune, introducem un operator Laplace ce acţionează asupra funcţiilor olomorfe definite pe grupul Lie complex G, operator ce depinde de tensorul metric olomorf dat pe G.

Notăm $\omega = \chi^1 \wedge \cdots \wedge \chi^n$, unde $\chi^i, i = 1, \ldots, n$ sunt elementele bazei 1-formelor olomorfe definite în Secţiunea 1.2. Atunci ω este o n-formă olomorfă stâng-invariantă nicăieri nulă, numită *elementul de volum olomorf.* Aceasta poate fi utilizată pentru a defini *divergenţa* unui câmp vectorial olomorf $U = U^\alpha E_\alpha$ prin $\operatorname{div}(U)\omega = \partial(i_U\omega)$.

O proprietate utilă a divergenţei este

$$\operatorname{div}(fU) = Uf + f \operatorname{div} U$$

pentru un câmp vectorial olomorf U şi o funcţie olomorfă f definită pe G. Mai notăm că pentru un câmp vectorial olomorf dat $U = U^\alpha E_\alpha$ pe G, avem

$$\operatorname{div} U = E_\alpha(U^\alpha). \tag{1.3.21}$$

Fie acum G un grup Lie complex semisimplu cu metrica riemanniană olomorfă

$$g = g_{ij} du^i \otimes du^j, \quad g_{ij} = \mathrm{C}_{\alpha\beta}\chi_i^\alpha \chi_j^\beta. \tag{1.3.22}$$

Un calcul simplu conduce la $g(E_\alpha, E_\beta) = \mathrm{C}_{\alpha\beta}$, iar tensorul metric olomorf g va fi utilizat acum pentru a defini *gradientul* unei funcţii olomorfe f definită pe G. Dacă $\operatorname{grad} f = V^\beta E_\beta$ este un câmp vectorial olomorf exprimat într-o hartă locală, atunci definiţia clasică $g(U, \operatorname{grad} f) = Uf$ aplicată pentru $U = U^\alpha E_\alpha$ implică $V^\beta = \mathrm{C}^{\beta\alpha}(E_\alpha f)$, prin urmare

$$\operatorname{grad} f = \mathrm{C}^{\beta\alpha}(E_\alpha f)E_\beta. \tag{1.3.23}$$

Putem defini acum un *operator Laplace pentru funcţii olomorfe* pe G prin

$$\Delta f = (\operatorname{div} \circ \operatorname{grad})f = \mathrm{C}^{\beta\alpha}E_\beta(E_\alpha f). \tag{1.3.24}$$

În coordonate locale, regăsim acum forma clasică a Laplacianului unei funcţii, în cazul grupurilor Lie complexe:

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k}\right). \tag{1.3.25}$$

Deoarece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma^k_{ji} \frac{\partial f}{\partial u^k} = \nabla_i \nabla_j f,$$

unde ∇_k este derivata covariantă în raport cu conexiunea olomorfă stâng-invariantă ∇ definită în Secţiunea 1.2, aceasta conduce la următoarea formulă pentru operatorul Laplace pentru funcţii olomorfe pe G:

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f. \tag{1.3.26}$$

Observaţia 1.3.1. *Dacă grupul G nu este semisimplu, atunci putem defini o metrică riemanniană olomorfă pe G prin*

$$h = h_{ij} du^i \otimes du^j, \quad h_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta, \tag{1.3.27}$$

iar calcule similare celor de mai sus conduc la următoarea expresie locală a Laplacianului:

$$\Delta f = E_\alpha^2 f = h^{ij} \nabla_i \nabla_j f. \tag{1.3.28}$$

Observaţia 1.3.2. *Notând cu $\overset{\circ}{\nabla}$ derivata covariantă în raport cu conexiunea Levi-Civita, din înlocuirea relaţiei* (1.2.20) *în* (1.3.25) *rezultă*

$$\begin{aligned} \Delta f &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ji} \frac{\partial f}{\partial u^k} \right) - T^k_{ji} \frac{\partial f}{\partial u^k} \\ &= g^{ij} \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j f - T^k_{ji} \frac{\partial f}{\partial u^k}, \end{aligned}$$

astfel că o funcţie olomorfă armonică f pe G trebuie să satisfacă identitatea

$$T^k_{ji} \frac{\partial f}{\partial u^k} = g^{ij} \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j f. \tag{1.3.29}$$

Să notăm că T^i_{jk} este tensorul olomorf de torsiune al conexiunii olomorfe din (1.2.15).

Vom calcula expresiile locale ale Laplacianului în două cazuri particulare.

Exemplul 1.3.1. Considerăm varietatea complexă standard 4-dimensională $\mathbb{C}^4$ cu coordonatele olomorfe (z^1, z^2, z^3, z^4) şi următoarea regulă multiplicativă:

$$\begin{aligned} &(z^1, z^2, z^3, z^4) \cdot (w^1, w^2, w^3, w^4) = \\ &= \left(z^1 e^{\lambda w^3} + w^1, z^2 e^{-\lambda w^3} + w^2, z^3 + w^3, z^4 + w^4 - \lambda z^1 w^2 e^{\lambda w^3} \right), \end{aligned} \tag{1.3.30}$$

unde λ este un parametru nenul. Legea multiplicativă anterioară înzestrează varietatea $\mathbb{C}^4$ cu o structură Lie complexă non-abeliană. Pentru $\lambda = 0$, obţinem grupul Lie abelian uzual $\mathbb{C}^4$, ca urmare vom considera aici $\lambda \neq 0$. Vom nota cu G grupul Lie complex non-abelian $\mathbb{C}^4$ înzestrat cu legea de multiplicare (1.3.30).

Este uşor de văzut că următoarele câmpuri vectoriale olomorfe stâng-invariante, date prin

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial z^1}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial z^2} - \lambda z^1 \frac{\partial}{\partial z^4}, \quad Z_3 = \lambda z^1 \frac{\partial}{\partial z^1} - \lambda z^2 \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z^3}, \quad Z_4 = \frac{\partial}{\partial z^4} \tag{1.3.31}$$

formează o bază a algebrei Lie olomorfe $\mathfrak{g}$ a grupului G. Avem $\mathrm{C}_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,4}$, cu următoarele excepţii:

$$\mathrm{C}_{12}^{4} = -\lambda, \qquad \mathrm{C}_{13}^{1} = \lambda, \qquad \mathrm{C}_{23}^{2} = -\lambda.$$

În consecinţă, câmpul tensorial introdus în (1.2.11) se va anula, adică $\mathrm{C}_{\alpha\beta} = 0$ pentru orice $\alpha, \beta = \overline{1,4}$, ceea ce înseamnă că grupul G nu este semisimplu. Atunci, conform relaţiei (1.3.28), operatorul Laplace Δ ce acţionează asupra funcţiilor olomorfe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^4)$ este

$$\Delta f = \sum_{\alpha} Z_\alpha^2 f = Z_1^2 f + Z_2^2 f + Z_3^2 f + Z_4^2 f.$$

Astfel, un calcul simplu utilizând câmpurile vectoriale olomorfe din (1.3.31) ne conduce la

$$\begin{aligned}\Delta f = {} & \left(1 + \lambda^2 (z^1)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^1)^2} + \left(1 + \lambda^2 (z^2)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (z^3)^2} \\ & + \left(1 + \lambda^2 (z^1)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^4)^2} - 2\lambda^2 z^1 z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^2} + 2\lambda z^1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^3} \\ & - 2\lambda z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2 \partial z^3} - 2\lambda z^1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2 \partial z^4} + \lambda^2 z^1 \frac{\partial f}{\partial z^1} + \lambda^2 z^2 \frac{\partial f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Exemplul 1.3.2. Fie $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ cu înmulţirea

$$(z^1, z^2) \circ (w^1, w^2) = \left(z^1 w^1, \frac{1}{2} w z^1 w^2 + z^2 (w^1)^2\right)$$

şi fie câmpurile vectoriale $Z_1 = z^1 \frac{\partial}{\partial z^1} + 2z^2 \frac{\partial}{\partial z^2}$, $Z_2 = z^1 \frac{\partial}{\partial z^2}$. Atunci $(G, \circ)$ este un grup Lie complex cu algebra Lie olomorfă $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{Z_1, Z_2\}$. Mai mult, G nu este semisimplu, după cum se poate vedea calculând tensorul $\mathrm{C}_{\alpha\beta}$, ca în exemplul anterior. Avem prin urmare $\Delta f = Z_1^2 f + Z_2^2 f$, din care rezultă următoarea formă a Laplacianului:

$$\Delta f = (z^1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (z^1)^2} + \big((z^1)^2 + 4(z^2)^2\big) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^2)^2} + 4z^1 z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^2} + z^1 \frac{\partial f}{\partial z^1} + 4z^2 \frac{\partial f}{\partial z^2}.$$

Propoziţia 1.3.1. *Are loc identitatea:*

$$[\Delta, E_\alpha] = 2(h^{ij}\chi_\alpha^k - h^{ik}\chi_\alpha^j)\Gamma_{jk}^{\,l} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l}, \tag{1.3.32}$$

unde $h^{ij} = \delta^{\alpha\beta}\chi_\alpha^i \chi_\beta^j$, *iar* $\Gamma_{jk}^{\,l}$ *sunt coeficienţii locali ai conexiunii olomorfe* ∇.

Vom ilustra această proprietate în cazul grupului Lie complex $GL(n, \mathbb{C})$.

Exemplul 1.3.3. Deoarece $\dim(GL(n, \mathbb{C})) = n^2$, toţi indicii din cazul general vor fi înlocuiţi cu perechi de indici, de exemplu α devine $\binom{\alpha}{\beta}$, i devine $\binom{i}{m}$, etc. Convenim ca aceste perechi să fie rescrise într-o manieră care va fi clară din cele ce urmează.

Mai întâi, fie $u \in GL(n, \mathbb{C})$ o matrice complexă cu elementele $\{A_i^\alpha\}$, astfel încât un câmp vectorial olomorf stâng-invariant va fi notat prin

$$E_\alpha^\beta := E_{\binom{\alpha}{\beta}} = \chi_{\binom{\alpha}{\beta}}^{\binom{i}{m}} \frac{\partial}{\partial u^{\binom{i}{m}}} =: \chi_{\alpha m}^{i\beta} \frac{\partial}{\partial u_m^i},$$

unde $\chi_{\alpha m}^{i\beta} \frac{\partial}{\partial u_m^i} = \delta_\alpha^i A_m^\beta$ (vezi [I-I]). Metrica riemanniană olomorfă este

$$h^{\binom{i}{m}\binom{j}{n}} =: h_{mn}^{ij} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{\nu\mu}\chi_{\alpha m}^{i\nu}\chi_{\beta n}^{j\mu}$$

(grupul $GL(n, \mathbb{C})$ nu este semisimplu). Coeficienţii locali ai conexiunii olomorfe definite în Secţiunea 1.2 sunt

$$\Gamma_{\binom{j}{n}\,\binom{k}{p}}^{\binom{l}{q}} =: \Gamma_{jkq}^{lnp} = \chi_{j\tau}^{\varepsilon n} \frac{\partial \chi_{\varepsilon q}^{l\tau}}{\partial u_p^k}.$$

Aceste relaţii implică, după calcule,

$$[\Delta, E_\gamma] f = 2\big(h_{mn}^{ij}\chi_{\gamma p}^{k\sigma} - h_{mp}^{ik}\chi_{\gamma n}^{j\sigma}\big)\Gamma_{jkq}^{lnp} \frac{\partial^2 f}{\partial u_m^i \partial u_q^l} = 2\left(\delta_{\nu\mu} A_m^\nu A_p^\sigma \frac{\partial A_q^\mu}{\partial u_p^k} - \delta_{\nu\mu} A_m^\nu A_p^\mu \frac{\partial A_q^\sigma}{\partial u_p^k}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_m^i \partial u_q^l}.$$

1.4 Ultim multiplicatori olomorfi pentru câmpuri vectoriale olomorfe pe G

Elementul de volum olomorf ω introdus pe G în Secţiunea 1.3 va fi utilizat acum pentru a introduce noţiunea de ultim multiplicator olomorf. Calculele sunt similare celor realizate în cazul varietăţilor diferenţiabile de M. Crâşmăreanu [CM1, CM4] sau în cazul varietăţilor complexe, de M. Crâşmăreanu şi C. Ida, [C-I-P2]. Mai exact, considerăm un câmp vectorial olomorf de forma $U = U^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\theta = i_U \omega$ şi fie

$$\frac{du^i}{dt} = U^i(u^1(t), \ldots, u^n(t)),\ 1 \leq i \leq n,\ t \in \mathbb{R}$$

un sistem de ecuaţii diferenţiale complexe pe G definit de câmpul vectorial olomorf U.

Definiţia 1.4.1. O funcţie olomorfă μ pe G se numeşte ultim multiplicator olomorf al sistemului de ecuaţii diferenţiale complexe generat de U (sau ultim multiplicator olomorf pentru U) dacă

$$\partial(\mu\theta) := \partial\mu \wedge \theta + \mu \cdot \partial\theta = 0. \tag{1.4.33}$$

Propoziţia 1.4.1. *O funcţie olomorfă μ pe G este un ultim multiplicator olomorf pentru câmpul vectorial olomorf U dacă şi numai dacă*

$$U(\mu) + \mu \cdot \operatorname{div} U = 0. \tag{1.4.34}$$

Este interesant acum de determinat un ultim multiplicator olomorf al unui câmp vectorial olomorf U de tip divergenţă, adică $\mu = \operatorname{div} V$ pentru un câmp vectorial olomorf arbitrar V pe G.

Propoziţia 1.4.2. *Dacă V este un câmp vectorial olomorf care satisface condiţia $L_U L_V \omega = 0$, atunci $\mu = \operatorname{div} V$ este un ultim multiplicator olomorf pentru câmpul vectorial olomorf U.*

Următorul pas al studiului este investigarea ultim multiplicatorilor olomorfi ai câmpurilor vectoriale olomorfe de tip gradient definite pe grupul Lie complex G înzestrat cu o metrică riemanniană olomorfă (de exemplu, metricile g sau h din Secţiunea 1.3).

Propoziţia 1.4.3. *Fie G un grup Lie complex înzestrat cu o metrică olomorfă g. Dacă f, μ sunt funcţii olomorfe pe G astfel încât f este un ultim multiplicator olomorf pentru* $\operatorname{grad} \mu$, *iar μ este un ultim multiplicator olomorf pentru* $\operatorname{grad} f$, *atunci $f\alpha$ este o funcţie olomorfă armonică pe G.*

Corolarul 1.4.1. *Dacă G este un grup Lie complex înzestrat cu o metrică olomorfă g, iar f este o funcţie olomorfă pe G, atunci μ este un ultim multiplicator olomorf pentru $U = \operatorname{grad} \mu$ dacă şi numai dacă μ^2 este o funcţie olomorfă armonică pe G.*

Corolarul 1.4.2. *Dacă G este un grup Lie complex înzestrat cu o metrică olomorfă g, iar f este o funcţie olomorfă pe G, atunci μ^2 este o funcţie olomorfă armonică pe G dacă şi numai dacă*

$$\mu\Delta\mu + g(\operatorname{grad} \mu, \operatorname{grad} \mu) = 0.$$

Capitolul 2

Algebroizi Lie olomorfi

Algebroizii Lie reprezintă o generalizare a algebrelor Lie şi a distribuţiilor integrabile. Ei sunt fibrate vectoriale "ancorate" pe fibratul tangent al varietăţii bază, având un croşet definit pe modulul secţiunilor. Algebroizii Lie oferă un cadru natural pentru dezvoltarea teoriei unor operatori diferenţiali precum derivata exterioară a formelor diferenţiale sau derivata Lie în raport cu un câmp vectorial. Acest cadru este mai general decât cel al fibratelor tangent si cotangent ale unei varietăţi şi produsele acestora.

Principalele exemple de algebroizi Lie olomorfi sunt reprezentate de fibratul tangent olomorf $T'M$ al unei varietăţi complexe, de fibratul cotangent al unei varietăţi Poisson, sau de distribuţiile complexe involutive. Acestea din urmă sunt acele subfibrate olomorfe ale varietăţilor complexe, care sunt închise în raport cu paranteza Lie (a se vedea [MCM] pentru mai multe detalii în cazul real). Alte exemple pot fi obţinute din cele prezentate în [I-P], în cazul varietăţilor complexe (varietăţi Poisson complexe, prelungirea unui algebroid Lie, structuri produs).

Algebroizii Lie sunt un domeniu de cercetare deosebit de activ, cu aplicaţii în multe ramuri ale matematicii şi fizicii. Un exemplu binecunoscut este studiul lui A. Weinstein [WA1] în mecanică. El a dezvoltat o teorie generală a lagrangienilor pe algebroizi Lie şi a obţinut ecuaţiile Euler-Larange folosind dualul unui algebroid Lie şi transformări Legendre asociate unui Lagrangian regulat. E. Martinez [ME1, ME2] a dezvoltat formalismul lui Klein pe algebroizi Lie definind noţiunea de prelungire a unui algebroid pentru care a utilizat o aplicatie diferenţiabilă. El a propus un formalism în care fibratele tangente la E şi E^* sunt înlocuite prin prelungirile acestora, $\mathcal{T}E$ şi $\mathcal{T}E^*$. Mai recent, algebroizii Lie au fost investigaţi de M. Anastasiei [AM1, AM2] şi L. Popescu [PL1, PL2].

În geometria complexă, câteva proprietăţi ale algebroizilor Lie complecşi şi olomorfi au fost studiate în [I-P], [L-S-X]. Capitolul de faţă analizează noţiuni specifice din teoria algebroizilor Lie reali în cazul algebroizilor Lie olomorfi, considerând obiecte geometrice olomorfe.

2.1 Noţiuni introductive

Fie M o varietate complexă n-dimensională şi E un fibrat vectorial olomorf de rang m peste M. Aceasta înseamnă că schimbările de hărţi vectoriale pe E se fac olomorf. Notăm cu $\pi : E \to M$ proiecţia olomorfă a fibratului, cu $\Gamma(E)$, modulul secţiunilor olomorfe ale lui π şi fie $T_{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$ fibratul tangent complexificat al varietăţii M, descompus în fibratul tangent olomorf şi cel antiolomorf.

Pe un fibrat vectorial (E, π, M), definiţia unei legi de derivare este $D : \chi(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $D_X s$, astfel încât $D_{fX} s = f D_X s$ şi $D_X(fs) = f D_X s + X(f)$. Aceste noţiuni au sens şi pe fibrele lui E, dar paranteza Lie $[s_1, s_2]f$, unde $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, nu are semnificaţie matematică. Aceasta este problema de la care a pornit în definirea noţiunii de algebroid.

Definiţia 2.1.1. Fibratul vectorial olomorf E peste M se numeşte ancorat dacă există un morfism olomorf de fibrate vectoriale $\rho : E \to T'M$, numit aplicaţie ancoră sau, pe scurt, ancoră.

Notăm cu $\Gamma(T'M)$ modulul secţiunilor olomorfe ale fibratului tangent olomorf $T'M$, adică mulţimea câmpurilor vectoriale olomorfe pe M, şi cu $\mathcal{H}(M)$ inelul funcţiilor olomorfe pe M.

Folosind aplicaţia ancoră, putem defini o paranteză Lie pe E cu ajutorul parantezei Lie de pe $T'M$, prin

$$\rho([s_1, s_2]_E) = [\rho(s_1), \rho(s_2)]_{T'M}, \tag{2.1.1}$$

$s_1, s_2 \in \Gamma(E)$. Pentru orice $f \in \mathcal{H}(M)$,

$$\begin{aligned}\rho([s_1, fs_2]_E) &= [\rho(s_1), \rho(fs_2)]_{T'M} \\ &= [\rho(s_1), f\rho(s_2)]_{T'M} \\ &= f[\rho(s_1), \rho(s_2)]_{T'M} + \rho(s_1)(f)\rho(s_2).\end{aligned}$$

Definiţia 2.1.2. Un algebroid Lie olomorf peste M este un triplet $(E, [\cdot,\cdot]_E, \rho_E)$, unde E este un fibrat vectorial olomorf ancorat peste M, $[\cdot,\cdot]_E$ este o paranteză Lie pe $\Gamma(E)$ şi $\rho_E : \Gamma(E) \to \Gamma(T'M)$ este omomorfismul de module complexe indus de ancora ρ astfel încât

$$[s_1, fs_2]_E = f[s_1, s_2]_E + \rho_E(s_1)(f)s_2 \tag{2.1.2}$$

pentru orice $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ şi orice $f \in \mathcal{H}(M)$.

Observaţia 2.1.1. *Ecuaţia* (2.1.1) *este o consecinţă a acestei definiţii [MCM] şi semnifică faptul că* $\rho_E : (\Gamma(E), [\cdot,\cdot]_E) \to (\Gamma(T'M), [\cdot,\cdot])$ *este un omomorfism de algebre Lie complexe.*

Paranteza Lie $[\cdot,\cdot]_E$ satisface identitatea lui Jacobi

$$[s_1, [s_2, s_3]_E]_E + [s_2, [s_3, s_1]_E]_E + [s_3, [s_1, s_2]_E]_E = 0. \tag{2.1.3}$$

Pe un algebroid Lie olomorf E, putem introduce diferenţiala $d_E : \Gamma(\wedge^k E^*) \to \Gamma(\wedge^{k+1} E^*)$ în manieră clasică, prin

$$\begin{aligned} d_E\varphi(s_0, \ldots, s_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho_E(s_i)(\varphi(s_0, \ldots, \widehat{s}_i, \ldots, s_k)) + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi([s_i, s_j]_E, s_0, \ldots, \widehat{s}_i, \ldots, \widehat{s}_j, \ldots, s_k), \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

unde $\varphi \in \Gamma(\wedge^k E^*)$ şi $s_i \in \Gamma(E)$, $i = \overline{1,k}$.

Exemplul 2.1.1. Un exemplu interesant de algebroid este reprezentat de fibratul proiectiv PM asociat unei varietăţi Finsler complexe (M, F), $\dim M = n$. Pentru o astfel de varietate [MG1], reamintim că $F : T'M \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie omogenă $F(z, \eta)$ ce depinde de poziţia $z \in M$ şi de direcţia $\eta \in T'_zM$, cu proprietatea $F(z, \lambda\eta) = |\lambda| F(z, \eta)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Pentru orice secţiune nenulă $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n) \in T'_zM$, considerăm coordonatele omogene $[\eta]$ care determină P_zM, liniile complexe în T'_zM pentru fiecare $z \in M$. Reuniunea tuturor acestor linii constituie fibratul proiectiv $PM = T'M/_{\mathbb{C}^*}$, care are o structură naturală de fibrat vectorial olomorf, cu proiecţia naturală $p(z; [\eta]) = z$ şi rang $PM = n - 1$. Dacă M este compactă, atunci PM este o varietate complexă compactă de dimensiune $2n - 1$.

Deoarece η este o secţiune nenulă, putem presupune $\eta^n \neq 0$ (sau altă coordonată, în altă hartă locală) şi să considerăm aplicaţia ancoră $\rho_{PM} : PM \to T'M$ dată local în punctul $z \in M$ prin $\rho_{PM}(z, [\eta]) = l := \frac{1}{F(z,\eta)} \frac{\bar{\eta}^n}{|\eta^n|} \eta$ pentru orice $\eta \in T'_zM$, nenulă. Este uşor de văzut că $\frac{1}{F(z,\eta)} \frac{\bar{\eta}^n}{|\eta^n|} \eta^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ este o secţiune globală a fibratului imagine inversă $p^*T'M$ peste varietatea complexă PM.

Morfismul ρ_{PM} este bine definit, deoarece $\rho_{PM}(z,[\eta]) = \rho_{PM}(z,[\lambda\eta])$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$. Prin urmare, (PM, ρ_{PM}) este un algebroid Lie olomorf, cu paranteza Lie definită ca o clasă de echivalenţă după cum urmează. Dacă notăm paranteza Lie cu $\{\cdot,\cdot\}$ pentru a o deosebi de notaţia pentru clase de echivalenţă pe PM, atunci putem defini $\{[\eta],[\theta]\}_{PM} = [\{\rho([\eta]),\rho([\theta])\}_{T'M}]$ şi este uşor de verificat că această paranteză Lie satisface proprietatea (2.1.2).

2.2 Expresii locale

Dacă $(z^k)_{k=\overline{1,n}}$ este un sistem de coordonate locale complexe peste $U \subset M$ şi $\{e_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,m}}$ este un reper local al secţiunilor fibratului E peste U, atunci (z^k, u^α) sunt coordonatele locale complexe pe $\pi^{-1}(U) \subset E$, unde $e = u^\alpha e_\alpha(z)$ este un element al fibratului E.

Fie $g_{UV} : U \cap V \to GL(m,\mathbb{C})$ funcţiile de tranziţie olomorfe ale fibratului olomorf E. În punctul $z \in U \cap V$, funcţiile $g_{UV}(z)$ sunt reprezentate de matricea complexă de funcţii olomorfe $\left(M^\alpha_\beta(z)\right)$, astfel încât, dacă $(\widetilde{z}^k, \widetilde{u}^\alpha)$ sunt coordonatele locale pe $\pi^{-1}(V)$, atunci acestea se schimbă după regulile

$$\widetilde{z}^k = \widetilde{z}^k(z), \qquad \widetilde{u}^\alpha = M^\alpha_\beta(z)u^\beta. \tag{2.2.5}$$

Matricea Jacobi a legilor de transformare (2.2.5) este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h} & 0 \\ \frac{\partial M^\alpha_\beta}{\partial z^h}u^\beta & M^\alpha_\beta \end{pmatrix} \tag{2.2.6}$$

Fie $\left(W^\beta_\alpha\right)$ matricea inversă a matricei $\left(M^\alpha_\beta\right)$ şi fie $\{e_\alpha\}$ o bază a secţiunilor fibratului E, adică are loc descompunerea $u = u^\alpha e_\alpha$ pentru orice $u \in \Gamma(E)$. Atunci, aceste secţiuni se schimbă după regulile $\widetilde{e}_\alpha = W^\beta_\alpha e_\beta$.

Acţiunea ancorei olomorfe ρ_E poate fi descrisă local prin

$$\rho_E(e_\alpha) = \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial z^k}, \tag{2.2.7}$$

iar paranteza Lie $[\cdot,\cdot]_E$ este dată local prin

$$[e_\alpha, e_\beta]_E = \mathcal{C}^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma. \tag{2.2.8}$$

Funcţiile olomorfe $\rho^k_\alpha = \rho^k_\alpha(z)$ şi $\mathcal{C}^\gamma_{\alpha\beta} = \mathcal{C}^\gamma_{\alpha\beta}(z)$ definite pe M se numesc *funcţiile de structură olomorfe* ale algebroidului Lie E. O schimbare de hărţi locale pe E implică

$$\widetilde{\rho}^k_\alpha = W^\beta_\alpha \rho^h_\beta \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h}. \tag{2.2.9}$$

Deoarece E este un fibrat vectorial olomorf, structura complexă naturală acţionează asupra secţiunilor lui E prin $J_E(e_\alpha) = ie_\alpha$ şi $J_E(\bar{e}_\alpha) = -i\bar{e}_\alpha$. Ca urmare, fibratul complexificat $E_\mathbb{C}$ al lui E poate fi descompus în $E_\mathbb{C} = E' \oplus E''$. Baza locală a secţiunilor lui E' este $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,m}$, iar pentru E'', baza este reprezentată de conjugatele acestora, $\{\bar{e}_\alpha := e_{\bar{\alpha}}\}_{\alpha=1,m}$. Deoarece $\rho_E : E \to T'M$ este un omomorfism de module complexe, el poate fi extins în mod natural la fibratul complexificat prin $\rho'(e_\alpha) = \rho_E(e_\alpha)$ şi $\rho''(e_{\bar{\alpha}}) = \rho_E(e_{\bar{\alpha}})$. Aşadar, ancora poate fi descompusă în $\rho_E = \rho' \oplus \rho''$ pe fibratul complexificat, cu $\rho_\alpha^{\bar{k}} = \rho_{\bar{\alpha}}^k = 0$ şi $\rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} = \overline{\rho_\alpha^k}$. Prin urmare, fibratele ancorate $(E', \rho', T'M)$ şi $(E'', \rho'', T''M)$ sunt algebroizi Lie complecşi (vezi şi [I-P]). Parantezele Lie sunt definite prin

$$[e_\alpha, e_\beta]' = [e_\alpha, e_\beta]_E = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad [e_{\bar{\alpha}}, e_{\bar{\beta}}]'' = \overline{[e_\alpha, e_\beta]_E} = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}},$$

unde $\mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = \overline{\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma}$. Pe fibratul complexificat $E_\mathbb{C}$, trebuie să luăm în considerare şi parantezele Lie

$$[e_\alpha, e_{\bar{\beta}}] = \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma e_\gamma + \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}, \quad [e_{\bar{\alpha}}, e_\beta] = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^\gamma e_\gamma + \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}.$$

Este evident că $\overline{[e_\alpha, e_{\bar{\beta}}]} = [e_{\bar{\alpha}}, e_\beta]$, deci $\overline{\mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}} = \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}$ şi $\overline{\mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma}} = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}}$.

Propoziţia 2.2.1. *Funcţiile de structură ale algebroidului Lie complexificat $(E_\mathbb{C}, [\cdot,\cdot], \rho_E)$ satisfac identităţile:*

$$\begin{aligned}
&\rho_\alpha^j \frac{\partial \rho_\beta^i}{\partial z^j} - \rho_\beta^j \frac{\partial \rho_\alpha^i}{\partial z^j} = \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma, \quad \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma = -\rho_{\bar{\beta}}^{\bar{j}} \frac{\partial \rho_\alpha^i}{\partial \bar{z}^j}, \quad \rho_{\bar{\gamma}}^{\bar{i}} \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = \rho_\alpha^j \frac{\partial \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{i}}}{\partial z^j},\\
&\rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{j}} \frac{\partial \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{i}}}{\partial \bar{z}^j} - \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{j}} \frac{\partial \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{i}}}{\partial \bar{z}^j} = \rho_{\bar{\gamma}}^{\bar{i}} \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}, \quad \rho_{\bar{\gamma}}^{\bar{i}} \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} = -\rho_\beta^j \frac{\partial \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{i}}}{\partial z^j}, \quad \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^\gamma = \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{j}} \frac{\partial \rho_\beta^i}{\partial \bar{z}^j}.
\end{aligned}$$

În continuare, considerăm algebroidul dual E^* şi complexificatul acestuia $E_\mathbb{C}^* = E'^* \oplus E''^*$, corespunzător valorilor proprii $\pm i$ ale structurii complexe duale date de $J_E^*(e^\alpha) = ie^\alpha$ şi $J_E^*(e^{\bar{\alpha}}) = -ie^{\bar{\alpha}}$, unde $\{e^\alpha, e^{\bar{\alpha}}\}$ este cobaza duală, adică au loc identităţile $e^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$, $e^\alpha(e_{\bar{\beta}}) = 0$ şi conjugatele acestora. În acest caz, diferenţiala din relaţia (2.1.4) se poate extinde la formele din $\Omega_\mathbb{C}(E) = \Gamma\left(\Omega^{p,q}(E_\mathbb{C})\right)$ prin $d_E = \partial_E' + \partial_E + \bar{\partial}_E + \partial_E''$, unde

$$\begin{aligned}
&\partial_E' : \Omega^{p,q}(E_\mathbb{C}) \to \Omega^{p+2,q-1}(E_\mathbb{C}), \quad \partial_E : \Omega^{p,q}(E_\mathbb{C}) \to \Omega^{p+1,q}(E_\mathbb{C}),\\
&\bar{\partial}_E : \Omega^{p,q}(E_\mathbb{C}) \to \Omega^{p,q+1}(E_\mathbb{C}), \quad \partial_E'' : \Omega^{p,q}(E_\mathbb{C}) \to \Omega^{p-1,q+2}(E_\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Spaţiul total al algebroidului Lie olomorf E are o structură de varietate complexă, deoarece funcţiile de tranziţie $M_\beta^\alpha(z)$ sunt olomorfe. Considerăm fibratul tangent complexificat al lui E, $T_{\mathbb{C}}E = T'E \oplus T''E$, unde $T'E$ este fibratul tangent olomorf şi $T''E = \overline{T'E}$.

Pe $T'E$, un câmp natural de repere este $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}$, care, datorită matricei (2.2.6), se schimbă după regulile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^h} &= \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h}\frac{\partial}{\partial \widetilde{z}^k} + \frac{\partial M^\alpha_\beta}{\partial z^h} u^\beta \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial u^\beta} &= M^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^\alpha}. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Cum E este varietate complexă, rezultă că $\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}\right\}$ este o bază în $T''E = \overline{T'E}$ şi regulile sale de schimbare se deduc din (2.2.10) prin conjugare.

Ca aplicaţie între varietăţi, ancora olomorfă ρ_E indusă de ρ duce coordonatele locale (z^k, u^α) de pe E în coordonatele (z^k, η^k) pe $T'M$, unde $\eta^k = u^\alpha \rho^k_\alpha(z)$. O schimbare de hărţi locale implică maparea noilor coordonate $(\widetilde{z}^k, \widetilde{u}^\alpha)$ în (z'^k, η'^k), unde coordonatele locale într-o nouă hartă pe $T'M$ sunt:

$$z'^k = z'^k(z), \qquad \eta'^k = u^\gamma \rho^h_\gamma \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}. \tag{2.2.11}$$

Expresia locală a operatorului diferenţial ∂_E pentru $f \in \mathcal{H}(M)$ este

$$\partial_E f = \frac{\partial f}{\partial z^k}\rho^k_\alpha e^\alpha,$$

iar pentru $\omega \in \Gamma(E'^*)$, $\omega = \omega_\alpha e^\alpha$,

$$\partial_E \omega = \left(\frac{\partial \omega_\beta}{\partial z^i}\rho^i_\alpha - \frac{1}{2}\omega_\gamma C^{\ \gamma}_{\alpha\beta}\right) e^\alpha \wedge e^\beta.$$

În particular, avem

$$\partial_E z^k = \rho^k_\alpha e^\alpha, \qquad \partial_E e^\alpha = -\frac{1}{2}\mathcal{C}^{\ \alpha}_{\beta\gamma} e^\beta \wedge e^\gamma.$$

2.3 Conexiuni liniare

Definiţia 2.3.1. O conexiune liniară pe algebroidul Lie olomorf $(E, \rho_E, [.,.]_E)$ este o aplicaţie $\nabla : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ ce satisface proprietăţile:

1) ∇ este $\mathbb{R}$-biliniară;

2) $\nabla_{fu} v = f\nabla_u v$ pentru orice $f \in C^\infty(M)$ şi $u, v \in \Gamma(E)$;

3) $\nabla_u fv = (\rho_E(u)f)\, v + f\nabla_u v$ pentru orice $f \in C^\infty(M)$ şi $u, v \in \Gamma(E)$;

4) $\overline{\nabla_u v} = \nabla_{\bar{u}}\bar{v}$.

O conexiune liniară poate fi interpretată ca o aplicaţie liniară $\nabla : \Gamma(E) \to \mathcal{A}^1(E)$ dată prin $\nabla : s \mapsto \nabla_s$, $\nabla_s(u) = \nabla_s u$ satisfăcând condiţiile **3)** şi **4)**. Ca în cazul oricărui fibrat olomorf, putem considera în raport cu câmpul de repere olomorf $\{e_\alpha\}$ 1-formele de conexiune $\theta_\alpha^\beta : \Gamma(E) \to \mathbb{C}$ date de

$$\nabla_s e_\alpha = \theta_\alpha^\beta(s) e_\beta, \quad \alpha = \overline{1, m}. \tag{2.3.12}$$

Notând $\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \gamma} e_\gamma$, avem $\theta_\beta^\gamma(e_\alpha) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$. Pentru $s = s^\alpha e_\alpha$ şi $u = u^\beta e_\beta$, acţiunea conexiunii liniare asupra secţiunilor din $\Gamma(E)$ este

$$\nabla_s u = s^\alpha \left\{ \rho_\alpha^k \frac{\partial u^\gamma}{\partial z^k} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \gamma} u^\beta \right\} e_\gamma, \tag{2.3.13}$$

de unde rezultă expresia 1-formei $u \mapsto \nabla u$, $\nabla u(s) = \nabla_s u$:

$$\nabla u = \left(\rho \circ d_E u^\gamma + \theta_\beta^\gamma \circ u^\beta\right) e_\gamma. \tag{2.3.14}$$

Considerând structura complexă naturală pe E, obţinem prin $\mathbb{C}$-liniaritate o conexiune liniară pe $(E_\mathbb{C}, \rho_E, [.,.]_E)$ ce acţionează asupra secţiunilor din $\Gamma(E')$ şi $\Gamma(E'')$ astfel:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_\alpha} e_\beta &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \gamma} e_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \bar\gamma} e_{\bar\gamma}\ ; \quad \nabla_{e_\alpha} e_{\bar\beta} = \Gamma_{\alpha\bar\beta}^{\ \gamma} e_\gamma + \Gamma_{\alpha\bar\beta}^{\ \bar\gamma} e_{\bar\gamma}\ ; \\ \nabla_{e_{\bar\alpha}} e_\beta &= \Gamma_{\bar\alpha\beta}^{\ \gamma} e_\gamma + \Gamma_{\bar\alpha\beta}^{\ \bar\gamma} e_{\bar\gamma}\ ; \quad \nabla_{e_{\bar\alpha}} e_{\bar\beta} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}^{\ \gamma} e_\gamma + \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}^{\ \bar\gamma} e_{\bar\gamma}\ . \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Conexiunea ∇ satisface condiţia **4)** din definiţia anterioară, deci $\overline{\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \gamma}} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}^{\ \bar\gamma}$, $\overline{\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \bar\gamma}} = \Gamma_{\bar\alpha\bar\beta}^{\ \gamma}$, etc.

Formele de conexiune θ_α^β extinse pe $E_\mathbb{C}$ se numesc de tip $(1,0)$ dacă $\theta_\alpha^\beta(s) = 0$ pentru orice $s \in \Gamma(E'')$, mai exact au loc identităţile $\nabla_{e_\alpha} e_{\bar\beta} = \nabla_{e_{\bar\alpha}} e_\beta = 0$.

Vom presupune că ∇ este o *conexiune complexă* [I-P] în raport cu J_E, adică $(\nabla_u J_E)(v) = J_E(\nabla_u v)$. În acest caz, ∇ păstrează distribuţiile $\Gamma(E')$ şi $\Gamma(E'')$.

Considerăm în continuare pe $(E, \rho_E, [.,.]_E)$ un produs scalar hermitian $g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \mathbb{C}$, ceea ce înseamnă că pe lângă liniaritatea în primul termen, acesta satisface egalitatea $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$. Conexiunea ∇ se numeşte *metrică în raport cu* g dacă $\nabla g = 0$, unde

$$(\nabla_s g)(u, v) = \rho(s)(g(u, v)) - g(\nabla_s u, v) - g(u, \nabla_s v), \quad \forall s, u, v \in \Gamma(E). \tag{2.3.16}$$

La fel ca în cazul fibratelor hermitiene, există şi în acest caz o unică conexiune liniară metrică în raport cu g, de tip $(1,0)$, având componentele

$$\theta_\beta^\delta(e_\alpha) = g^{\bar\gamma\delta}\rho_\alpha^k \frac{\partial g_{\beta\bar\gamma}}{\partial z^k}. \tag{2.3.17}$$

Torsiunea unei conexiuni liniare complexe ∇ pe algebroidul olomorf E este definită ca de obicei prin $T(u,v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u,v]_E$. Extensia sa la secţiunile din $\Gamma(E_\mathbb{C})$ are componentele locale $T_{\alpha\beta}^{\ \gamma} e_\gamma := T(e_\alpha, e_\beta)$, etc. date de

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{\ \gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\ \gamma} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} \\ T_{\alpha\bar\beta}^{\ \gamma} &= \Gamma_{\alpha\bar\beta}^{\ \gamma} - \mathcal{C}_{\alpha\bar\beta}^{\ \gamma} \\ T_{\alpha\bar\beta}^{\ \bar\gamma} &= \Gamma_{\alpha\bar\beta}^{\ \bar\gamma} - \mathcal{C}_{\alpha\bar\beta}^{\ \bar\gamma} \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

şi conjugatele acestora.

Tot în manieră clasică, curbura conexiunii liniare complexe ∇ este $R(u,v)s = \nabla_u\nabla_v s - \nabla_v\nabla_u s - \nabla_{[u,v]_E} s$, unde $u, v, s \in \Gamma(E)$. Pe fibratul complexificat $E_\mathbb{C}$, componentele sale locale sunt $R(e_\alpha, e_\beta)e_\gamma =: R_{\gamma;\alpha\beta}^{\ \delta} e_\delta$, $R(e_\alpha, e_\beta)e_{\bar\gamma} =: R_{\bar\gamma;\alpha\beta}^{\ \bar\delta} e_{\bar\delta}$, etc., unde

$$\begin{aligned} R_{\gamma;\alpha\beta}^{\ \delta} &= \Gamma_{\beta\gamma}^{\ \sigma}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\ \delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\ \sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\ \delta} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\gamma}^{\ \delta} + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\ \delta}}{\partial z^k} - \rho_\beta^k \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\ \delta}}{\partial z^k}, \\ R_{\bar\gamma;\alpha\beta}^{\ \bar\delta} &= \Gamma_{\beta\bar\gamma}^{\ \bar\sigma}\Gamma_{\alpha\bar\sigma}^{\ \bar\delta} - \Gamma_{\alpha\bar\gamma}^{\ \bar\sigma}\Gamma_{\beta\bar\sigma}^{\ \bar\delta} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\bar\gamma}^{\ \bar\delta} + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\beta\bar\gamma}^{\ \bar\delta}}{\partial z^k} - \rho_\beta^k \frac{\partial \Gamma_{\alpha\bar\gamma}^{\ \bar\delta}}{\partial z^k}, \\ R_{\gamma;\alpha\bar\beta}^{\ \delta} &= \Gamma_{\bar\beta\gamma}^{\ \sigma}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\ \delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\ \sigma}\Gamma_{\bar\beta\sigma}^{\ \delta} - \mathcal{C}_{\alpha\bar\beta}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\gamma}^{\ \delta} - \mathcal{C}_{\alpha\bar\beta}^{\ \bar\sigma}\Gamma_{\bar\sigma\gamma}^{\ \delta} + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\bar\beta\gamma}^{\ \delta}}{\partial z^k} - \rho_{\bar\beta}^{\bar k} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\ \delta}}{\partial z^{\bar k}}, \\ R_{\bar\gamma;\alpha\bar\beta}^{\ \bar\delta} &= \Gamma_{\bar\beta\bar\gamma}^{\ \bar\sigma}\Gamma_{\alpha\bar\sigma}^{\ \bar\delta} - \Gamma_{\alpha\bar\gamma}^{\ \bar\sigma}\Gamma_{\bar\beta\bar\sigma}^{\ \bar\delta} - \mathcal{C}_{\alpha\bar\beta}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\bar\gamma}^{\ \bar\delta} - \mathcal{C}_{\alpha\bar\beta}^{\ \bar\sigma}\Gamma_{\bar\sigma\bar\gamma}^{\ \bar\delta} + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\bar\beta\gamma}^{\ \bar\delta}}{\partial z^k} - \rho_{\bar\beta}^{\bar k} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\bar\gamma}^{\ \bar\delta}}{\partial z^{\bar k}}, \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

precum şi $R_{\gamma;\bar\alpha\bar\beta}^{\ \delta} = \overline{R_{\bar\gamma;\alpha\beta}^{\ \bar\delta}}$, etc.

Conexiunea liniară complexă ∇ se descompune în

$$\nabla = \nabla' + \nabla'',$$

(conform cu [MG1]), unde $\nabla' : \Omega^{p,q}(E_\mathbb{C}) \to \Omega^{p+1,q}(E_\mathbb{C})$ şi $\nabla'' : \Omega^{p,q}(E_\mathbb{C}) \to \Omega^{p,q+1}(E_\mathbb{C})$. Descompunerea curburii este

$$R = \nabla' \circ \nabla' + \nabla' \circ \nabla'' + \nabla'' \circ \nabla' + \nabla'' \circ \nabla'',$$

astfel încât formele de conexiune şi de curbură pot fi scrise sub forma

$$\theta = \theta^{1,0} + \theta^{0,1}, \quad R = R^{2,0} + R^{1,1} + R^{0,2}.$$

Pentru o secţiune $u \in \Gamma(E_{\mathbb{C}})$ şi o funcţie $f \in \mathcal{H}(M)$, identitatea (2.3.14) conduce la

$$\nabla'(fu) = \rho(u)\partial_E f + f\nabla' u, \quad \nabla''(fu) = \rho(u)\bar{\partial}_E f + f\nabla'' u,$$

astfel încât, dacă forma de conexiune θ este de tip $(1,0)$, adică $\theta^{0,1} = 0$, atunci ∇ este de tip $(1,0)$ şi $\nabla'' = \bar{\partial}_E$. Afirmaţia reciprocă este de asemenea adevărată.

2.4 Lifturi verticale şi complete

Fie f o funcţie olomorfă pe M. Liftul său vertical f^v pe E este definit prin $f^v(e) = f(\pi(e))$, $e \in E$. Liftul vertical al unei secţiuni olomorfe $Z \in \Gamma_{hol}(E)$, $Z = Z^\alpha e_\alpha$, este un câmp vectorial pe E dat de

$$Z^v(z,u) = Z^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{2.4.20}$$

În particular, $e^v_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$.

Lema 2.4.1. *Dacă Z, W sunt secţiuni olomorfe ale algebroidului E şi f este o funcţie olomorfă pe M, atunci*

$$(Z+W)^v = Z^v + W^v, \qquad (fZ)^v = f^v Z^v, \qquad Z^v f^v = 0.$$

Liftul complet al unei funcţii olomorfe f pe M este funcţia olomorfă f^c definită pe E prin $f^c(e) = \partial^E f(e) = \rho_E(e) f$. Exprimarea sa locală este

$$f^c(e) = u^\alpha \rho^k_\alpha \frac{\partial f}{\partial z^k}. \tag{2.4.21}$$

Lema 2.4.2. *Dacă Z este o secţiune olomorfă a algebroidului E şi f, g sunt funcţii olomorfe definite pe M, atunci*

$$(f+g)^c = f^c + g^c, \qquad (fg)^c = f^c g^v + f^v g^c, \qquad Z^v f^c = (\rho_E(Z) f)^v.$$

Liftul complet Z^c al unei secţiuni olomorfe $Z \in \Gamma_{hol}(E)$ este un câmp vectorial pe E definit prin

$$Z^c(z,u) = Z^\alpha \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} + \left(\rho^k_\beta \frac{\partial Z^\alpha}{\partial z^k} - Z^\gamma \mathcal{C}^{\ \alpha}_{\gamma\beta}\right) u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{2.4.22}$$

În particular, $e^c_\alpha = \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} - \mathcal{C}^{\ \gamma}_{\alpha\beta} u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\gamma}$.

Lema 2.4.3. *Dacă Z este o secţiune olomorfă a algebroidului E şi f este o funcţie olomorfă pe M, atunci*

$$Z^c f^c = (\rho_E(Z)f)^c, \qquad Z^c f^v = (\rho_E(Z)f)^v.$$

Lema 2.4.4. *Dacă Z şi W sunt secţiuni olomorfe pe E, atunci*

$$[Z^c, W^c] = [Z, W]_E^c, \qquad [Z^c, W^v] = [Z, W]_E^v, \qquad [Z^v, W^v] = 0.$$

2.5 Semispray-uri şi spray-uri ale fibratelor olomorfe ancorate

Urmărind construcţia din cazul real (descrisă, spre exemplu, în [AM1, AM2]), noţiunea de semispray poate fi introdusă de asemenea în cazul unui fibrat vectorial olomorf ancorat (E, π, M). Fie ρ_E aplicaţia ancoră, π_*, aplicaţia tangentă a proiecţiei π şi $\tau_E : T'E \to E$, fibratul tangent olomorf al fibratului E.

Definiţia 2.5.1. O secţiune olomorfă $S : E \to T'E$ se numeşte semispray dacă satisface identităţile:

1) $\tau_E \circ S = \mathrm{Id}_E$,

2) $\pi_* \circ S = \rho_E$.

Fie $c : I \to M$, $I \subset \mathbb{R}$ o curbă complexă pe varietatea bază M şi $\widetilde{c} : I \to E$ o curbă complexă pe fibratul E, astfel încât $\pi \circ \widetilde{c} = c$. Notăm cu $\dot{\widetilde{c}}$ câmpul vectorial tangent la curba $\widetilde{c}$.

Definiţia 2.5.2. Câmpul vectorial $\dot{\widetilde{c}}$ se numeşte admisibil dacă

$$\pi_*(\dot{\widetilde{c}}) = \rho(\widetilde{c}). \tag{2.5.23}$$

Local, avem $c(t) = (z^k(t))$, $\widetilde{c} = (z^k(t), u^\alpha(t))$ şi $\dot{\widetilde{c}} = \frac{dz^k}{dt}\frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{du^\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, cu $t \in I$. Atunci, curba $\dot{\widetilde{c}}$ este admisibilă dacă şi numai dacă

$$\frac{dz^k}{dt}(t) = \rho_\alpha^k(z(t))u^\alpha(t),\ \forall t \in I.$$

Dacă descompunem secţiunea olomorfă S ca $S = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k} + U^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, atunci, folosind definiţia, rezultă că S este un semispray dacă şi numai dacă

$$Z^k(z, u) = \rho_\alpha^k(z)u^\alpha. \tag{2.5.24}$$

Coeficienţii $U^\alpha(z,u)$ sunt nedeterminaţi, de aceea, pentru facilitarea calculelor, considerăm $U^\alpha = -2G^\alpha$ şi obţinem

$$S = \rho_\alpha^k u^\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} - 2G^\alpha(z,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{2.5.25}$$

Regulile de schimbare pentru coeficienţii semispray-ului S se obţin utilizând matricea (2.2.6):

$$\widetilde{Z}^k = \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h} Z^h \tag{2.5.26}$$

şi respectiv

$$\widetilde{G}^\alpha = M_\beta^\alpha G^\beta - \frac{1}{2}\frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial z^k} u^\beta \rho_\gamma^k u^\gamma. \tag{2.5.27}$$

Propoziţia 2.5.1. *Un câmp vectorial* $S = \rho_\alpha^k u^\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} - 2G^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in \Gamma(T'E)$ *este un semispray dacă şi numai dacă coeficienţii* G^α *verifică regulile de transformare* (2.5.27).

O curbă $c : t \mapsto (z^i(t), u^\alpha(t))$ pe E este o *curbă integrală* a semispray-ului S dacă satisface sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dz^i}{dt} = \rho_\alpha^k(t)u^\alpha, \qquad \frac{du^\alpha}{dt} + 2G^\alpha(z,u) = 0. \tag{2.5.28}$$

Propoziţia 2.5.2. *Un câmp vectorial pe* E *este un semispray dacă şi numai dacă toate curbele sale integrale sunt admisibile.*

În continuare, dacă $h_\lambda : E \to E$ este omotetia complexă descrisă de $h_\lambda : e \mapsto \lambda e$, cu $\lambda \in \mathbb{C},\ e \in E$, atunci un semispray S pe E se numeşte spray dacă

$$S \circ h_\lambda = \lambda h_{\lambda,*} \circ S, \tag{2.5.29}$$

adică dacă funcţiile G^α sunt complex omogene de grad 2 în variabila u.

Dorim în continuare să studiem posibilitatea obţinerii unui spray din problema variaţională. Primul pas în acest sens îl reprezintă exprimarea ecuaţiilor Euler-Lagrange pe algebroidul Lie olomorf E. Deoarece

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz^k}{dt}\frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{d\bar{z}^k}{dt}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} + \frac{du^\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \frac{d\bar{u}^\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha},$$

din sistemul (2.5.28) rezultă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\beta}\right) = \rho_\alpha^k u^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial u^\beta} + \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} \bar{u}^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{z}^k \partial u^\beta} - 2G^\alpha g_{\alpha\beta} - 2\bar{G}^\alpha g_{\beta\bar{\alpha}}. \tag{2.5.30}$$

Propunem că ecuaţiile Euler-Lagrange ale algebroidului E sunt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{\beta}}\right)=\rho_{\beta}^{k}\frac{\partial L}{\partial z^{k}}+\rho_{\beta}^{\bar{k}}\frac{\partial L}{\partial \bar{z}^{k}}+Q_{\beta}^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}}+Q_{\beta}^{\bar{\alpha}}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}^{\alpha}}, \tag{2.5.31}$$

unde $\rho_{\beta}^{\bar{k}}=0$ deoarece E este olomorf, iar Q_{β}^{α} şi $Q_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ trebuie determinaţi.

Teorema 2.5.1. *Pe un algebroid Lie olomorf E înzestrat cu un Lagrangian regulat $L(z,u)$ şi un tensor metric hermitian $g_{\bar{\alpha}\beta}$ cu $\det(g_{\bar{\alpha}\beta})\neq 0$, un spray complex canonic este dat de*

$$G^{\alpha}=\frac{1}{2}\left(g^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial^{2}L}{\partial z^{k}\partial \bar{u}^{\beta}}+\frac{1}{2}W_{\varepsilon}^{\alpha}\frac{\partial M_{\beta}^{\varepsilon}}{\partial z^{k}}u^{\beta}\right)\rho_{\gamma}^{k}u^{\gamma} \tag{2.5.32}$$

Observaţia 2.5.1. *Dacă Lagrangianul este complex omogen pe E, atunci spray-ul este complex omogen de grad 2 în u.*

Capitolul 3

Conexiuni pe algebroizi Lie olomorfi

Capitolul de faţă prezintă noţiuni specifice geometriei algebroizilor olomorfi. Ca orice fibrat vectorial olomorf, spaţiul total al unui algebroid olomorf este o varietate complexă. În acest capitol, prezentăm studiul geometriei spaţiului total al unui algebroid olomorf, urmând modelul geometriei Lagrange.

Pentru studiul varietăţii complexe E, am considerat două abordări. Prima este reprezentată de fibratul tangent olomorf $T'E$ al algebroidului, pe care la rândul său introducem o structură naturală de algebroid Lie. Geometria fibratului tangent olomorf $T'E$ este "liniarizată" folosind o conexiune neliniară pentru care, în raport cu bazele adaptate, studiem de asemenea o conexiune liniară complexă distinsă.

Cea de-a doua abordare o reprezintă prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ a unui algebroid Lie olomorf. Folosind un lift complet, introducem tensorul Liouville şi o structură aproape tangentă, pentru a defini un alt tip de conexiune neliniară pentru prelungirea $\mathcal{T}'E$. Teorema 3.2.1 prezintă procedura de obţinere a unei conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}'E$ dat fiind un spray pe $\mathcal{T}'E$. Împreună cu Teorema 2.5.1, putem afirma că am rezolvat problema determinarii reperelor adaptate, deci a "liniarizării" geometriei unui algebroid olomorf înzestrat cu un Lagrangian regulat L.

În ultima secţiune a capitolului, studiem posibilitatea inducerii unor structuri Lagrange în cazul algebroizilor olomorfi, pornind de la structuri Lagrange pe fibratul tangent olomorf al varietăţii bază, $T'M$. Analizăm trei cazuri particulare, în funcţie de rangul aplicaţiei ancoră şi de dimensiunile varietăţii M şi a fibrei E.

3.1 Geometria spaţiului total al algebroidului E

În această secţiune descriem două abordări ale fibratului tangent al unui algebroid Lie olomorf E. Prima dintre acestea este studiul clasic al fibratului tangent al lui E, iar cea de-a doua este reprezentată de prelungirea algebroidului E.

3.1.1 Fibratul tangent al unui algebroid Lie olomorf

Reamintim [MG1] că un spaţiu Lagrange complex este o pereche (M, L), unde $L : T'M \to \mathbb{R}$ este un Lagrangian regulat, definit pe fibratul tangent olomorf al unei variatăţi complexe. Obiectele geometrice care acţionează pe un astfel de spaţiu Lagrange complex sunt secţiuni ale fibratului tangent complexificat $T_{\mathbb{C}}(T'M) = T'(T'M) \oplus T''(T'M)$.

Fibratul tangent olomorf $T'M$ al varietăţii complexe M este la rândul său o varietate complexă, cu schimbările de coordonate locale de la (z^h, η^h) la (z'^k, η'^k) date de

$$z'^k = z'^k(z), \quad \eta'^k = \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}\eta^h. \tag{3.1.1}$$

Reperul natural $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}$ într-un punct al spaţiului $T'_{(z,\eta)}(T'M)$ se schimbă de la (z^h, η^h) la (z'^k, η'^k) după regulile

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^h} &= \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}\frac{\partial}{\partial z'^k} + \frac{\partial^2 z'^k}{\partial z^j \partial z^h}\eta^j \frac{\partial}{\partial \eta'^k}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta^h} &= \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}\frac{\partial}{\partial \eta'^k}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Considerăm E şi $T'M$ ca varietăţi şi demonstrăm că ancora ρ duce coordonatele locale (z^k, u^α) de pe E, cu schimbările (2.2.5), în coordonatele locale (z^k, η^k) de pe $T'M$, cu schimbările (3.1.1). Mai mult, vom considera aceleaşi hărţi locale pe M pentru E şi $T'M$, adică vom avea aceleaşi schimbări de coordonate $\widetilde{z}^k(z) = z'^k(z)$.

Ca aplicaţie între varietăţi, ancora olomorfă ρ duce (z^k, u^α) de pe E în (z^k, η^k) de pe $T'M$, unde coordonatele direcţionale sunt date de

$$\eta^k = u^\alpha \rho^k_\alpha(z). \tag{3.1.3}$$

(3.1.3) defineşte un sistem de coordonate pe $T'M$. O schimbare de hărţi locale implică transformarea $(\widetilde{z}^k, \widetilde{u}^\alpha)$ în (z'^k, η'^k), unde $z'^k = \widetilde{z}^k(z) = z'^k(z)$ şi

$$\eta'^k = \widetilde{u}^\alpha \widetilde{\rho}^k_\alpha(\widetilde{z}) = M^\alpha_\beta u^\beta W^\gamma_\alpha \rho^h_\gamma \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h} = u^\gamma \rho^h_\gamma \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h} = \eta^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h},$$

adică regulile de schimbare (3.1.1) sunt îndeplinite, deci avem:

$$z'^k = z'^k(z), \qquad \eta'^k = u^\gamma \rho^h_\gamma \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}.$$

Aceste legi de transformare au următoarea matrice Jacobi:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z^j}\left(\rho^h_\gamma \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}\right) u^\gamma & \rho^h_\beta \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

Notăm în continuare cu $\rho_* : T_{\mathbb{C}}E \to T_{\mathbb{C}}(T'M)$ aplicaţia tangentă a ancorei $\rho_E : \Gamma(E) \to \Gamma(T'M)$ şi cu $J^*_{T'M} : T_{\mathbb{C}}(T'M) \to T_{\mathbb{C}}(T'M)$, structura complexă naturală pe $T_{\mathbb{C}}(T'M)$.

O structură complexă J^*_E pe fibratul tangent complexificat $T_{\mathbb{C}}E$ este un endomorfism $J^*_E : T_{\mathbb{C}}E \to T_{\mathbb{C}}E$ dat de

$$\begin{aligned} J^*_E\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) &= i\frac{\partial}{\partial z^k}, \quad J^*_E\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}, \\ J^*_E\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) &= i\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad J^*_E\left(\frac{\partial}{\partial \overline{u}^\alpha}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{u}^\alpha}. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Structura complexă J^*_E satisface identităţile ${J^*_E}^2 = -\operatorname{Id}_{T_{\mathbb{C}}E}$ şi $J^*_{T'M} \circ \rho_* = \rho_* \circ J^*_E$.

Descompunerea $T_{\mathbb{C}}E = T'E \oplus T''E$ a fibratului tangent se datorează structurii complexe J^*_E, fibratele tangente olomorf şi antiolomorf ale lui E corespunzând valorilor proprii $\pm i$ ale lui J^*_E.

Am arătat că ancora olomorfă ρ duce coordonatele (z^k, u^α) dintr-o hartă locală a varietăţii E în coordonatele $(z^k, \eta^k = u^\alpha \rho^k_\alpha(z))$ într-o hartă locală pe $\rho(E) \subset T'M$. Matricea Jacobi a morfismului ρ este

$$\begin{pmatrix} \delta^k_h & 0 \\ \frac{\partial \rho^k_\alpha}{\partial z^h} u^\alpha & \rho^h_\alpha \end{pmatrix}$$

Reperul natural pe $T_{\mathbb{C}}(T'M)$ este atunci $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}\right\}$, iar acţiunea aplicaţiei tangente ρ_* este descrisă local pe $\rho(E)$ prin

$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) =: \frac{\partial^*}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} + u^\alpha \frac{\partial \rho^h_\alpha}{\partial z^k} \frac{\partial}{\partial \eta^h}, \qquad (3.1.6)$$
$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) =: \frac{\partial^*}{\partial u^\alpha} = \rho^h_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta^h}$$

şi conjugatele acestora. Baza duală a reperului natural $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}$ indusă de ρ_* pe $\rho(E)$ este

$$d^* z^k = dz^k, \qquad (3.1.7)$$
$$d^* \eta^k = u^\alpha \frac{\partial \rho^k_\alpha}{\partial z^h} dz^h + \rho^k_\alpha du^\alpha.$$

Pentru o schimbare de coordonate pe $T_{\mathbb{C}}(T'M)$, legile de transformare pe $T_{\mathbb{C}}E$ sunt, datorită matricei Jacobi (3.1.4),

$$\frac{\partial^*}{\partial z^j} = \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z'^k} + \frac{\partial}{\partial z^j}\left(\rho^h_\gamma \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}\right) u^\gamma \frac{\partial}{\partial \eta'^k}, \qquad (3.1.8)$$
$$\frac{\partial^*}{\partial u^\beta} = \rho^h_\beta \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \frac{\partial}{\partial \eta'^k}$$

şi conjugatele.

3.1.2 Structura de algebroid Lie a fibratului $T'E$

Vom demonstra că fibratul tangent olomorf $T'E$ are o structură de algebroid Lie peste varietatea bază M. Fie $p' : T'M \to M$ proiecţia fibratului tangent olomorf al varietăţii M şi $p'_* : T'(T'M) \to T'M$, aplicaţia sa tangentă, ce acţionează într-un punct (z, η) prin $Z^k \frac{\partial}{\partial z^k} + V^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} \xrightarrow{p'_*} Z^k \frac{\partial}{\partial z^k}$. Atunci, diagrama

$$\begin{array}{ccc} T'E & \xrightarrow{\rho_*} & T'(T'M) \\ {\scriptstyle \pi_E}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p'_*} \\ E & \xrightarrow{\rho} & T'M \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p'} \\ M & \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} & M \end{array}$$

sugerează definirea aplicaţiei $\Upsilon : T'E \to T'M$ prin $\Upsilon = p'_* \circ \rho_*$, cu scopul de a introduce o structură de algebroid Lie olomorf pe $T'E$. Deoarece $T'M$ şi

$T'E$ sunt fibrate olomorfe, din definiţia aplicaţiei Υ rezultă că aceasta este un morfism de fibrate vectoriale.

Local, avem $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k} + V^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \xrightarrow{\rho_*} Z^* = Z^k \frac{\partial^*}{\partial z^k} + V^\alpha \frac{\partial^*}{\partial u^\alpha}$. Acţiunea (3.1.6) şi definiţia lui p'_* conduc la $\Upsilon(Z) = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k}$.

Deoarece $T'E$ este un fibrat vectorial peste M, considerând paranteza Lie a două secţiuni, $[Z, W]_{T'E}$ şi $f : M \to \mathbb{C}$ (deci $\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = 0$), obţinem

$$[Z, fW]_{T'E} = f[Z, W]_{T'E} + \Upsilon(Z)f\, W. \tag{3.1.9}$$

Teorema 3.1.1. *Fibratul tangent olomorf $T'E$ are o structură de algebroid Lie peste varietatea complexă M, cu aplicaţia ancoră Υ.*

Folosind definiţia aplicaţiei Υ, obţinem că aceasta este un omomorfism între algebrele Lie complexe $(\Gamma(T'E), [\cdot,\cdot]_{T'E})$ şi $(\Gamma(T'M), [\cdot,\cdot])$, mai exact are loc identitatea

$$\Upsilon\big([Z, W]_{T'E}\big) = [\Upsilon(Z), \Upsilon(W)], \quad \forall Z, W \in \Gamma(T'E).$$

3.1.3 Conexiuni neliniare pe $T'E$

După cum am reamintit mai sus, regulile de schimbare ale reperului natural pe $T_{\mathbb{C}}E$ sunt complicate. În geometria Finsler, soluţia acestei probleme este metoda conexiunii neliniare [A-P, MG1]. Să considerăm aplicaţia tangentă π_* a proiecţiei $\pi : E \to M$. Atunci, *fibratul tangent olomorf vertical* al lui E poate fi definit prin $VE = \ker \pi_*$. Un reper local pe VE este $\left\{\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}_{\alpha=\overline{1,m}}$, iar dacă $\pi^*(T'M)$ este fibratul imagine inversă al fibratului tangent olomorf al varietăţii M, atunci obţinem următoarea secvenţă fundamentală exactă (conform [MG1]):

$$0 \;\to\; VE \;\stackrel{i}{\to}\; T'E \;\stackrel{\pi_*}{\to}\; \pi^*(T'M) \;\to\; 0. \tag{3.1.10}$$

Ca de obicei, o scindare $C : T'E \to VE$ a acestei secvenţe se numeşte *conexiune neliniară complexă* sau *conexiune Ehresmann* (după T. Aikou, [AT4]) pe E. Aceasta determină descompunerea

$$T'E = VE \oplus HE \tag{3.1.11}$$

a fibratului tangent olomorf al algebroidului olomorf E, unde HE este *distribuţia orizontală*, izomorfă cu fibratul imagine inversă $\pi^*(T'M)$.

Descompunerea fibratului tangent complexificat $T_{\mathbb{C}}E$ este obţinută prin conjugare:

$$T_{\mathbb{C}}E = HE \oplus VE \oplus \overline{HE} \oplus \overline{VE}.$$

Liftul orizontal $l^h : \pi^*(T'M) \to HE$ determinat de conexiunea neliniară este definit prin

$$l^h\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) = \frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{3.1.12}$$

(conform [MG1]), unde funcţiile $N_k^\alpha(z,u)$ se numesc *coeficienţii conexiunii neliniare complexe* pe E. O schimbare de coordonate locale implică următoarele reguli de transformare pentru $\frac{\delta}{\delta z^h}$:

$$\frac{\delta}{\delta z^h} = \frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h}\frac{\delta}{\delta \widetilde{z}^k}.$$

Folosind şi (2.2.10), obţinem regulile de schimbare pentru funcţiile N_k^α:

$$\frac{\partial \widetilde{z}^k}{\partial z^h}\widetilde{N}_k^\alpha = M_\beta^\alpha N_h^\beta - \frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial z^h}u^\beta. \tag{3.1.13}$$

Am obţinut câmpul de repere $\left\{\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}$ pe $T'E$, numit *reper adaptat* al conexiunii neliniare complexe.

Propoziţia 3.1.1. *Parantezele Lie ale reperului adaptat pe* $T'E$ *sunt:*

$$\left[\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\delta}{\delta z^h}\right]_{T'E} = \left(\frac{\partial N_k^\alpha}{\partial z^h} - \frac{\partial N_h^\alpha}{\partial z^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}; \tag{3.1.14}$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right]_{T'E} = \left[\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right]_{T'E} = 0.$$

Baza duală reperului adaptat este $\{dz^k, \delta u^\alpha\}$, unde

$$\delta u^\alpha = du^\alpha + N_h^\alpha dz^h. \tag{3.1.15}$$

Un caz particular este cel în care algebroidul E este chiar fibratul tangent olomorf $T'M$. Fie $\left\{\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}$ reperul adaptat al unei conexiuni neliniare pe $T'T'M$, unde

$$\frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^h \frac{\partial}{\partial \eta^h} \tag{3.1.16}$$

şi fie $\left\{dz^k, \delta\eta^k\right\}$ baza duală, cu

$$\delta\eta^k = d\eta^k + N_h^k dz^h. \tag{3.1.17}$$

Coeficienţii conexiunii neliniare complexe se schimbă (conform [MG1]) după regulile:

$$N_h'^j \frac{\partial z'^h}{\partial z^k} = \frac{\partial z'^j}{\partial z^h}N_k^h - \frac{\partial^2 z'^j}{\partial z^h \partial z^k}\eta^h. \tag{3.1.18}$$

Vom utiliza frecvent în continuare, acolo unde nu există pericol de confuzii, următoarele abrevieri uzuale:

$$\delta_k = \frac{\delta}{\delta z^k}, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad \dot{\partial}_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

3.1.4 Conexiuni liniare pe $T'E$

Definiţia 3.1.1. O conexiune liniară complexă pe $T'E$ este o aplicaţie

$$D : \Gamma(T'E) \times \Gamma(T'E) \to \Gamma(T'E), \qquad (Z, W) \mapsto D_Z W,$$

astfel încât

$$D_Z(fW) = (\Upsilon(Z)f)W + fD_Z W, \quad \forall f \in \mathcal{H}(M),\ \forall Z, W \in \Gamma(T'E). \tag{3.1.19}$$

Local, o secţiune $Z \in \Gamma(T'E)$ se poate descompune în reperul adaptat $\{\delta_k, \partial_\alpha\}$ al unei conexiuni neliniare, pe care am descris-o anterior. O conexiune liniară complexă distinsă D pe $T'E$ (care conservă distribuţiile din (3.1.11)) are următorii coeficienţi:

$$D_{\delta_k}\delta_j = L^i_{jk}\delta_i, \quad D_{\dot{\partial}_\gamma}\delta_j = C^i_{j\gamma}\delta_i, \quad D_{\delta_k}\dot{\partial}_\beta = L^\alpha_{\beta k}\dot{\partial}_\alpha, \quad D_{\dot{\partial}_\gamma}\dot{\partial}_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\dot{\partial}_\alpha. \tag{3.1.20}$$

Torsiunea unei conexiuni liniare complexe distinse pe $T'E$ este

$$T(Z, W) = D_Z W - D_W Z - [Z, W]. \tag{3.1.21}$$

Coeficienţii săi sunt notaţi cu $T(\delta_h, \delta_k) = T^i_{hk}\delta_i + T^\alpha_{hk}\dot{\partial}_\alpha$, etc. şi sunt daţi de

$$\begin{aligned}
T^i_{hk} &= L^i_{kh} - L^i_{hk},\\
T^\alpha_{hk} &= \partial_k N^\alpha_h - \partial_h N^\alpha_k,\\
T^i_{h\alpha} &= -C^i_{h\alpha},\\
T^\beta_{h\alpha} &= L^\beta_{\alpha h},\\
T^\gamma_{\alpha\beta} &= C^\gamma_{\alpha\beta} - C^\gamma_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Curbura unei conexiuni liniare complexe distinse pe $T'E$ este definită prin

$$R(Z, W) = D_Z D_W - D_W D_Z - D_{[Z,W]}. \tag{3.1.22}$$

În reperul adaptat, coeficienţii curburii sunt:

$$\begin{aligned}
R^{\ i}_{jkh} &= \partial_k L^i_{jh} - \partial_h L^i_{jk} + L^l_{jh}L^i_{lk} - L^l_{jk}L^i_{lh} - (\partial_h N^\alpha_k - \partial_k N^\alpha_h)C^{\ i}_{j\alpha},\\
R^{\ \alpha}_{\beta kh} &= \partial_k L^\alpha_{\beta h} - \partial_h L^\alpha_{\beta k} + L^\gamma_{\beta h}L^\alpha_{\gamma k} - L^\gamma_{\beta k}L^\alpha_{\gamma h} - \big(\partial_h N^\gamma_k - \partial_k N^\gamma_h\big)C^{\ \alpha}_{\beta\gamma},\\
R^{\ i}_{jk\beta} &= \partial_k C^{\ i}_{j\beta} + C^{\ l}_{j\beta}L^i_{lk} - L^l_{jk}C^{\ i}_{l\beta},\\
R^{\ \alpha}_{\gamma k\beta} &= \partial_k C^{\ \alpha}_{\gamma\beta} + C^{\ \varepsilon}_{\gamma\beta}L^\alpha_{\varepsilon k} - L^\varepsilon_{\gamma k}C^{\ \alpha}_{\varepsilon\beta},\\
R^{\ i}_{j\gamma\beta} &= C^{\ l}_{j\beta}C^{\ i}_{l\gamma} - C^{\ l}_{j\gamma}C^{\ i}_{l\beta},\\
R^{\ \alpha}_{\varepsilon\gamma\beta} &= C^{\ \sigma}_{\varepsilon\beta}C^{\ \alpha}_{\sigma\gamma} - C^{\ \sigma}_{\varepsilon\gamma}C^{\ \alpha}_{\sigma\beta}.
\end{aligned}$$

3.2 Prelungirea unui algebroid Lie olomorf

Vom introduce noţiunea de prelungire a unui algebroid Lie olomorf E peste o varietate complexă M, folosind aplicaţia tangentă $\pi_* : T'E \to T'M$ şi ancora olomorfă $\rho : E \to T'M$. Definim submulţimea $\mathcal{T}'E$ a produsului $E \times T'E$ prin

$$\mathcal{T}'E = \{(e, v) \in E \times T'E \mid \rho(e) = \pi_*(v)\} \tag{3.2.23}$$

şi aplicaţia $\pi_\mathcal{T} : \mathcal{T}'E \to E$, dată prin $\pi_\mathcal{T}(e, v) = \pi_E(v)$, unde $\pi_E : T'E \to E$ este proiecţia tangentă. Atunci $(\mathcal{T}'E, \pi_\mathcal{T}, E)$ este un fibrat vectorial olomorf peste E, de rang $2m$. Mai mult, este uşor de verificat că proiecţia pe al doilea factor, $\rho_\mathcal{T} : \mathcal{T}'E \to T'E$, $\rho_\mathcal{T}(e, v) = v$, este ancora unui nou algebroid Lie olomorf peste varietatea complexă E.

Principalele avantaje ale construcţiei de mai sus sunt constituite de similarităţile pe care le comportă studiul geometriei fibratului prelungire cu studiul geometriei fibratului $T'T'M$ al unei varietăţi complexe M, fiind o generalizare a acestuia. În acest studiu, un rol esenţial este jucat de noţiunea de fibrat vertical. Definim fibratul vertical al prelungirii folosind proiecţia pe primul factor $\tau_1 : \mathcal{T}'E \to E$, $\tau_1(e, v) = e$, prin

$$V\mathcal{T}'E = \ker \tau_1 = \{(e, v) \in \mathcal{T}'E \mid \tau_1(e, v) = 0\}.$$

Din construcţia de mai sus, rezultă că elementele fibratului vertical $V\mathcal{T}'E$ sunt de forma $(0, v) \in E \times \mathcal{T}'E$, cu $\pi_*(v) = 0$. Atunci, elementele verticale $(0, v) \in V\mathcal{T}'E$ au proprietatea $v \in \ker \pi_*$ şi v este un vector vertical pe E.

Coordonatele locale pe $\mathcal{T}'E$ sunt $(z^k, u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha)$, obţinute din coordonatele locale (z^k, u^α) ale lui e folosind identitatea $\rho(e) = \pi_*(v)$, din care rezultă că vectorul v are forma

$$v = \rho^k_\alpha v^\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} + w^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Dacă $\{e_\alpha\}_{\overline{1,m}}$ este baza secţiunilor olomorfe pe E, atunci baza locală a secţiunilor olomorfe în $\Gamma(\mathcal{T}'E)$ este $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$, definită prin

$$\mathcal{Z}_\alpha(e) = \left(e_\alpha(\pi(e)), \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k}\bigg|_e\right), \qquad \mathcal{V}_\alpha(e) = \left(0, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\bigg|_e\right),$$

unde $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}$ este reperul natural pe $T'E$.

Dacă W este o secţiune olomorfă a fibratului prelungire $\mathcal{T}'E$, atunci descompunerea sa în baza $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ este

$$W = Z^\alpha \mathcal{Z}_\alpha + V^\alpha \mathcal{V}_\alpha,$$

unde Z^α şi V^α sunt funcţii olomorfe ce depind de z şi u.

Câmpul vectorial olomorf $\rho_{\mathcal{T}}(W) \in \Gamma(T'E)$ poate fi scris ca

$$\rho_{\mathcal{T}}(W) = \rho_\alpha^k Z^\alpha(z,u) \frac{\partial}{\partial z^k}\bigg|_{(z,u)} + V^\alpha(z,u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\bigg|_{(z,u)}.$$

O secţiune $Z \in \Gamma(E)$ poate fi liftată la secţiuni ale fibratului prelungire $\mathcal{T}'E$ considerând lifturile sale vertical şi complet, Z^v şi respectiv Z^c, definite în Capitolul 2. Pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$, lifturile sunt definite prin

$$Z^V(e) = (0, Z^v(e)), \qquad Z^C(e) = (Z(\pi(e)), Z^c(e)), \qquad e \in E.$$

În coordonate locale, dacă $Z = Z^\alpha e_\alpha$, atunci expresiile lifturilor Z^V şi Z^C sunt, respectiv,

$$Z^V = Z^\alpha \mathcal{V}_\alpha, \qquad Z^C = Z^\alpha \mathcal{Z}_\alpha + \left(\rho_\beta^k \frac{\partial Z^\alpha}{\partial z^k} - Z^\gamma \mathcal{C}_{\gamma\beta}^{\ \alpha}\right) u^\beta \mathcal{V}_\alpha.$$

În particular, avem $e_\alpha^V = \mathcal{V}_\alpha$ şi $e_\alpha^C = \mathcal{Z}_\alpha - \mathcal{C}_{\alpha\gamma}^{\ \beta} u^\gamma \mathcal{V}_\beta$.

Paranteza Lie $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}'E$ satisface identităţile

$$[Z^V, W^V]_{\mathcal{T}} = 0, \qquad [Z^V, W^C]_{\mathcal{T}} = [Z, W]_E^V, \qquad [Z^C, W^C]_{\mathcal{T}} = [Z, W]_E^C$$

pentru $Z, W \in \Gamma(E)$. Structura de algebroid Lie olomorf a fibratului vectorial $(\mathcal{T}'E, \pi_{\mathcal{T}}, E)$ este aşadar dată de $([\cdot,\cdot]_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}})$. Acţiunea ancorei $\rho_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}'E$ este descrisă local de

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_\alpha) = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \qquad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Lema 3.2.1. *Parantezele Lie ale bazei* $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ *sunt:*

$$[\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{Z}_\beta]_{\mathcal{T}} = \mathcal{C}^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{Z}_\gamma, \qquad [\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} = 0, \qquad [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} = 0.$$

Analog cazului real [ME1], putem defini un operator diferenţial $\partial_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}'E$. Notând cu $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ baza duală bazei $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$, avem

$$\partial_{\mathcal{T}} z^k = \rho^k_\alpha \mathcal{Z}^\alpha, \qquad \partial_{\mathcal{T}} u^\alpha = \mathcal{V}^\alpha$$

şi

$$\partial_{\mathcal{T}} \mathcal{Z}^\alpha = -\frac{1}{2}\mathcal{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}\mathcal{Z}^\beta \wedge \mathcal{Z}^\gamma, \qquad \partial_{\mathcal{T}}\mathcal{V}^\alpha = 0.$$

3.2.1 Semispray-uri şi spray-uri

În cazul fibratului tangent olomorf $T'M$, se ştie că un spray determină o conexiune neliniară, însă acest lucru nu este valabil pentru un fibrat vectorial arbitrar E. Vom rezolva această problemă folosind noţiunea de prelungire a unui algebroid.

Un semispray poate fi considerat şi pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ a algebroidului Lie olomorf E. Fie $\mathcal{L}$ secţiunea Liouville complexă pe $\mathcal{T}'E$, definită prin

$$\mathcal{L}(e) = (0, e^V_e), \quad e \in E. \tag{3.2.24}$$

Expresia în coordonate a secţiunii $\mathcal{L}$ este

$$\mathcal{L} = u^\alpha \mathcal{V}_\alpha. \tag{3.2.25}$$

De asemenea, fie T structura tangentă (numită şi endomorfism vertical) definită pe $\mathcal{T}'E$ prin

$$T(Z^C) = Z^V, \qquad T(Z^V) = 0. \tag{3.2.26}$$

În coordonate locale, avem $T = \mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{Z}^\alpha$, de unde rezultă

$$T(\mathcal{Z}_\alpha) = \mathcal{V}_\alpha, \qquad T(\mathcal{V}_\alpha) = 0. \tag{3.2.27}$$

Lema 3.2.2. *Dacă* T *este structura tangentă complexă pe* $\mathcal{T}'E$ *şi* $\mathcal{L}$ *este secţiunea Liouville complexă, atunci*

$$T^2 = 0, \qquad \operatorname{Im} T = \ker T = V\mathcal{T}'E, \qquad [\mathcal{L}, T]_{\mathcal{T}} = -T. \tag{3.2.28}$$

Definiţia 3.2.1. O secţiune $\mathcal{S}$ a algebroidului Lie olomorf $\mathcal{T}'E$ se numeşte semispray complex dacă
$$T(\mathcal{S}) = \mathcal{L}.$$

Expresia locală a unui semispray pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ este
$$\mathcal{S} = u^\alpha \mathcal{Z}_\alpha - 2G^\alpha(z,u)\mathcal{V}_\alpha.$$

Dacă, în plus, $[\mathcal{L}, \mathcal{S}]_{\mathcal{T}} = \mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ se numeşte *spray*, iar G^α sunt funcţii omogene de grad 2.

3.2.2 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}'E$

Vom studia în această secţiune metoda conexiunii neliniare, aplicate anterior pe fibratul tangent olomorf $T'E$, în cazul prelungirii olomorfe $\mathcal{T}'E$ a algebroidului Lie olomorf E. O conexiune neliniară complexă pe $\mathcal{T}'E$ este dată de un subfibrat vectorial complex $H\mathcal{T}'E$ al fibratului $\mathcal{T}'E$ astfel încât acesta din urmă se descompune în $\mathcal{T}'E = H\mathcal{T}'E \oplus V\mathcal{T}'E$. Expresiile liftului orizontal l^h de la $\mathcal{T}'E$ la $H\mathcal{T}'E$ sunt:
$$l^h(\mathcal{Z}_\alpha) = \mathcal{Z}_\alpha - N_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta, \qquad l^h(\mathcal{V}_\alpha) = 0,$$
unde $N_\alpha^\beta = N_\alpha^\beta(z,u)$ sunt funcţii definite pe E, numite coeficienţii conexiunii neliniare pe prelungirea $\mathcal{T}'E$.

Notăm cu
$$\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{Z}_\alpha - N_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta \tag{3.2.29}$$
pentru a obţine un câmp local de repere $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ pe $\mathcal{T}'E$, numit *reper adaptat* în raport cu conexiunea neliniară complexă de pe $\mathcal{T}'E$. Atunci, avem
$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}_\alpha) = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} - N_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \qquad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{3.2.30}$$

Dualul reperului adaptat este $\{\mathcal{Z}^\alpha, \delta\mathcal{V}^\alpha\}$, unde
$$\delta\mathcal{V}^\alpha = \mathcal{V}^\alpha + N_\beta^\alpha \mathcal{Z}^\beta,$$
iar $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ este baza duală bazei $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$.

Propoziţia 3.2.1. *Parantezele Lie ale reperului adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ sunt:*
$$\begin{aligned}
[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]_{\mathcal{T}} &= \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathcal{X}_\gamma + \mathcal{R}_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathcal{V}_\gamma, \\
[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} &= \frac{\partial N_\alpha^\gamma}{\partial u^\beta} \mathcal{V}_\gamma, \\
[\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} &= 0,
\end{aligned}$$

unde

$$\mathcal{R}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\alpha\beta} N^{\gamma}_{\varepsilon} + \rho^k_{\beta} \frac{\partial N^{\gamma}_{\alpha}}{\partial z^k} - \rho^k_{\alpha} \frac{\partial N^{\gamma}_{\beta}}{\partial z^k} - N^{\varepsilon}_{\beta} \frac{\partial N^{\gamma}_{\alpha}}{\partial u^{\varepsilon}} + N^{\varepsilon}_{\alpha} \frac{\partial N^{\gamma}_{\beta}}{\partial u^{\varepsilon}}.$$

Să considerăm acum conexiunea neliniară complexă de pe fibratul tangent olomorf $T'E$ dată de (3.1.12). Coeficienţii săi, $N^{\alpha}_k(z,u)$, se schimbă după regulile (3.1.13), iar reperul adaptat este $\left\{\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}\right\}$, unde

$$\frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N^{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}.$$

Este evident interesantă relaţia dintre cele două conexiuni neliniare de pe $T'E$ şi respectiv $\mathcal{T}'E$. Prima relaţie din (3.2.30) ne sugerează să considerăm un alt reper adaptat pe $T'E$, definit prin

$$\delta_{\alpha} = \rho^k_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^k} - N^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\beta}}, \tag{3.2.31}$$

şi să impunem ca el să respecte regulile de schimbare

$$\delta_{\alpha} = M^{\beta}_{\alpha} \widetilde{\delta}_{\beta} \tag{3.2.32}$$

sau, folosind (3.1.13) şi (2.2.10),

$$M^{\beta}_{\alpha} \widetilde{N}^{\gamma}_{\beta} = M^{\gamma}_{\beta} N^{\beta}_{\alpha} - \rho^k_{\alpha} \frac{\partial M^{\gamma}_{\beta}}{\partial z^k} u^{\beta}. \tag{3.2.33}$$

Observăm că aceste reguli de schimbare pot fi obţinute din (3.1.13) contractând cu ρ^k_{α} şi notând

$$N^{\beta}_{\alpha} = \rho^k_{\alpha} N^{\beta}_k. \tag{3.2.34}$$

Propoziţia 3.2.2. *O conexiune neliniară complexă pe fibratul tangent olomorf $T'E$, având coeficienţii N^{β}_k, induce o conexiune neliniară complexă pe fibratul prelungire olomorf $\mathcal{T}'E$, având coeficienţii N^{β}_{α} daţi de relaţia* (3.2.34)*. Mai mult, relaţiile dintre reperele adaptate de pe $T'E$ şi $\mathcal{T}'E$ sunt*

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}_{\alpha}) = \rho^k_{\alpha} \frac{\delta}{\delta z^k}. \tag{3.2.35}$$

Acest rezultat arată că reperul adaptat (3.2.31) poate fi interpretat ca definind o nouă conexiune neliniară complexă pe E. Această conexiune are o proprietate interesantă, şi anume faptul că poate fi derivată dintr-un spray. Mai exact, are loc

Teorema 3.2.1. *Dacă G^α sunt coeficienţii unui spray complex pe $T'E$, definiţi de* (2.5.27)*, atunci funcţiile*

$$N_\alpha^\beta = \frac{\partial G^\beta}{\partial u^\alpha} + P_\alpha^\beta \tag{3.2.36}$$

definesc o conexiune neliniară complexă pe $\mathcal{T}'E$, unde

$$P_\alpha^\beta = \frac{1}{4} W_\gamma^\beta \left(\rho_\alpha^k \frac{\partial M_\delta^\gamma}{\partial z^k} u^\delta - \frac{\partial M_\alpha^\gamma}{\partial z^k} \rho_\delta^k u^\delta \right). \tag{3.2.37}$$

3.3 Structuri Lagrange induse pe algebroizi Lie olomorfi

O întrebare naturală ce apare în studiul geometriei algebroizilor Lie olomorfi se referă la investigarea legăturii dintre două conexiuni neliniare pe E şi respectiv pe $T'M$.

Geometria fibratului tangent olomorf $T'M$ înzestrat cu o funcţie Lagrange complexă $L(z,\eta)$, unde

$$g_{i\bar{j}}(z,\eta) = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j} \tag{3.3.38}$$

defineşte o metrică nedegenerată, este binecunoscută. Perechea (M, L) se numeşte *spaţiu Lagrange complex* [MG1]. Pentru a o deosebi de E, vom nota în continuare această pereche cu $(T'M, L)$.

O conexiune neliniară remarcabilă pe $T'M$ este

$$N_k^i = g^{\bar{j}i} \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{\eta}^j}, \tag{3.3.39}$$

numită conexiune neliniară complexă Chern-Lagrange. Dacă L este complex omogen în variabila η, adică avem $L(z, \lambda\eta) = \lambda\bar{\lambda} L(z,\eta)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci (M, L) se numeşte *spaţiu Finsler complex* şi în acest caz particular (3.3.39) defineşte o conexiune neliniară complexă pe $T'M$, numită conexiunea neliniară Chern-Finsler.

I) Cazul $m = n = \operatorname{rang} \rho$.

În acest caz rezultatul este predictibil. Reamintim că pe varietatea E avem drept coordonate într-o hartă locală (z^k, u^α), în timp ce pe $T'M$ avem (z^k, η^k), unde $\eta^k = u^\alpha \rho_\alpha^k(z)$, după cum am arătat mai sus. Toţi indicii $\alpha, \beta, ..., i, j, ...$ iau valorile $\overline{1,n}$.

Deoarece $n = \operatorname{rang}\rho$, rezultă că ρ este un difeomorfism, având inversa $\rho^{-1} = [\rho_k^\alpha]$, astfel încât $\rho_\alpha^k \rho_k^\beta = \delta_\alpha^\beta$ şi $u^a = \rho_k^\alpha \eta^k$.

Dacă $(T'M, L)$ este un spaţiu Lagrange (Finsler) complex cu funcţia Lagrange $L(z, \eta)$, atunci, conform relaţiei (3.1.3), aceasta induce pe $\rho(E)$ o altă funcţie Lagrange, $L^*(z, u) = L(z, \eta(u))$, bine definită datorită relaţiilor (3.1.1), (2.2.5) şi (2.2.9). Tensorul metric este

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z, u) := \frac{\partial^2 L^*}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^\beta} = \rho_\alpha^i \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}.$$

Deoarece ρ este difeomorfism, $\operatorname{rang} g_{\alpha\bar{\beta}} = n = m$, iar L^* poate fi considerat ca funcţie Lagrange pe E.

Numim perechea (E, L^*) *structură Lagrange* pe algebroidul Lie E. Notăm că dacă L este omogenă, atunci $L^*(z, \lambda u) = \lambda\bar{\lambda}L^*(z, u)$, caz în care pe E este indusă o *structură Finsler*.

În cazul în care $m = n = \operatorname{rang}\rho$, difeomorfismul ρ_* duce descompunerea $T'E = VE \oplus HE$ în $T'T'M = VT'M \oplus HT'M$ păstrând distribuţiile, iar ρ_*^{-1} are rolul reciproc.

Propoziţia 3.3.1. *Dacă $(T'M, L)$ este un spaţiu Lagrange (Finsler) complex şi (3.3.39) este o conexiune neliniară complexă asociată, atunci*

$$\overset{*}{N}{}_k^\alpha = g^{\bar{\beta}\alpha} \frac{\partial^2 L^*}{\partial z^k \partial \bar{u}^\beta} \tag{3.3.40}$$

este conexiunea neliniară indusă pe algebroidul Lie E, numită conexiunea Chern-Lagrange (Chern-Finsler) a algebroidului.

II) Cazul $\operatorname{rang}\rho = m < n$.

În acest caz, morfismul ρ duce E în $\rho(E)$, care este o subvarietate scufundată a lui $T'M$.

Ca în primul caz, vom induce pe E o structură Lagrange bine definită, indusă de o structură Lagrange $(T'M, L)$.

Fie $g_{i\bar{j}}(z, \eta) = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$ tensorul metric definit de Lagrangianul regulat $L : T'M \to \mathbb{R}$. Ca în primul caz, considerăm funcţia Lagrange indusă pe $\rho(E)$ dată de $L^*(z, u) = L(z, \eta(u))$, cu tensorul metric

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z, u) := \frac{\partial^2 L^*}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^\beta} = \rho_\alpha^i \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}.$$

Deoarece $\operatorname{rang}\rho = m$ şi $\operatorname{rang}[g_{i\bar{j}}] = n > m$, rezultă că $\operatorname{rang}[g_{\alpha\bar{\beta}}] = m$.

Fie $X_\alpha = \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} \in \chi(M)$, $\alpha = \overline{1,m}$, câmpuri vectoriale pe varietatea bază M. Din rang $\rho = m$ obţinem că $\{X_\alpha\}$ sunt liniar independente şi pot fi liftate pe $\rho(E)$ prin $\left\{X^*_\alpha := \frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}_{\alpha=\overline{1,m}}$, care defineşte o subdistribuţie m-dimensională $V\rho(E)$ a distribuţiei n-dimensionale $VT'M$.

Să fixăm o conexiune neliniară complexă $N^h_k(z,\eta)$ pe $T'M$, în particular putem alege conexiunea Chern-Lagrange, şi considerăm bazele si bazele duale adaptate. Căutăm o conexiune neliniară $\overset{*}{N}{}^\alpha_k(z,\eta(u))$ indusă de $N^h_k(z,\eta)$ ca imaginea prin ρ a unei conexiuni neliniare $N^\alpha_k(z,u)$ pe E.

Notăm cu $G = g_{i\bar{j}} \delta\eta^i \otimes \delta\bar{\eta}^j$ structura metrică pe $VT'M$. Completăm $\{X^*_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,m}}$ cu $\{Y_a\}_{a=\overline{1,n-m}}$, câmpuri vectoriale normale la $V\rho(E)$ în raport cu G. Mai mult, presupunem că aceşti vectori sunt ortonormali. Scriind $Y_a = Y^k_a \frac{\partial}{\partial \eta^k}$, condiţiile de ortogonalitate conduc la $g_{i\bar{j}} Y^i_a \rho^{\bar{j}}_{\bar{\alpha}} = g_{i\bar{j}} \rho^i_\alpha Y^{\bar{j}}_{\bar{a}} = 0$, iar cele de normalitate dau $g_{i\bar{j}} Y^i_a Y^{\bar{j}}_{\bar{b}} = \delta_{ab}$.

Am obţinut astfel $\mathcal{R}^* = \{X^*_\alpha, Y_a\}$, un reper pe $VT'M$ cu matricea $R = [\rho^i_\alpha\ ;\ Y^i_a]$ de schimbare de la reperul natural $\left\{\frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}$. Fie $R^{-1} = [\rho^\alpha_i\ ;\ Y^a_i]^t$ matricea sa inversă, astfel încât

$$\rho^\alpha_i \rho^i_\beta = \delta^\alpha_\beta\ ; \quad \rho^\alpha_i Y^i_a = 0\ ; \quad Y^a_i Y^i_b = 0\ ; \quad \rho^j_\alpha \rho^\alpha_i + Y^j_a Y^a_i = \delta^j_i. \tag{3.3.41}$$

Fie $N^h_k(z,\eta)$ o conexiune neliniară complexă pe $T'M$ şi $N^\alpha_k(z,u)$ o conexiune neliniară pe E, cu bazele duale adaptate $\{dz^k, \delta u^\alpha = du^\alpha + N^\alpha_h dz^h\}$ şi respectiv $\{dz^k, \delta\eta^k = d\eta^k + N^k_h dz^h\}$. Identităţile (3.1.7) sugerează considerarea bazei duale $\delta^*\eta^k$ ca reperul de forme $\delta^*\eta^k = d^*\eta^k + \overset{*}{N}{}^k_h d^* z^h$ indus pe $\rho(E)$, unde $\overset{*}{N}{}^k_h = \overset{*}{N}{}^k_h(z,\eta)$ cu $\eta^k = \rho^k_\alpha u^\alpha$. Dintre acestea, numai m sunt liniar independente. În continuare, vom identifica $\overset{*}{N}{}^k_h = N^k_h$.

Definiţia 3.3.1. Funcţiile N^α_k sunt coeficienţii unei conexiuni neliniare numite conexiune indusă pe E de către conexiunea N^h_k de pe $T'M$ dacă

$$\delta u^\alpha = \rho^\alpha_k \delta^* \eta^k. \tag{3.3.42}$$

Propoziţia 3.3.2. *Dacă $N^\alpha_h(z,u)$ este conexiunea neliniară indusă pe E de conexiunea neliniară $N^k_h(z,\eta)$ pe $T'M$, atunci*

i) $dz^k = d^* z^k$; $\delta^*\eta^k = \rho^k_\alpha \delta u^\alpha + Y^k_a Y^a_j H^j_h dz^h$, *unde* $H^j_h = N^j_h + u^\beta \frac{\partial \rho^j_\beta}{\partial z^h}$.

ii) $\frac{\delta^*}{\delta z^k} = \frac{\delta}{\delta z^k} + Y^a_k Y^h_a H^j_h \frac{\partial}{\partial \eta^j}$; $\frac{\partial^*}{\partial u^\alpha} = \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta^k}$.

Să considerăm acum pe $T'M$ conexiunea Chern-Lagrange, $N_k^i = g^{\bar{j}i}\frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{\eta}^j}$, iar pe $\rho(E)$ considerăm o conexiune neliniară de tip Chern-Lagrange,

$$N_k^\alpha = g^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial^2 L^*}{\partial^* z^k \partial^* \bar{u}^\beta}. \tag{3.3.43}$$

Propoziţia 3.3.3. *Conexiunea neliniară indusă pe E de conexiunea Chern-Lagrange dată de (3.3.39) pe $T'M$ coincide cu (3.3.43).*

III) Cazul rang $\rho = n < m$.

În acest caz, ρ este o submersie şi $\rho(E)$ poate fi identificată cu $T'M$. Nu putem obţine aici o structură Lagrange complexă pe E indusă de una de pe $T'M$, dar invers, o structură Lagrange pe $T'M$ indusă de una definită pe E poate fi obţinută impunând anumite condiţii suplimentare.

Fie $L(z,u)$ o funcţie Lagrange pe E cu tensorul metric $g_{\alpha\bar{\beta}}(z,u) = \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^\beta}$, având $\det[g_{\alpha\bar{\beta}}] \neq 0$, astfel încât $\operatorname{rang}[g_{\alpha\bar{\beta}}] = m$. Fie $g^{\bar{\beta}\alpha}$ inversul tensorului metric, adică $g^{\bar{\beta}\alpha}g_{\gamma\bar{\beta}} = \delta_\gamma^\alpha$.

Pe $T'M$ avem reperul indus (3.1.6) şi dualul acestuia, (3.1.7). Lagrangianul $L(z,u)$ nu poate fi transformat oricum de ρ în $L^*(z, \eta^k = \rho_\alpha^k u^\alpha)$. De exemplu, fie $z \in M$ un punct fix şi $u_1 \neq u_2$ două secţiuni ale fibrei E_z; se poate să avem $\rho(u_1) = \rho(u_2)$ şi $L(z,u_1) \neq L(z,u_2)$. Atunci $L^*(z,\eta)$ ia două valori diferite, aşadar nu este bine definit. Presupunerea că L este constant pe fibre nu convine, datorită tensorului $g_{\alpha\bar{\beta}}$. O altă posibilitate ar fi să considerăm restricţia lui L la un subfibrat $E_{\neq}$ al lui E pentru care ρ este injectivă. În această situaţie, obţinem cazul **I)** pentru algebroidul Lie $(E_{\neq}, \rho)$. Problema conexiunii neliniare induse pe $T'M$ este aşadar mult mai complicată în acest ultim caz.

Capitolul 4

Structuri Finsler pe algebroizi Lie olomorfi

Structurile Finsler complexe pe fibrate vectoriale olomorfe au fost introduse şi studiate în principal de T. Aikou [AT2, AT3, AT4]. În acest capitol, introducem structuri Finsler, conexiuni parţiale şi Chern-Finsler în cazul unui algebroid Lie olomorf. Cadrul geometric al studiului îl reprezintă fibratul tangent complexificat al algebroidului şi prelungirea complexificată a acestuia.

4.1 Fibratul prelungire complexificat al unui algebroid Lie olomorf

Algebroidul Lie olomorf E are o structură de fibrat vectorial olomorf în raport cu structura complexă J_E. Fie $E_{\mathbb{C}}$ fibratul complexificat al lui E şi $T_{\mathbb{C}}E = T'E \oplus T''E$, fibratul tangent complexificat. Definim în continuare prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ a algebroidului E astfel. Extindem liniar peste $\mathbb{C}$ aplicaţia tangentă $\pi'_* : T'E \to T'M$ şi ancora $\rho : E \to T'M$ pentru a obţine $\pi_{*,\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}E \to T_{\mathbb{C}}M$ şi respectiv $\rho_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{C}}M$. Dacă $\pi_{E,\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}E \to E_{\mathbb{C}}$ este extinderea proiecţiei tangente la spaţiile complexificate, atunci putem defini submulţimea $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ a produsului $E_{\mathbb{C}} \times T_{\mathbb{C}}E$ prin

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = \{(e, v) \in E_{\mathbb{C}} \times T_{\mathbb{C}}E \mid \rho_{\mathbb{C}}(e) = \pi_{*,\mathbb{C}}(v)\}$$

şi aplicaţia $\pi_{\mathcal{T},\mathbb{C}} : \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \to E_{\mathbb{C}}$ prin $\pi_{\mathcal{T},\mathbb{C}}(e, v) = \pi_{E,\mathbb{C}}(v)$. Astfel, am obţinut un fibrat vectorial complex $(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E, \pi_{\mathcal{T},\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ peste $E_{\mathbb{C}}$. Mai mult, proiecţia pe al doilea factor,

$$\rho_{\mathcal{T},\mathbb{C}} : \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \to T_{\mathbb{C}}E, \quad \rho_{\mathcal{T},\mathbb{C}}(e,v) = v,$$

este ancora unui algebroid Lie complex peste $E_{\mathbb{C}}$, numit *prelungirea complexificată* a lui E. Aceasta coincide cu complexificarea prelungirii $\mathcal{T}'E$ (privită ca varietate complexă), adică $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = \mathcal{T}'E \oplus \mathcal{T}''E$, unde $\mathcal{T}''E = \overline{\mathcal{T}'E} = E'' \times T''E$, cu restricţiile necesare, $\rho'(e) = \pi'_*(v)$ şi conjugata acesteia.

Reamintim că fibratul vertical al prelungirii olomorfe este definit folosind proiecţia pe primul factor, $\tau_1 : \mathcal{T}'E \to E$, $\tau_1(e,v) = e$, prin $V\mathcal{T}'E = \ker \tau_1 = \{(e,v) \in \mathcal{T}'E \mid \tau_1(e,v) = 0\}$. Elementele verticale $(0,v) \in V\mathcal{T}'E$ au proprietatea $v \in \ker \pi'_*$. Prin conjugare, obţinem $V\mathcal{T}''E$ şi subfibratul vertical complexificat al prelungirii $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ este $V\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = V\mathcal{T}'E \oplus V\mathcal{T}''E$.

Coordonatele locale pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ sunt $(z^k, u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \bar{z}^k, \bar{u}^\alpha, \bar{v}^\alpha, \bar{w}^\alpha)$. Reamintim că baza locală a secţiunilor olomorfe în $\Gamma(\mathcal{T}'E)$ este $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$, definită prin

$$\mathcal{Z}_\alpha(u) = \left(e_\alpha(\pi(u)), \rho^k_\alpha \frac{\partial}{\partial z^k}\bigg|_u\right), \qquad \mathcal{V}_\alpha(u) = \left(0, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\bigg|_u\right),$$

unde $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}$ este reperul natural pe $T'E$. Ca urmare, o bază locală a secţiunilor în $\Gamma(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E)$ este $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$, unde $\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}$ sunt obţinute prin conjugare, adică

$$\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}(u) = \left(e_{\bar{\alpha}}(\pi(u)), \rho^{\bar{k}}_{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\bigg|_u\right), \quad \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}(u) = \left(0, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}\bigg|_u\right).$$

La o schimbare de hărţi locale pe E, regulile pentru coordonatele pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ sunt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}^k &= \widetilde{z}^k(z),\\
\widetilde{u}^\alpha &= M^\alpha_\beta u^\beta,\\
\widetilde{v}^\alpha &= M^\alpha_\beta v^\beta,\\
\widetilde{w}^\alpha &= M^\alpha_\beta w^\beta + \rho^k_\beta v^\beta \frac{\partial M^\alpha_\gamma}{\partial z^k} u^\gamma
\end{aligned}$$

şi conjugatele acestora. Folosind acestea, obţinem regulile de schimbare ale bazei locale a secţiunilor $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ din $\Gamma(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{Z}}_\beta &= W^\alpha_\beta \left(\mathcal{Z}_\alpha - \rho^h_\alpha \frac{\partial M^\gamma_\varepsilon}{\partial z^h} W^\tau_\gamma u^\varepsilon \mathcal{V}_\tau\right), \qquad (4.1.1)\\
\widetilde{\mathcal{V}}_\beta &= W^\alpha_\beta \mathcal{V}_\alpha,
\end{aligned}$$

împreună cu conjugatele.

Acţiunea aplicaţiei ancoră $\rho_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ este descrisă local prin:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_\alpha) &= \rho_\alpha^k \partial_k =: \partial_\alpha, \quad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_\alpha) = \dot{\partial}_\alpha, \\ \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}) &= \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{z}} \partial_{\bar{k}} =: \partial_{\bar{\alpha}}, \quad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}) = \dot{\partial}_{\bar{\alpha}}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

unde $\partial_{\bar{k}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, $\dot{\partial}_{\bar{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}$.

Propoziţia 4.1.1. *Parantezele Lie ale bazei* $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ *sunt*

$$\begin{array}{lll} [\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{Z}_\beta]_{\mathcal{T}} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathcal{Z}_\gamma, & [\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} = 0, & [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} = 0, \\ [\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{Z}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} = 0, & [\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} = 0, & [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} = 0 \end{array}$$

şi conjugatele acestora, de exemplu $[\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Z}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} = \overline{[\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{Z}_\beta]_{\mathcal{T}}} = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} \mathcal{Z}_{\bar{\gamma}}$, *etc.*

4.1.1 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$

Reamintim că dacă pe $T'E$ este dată o conexiune neliniară având coeficienţii N_k^β, iar $\{\delta_k, \dot{\partial}_\alpha\}$ este reperul adaptat pe $T'E$, cu $\delta_k = \partial_k - N_k^\beta \dot{\partial}_\beta$, notând $\delta_\alpha = \rho_\alpha^k \delta_k$ şi $N_\alpha^\beta = \rho_\alpha^k N_k^\beta$, atunci aceştia din urmă sunt coeficienţii unei conexiuni neliniare pe prelungirea $\mathcal{T}'E$.

Cu notaţia

$$\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{Z}_\alpha - N_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta,$$

obţinem un alt reper local, $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ pe $\mathcal{T}'E$, numit *reper adaptat* în raport cu conexiunea neliniară complexă indusă pe $\mathcal{T}'E$. Avem

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_\alpha) = \partial_\alpha, \qquad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_\alpha) = \dot{\partial}_\alpha,$$

deci

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}_\alpha) = \delta_\alpha.$$

La o schimbare de hărţi locale pe E, regulile de schimbare ale reperului adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ sunt

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha &= W_\alpha^\beta \mathcal{X}_\beta, \\ \widetilde{\mathcal{V}}_\alpha &= W_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Evident, pe fibratul prelungire complexificat, o conexiune neliniară complexă determină descompunerea

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = H\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \oplus V\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \oplus \overline{H\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E} \oplus \overline{V\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E}, \tag{4.1.4}$$

cu reperul adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ în raport cu conexiunea neliniară complexă.

Propoziţia 4.1.2. *Parantezele Lie ale reperului adaptat* $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ *sunt*

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]_\mathcal{T} = \mathcal{C}^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{X}_\gamma + \mathcal{R}^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{V}_\gamma,\\
&[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]_\mathcal{T} = (\delta_{\bar{\beta}} N^{\gamma}_{\alpha})\mathcal{V}_\gamma - (\delta_\alpha N^{\bar{\gamma}}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_{\bar{\gamma}},\\
&[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_\mathcal{T} = (\dot{\partial}_\beta N^{\gamma}_{\alpha})\mathcal{V}_\gamma,\\
&[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_\mathcal{T} = (\dot{\partial}_{\bar{\beta}} N^{\gamma}_{\alpha})\mathcal{V}_\gamma,\\
&[\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_\mathcal{T} = 0,\\
&[\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_\mathcal{T} = 0,
\end{aligned}$$

unde

$$\mathcal{R}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \mathcal{C}^{\varepsilon}_{\alpha\beta} N^{\gamma}_{\varepsilon} - \delta_\alpha N^{\gamma}_{\beta} + \delta_\beta N^{\gamma}_{\alpha}.$$

4.2 Structuri Finsler complexe pe un algebroid Lie

Introducem structura Finsler ca o funcţie definită pe fibratul algebroid E, din dorinţa de a obţine proprietăţi similare cazului fibratului tangent olomorf $T'M$ ([AT1, MG1]). Notăm cu $\widetilde{E}$ subvarietatea deschisă a secţiunilor nenule ale algebroidului E.

Definiţia 4.2.1. O structură Finsler F pe E este o funcţie cu valori reale $F : E \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:

1) F este de clasă C^∞ pe $\widetilde{E}$;

2) $F(z, u) \geq 0$ şi $F(z, u) = 0$ dacă şi numai dacă $u = 0$;

3) $F(z, \lambda u) = |\lambda|^2 F(z, u)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$.

Vom spune că o structură Finsler F este *pseudoconvexă* dacă matricea hermitiană definită în cazul nostru prin

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = \dot{\partial}_\alpha \dot{\partial}_{\bar{\beta}} F \tag{4.2.5}$$

este pozitiv definită. În continuare, vom presupune că F este pseudoconvexă.

Definiţia 4.2.2. Perechea (E, F) se numeşte algebroid Finsler Lie complex.

Tensorul $h_{\alpha\bar{\beta}}$ defineşte o metrică hermitiană G pe subfibratul vertical $VT_{\mathbb{C}}E$ prin $G(Z,W)=h_{\alpha\bar{\beta}}Z^{\alpha}W^{\bar{\beta}}$, unde $h_{\alpha\bar{\beta}}=G(\dot{\partial}_{\alpha},\dot{\partial}_{\bar{\beta}})$.

Propoziţia 4.2.1. *Funcţia Finsler F pe algebroidul E satisface relaţiile:*

i) $(\dot{\partial}_{\alpha}F)u^{\alpha}=F$, $(\dot{\partial}_{\bar{\alpha}}F)\bar{u}^{\alpha}=F$;

ii) $h_{\alpha\bar{\beta}}u^{\alpha}=\dot{\partial}_{\bar{\beta}}F$, $h_{\alpha\bar{\beta}}u^{\bar{\beta}}=\dot{\partial}_{\alpha}F$, $F=h_{\alpha\bar{\beta}}u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}$;

iii) $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})u^{\gamma}=0$, $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})u^{\alpha}=0$, $(\dot{\partial}_{\bar{\gamma}}h_{\alpha\bar{\beta}})\bar{u}^{\gamma}=0$;

iv) $h_{\alpha\beta}u^{\alpha}=0$, $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})\bar{u}^{\beta}=h_{\alpha\gamma}$, *unde* $h_{\alpha\beta}=\dot{\partial}_{\alpha}\dot{\partial}_{\beta}F$.

4.2.1 Conexiunea Chern-Finsler a unui algebroid

Cea mai cunoscută şi utilizată conexiune în geometria Finsler este conexiunea Chern-Finsler. În această secţiune, vom introduce o astfel de conexiune pe algebroidul Finsler Lie E.

În cazul unui fibrat vectorial complex, noţiunea de conexiune liniară complexă normală nu are sens, din cauza faptului că regulile de schimbare ale coeficienţilor unei conexiuni liniare distinse nu coincid în perechi, cum se întâmplă în cazul fibratului $T'M$ [MG1]. Însă conexiunea clasică Chern-Finsler este o conexiune liniară complexă normală; din acest motiv, vom induce o conexiune liniară Chern-Finsler pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ pornind de la o conexiune verticală pe E.

Ca în cazul fibratelor Finsler complexe [AT2, AT3, AT4, MG1], considerăm funcţiile $N_k^{\beta}(z,u)$ ce definesc pe E o conexiune neliniară complexă,

$$N_k^{\beta}=h^{\bar{\sigma}\beta}\partial_k\dot{\partial}_{\bar{\sigma}}F. \tag{4.2.6}$$

Apoi, folosind (3.2.34) şi (4.1.2), obţinem

$$N_{\alpha}^{\beta}=h^{\bar{\sigma}\beta}\rho_{\alpha}^{k}\partial_k\dot{\partial}_{\bar{\sigma}}F=h^{\bar{\sigma}\beta}\partial_{\alpha}\dot{\partial}_{\bar{\sigma}}F, \tag{4.2.7}$$

coeficienţii unei conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$.

Propoziţia 4.2.2. *Funcţiile $N_{\alpha}^{\beta}(z,u)$ definite de (4.2.7) determină o conexiune neliniară pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$, numită conexiunea neliniară Chern-Finsler a prelungirii algebroidului Lie E.*

Considerăm acum o conexiune liniară parţială pe subfibratul vertical al lui E, $\mathcal{D} : T_{\mathbb{C}}E \times VT_{\mathbb{C}}E \to VT_{\mathbb{C}}E$, care păstrează distribuţiile $VT_{\mathbb{C}}E$ şi $\overline{VT_{\mathbb{C}}E}$ şi comută cu conjugarea. Coeficienţii săi locali sunt:

$$\begin{aligned} D_{\delta_k}\dot{\partial}_\alpha &= L^{\gamma}_{\alpha k}\dot{\partial}_\gamma, \quad D_{\dot{\partial}_\beta}\dot{\partial}_\alpha = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\dot{\partial}_\gamma, \\ D_{\delta_k}\dot{\partial}_{\bar{\alpha}} &= L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha} k}\dot{\partial}_{\bar{\gamma}}, \quad D_{\dot{\partial}_\beta}\dot{\partial}_{\bar{\alpha}} = C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta}\dot{\partial}_{\bar{\gamma}} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

şi conjugatele lor. Regulile de schimbare ale coeficienţilor sunt:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}^{\tau}_{\alpha k} &= M^{\tau}_{\gamma}\frac{\partial z^h}{\partial \widetilde{z}^k}\left[\frac{\partial W^{\gamma}_{\alpha}}{\partial z^h} + W^{\theta}_{\alpha}L^{\gamma}_{\theta h}\right], \\ \widetilde{C}^{\tau}_{\alpha\beta} &= M^{\tau}_{\gamma}W^{\sigma}_{\beta}W^{\theta}_{\alpha}C^{\gamma}_{\theta\sigma}, \\ \widetilde{L}^{\bar{\tau}}_{\bar{\alpha} k} &= \frac{\partial z^h}{\partial \widetilde{z}^k}M^{\bar{\tau}}_{\bar{\gamma}}W^{\bar{\theta}}_{\bar{\alpha}}L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\theta} h}, \\ \widetilde{C}^{\bar{\tau}}_{\bar{\alpha}\beta} &= M^{\bar{\tau}}_{\bar{\gamma}}W^{\sigma}_{\beta}W^{\bar{\theta}}_{\bar{\alpha}}C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\theta}\sigma}. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Ca în cazul unui fibrat vectorial complex, putem considera

$$L^{\gamma}_{\alpha k} = h^{\bar{\sigma}\gamma}\delta_k h_{\alpha\bar{\sigma}}, \quad C^{\gamma}_{\alpha\beta} = h^{\bar{\sigma}\gamma}\dot{\partial}_\beta h_{\alpha\bar{\sigma}} \tag{4.2.10}$$

şi $L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha} k} = C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha} k} = 0$, împreună cu conjugatele acestora. Este uşor de verificat că aceste funcţii satisfac regulile de schimbare (4.2.9).

Propoziţia 4.2.3. *Are loc identitatea:*

$$L^{\gamma}_{\alpha k} = \dot{\partial}_\alpha N^{\gamma}_{k}. \tag{4.2.11}$$

Vom introduce acum o N-conexiune liniară complexă pe prelungirea complexificată a lui E, mai exact $\mathcal{D} : \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \times \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \to \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$, prin

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta}\mathcal{V}_\alpha &= L^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{V}_\gamma, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta}\mathcal{V}_\alpha = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{V}_\gamma, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta}\mathcal{V}_{\bar{\alpha}} &= L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta}\mathcal{V}_{\bar{\gamma}}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta}\mathcal{V}_{\bar{\alpha}} = C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta}\mathcal{V}_{\bar{\gamma}}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Deoarece $\mathcal{D}$ este o conexiune normală, trebuie să păstreze distribuţiile, adică avem şi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta}\mathcal{X}_\alpha &= L^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{X}_\gamma, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta}\mathcal{X}_\alpha = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{X}_\gamma, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta}\mathcal{X}_{\bar{\alpha}} &= L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta}\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta}\mathcal{X}_{\bar{\alpha}} = C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta}\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Propoziţia 4.2.4. *Regulile de schimbare ale coeficienţilor conexiunii $\mathcal{D}$ pe prelungirea complexificată sunt:*

$$\begin{aligned}\widetilde{L}^{\tau}_{\alpha\beta} &= M^{\tau}_{\gamma}W^{\sigma}_{\beta}\left[\rho^{k}_{\sigma}(\partial_k W^{\gamma}_{\alpha}) + W^{\theta}_{\alpha}L^{\gamma}_{\theta\sigma}\right],\\ \widetilde{C}^{\tau}_{\alpha\beta} &= M^{\tau}_{\gamma}W^{\sigma}_{\beta}W^{\theta}_{\alpha}C^{\gamma}_{\theta\sigma}\\ \widetilde{L}^{\bar{\tau}}_{\bar{\alpha}\beta} &= M^{\bar{\tau}}_{\bar{\gamma}}W^{\sigma}_{\beta}W^{\bar{\theta}}_{\bar{\alpha}}L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\theta}\sigma},\\ \widetilde{C}^{\bar{\tau}}_{\bar{\alpha}\beta} &= M^{\bar{\tau}}_{\bar{\gamma}}W^{\sigma}_{\beta}W^{\bar{\theta}}_{\bar{\alpha}}C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\theta}\sigma}.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Lema 4.2.1. *Funcţiile $L^{\gamma}_{\alpha\beta}$ date de*

$$L^{\gamma}_{\alpha\beta} = \rho^{k}_{\beta}L^{\gamma}_{\alpha k} \tag{4.2.14}$$

sunt coeficienţii unei conexiuni liniare complexe normale pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$.

Impunem ca $\mathcal{D}$ să fie de tip $(1,0)$, adică $L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta} = C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta} = 0$, şi considerăm funcţiile $L^{\gamma}_{\alpha k}$ date de (4.2.10). Folosind (4.2.14), obţinem următorul rezultat important.

Teorema 4.2.1. *Funcţiile $L^{\gamma}_{\alpha\beta}$ date de*

$$L^{\gamma}_{\alpha\beta} = \rho^{k}_{\beta}L^{\gamma}_{\alpha k} = h^{\bar{\sigma}\gamma}\delta_{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}}, \quad C^{\gamma}_{\alpha\beta} = h^{\bar{\sigma}\gamma}\dot{\partial}_{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}} \tag{4.2.15}$$

sunt coeficienţii unei conexiuni liniare de tip $(1,0)$ pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$, numită conexiunea Chern-Finsler a algebroidului E. Ea este indusă de conexiunea verticală definită de (4.2.10).

În concluzie, conexiunea Chern-Finsler a algebroidului Finsler Lie E este dată de

$$N^{\beta}_{\alpha} = h^{\bar{\sigma}\beta}\partial_{\alpha}\dot{\partial}_{\bar{\sigma}}F, \quad L^{\gamma}_{\alpha\beta} = h^{\bar{\sigma}\gamma}\delta_{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}}, \quad C^{\gamma}_{\alpha\beta} = h^{\bar{\sigma}\gamma}\dot{\partial}_{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}} \tag{4.2.16}$$

şi $L^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta} = C^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta} = 0$. De asemenea, remarcăm că

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = C^{\gamma}_{\beta\alpha} \tag{4.2.17}$$

şi, datorită relaţiilor (4.2.14) şi (4.2.11), avem şi

$$L^{\gamma}_{\alpha\beta} = \dot{\partial}_{\alpha}N^{\gamma}_{\beta}. \tag{4.2.18}$$

Mai mult, dacă notăm $h = \det(h_{\alpha\bar{\beta}})$, atunci un calcul similar celui din cazul varietăţilor Finsler complexe [Z-Z1] ne conduce la identităţile

$$L^{\beta}_{\beta\alpha} = \delta_{\alpha}(\ln h), \quad C^{\beta}_{\beta\alpha} = \dot{\partial}_{\alpha}(\ln h). \tag{4.2.19}$$

Propoziţia 4.2.5. *Reperul adaptat corespunzător conexiunii Chern-Finsler* (4.2.7) *satisface identitatea*

$$\rho_{\mathcal{T}}\left([\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]\right) = 0. \tag{4.2.20}$$

Folsind definitţia uzuală a torsiunii şi relaţiile (4.2.18) şi (4.2.17), obţinem următoarele componente ale torsiunii conexiunii Chern-Finsler pe $\mathcal{T}E$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) &= \left(L^\gamma_{\beta\alpha} - L^\gamma_{\alpha\beta} - \mathcal{C}^\gamma_{\alpha\beta}\right)\mathcal{X}_\gamma - \mathcal{R}^\gamma_{\alpha\beta}\mathcal{V}_\gamma,\\
\mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar\beta}) &= -(\delta_{\bar\beta}N^\gamma_\alpha)\mathcal{V}_\gamma + (\delta_\alpha N^{\bar\gamma}_{\bar\beta})\mathcal{V}_{\bar\gamma},\\
\mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta) &= -C^\gamma_{\alpha\beta}\mathcal{X}_\gamma,\\
\mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar\beta}) &= -(\dot\partial_{\bar\beta}N^\gamma_\alpha)\mathcal{V}_\gamma,\\
\mathcal{T}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta) &= 0,\\
\mathcal{T}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar\beta}) &= 0.
\end{aligned}$$

Componentele nenule ale curburii conexiunii Chern-Finsler sunt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= \left[\delta_\alpha L^\tau_{\gamma\beta} - \delta_\beta L^\tau_{\gamma\alpha} + L^\sigma_{\gamma\beta}L^\tau_{\sigma\alpha} - L^\sigma_{\gamma\alpha}L^\tau_{\sigma\beta} - \mathcal{C}^\sigma_{\alpha\beta}L^\tau_{\gamma\sigma} - \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\beta}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{X}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar\beta})\mathcal{X}_\gamma &= \left[-\delta_{\bar\beta}L^\tau_{\gamma\alpha} - \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\bar\beta}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{X}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha}, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= \left[\delta_{\bar\alpha}L^\tau_{\gamma\beta} - \mathcal{R}^\sigma_{\bar\alpha\beta}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{X}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= \left[\delta_\alpha L^\tau_{\gamma\beta} - \delta_\beta L^\tau_{\gamma\alpha} + L^\sigma_{\gamma\beta}L^\tau_{\sigma\alpha} - L^\sigma_{\gamma\alpha}L^\tau_{\sigma\beta} - \mathcal{C}^\sigma_{\alpha\beta}L^\tau_{\gamma\sigma} - \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\beta}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar\beta})\mathcal{V}_\gamma &= \left[-\delta_{\bar\beta}L^\tau_{\gamma\alpha} - \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\bar\beta}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha}, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= \left[\delta_{\bar\alpha}L^\tau_{\gamma\beta} - \mathcal{R}^\sigma_{\bar\alpha\beta}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= \left[\delta_\alpha C^\tau_{\gamma\beta} - \dot\partial_\beta L^\tau_{\gamma\alpha} + C^\sigma_{\gamma\beta}L^\tau_{\sigma\alpha} - L^\sigma_{\gamma\alpha}C^\tau_{\sigma\beta} - L^\sigma_{\beta\alpha}C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{V}_\gamma &= \left[-\dot\partial_{\bar\beta}L^\tau_{\gamma\alpha} - (\dot\partial_{\bar\beta}N^\sigma_\alpha)C^\tau_{\gamma\sigma}\right]\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= (\delta_{\bar\alpha}C^\tau_{\gamma\beta})\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= \left[\dot\partial_\alpha C^\tau_{\gamma\beta} - \dot\partial_\beta C^\tau_{\gamma\alpha} + C^\sigma_{\gamma\beta}C^\tau_{\sigma\alpha} - C^\sigma_{\gamma\alpha}C^\tau_{\sigma\beta}\right]\mathcal{X}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{X}_\gamma &= (-\dot\partial_{\bar\beta}C^\tau_{\gamma\alpha})\mathcal{X}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar\alpha}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= (\dot\partial_{\bar\alpha}C^\tau_{\gamma\beta})\mathcal{X}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= \left[\dot\partial_\alpha C^\tau_{\gamma\beta} - \dot\partial_\beta C^\tau_{\gamma\alpha} + C^\sigma_{\gamma\beta}C^\tau_{\sigma\alpha} - C^\sigma_{\gamma\alpha}C^\tau_{\sigma\beta}\right]\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{V}_\gamma &= (-\dot\partial_{\bar\beta}C^\tau_{\gamma\alpha}))\mathcal{V}_\tau,\\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar\alpha}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= (\dot\partial_{\bar\alpha}C^\tau_{\gamma\beta})\mathcal{V}_\tau.
\end{aligned}$$

Studiem acum dualul reperului adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ pe $\mathcal{T}'E$. Notăm reperul dual prin $\{\mathcal{Z}^\alpha, \delta\mathcal{V}^\alpha\}$, unde $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ este dualul lui $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ şi $\delta\mathcal{V}^\alpha = \mathcal{V}^\alpha +$

$N^\alpha_\beta \mathcal{Z}^\beta$. Deoarece reperul dual $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ se schimbă după regulile

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{Z}}^\alpha &= M^\alpha_\beta \mathcal{Z}^\beta,\\ \widetilde{\mathcal{V}}^\alpha &= M^\alpha_\beta \mathcal{V}^\beta + \rho^k_\beta \frac{\partial M^\alpha_\gamma}{\partial z^k} u^\gamma \mathcal{Z}^\beta,\end{aligned}$$

obţinem

$$\widetilde{\delta\mathcal{V}}^\alpha = M^\alpha_\beta \delta\mathcal{V}^\beta.$$

Diferenţiala unei funcţii f pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ se exprimă local prin

$$\mathrm{d}f = (\delta_\alpha f)\mathcal{Z}^\alpha + (\dot{\partial}_\alpha f)\delta\mathcal{V}^\alpha + (\delta_{\bar\alpha} f)\mathcal{Z}^{\bar\alpha} + (\dot{\partial}_{\bar\alpha} f)\delta\mathcal{V}^{\bar\alpha}.$$

În raport cu descompunerea (4.1.4) a prelungirii, diferenţiala se poate scrie ca

$$\mathrm{d}f = \partial^h f + \partial^v f + \bar\partial^h f + \bar\partial^v f,$$

unde

$$\begin{aligned}\partial^h f &= (\delta_\alpha f)\mathcal{Z}^\alpha = \left(\rho^k_\alpha \frac{\partial f}{\partial z^k} - N^\beta_\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\beta}\right)\mathcal{Z}^\alpha, \quad & \partial^v f &= (\dot{\partial}_\alpha f)\delta\mathcal{V}^\alpha = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\delta\mathcal{V}^\alpha,\\ \bar\partial^h f &= (\delta_{\bar\alpha} f)\mathcal{Z}^{\bar\alpha} = \left(\rho^{\bar k}_{\bar\alpha} \frac{\partial f}{\partial \bar z^k} - N^{\bar\beta}_{\bar\alpha} \frac{\partial f}{\partial \bar u^\beta}\right)\mathcal{Z}^{\bar\alpha}, \quad & \bar\partial^v f &= (\dot{\partial}_{\bar\alpha} f)\delta\mathcal{V}^{\bar\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \bar u^\alpha}\delta\mathcal{V}^{\bar\alpha}.\end{aligned}$$

De asemenea, avem

$$\mathrm{d}\mathcal{Z}^\alpha = -\frac{1}{2}\mathcal{C}^\alpha_{\beta\gamma}\mathcal{Z}^\beta \wedge \mathcal{Z}^\gamma - \frac{1}{2}\mathcal{C}^\alpha_{\bar\beta\gamma}\mathcal{Z}^{\bar\beta} \wedge \mathcal{Z}^\gamma, \qquad \mathrm{d}\mathcal{V}^\alpha = 0.$$

4.2.2 Algebroizi Kähler Finsler

Pentru a putea defini condiţia Kähler în cazul unui algebroid Lie, avem nevoie să definim mai întâi o structură metrică pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ prin

$$\mathcal{G} = h_{\alpha\bar\beta}\mathcal{Z}^\alpha \otimes \mathcal{Z}^{\bar\beta} + h_{\alpha\bar\beta}\delta\mathcal{V}^\alpha \otimes \delta\mathcal{V}^{\bar\beta}. \tag{4.2.21}$$

Deoarece componentele structurii metrice (4.2.21) pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ depind numai de (z^k, u^α), acţiunea câmpurilor vectoriale $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar\alpha}, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar\alpha}\}$ asupra componentelor lui $\mathcal{G}$ este

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\alpha h_{\beta\bar\gamma} &= \delta_\alpha h_{\beta\bar\gamma}, \quad & \mathcal{X}_{\bar\alpha} h_{\beta\bar\gamma} &= \delta_{\bar\alpha} h_{\beta\bar\gamma},\\ \mathcal{V}_\alpha h_{\beta\bar\gamma} &= \dot{\partial}_\alpha h_{\beta\bar\gamma}, \quad & \mathcal{V}_{\bar\alpha} h_{\beta\bar\gamma} &= \dot{\partial}_\alpha h_{\beta\bar\gamma},\end{aligned}$$

astfel încât identitatea

$$X\mathcal{G}(Y,Z) = \mathcal{G}(\mathcal{D}_X Y, Z) + \mathcal{G}(Y, \mathcal{D}_X Z)$$

se verifică imediat ca în cazul clasic, pentru $Y = \mathcal{V}_\beta,\ Z = \mathcal{V}_{\bar{\gamma}}$ şi $X = \mathcal{X}_\alpha$ sau $X = \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}$ [MG1]. Aşadar, conexiunea Chern-Finsler a prelungirii este *metrică* în raport cu structura $\mathcal{G}$.

Considerăm acum 2-forma orizontală

$$\Theta^h = -i h_{\alpha\bar{\beta}} \mathcal{Z}^\alpha \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}}. \tag{4.2.22}$$

Definiţia 4.2.3. Un algebroid Lie olomorf se numeşte algebroid Kähler-Finsler dacă forma Kähler orizontală (4.2.22) este h-închisă, adică $\mathrm{d}^h\Theta^h = 0$.

Din condiţia din definiţia de mai sus rezultă imediat

$$\delta_\gamma h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_\alpha h_{\gamma\bar{\beta}}, \quad \delta_{\bar{\gamma}} h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\gamma}},$$

egalităţi care, datorită relaţiei (4.2.10), conduc la caracterizarea algebroizilor Kähler prin

$$L^\sigma_{\alpha\gamma} = L^\sigma_{\gamma\alpha}, \tag{4.2.23}$$

condiţie similară cazului real.

Capitolul 5

Operatori Laplace pe algebroizi Lie Finsler complecşi

Definim în acest capitol operatori de tip Laplace pentru funcţii definite pe spaţiul tangent al unui algebroid Lie Finsler complex, folosind o formă volum a prelungirii algebroidului. De asemenea, prezentăm construcţia unui operator Laplace orizontal pentru forme definite pe prelungirea algebroidului. Expresiile locale ale tuturor acestor operatori sunt obţinute relativ la conexiunea Chern-Finsler al algebroidului. În notaţiile următoare, vom renunţa la indicele $\mathbb{C}$.

5.1 Derivate covariante pe prelungire

Vom defini derivatele covariante ale unor câmpuri tensoriale definite pe prelungirea $\mathcal{T}E$ în raport cu conexiunea Chern-Finsler a acesteia. Un câmp tensorial orizontal covariant este de forma

$$T = \frac{1}{p!q!} T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(z,u) \mathcal{Z}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{Z}^{\alpha_p} \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}_q},$$

unde pentru schimbările de coordonate (2.2.5), componentele locale $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(z,u)$ se schimbă după regulile:

$$\widetilde{T}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(\widetilde{z},\widetilde{u}) = T_{\gamma_1 \ldots \gamma_p \bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_q} M^{\gamma_1}_{\alpha_1} \ldots M^{\gamma_p}_{\alpha_p} M^{\bar{\varepsilon}_1}_{\bar{\beta}_1} \ldots M^{\bar{\varepsilon}_q}_{\bar{\beta}_q}.$$

În manieră similară, putem defini un câmp orizontal contravariant, ale cărui componente locale, $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(z,u)$, se schimbă astfel:

$$\widetilde{T}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(\widetilde{z},\widetilde{u}) = T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p \bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_q} W^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots W^{\alpha_p}_{\gamma_p} W^{\bar{\beta}_1}_{\bar{\varepsilon}_1} \ldots W^{\bar{\beta}_q}_{\bar{\varepsilon}_q}.$$

Ne vom restrânge în continuare studiul pe fibratul orizontal $H\mathcal{T}E$ al prelungirii şi vom exprima derivatele covariante ale tensorilor în raport cu conexiunea Chern-Finsler a prelungirii.

Mai întâi, definim în manieră clasică derivatele covariante orizontale ale unui tensor orizontal covariant $T_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}(z,u)$ prin

$$\nabla_{\mathcal{X}_\gamma} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q} = \mathcal{X}_\gamma(T_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}) - \sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\varepsilon\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q} L^{\varepsilon}_{\alpha_i\gamma},$$
$$\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q} = \mathcal{X}_{\bar{\gamma}}(T_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}) - \sum_{j=1}^{q} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_{j-1}\bar{\varepsilon}\bar{\beta}_{j+1}\ldots\bar{\beta}_q} L^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\beta}_j\bar{\gamma}}.$$

Apoi, derivatele covariante orizontale ale unui tensor contravariant $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}(z,u)$ sunt definite prin

$$\nabla_{\mathcal{X}_\gamma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q} = \mathcal{X}_\gamma(T^{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}) + \sum_{i=1}^{p} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\varepsilon\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q} L^{\alpha_i}_{\varepsilon\gamma},$$
$$\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}} T^{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q} = \mathcal{X}_{\bar{\gamma}}(T^{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}) + \sum_{j=1}^{q} T^{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_{j-1}\bar{\varepsilon}\bar{\beta}_{j+1}\ldots\bar{\beta}_q} L^{\bar{\beta}_j}_{\bar{\varepsilon}\bar{\gamma}}.$$

5.2 Operatori Laplace verticali şi orizontali pentru funcţii definite pe E

Vom defini operatori verticali şi orizontali de tip Laplace pentru funcţii, urmând ideile din cazul fibratelor Finsler complexe [Z-Z1, IC2]. Pentru aceasta, avem nevoie de noţiunile de divergenţă a unui câmp vectorial pe $\mathcal{T}E$ şi de gradient al unei funcţii pe $\mathcal{T}E$.

Să considerăm mai întâi forma hermitiană asociată structurii metrice hermitiene $\mathcal{G}$ din (4.2.21),

$$\Phi = ih_{\alpha\bar{\beta}}\big(\mathcal{Z}^\alpha \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}} + \delta\mathcal{V}^\alpha \wedge \delta\mathcal{V}^{\bar{\beta}}\big) = \Phi^h + \Phi^v. \tag{5.2.1}$$

Notăm cu

$$(\Phi^h)^m = i^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m!\, h\, \mathcal{Z}^1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Z}^m \wedge \mathcal{Z}^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge \mathcal{Z}^{\bar{m}},$$
$$(\Phi^v)^m = i^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m!\, h\, \delta\mathcal{V}^1 \wedge \cdots \wedge \delta\mathcal{V}^m \wedge \delta\mathcal{V}^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge \delta\mathcal{V}^{\bar{m}},$$

pentru a putea asocia metricii $\mathcal{G}$ o formă volum pe prelungirea $\mathcal{T}E$ dată de

$$d\mathcal{V} = \frac{1}{(2m)!}\Phi^{2m} = i^{2m^2} h^2 \, d\mathcal{Z} \wedge d\bar{\mathcal{Z}} \wedge \delta\mathcal{V} \wedge \overline{\delta\mathcal{V}}, \tag{5.2.2}$$

unde am notat $d\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{Z}^m$, $\delta\mathcal{V} = \delta\mathcal{V}^1 \wedge \cdots \wedge \delta\mathcal{V}^m$ şi conjugatele acestora.

Fie acum $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + V^\alpha \mathcal{V}_\alpha + Z^{\bar{\alpha}} \mathcal{X}_{\bar{\alpha}} + V^{\bar{\alpha}} \mathcal{V}_{\bar{\alpha}} \in \Gamma(\mathcal{T}E)$. Definim divergenţa câmpului vectorial Z prin ecuaţia clasică $\mathcal{L}_Z d\mathcal{V} = (\operatorname{div} Z) d\mathcal{V}$, unde $\mathcal{L}_Z$ este derivata Lie. Expresia câmpului Z conform descompunerii (4.1.4) conduce la următoarea descompunere a divergenţei lui Z:

$$\operatorname{div} Z = \operatorname{div}^h Z + \operatorname{div}^v Z + \operatorname{div}^{\bar{h}} Z + \operatorname{div}^{\bar{v}} Z,$$

unde $\operatorname{div}^h Z = \operatorname{div} Z^h$, $\operatorname{div}^v Z = \operatorname{div} Z^v$, $\operatorname{div}^{\bar{h}} Z = \operatorname{div} Z^{\bar{h}}$, $\operatorname{div}^{\bar{v}} Z = \operatorname{div} Z^{\bar{v}}$. În particular, pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$, avem

Propoziţia 5.2.1. *Componentele divergenţei câmpului vectorial* $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + V^\alpha \mathcal{V}_\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}'E)$ *sunt:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^h Z &= \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha - Z^\alpha L_\alpha - Z^\alpha \mathcal{C}_\alpha, \\ \operatorname{div}^v Z &= \nabla_{\mathcal{V}_\alpha} V^\alpha + V^\alpha C_\alpha, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

cu notaţiile $L_\alpha = L^{\beta}_{\alpha\beta} - L^{\beta}_{\beta\alpha}$, $C_\alpha = C^{\beta}_{\alpha\beta} = C^{\beta}_{\beta\alpha}$ *şi* $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}^{\beta}_{\alpha\beta}$.

Remarcăm că, pentru un algebroid Kähler Finsler, condiţia (4.2.23) implică $L_\alpha = 0$, deci $\operatorname{div}^h Z = \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha - Z^\alpha \mathcal{C}_\alpha$.

Următorul pas îl reprezintă definirea gradientului unei funcţii, care poate fi introdus tot într-o manieră clasică, prin identitatea

$$\mathcal{G}(Z, \operatorname{grad} f) = Zf, \quad \forall Z \in \Gamma(\mathcal{T}'E).$$

Gradientul poate fi descompus în reperul adaptat al prelungirii olomorfe $\mathcal{T}'E$ ca $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}^h f + \operatorname{grad}^v f$, unde

$$\operatorname{grad}^h f = h^{\bar{\gamma}\alpha}(\delta_{\bar{\gamma}} f)\mathcal{X}_\alpha, \quad \operatorname{grad}^v f = h^{\bar{\varepsilon}\beta}(\dot{\partial}_{\bar{\varepsilon}} f)\mathcal{V}_\beta. \tag{5.2.4}$$

Vom defini doi operatori de tip Laplace pentru funcţii, unul orizontal şi unul vertical. Operatorul Laplace orizontal pentru funcţii pe algebroidul prelungire este dat de

$$\Delta^h f = (\operatorname{div}^h \circ \operatorname{grad}^h) f, \tag{5.2.5}$$

iar cel vertical, de

$$\Delta^v f = (\operatorname{div}^v \circ \operatorname{grad}^v) f. \tag{5.2.6}$$

Expresiile celor doi operatori Laplace sunt date în

Propoziţia 5.2.2. *Pentru o funcţie $f \in C^\infty(E)$, au loc:*

$$\Delta^h f = \frac{1}{h}\delta_\alpha\big[hh^{\bar\gamma\alpha}(\delta_{\bar\gamma} f)\big] - \big[h^{\bar\gamma\alpha}(\delta_{\bar\gamma} f)\big]\mathcal{C}_\alpha \tag{5.2.7}$$

şi

$$\Delta^v f = \frac{1}{h}\dot\partial_\alpha\big[hh^{\bar\gamma\alpha}(\dot\partial_{\bar\gamma} f)\big] + \big[h^{\bar\gamma\alpha}(\dot\partial_{\bar\gamma} f)\big]C_\alpha. \tag{5.2.8}$$

Remarcăm aici faptul că cei doi operatori Laplace pot fi exprimaţi de asemenea în termenii derivatelor covariante în raport cu conexiunea Chern-Finsler după cum urmează:

$$\Delta^h f = h^{\bar\gamma\alpha}\left[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}\nabla_{\mathcal{X}_{\bar\gamma}} f - \mathcal{C}_\alpha\left(\nabla_{\mathcal{X}_{\bar\gamma}} f\right)\right],$$
$$\Delta^v f = h^{\bar\gamma\alpha}\left[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}\nabla_{\mathcal{V}_{\bar\gamma}} f + C_\alpha\left(\nabla_{\mathcal{V}_{\bar\gamma}} f\right)\right].$$

Lema 5.2.1. *Pentru un câmp orizontal olomorf $Z = Z^\alpha\mathcal{X}_\alpha \in \Gamma(H\mathcal{T}'E)$, au loc identităţile*

$$(\operatorname{div} Z + \mathcal{C}^h)d\mathcal{V} = \mathrm{d}[i_Z d\mathcal{V}], \quad (\operatorname{div}\bar Z + \bar{\mathcal{C}}^h)\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}[i_{\bar Z} d\mathcal{V}], \tag{5.2.9}$$

unde $\mathcal{C}^h = Z^\alpha\mathcal{C}_\alpha = Z^\alpha\mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\ \beta}$.

În geometria complexă, Laplacienii se consideră pe varietăţi compacte, unde s-au obţinut rezultate importante. În cazul Finsler complex lucrurile sunt mai complicate, ideile se mută pe fibratul proiectiv al unei varietăţi Finsler complexe, care este compact (dacă varietatea bază M e compactă) şi metrica Finsler derivă din una hermitiană pe acest fibrat proiectiv. În cazul nostru, lucrurile pot fi discutate pe fibratul proiectiv al prelungirii Finsler, dar ideile sunt mai complicate. Din acest motiv, am limitat studiul la domenii U *compacte* de pe E. O variantă alternativă ar fi ca pe E să considerăm forme cu suport compact.

Propoziţia 5.2.3. *Dacă $Z = Z^\alpha\mathcal{X}_\alpha$ este un câmp orizontal cu suport compact pe prelungirea unui algebroid Finsler, atunci:*

$$\int_U(\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha - Z^\alpha L_\alpha)d\mathcal{V} = 0, \quad \int_U(\nabla_{\mathcal{X}_{\bar\alpha}}\overline{Z^\alpha} - \overline{Z^\alpha L_\alpha})d\mathcal{V} = 0. \tag{5.2.10}$$

În cazul algebroizilor Kähler Finsler, identităţile (5.2.10) devin

$$\int_U \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha d\mathcal{V} = 0, \quad \int_U \nabla_{\mathcal{X}_{\bar\alpha}}\overline{Z^\alpha} d\mathcal{V} = 0. \tag{5.2.11}$$

Observaţia 5.2.1. *În cazul în care componentele câmpului Z sunt de forma $Z^\alpha = h^{\bar\beta\alpha}\nabla_{\mathcal{X}_{\bar\beta}} f$, unde f este o funcţie diferenţiabilă pe compactul $U \subset E$, din (5.2.11) rezultă*

$$\int_U h^{\bar\beta\alpha}\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}\nabla_{\mathcal{X}_{\bar\beta}} f d\mathcal{V} = 0. \tag{5.2.12}$$

5.3 Operatorul Laplace orizontal pentru forme definite pe $\mathcal{T}E$

Considerăm două forme cu suport compact pe $\mathcal{T}E$, Ψ şi Φ, exprimate local prin

$$\Psi = \frac{1}{p!q!}\psi_{A_p\bar B_q}\mathcal{Z}^{A_p}\wedge\mathcal{Z}^{\bar B_q},$$
$$\Phi = \frac{1}{p!q!}\phi_{A_p\bar B_q}\mathcal{Z}^{A_p}\wedge\mathcal{Z}^{\bar B_q},$$

cu notaţiile multi-indicilor $A_p = (\alpha_1\dots\alpha_p)$, $\bar B_q = (\bar\beta_1\dots\bar\beta_q)$ şi $\mathcal{Z}^{A_p} = \mathcal{Z}^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge\mathcal{Z}^{\alpha_p}$, $\mathcal{Z}_{\bar B_q} = \mathcal{Z}^{\bar\beta_1}\wedge\dots\wedge\mathcal{Z}^{\bar\beta_p}$. Considerăm coeficienţii formelor ca fiind funcţii definite pe algebroidul bază E, adică $\psi_{A_p\bar B_q} = \psi_{A_p\bar B_q}(z,u)$ şi $\phi_{A_p\bar B_q} = \phi_{A_p\bar B_q}(z,u)$, deoarece în continuare vom avea nevoie de integrarea pe domenii compacte din E.

Definim următorul produs interior:

$$<\Psi,\Phi>= \frac{1}{p!q!}\psi_{A_p\bar B_q}\overline{\phi^{\bar A_p B_q}} = \sum\psi_{A_p\bar B_q}\overline{\phi^{\bar A_p B_q}}, \tag{5.3.13}$$

suma fiind după $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, $\bar\beta_1 < \dots < \bar\beta_q$, iar $\phi^{\bar A_p B_q} = \phi^{\bar\alpha_1\dots\bar\alpha_p\beta_1\dots\beta_q} = \phi_{\mu_1\dots\mu_p\bar\nu_1\dots\bar\nu_q}h^{\bar\alpha_1\mu_1}\dots h^{\bar\alpha_p\mu_p}h^{\bar\nu_1\beta_1}\dots h^{\bar\nu_q\beta_q}$. Acest produs este independent de coordonatele locale, deci $<\Psi,\Phi>$ este un produs interior global, definit pe E. În particular, "norma" unei forme Ψ se defineşte prin

$$|\Psi|^2 =<\Psi,\Psi>= \frac{1}{p!q!}\psi_{A_p\bar B_q}\overline{\psi^{\bar A_p B_q}}$$

Folosind forma volum (5.2.2), pe un compact $U \subset E$, putem acum defini un produs interior pe spaţiul formelor orizontale pe prelungirea $\mathcal{T}E$ prin

$$(\Psi,\Phi) = \int_U <\Psi,\Phi> d\mathcal{V}, \quad ||\Psi||^2 = \int_U <\Psi,\Psi> d\mathcal{V}. \tag{5.3.14}$$

Într-o manieră similară cazului fibratelor vectoriale complexe, [MG1, P-M], vom defini diferenţialele orizontale ale formelor orizontale de tip (p,q) prin

$$
\begin{aligned}
(\partial^h \Psi)_{A_{p+1}\overline{B}_q} &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \delta_{\alpha_i}(\psi_{\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1} \overline{B}_q}),\\
(\bar{\partial}^h \Psi)_{A_p \overline{B}_{q+1}} &= (-1)^p \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \delta_{\bar{\beta}_i}(\psi_{A_p \bar{\beta}_1 \ldots \hat{\bar{\beta}}_i \ldots \bar{\beta}_{q+1}}).
\end{aligned}
\tag{5.3.15}
$$

În cazul algebroizilor Kähler Finsler, se poate folosi identitatea (4.2.23) pentru a înlocui aceste derivate orizontale prin derivatele covariante orizontale, adică

$$
\begin{aligned}
(\partial^h \Psi)_{A_{p+1}\overline{B}_q} &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \nabla_{\mathcal{X}_{\alpha_i}} \psi_{\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1} \overline{B}_q},\\
(\bar{\partial}^h \Psi)_{A_p \overline{B}_{q+1}} &= (-1)^p \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}_i}} \psi_{A_p \bar{\beta}_1 \ldots \hat{\bar{\beta}}_i \ldots \bar{\beta}_{q+1}},
\end{aligned}
$$

Urmând etapele uzuale în definirea operatorilor Laplace pentru forme, este necesară introducerea operatorilor adjuncţi pentru ∂^h şi $\bar{\partial}^h$ în raport cu produsul interior (5.3.14). Fie ∂^{*h} şi $\bar{\partial}^{*h}$ cei doi operatori adjuncţi. Avem

$$
\begin{aligned}
\partial^{*h} &: \mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E) \to \mathcal{A}_{p,q-1}(H\mathcal{T}E), \quad (\partial^h \Psi, \Phi) = (\Psi, \partial^{*h}\Psi),\\
\bar{\partial}^{*h} &: \mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E) \to \mathcal{A}_{p-1,q}(H\mathcal{T}E), \quad (\bar{\partial}^h \Psi, \Phi) = (\Psi, \bar{\partial}^{*h}\Psi),
\end{aligned}
$$

unde $\mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E)$ reprezintă spaţiul formelor orizontale de tip (p,q) cu suport compact pe algebroidul prelungire.

Ne interesează acum expresia operatorului adjunct $\bar{\partial}^{*h}$. Fie pentru aceasta $\Psi \in \mathcal{A}_{p,q-1}(H\mathcal{T}E)$ şi $\Phi \in \mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E)$. Un calcul similar celui din [Z-Z1] conduce la

$$
\begin{aligned}
(\bar{\partial}^{*h}\Phi)^{\overline{A}_p \beta_2 \ldots \beta_q} &= -(-1)^p h^{-2} \delta_{\beta_1}(\phi^{\overline{A}_p \beta_1 \ldots \beta_q} h^2)\\
&= -(-1)^p \sum_{\beta_1} [\delta_{\beta_1} + 2\delta_{\beta_1}(\ln h)] \phi^{\overline{A}_p \beta_1 \ldots \beta_q},
\end{aligned}
\tag{5.3.16}
$$

de unde, prin coborârea indicilor, rezultă

$$
(\bar{\partial}^{*h}\Phi)_{A_p \bar{\beta}_2 \ldots \bar{\beta}_q} = (-1)^{p+1} h^{\bar{\varepsilon}\gamma} \delta_\gamma(\phi_{A_p \bar{\varepsilon} \bar{\beta}_2 \ldots \bar{\beta}_q}).
\tag{5.3.17}
$$

Putem acum introduce un operator Laplace orizontal, $\square^h : \mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E) \to \mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E)$, prin

$$\square^h = \bar{\partial}^h \circ \bar{\partial}^{*h} + \bar{\partial}^{*h} \circ \bar{\partial}^h. \tag{5.3.18}$$

Expresia operatorului $\square^h$ este dată în

Teorema 5.3.1. *Operatorul Laplace orizontal pentru o formă diferenţială orizontală $\Phi \in \mathcal{A}_{p,q}(H\mathcal{T}E)$ pe prelungirea unui algebroid Finsler Lie este dat de*

$$(\square^h \Phi)_{A_p\overline{B}_q} = -h^{\bar{\varepsilon}\gamma}\left(\delta_\gamma \circ \delta_{\bar{\varepsilon}}(\phi_{A_p\overline{B}_q}) - \sum_i (-1)^{i-1}[\delta_\gamma, \delta_{\bar{\beta}_i}]\phi_{A_p\bar{\varepsilon}\bar{\beta}_1\ldots\hat{\bar{\beta}}_i\ldots\bar{\beta}_q}\right). \tag{5.3.19}$$

Considerând acum cazul algebroizilor Kähler Finsler, în care din (5.2.11) rezultă

$$\int_{U\subset E} \nabla_{\mathcal{X}_\beta}\left(\phi_{A_p\overline{B}_q}\overline{\psi^{\overline{A}_p\beta B_q}}\right)d\mathcal{V} = 0,$$

iar după un calcul simplu, similar cazului varietăţilor Kähler Finsler, se obţine

Teorema 5.3.2. *Pe un algebroid Kähler Finsler, operatorul Laplace orizontal pentru forme diferenţiale orizontale pe prelungirea $\mathcal{T}E$ este*

$$(\square^h \Phi)_{A_p\overline{B}_q} = -h^{\bar{\varepsilon}\gamma}\left(\nabla_{\mathcal{X}_\gamma} \circ \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\varepsilon}}}(\phi_{A_p\overline{B}_q}) - \sum_i [\nabla_{\mathcal{X}_\gamma}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}_i}}]\phi_{A_p\bar{\varepsilon}\bar{\beta}_1\ldots\hat{\bar{\beta}}_i\ldots\bar{\beta}_q}\right). \tag{5.3.20}$$

Capitolul 6

Teoreme de anulare pe algebroizi Lie olomorfi

În capitolul de faţă, prezentăm un studiu de tip Bochner pentru câmpuri vectoriale orizontale pe un algebroid Finsler şi obţinem o teoremă de anulare pentru astfel de algebroizi. Descriem mai întâi în coordonate locale curburile a două conexiuni utile studiului nostru, conexiunea Chern-Finsler introdusă anterior şi conexiunea Rund. Obţinem apoi identităţi de tip Ricci pentru câmpuri contravariante sau covariante pe prelungirea olomorfă a unui algebroid Finsler. În final, obţinem o teoremă de anulare de tip Bochner pentru algebroizi Finsler, împreună cu două consecinţe interesante.

6.1 Conexiunile Chern-Finsler şi Rund

Am discutat pe larg despre conexiunea Chern-Finsler a unui algebroid Lie în capitolele anterioare. Impunând anularea coeficienţilor conexiunii Chern-Finsler pe o varietate complexă [MG1], se obţine conexiunea Rund a varietăţii. Aceasta idee, aplicată conexiunii Chern-Finsler a unui algebroid, mai exact condiţia $C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, ne conduce la conexiunea Rund a algebroidului. Vom avea nevoie în cele ce urmează de expresiile coeficienţilor curburilor celor două conexiuni menţionate, de aceea considerăm utile notaţiile următoare. Pentru conexiunea Chern-Finsler de pe prelungire, renotăm componentele locale ale curburii prin:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma = R_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{X}_{\bar\beta})\mathcal{X}_\gamma = R_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha},\mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma = R_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma = R_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{X}_{\bar\beta})\mathcal{V}_\gamma = R_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha},\mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma = R_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma = P_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{X}_\gamma = P_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha},\mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma = P_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma = P_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha,\mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{V}_\gamma = P_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar\alpha},\mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma = P_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha,\mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma = S_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha,\mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{X}_\gamma = S_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar\alpha},\mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma = S_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{X}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha,\mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma = S_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau,\\
&\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha,\mathcal{V}_{\bar\beta})\mathcal{V}_\gamma = S_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau, && \mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar\alpha},\mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma = S_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau}\mathcal{V}_\tau.
\end{aligned}$$

Componentele orizontale, notate cu $R_{\cdot,\cdot\cdot}^{\ \cdot}$, mixte – $P_{\cdot,\cdot\cdot}^{\ \cdot}$ şi verticale – $S_{\cdot,\cdot\cdot}^{\ \cdot}$ sunt date de:

$$\begin{aligned}
&R_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau} = \delta_\alpha L_{\gamma\beta}^\tau - \delta_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + L_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma L_{\sigma\beta}^\tau - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\sigma L_{\gamma\sigma}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau,\\
&R_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau} = -\delta_{\bar\beta} L_{\gamma\alpha}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\bar\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau,\\
&R_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau} = \delta_{\bar\alpha} L_{\gamma\beta}^\tau - \mathcal{R}_{\bar\alpha\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau,\\
&P_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau} = \delta_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot\partial_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau - L_{\beta\alpha}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau,\\
&P_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau} = -\dot\partial_{\bar\beta} L_{\gamma\alpha}^\tau - (\dot\partial_{\bar\beta} N_\alpha^\sigma) C_{\gamma\sigma}^\tau,\\
&P_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau} = \delta_{\bar\alpha} C_{\gamma\beta}^\tau,\\
&S_{\gamma,\alpha\beta}^{\ \tau} = \dot\partial_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot\partial_\beta C_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\tau - C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau,\\
&S_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau} = -\dot\partial_{\bar\beta} C_{\gamma\alpha}^\tau\\
&S_{\gamma,\bar\alpha\beta}^{\ \tau} = \dot\partial_{\bar\alpha} C_{\gamma\beta}^\tau.
\end{aligned}$$

Vom utiliza şi componenta orizontală a conexiunii Rund, care este dată de:

$$K_{\gamma,\alpha\bar\beta}^{\ \tau} = -\delta_{\bar\beta} L_{\gamma\alpha}^\tau. \tag{6.1.1}$$

Am obţinut o serie de identităţi interesante pentru câmpuri simplu contravariante sau covariante.

Propoziţia 6.1.1. *Fie (E,F) un algebroid Finsler, Z^γ componentele unui tensor orizontal contravariant Z definit pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ şi φ_γ, componentele unui tensor orizontal covariant φ pe $\mathcal{T}'E$. Au loc identităţile:*

1) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}]Z^\gamma = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]Z^\gamma + Z^\varepsilon K_{\varepsilon;\alpha\bar{\beta}}^{\ \gamma}$;

2) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}]Z^{\bar{\gamma}} = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]Z^{\bar{\gamma}} - Z^{\bar{\varepsilon}} K_{\bar{\varepsilon};\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\gamma}}$;

3) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}]\varphi_\gamma = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]\varphi_\gamma - \varphi_\varepsilon K_{\gamma;\alpha\bar{\beta}}^{\ \varepsilon}$;

4) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}]\varphi_{\bar{\gamma}} = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]\varphi_{\bar{\gamma}} + \varphi_{\bar{\varepsilon}} K_{\bar{\gamma};\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\varepsilon}}$.

Propoziţia 6.1.2. *Fie (E, F) un algebroid Finsler, V^γ componentele unui tensor vertical contravariant V definit pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ şi ψ_γ, componentele unui tensor vertical covariant ψ pe $\mathcal{T}'E$. Au loc identităţile:*

1) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}]V^\gamma = V^\varepsilon S_{\varepsilon;\alpha\bar{\beta}}^{\ \gamma}$;

2) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}]V^{\bar{\gamma}} = -V^{\bar{\varepsilon}} S_{\bar{\varepsilon};\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\gamma}}$;

3) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}]\psi_\gamma = -\psi_\varepsilon S_{\gamma;\alpha\bar{\beta}}^{\ \varepsilon}$;

4) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}]\psi_{\bar{\gamma}} = \psi_{\bar{\varepsilon}} S_{\bar{\gamma};\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\varepsilon}}$.

6.2 Teoreme de anulare

Fie multiindicii $A_p = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$ şi $B_q = (\beta_1 \dots \beta_q)$, iar $Z_{B_q}^{A_p}(z, u)$ – componentele unui tensor orizontal Z de tip (p, q) (p-contravariant şi q-covariant) cu suport compact pe E. Notăm cu $||Z||^2$ produsul scalar al acestui tensor cu el însuşi, în raport cu produsul scalar indus de $\mathcal{G}$, adică

$$||Z||^2 = h_{A_p\overline{B}_p} h^{\overline{D}_q C_q} Z_{C^q}^{A_p} Z_{\overline{D}_q}^{\overline{B}_p}, \tag{6.2.2}$$

unde $h_{A_p\overline{B}_p} = h_{\alpha_1\bar{\beta}_1} \dots h_{\alpha_p\bar{\beta}_p}$ şi $h^{\overline{D}_q C_q} = h^{\bar{\delta}_1\gamma_1} \dots h^{\bar{\delta}_q\gamma_q}$.

În cazul în care $Z_{B_q}^{A_p}(z, u)$ sunt funcţii olomorfe în variabilele z şi u, avem $\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} Z_{B_q}^{A_p} = 0$. Mai mult, pentru un compact $U \subset E$, din (5.2.12) rezultă că

$$\int_U h^{\bar{\beta}\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} ||Z||^2 d\mathcal{V} = 0. \tag{6.2.3}$$

Propoziţia 6.2.1. *Dacă (E, F) este un algebroid Finsler, atunci*

$$\Delta^h ||Z||^2 = ||\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z_{B_q}^{A_p}||^2 - h^{\bar{\beta}\alpha} \mathcal{C}_\alpha Z_{\overline{B}_p}^{\overline{D}_q} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} Z_{\overline{D}_q}^{\overline{B}_p} - \mathcal{H}^h(Z), \tag{6.2.4}$$

unde
$$||\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^{A_p}_{B_q}||^2 = h^{\bar{\beta}\alpha} h_{A_p\overline{B}_p} h^{\overline{D}_q C_q} \left(\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^{A_p}_{C_q}\right)\left(\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} Z^{\overline{B}_p}_{\overline{D}_q}\right)$$

şi

$$\mathcal{H}^h(Z) = \sum_{k=1}^{p} K^{\bar{\beta}_k}_{\bar{\varepsilon}_k} Z^{\overline{D}_q}_{\overline{B}_p} Z^{\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_{k-1}\bar{\varepsilon}_k\bar{\beta}_{k+1}\ldots\bar{\beta}_p}_{\overline{D}_q} - \sum_{k=1}^{q} K^{\bar{\varepsilon}_k}_{\bar{\delta}_k} Z^{\overline{D}_q}_{\overline{B}_p} Z^{\overline{B}_p}_{\bar{\delta}_1\ldots\bar{\delta}_{k-1}\bar{\varepsilon}_k\bar{\delta}_{k+1}\ldots\bar{\delta}_q},$$

cu notaţiile $K^{\bar{\beta}_k}_{\bar{\varepsilon}_k} = h^{\bar{\beta}\alpha} K^{\ \bar{\beta}_k}_{\bar{\varepsilon}_k,\bar{\beta}\alpha}$, $K^{\bar{\varepsilon}_k}_{\bar{\delta}_k} = h^{\bar{\beta}\alpha} K^{\ \bar{\varepsilon}_k}_{\bar{\delta}_k,\bar{\beta}\alpha}$ *şi* $Z^{\overline{D}_q}_{\overline{B}_p} = h_{A_p\overline{B}_p} h^{\overline{D}_q C_q} Z^{A_p}_{C_q}$.

Teorema 6.2.1. *Fie (E, F) un algebroid Kähler Finsler şi $Z^{A_p}_{B_q}(z, u)$ – componentele unui câmp tensorial orizontal Z p-contravariant şi q-covariant, cu suport compact pe E. Dacă $Z^{A_p}_{B_q}$ sunt funcţii olomorfe în variabilele z şi u şi satisfac identitatea* $\mathrm{Re}\,\mathcal{H}^h(Z) \geq 0$*, atunci*

$$\mathcal{H}^z(Z) = 0, \qquad \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^{A_p}_{B_q} = 0,\ \alpha = 1, \ldots, m,$$

pentru orice $(z, u) \in E$.

Vom aplica în continuare Teorema de anulare 6.2.1 în două cazuri particulare.

Propoziţia 6.2.2. *Fie (E, F) un algebroid Kähler Finsler şi $Z_\gamma(z, u)$ – componentele unui tensor orizontal covariant Z, cu suport compact pe E. Notăm cu $K^{\varepsilon\bar{\sigma}} = h^{\bar{\beta}\alpha} h^{\bar{\gamma}\varepsilon} K^{\ \bar{\sigma}}_{\bar{\gamma},\bar{\beta}\alpha}$.*

1) *Dacă Z_γ sunt funcţii olomorfe în z şi u, iar* $\mathrm{Re}\,K^{\varepsilon\bar{\sigma}} Z_\varepsilon Z_{\bar{\sigma}} \leq 0$*, atunci* $\nabla_{\mathcal{X}_\varepsilon} Z_\gamma = 0$.

2) *Dacă Z_γ sunt funcţii olomorfe în z şi u, iar* $\mathrm{Re}\,K^{\varepsilon\bar{\sigma}} Z_\varepsilon Z_{\bar{\sigma}} < 0$*, atunci* $Z_\gamma(z, u) = 0$.

Propoziţia 6.2.3. *Fie (E, F) un algebroid Kähler Finsler şi $Z^\gamma(z, u)$ – componentele unui tensor orizontal contravariant Z, cu suport compact pe E. Notăm cu $K_{\varepsilon\bar{\sigma}} = h^{\bar{\beta}\alpha} h_{\varepsilon\bar{\gamma}} K^{\ \bar{\gamma}}_{\bar{\sigma},\bar{\beta}\alpha}$.*

1) *Dacă Z^γ sunt funcţii olomorfe în z şi u, iar* $\mathrm{Re}\,K_{\varepsilon\bar{\sigma}} Z^\varepsilon Z^{\bar{\sigma}} \leq 0$*, atunci* $\nabla_{\mathcal{X}_\varepsilon} Z^\gamma = 0$.

2) *Dacă Z^γ sunt funcţii olomorfe în z şi u, iar* $\mathrm{Re}\,K_{\varepsilon\bar{\sigma}} Z^\varepsilon Z^{\bar{\sigma}} < 0$*, atunci* $Z^\gamma(z, u) = 0$.

Capitolul 7

Produsul ”warped” al algebroizilor Lie olomorfi

În acest capitol, am continuat studiul algebroizilor Lie olomorfi şi al prelungirilor acestora cu investigarea noţiunii de produs ”warped” al unor astfel de algebroizi. Studiul urmează direcţia iniţiată în [K-P-V1] în cazul varietăţilor Finsler reale.

Vom avea nevoie de gradientul şi de hessiana unei funcţii pe un algebroid, precum şi de unele proprietăţi ale hessianei. Acestea se dovedesc a fi diferite în cazul analizat, comparativ cu proprietăţile hessianei definite pentru o varietate Finsler, studiate în [K-P-V1].

După ce definim produsul ”warped” pentru doi algebroizi Finsler olomorfi, demonstrăm că acesta este un fibrat Finsler, cu funcţia Finsler definită cu ajutorul celor două funcţii Finsler ale algebroizilor iniţiali. De asemenea, studiem relaţia dintre conexiunile Chern-Finsler ale algebroizilor iniţiali şi cea a produsului. Din motive obiective, suntem nevoiţi să restricţionăm studiul doar pentru fibratele verticale. De asemenea, investigăm curbura produsului definit şi obţinem unele proprietăţi similare celor obţinute în [K-P-V1] pentru câmpuri orizontale pe produse de varietăţi Finsler.

7.1 Proprietăţi ale structurilor Finsler pe prelungirea unui algebroid

Pe un algebroid Finsler, conexiunea Chern-Finsler este metrică în raport cu metrica (4.2.21) de pe prelungire. De asemenea, conexiunea Chern-Finsler verifică formula Koszul pe subfibratul vertical al prelungirii.

Lema 7.1.1. *Fie (E, F) un algebroid Finsler Lie olomorf şi fie $\mathcal{D}$ conexiunea Chern-Finsler a acestuia. Pentru $U, V, W \in V\mathcal{T}E$, are loc identitatea:*

$$\begin{aligned} 2\mathcal{G}(\mathcal{D}_U V, W) &= U\mathcal{G}(V, W) + V\mathcal{G}(W, U) - W\mathcal{G}(U, V) \\ &\quad - \mathcal{G}(U, [V, W]) + \mathcal{G}(V, [W, U]) + \mathcal{G}(W, [U, V]). \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

În Capitolul 6, am introdus gradientul unei funcţii pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$. Acum, ne interesează gradientul definit pe întreaga prelungire $\mathcal{T}E$, adică operatorul ∇ dat de

$$\mathcal{G}(Z, \nabla f) = Zf,\ \forall Z \in \mathcal{T}E.$$

În coordonate, avem

$$\nabla f = h^{\bar{\beta}\alpha}(\delta_{\bar{\beta}} f)\mathcal{X}_\alpha + h^{\bar{\beta}\alpha}(\delta_\alpha f)\mathcal{X}_{\bar{\beta}} + h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_{\bar{\beta}} f)\mathcal{V}_\alpha + h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_\alpha f)\mathcal{V}_{\bar{\beta}}. \tag{7.1.2}$$

În continuare, vom considera partea verticală a gradientului,

$$\nabla^{v\bar{v}} f = h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_{\bar{\beta}} f)\mathcal{V}_\alpha + h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_\alpha f)\mathcal{V}_{\bar{\beta}}. \tag{7.1.3}$$

Definiţia 7.1.1. Hessiana unei funcţii f în raport cu conexiunea Chern-Finsler $\mathcal{D}$ pe prelungirea $\mathcal{T}E$ este derivata covariantă de ordinul al doilea, $\mathcal{H}f = \mathcal{D}(\mathcal{D}f)$.

Propoziţia 7.1.1. *Hessiana $\mathcal{H}f$ satisface identităţile:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(V, W) &= VWf - (\mathcal{D}_V W)f + (\mathcal{D}_{V^v} W^v + \mathcal{D}_{V^{\bar{v}}} W^{\bar{v}})f \\ &= \mathcal{G}(\mathcal{D}_V(\nabla^{v\bar{v}} f), W) + (\mathcal{D}_{V^v} W^v + \mathcal{D}_{V^{\bar{v}}} W^{\bar{v}})f, \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

unde $V = V^\alpha \mathcal{V}_\alpha + V^{\bar{\alpha}}\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}$, $W = W^\beta \mathcal{V}_\beta + W^{\bar{\beta}}\mathcal{V}_{\bar{\beta}}$, $(\mathcal{D}_{V^v} W^v)f = (\mathcal{D}_{V^\alpha \mathcal{V}_\alpha} W^\beta \mathcal{V}_\beta)f = V^\alpha(\dot{\partial}_\alpha W^\beta)(\dot{\partial}_\beta f)$, iar $(\mathcal{D}_{V^{\bar{v}}} W^{\bar{v}})f$ este conjugata acesteia din urmă.

7.2 Produsul "warped" al algebroizilor

Considerăm doi algebroizi Finsler olomorfi, (E_1, F_1) şi (E_2, F_2), unde E_1 este un fibrat olomorf peste varietatea complexă M_1, iar E_2 este un fibrat olomorf peste varietatea complexă M_2. De asemenea, considerăm prelungirile acestor algebroizi, $\mathcal{T}E_1$ şi respectiv $\mathcal{T}E_2$, conexiunile Chern-Finsler corespunzătoare, $\mathcal{D}^1$ şi respectiv $\mathcal{D}^2$, şi proiecţile celor doi algebroizi, $\pi_1 : E_1 \to M_1$ şi respectiv $\pi_2 : E_2 \to M_2$. Fie $f : M_1 \to \mathbb{R}_+$ o funcţie olomorfă.

După modelul din [K-P-V1], definim pe fibratul produs $E_1 \times E_2$ funcţia $F : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ prin

$$F(u_1, u_2) = F_1(u_1) + f^2(\pi_1(u_1))F_2(u_2). \tag{7.2.5}$$

Aceasta este o funcţie Finsler pe fibratul produs $E_1 \times E_2$.

Astfel, produsul ”warped” al algebroizilor E_1 şi E_2 este fibratul produs $E_1 \times_f E_2$, cu funcţia ”warp” f şi metrica Finsler $F = F(u_1, u_2)$. Prin urmare, $(E_1 \times_f E_2, F)$ este un fibrat vectorial complex Finsler.

7.2.1 Fibratul prelungire al fibratului produs ”warped”

Considerăm cei doi algebroizi Finsler olomorfi, (E_1, F_1) şi (E_2, F_2), precum şi produsul lor ”warped” definit mai sus, $E_1 \times_f E_2$. De asemenea, fie $\mathcal{T}E_1$ şi $\mathcal{T}E_2$ prelungirile algebroizilor E_1 şi respectiv E_2, definite în Capitolul 4.

Subfibratele verticale ale celor două fibrate prelungire sunt definite cu ajutorul proiecţiilor $\tau_i : \mathcal{T}E_i \to E_i,\ \tau_i(e_i, v_i) = e_i \in E_i$, prin:

$$V\mathcal{T}E_i = \ker \tau_i = \{(e_i, v_i) \in \mathcal{T}E_i \mid \tau_i(e_i, v_i) = 0\},$$

pentru $i = 1, 2$.

Deoarece fibratul prelungire are proprietăţi similare celor ale fibratului tangent al unei varietăţi, după cum am văzut în capitolele anterioare, vom lucra în continuare în acest context geometric în locul fibratelor tangente ale fibratelor E_1 şi E_2. Găsim cu uşurinţă că $\mathcal{T}(E_1 \times E_2) = \mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$.

Dacă $p_1 : \mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2 \to \mathcal{T}E_1$ este proiecţia pe primul factor, iar $p_2 : \mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2 \to \mathcal{T}E_2$ este proiecţia pe al doilea factor al produsului prelungirilor, atunci putem defini lifturile câmpurilor vectoriale de pe $\mathcal{T}E_1$ sau $\mathcal{T}E_2$ la $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ în felul următor. Liftul câmpului $U_1 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1)$ la $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este $\widehat{U}_1 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2)$, care satisface condiţiile $p_1(\widehat{U}_1) = U_1$, $p_2(\widehat{U}_1) = 0$. Similar, liftul câmpului $U_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E_2)$ la $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este $\widehat{U}_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2)$, care satisface condiţiile $p_1(\widehat{U}_2) = 0$, $p_2(\widehat{U}_2) = U_2$.

Avem în continuare $\ker(\tau_1 \times \tau_2) = \ker \tau_1 \oplus \ker \tau_2$, aşadar $V\mathcal{T}E_1 \times V\mathcal{T}E_2$ este fibratul vertical al produsului $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$. În raport cu conexiunile neliniare Chern-Finsler ale prelungirilor $\mathcal{T}E_1$ şi $\mathcal{T}E_2$, obţinem descompunerea $\mathcal{T}(E_1 \times E_2) = \mathcal{T}E_1 \oplus \mathcal{T}E_2 = H\mathcal{T}E_1 \oplus V\mathcal{T}E_1 \oplus H\mathcal{T}E_2 \oplus V\mathcal{T}E_2$.

Notăm cu $\overset{1}{N}{}_\alpha^\beta = \overset{1}{N}{}_\alpha^\beta(z_1, u_1)$ şi respectiv $\overset{2}{N}{}_\alpha^\beta = \overset{2}{N}{}_\alpha^\beta(z_2, u_2)$ coeficienţii conexiunilor neliniare Chern-Finsler pe $\mathcal{T}E_1$ şi respectiv $\mathcal{T}E_2$. De asemenea, fie

$\{\overset{1}{\mathcal{X}}_\alpha, \overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha, \overset{1}{\mathcal{X}}_{\bar\alpha}, \overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\alpha}\}$ şi respectiv $\{\overset{2}{\mathcal{X}}_\alpha, \overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha, \overset{2}{\mathcal{X}}_{\bar\alpha}, \overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\alpha}\}$ reperele locale adaptate în raport cu conexiunile menţionate pe $\mathcal{T}E_1$ şi respectiv $\mathcal{T}E_2$. Este evident că parantezele Lie $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{T}_\times}$ pe $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ satisfac identităţile:

$$\begin{aligned} [U_1, V_2]_{\mathcal{T}_\times} &= 0, \\ [U_1, V_1]_{\mathcal{T}_\times} &= [U_1, V_1]_{\mathcal{T}E_1}, \\ [U_2, V_2]_{\mathcal{T}_\times} &= [U_2, V_2]_{\mathcal{T}E_2}, \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

pentru orice $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1)$ şi $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E_2)$.

7.2.2 Conexiunea Chern-Finsler a produsului "warped"

Asemenea cazului varietăţilor Finsler reale [K-P-V1], formula Koszul joacă un rol esenţial în studiul relaţiei dintre conexiunile de pe fiecare fibrat prelungire şi conexiunea de pe fibratul produs. Deoarece, în cazul nostru, formula (7.1.1) are loc numai pentru câmpuri verticale pe un fibrat prelungire, vom lucra în continuare *numai pe fibratul vertical* al descompunerii anterioare, pe care îl vom nota prin $V\mathcal{T} = V\mathcal{T}E_1 \oplus V\mathcal{T}E_2$. Dacă $\mathcal{G}_1$ şi respectiv $\mathcal{G}_2$ sunt două metrici Hermitiene date ca în relaţia (4.2.21) pe $\mathcal{T}E_1$ şi respectiv $\mathcal{T}E_2$, atunci, folosind restricţiile acestora la fibratele verticale, $\mathcal{G}_1^v$ şi respectiv $\mathcal{G}_2^v$, se poate defini o metrică Hermitiană $\mathcal{G}$ pe $V\mathcal{T}$ prin

$$\mathcal{G}^v(\cdot,\cdot) = \mathcal{G}_1^v(\cdot,\cdot) + f^2(\pi_1(v_1))\mathcal{G}_2^v(\cdot,\cdot).$$

Consideraţii similare cazului varietăţilor "warped" Finsler reale [K-P-V1] conduc la următorul rezultat.

Teorema 7.2.1. *Fie $U_1, V_1 \in V\mathcal{T}E_1$ şi $U_2, V_2 \in V\mathcal{T}E_2$. Atunci:*

1. *$\mathcal{D}_{U_1}V_1$ on $V\mathcal{T}E_1 \oplus V\mathcal{T}E_2$ este lift-ul lui $\mathcal{D}_{U_1}V_1$ on $V\mathcal{T}E_1$;*

2. *$\mathcal{D}_{U_1}U_2 = \mathcal{D}_{U_2}U_1 = (U_2 f/f)U_1$;*

3. *$\mathcal{D}_{U_2}V_2 = \mathcal{D}^2_{U_2}V_2 - \frac{\mathcal{G}(U_2,V_2)}{f}\nabla^{v\bar v} f$;*

4. *$\mathcal{T}(U_1, U_2) = \mathcal{T}(U_2, U_1) = 0$;*

Este interesant de caracterizat local rezultatul anterior. Avem:

$$\mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\beta = \mathcal{D}^1_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\beta, \quad \mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = \mathcal{D}^1_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = 0,$$

$$\mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta = \mathcal{D}_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta}\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha = \frac{\overset{1}{\dot\partial}_\alpha f}{f}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta, \quad \mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = \mathcal{D}_{\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta}}\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha = \frac{\overset{1}{\dot\partial}_\alpha f}{f}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta},$$

$$\mathcal{D}_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta = \mathcal{D}^2_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta - \frac{1}{f}\mathcal{G}(\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha, \overset{2}{\mathcal{V}}_\beta)\nabla^{v\bar v f} = \mathcal{D}^2_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta,$$

$$\mathcal{D}_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = \mathcal{D}^2_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} - \frac{1}{f}\mathcal{G}(\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha, \overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta})\nabla^{v\bar v f} = -f\overset{2}{h}_{\alpha\bar\beta}\nabla^{v\bar v}f,$$

împreună cu conjugatele lor. Prin urmare, dacă notăm

$$\mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\beta = \overset{11,1}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{11,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma}_{\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma} + \overset{11,2}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{11,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma}_{\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma},$$

$$\mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = \overset{\bar 11,1}{C}{}^{\gamma}_{\bar\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{\bar 11,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma}_{\bar\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma} + \overset{\bar 11,2}{C}{}^{\gamma}_{\bar\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{\bar 11,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma}_{\bar\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma},$$

$$\mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta = \overset{21,1}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{21,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma}_{\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma} + \overset{21,2}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{21,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma}_{\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma},$$

$$\mathcal{D}_{\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = \overset{\bar 21,1}{C}{}^{\gamma}_{\bar\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{\bar 21,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma}_{\bar\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma} + \overset{\bar 21,2}{C}{}^{\gamma}_{\bar\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{\bar 21,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma}_{\bar\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma},$$

$$\mathcal{D}_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\beta = \overset{22,1}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{22,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma}_{\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma} + \overset{22,2}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{22,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma}_{\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma},$$

$$\mathcal{D}_{\overset{2}{\mathcal{V}}_\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\beta} = \overset{\bar 22,1}{C}{}^{\gamma}_{\bar\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{\bar 22,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma}_{\bar\beta\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma} + \overset{\bar 22,2}{C}{}^{\gamma}_{\bar\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_\gamma + \overset{\bar 22,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma}_{\bar\beta\alpha}\overset{2}{\mathcal{V}}_{\bar\sigma},$$

obţinem

$$\overset{11,1}{C}{}^{\gamma_1}_{\beta_1\alpha_1} = \overset{1}{C}{}^{\gamma_1}_{\beta_1\alpha_1} = \overset{1}{h}{}^{\bar\sigma_1\gamma_1}(\overset{1}{\dot\partial}_{\alpha_1}\overset{1}{h}_{\beta_1\bar\sigma_1})$$

$$\overset{21,2}{C}{}^{\gamma_2}_{\beta_2\alpha_1} = \delta^{\gamma_2}_{\beta_2}\frac{\overset{1}{\dot\partial}_{\alpha_1}f}{f}, \quad \overset{\bar 21,\bar 2}{C}{}^{\bar\sigma_2}_{\bar\beta_2\alpha_1} = \delta^{\bar\gamma_1}_{\bar\beta_1}\frac{\overset{1}{\dot\partial}_{\bar\alpha_1}f}{f},$$

$$\overset{22,2}{C}{}^{\gamma_2}_{\beta_2\alpha_2} = \overset{2}{C}{}^{\gamma_2}_{\beta_2\sigma_2} = \overset{2}{h}{}^{\bar\sigma_2\gamma_2}(\overset{2}{\dot\partial}_{\alpha_2}\overset{2}{h}_{\beta_2\bar\sigma_2}),$$

$$\overset{\bar 22,1}{C}{}^{\gamma_1}_{\bar\beta_2\alpha_2} = -f(\overset{1}{\dot\partial}_{\bar\sigma}f)\overset{1}{h}{}^{\bar\sigma\gamma}\overset{2}{h}_{\alpha\bar\beta},$$

$$\overset{\bar 22,\bar 1}{C}{}^{\bar\sigma_1}_{\bar\beta_2\alpha_2} = -f(\overset{1}{\dot\partial}_{\gamma}f)\overset{1}{h}{}^{\bar\sigma\gamma}\overset{2}{h}_{\alpha\bar\beta}.$$

Toţi ceilalţi coeficienţi sunt zero.

Curbura produsului $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este definită ca de obicei prin $\mathcal{R}(U,V)W = \mathcal{D}_U \mathcal{D}_V W - \mathcal{D}_V \mathcal{D}_U W - \mathcal{D}_{[U,V]} W$. Legătura dintre curbura produsului "warped" şi curburile fiecăruia dintre fibratele prelungire constituente ale produsului este dată în

Teorema 7.2.2. *Dacă $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este produsul prelungirilor a doi algebroizi Finsler Lie olomorfi, având curburile $\mathcal{R}$ pe fibratul produs şi $\mathcal{R}^1$ şi $\mathcal{R}^2$ pe $\mathcal{T}E_1$ şi respectiv $\mathcal{T}E_2$, atunci pentru $U_1, V_1, W_1 \in V\mathcal{T}E_1$ şi $U_2, V_2, W_2 \in V\mathcal{T}E_2$ au loc următoarele identităţi:*

1. $\mathcal{R}(U_1, V_1)W_1$ *este liftul lui* $\mathcal{R}^1(U_1, V_1)W_1$;
2. $\mathcal{R}(V_2, U_1)V_1 = -\frac{1}{f}[\mathcal{H}^f(U_1, V_1) - (\mathcal{D}_{U_1^v} V_1^v - \mathcal{D}_{U_1^{\bar{v}}} V_1^{\bar{v}})f]V_2$;
3. $\mathcal{R}(V_2, W_2)U_1 = 0$;
4. $\mathcal{R}(V_2, W_2)U_2 = \mathcal{R}^2(V_2, W_2)U_2 + \frac{\mathcal{G}(\nabla^{v\bar{v}} f, \nabla^{v\bar{v}} f)}{f^2}(\mathcal{G}(V_2, U_2)W_2 - \mathcal{G}(W_2, U_2)V_2)$

7.3 Un model de produs Finsler "warped" pentru gravitaţie şi electromagnetism

Fie M spaţiul-timp complexificat considerat în [A-M], $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$, şi fie (z^1, z^2) coordonate complexe pe M. Considerăm $E_1 = T'M$, fibratul tangent olomorf, care are o structură de varietate complexă 4-dimensională, cu $(z^1, z^2, \eta^1, \eta^2)$ – coordonatele complexe pe $T'M$. Fibratul $T'M$ are o structură naturală de algebroid Lie olomorf, cu aplicaţia ancoră ρ_1 identitatea. O funcţie Finsler complexă $F_1 : T'M \to \mathbb{R}_+$ este metrica slab gravitaţională considerată în [A-M]:

$$F_1 := \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)|\eta^1|^2 - i\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)\eta^1\bar{\eta}^2 + i\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)\eta^2\bar{\eta}^1 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)|\eta^2|^2 \tag{7.3.7}$$

unde Φ este o funcţie omogenă în η definită pe $T'M$, având interpretarea fizică de potential gravitaţional complex, cu proprietatea $\Phi > \frac{c^2}{2}$, $c \in \mathbb{R}^*$.

Tensorul metric este

$$\overset{1}{h}_{j\bar{k}}(z,\eta) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} & -i\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \\ i\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) & -\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \end{pmatrix}, \quad j,k = 1,2 \quad \text{şi} \quad i := \sqrt{-1}, \tag{7.3.8}$$

iar inversul său,

$$\overset{1}{h}{}^{\bar{k}j}(z,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1+\frac{2\Phi}{c^2}}{2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)} \end{pmatrix}, \quad j,k = 1,2.$$

Conform [A-M], această metrică este Finsler dacă presupunem următoarele:

i) $\Phi > \frac{c^2}{2}$, adică $\det(g_{i\bar{j}}) > 0$;

ii) Φ este omogenă în raport cu η;

iii) $i\Phi_{\cdot 2} = \Phi_{\cdot 1}$, unde $\Phi_{\cdot h} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^h}$, $h = 1,2$.

Componentele conexiunii neliniare Chern-Finsler sunt

$$\overset{1}{N}{}^1_k = 0, \quad \overset{1}{N}{}^2_k = \frac{-2i}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}\left(\eta^1 - i\eta^2\right)\Phi_k.$$

Pentru cel de-al doilea algebroid Lie olomorf, considerăm din nou spaţiul-timp complexificat M, iar pe $E_2 = T'M$ putem lua altă metrică Finsler, propusă în [S]:

$$F_2 := F_0 + \sigma(z)|\beta|^2, \tag{7.3.9}$$

unde:

i) F_0 este o metrică Finsler dată (de exemplu, metrica slab gravitaţională F_1) pe M;

ii) $\sigma : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie ce satisface $\sigma(z) \geq -\frac{F_0}{|\beta|^2}$;

iii) $\beta = B_k(z)\eta^k$ este forma Beil olomorfă; de obicei, $B_k(z)$ sunt componentele unui câmp electromagnetic.

Tensorul metric este în acest caz dat de

$$\overset{2}{h}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + \sigma(z)B_i(z)B_{\bar{j}}(z), \tag{7.3.10}$$

unde $g_{i\bar{j}}$ este metrica lui (M, F_0), iar $B_{\bar{j}} = \overline{B_j}$. Inversul tensorului (7.3.10) este

$$\overset{2}{h}{}^{\bar{j}i} = g^{\bar{j}i} - \frac{\sigma}{1+\sigma\mathbb{B}^2},$$

unde $\mathbb{B} = g_{i\bar{j}}B^iB^{\bar{j}}$. Coeficienţii conexiunii neliniare Chern-Finsler sunt $\overset{2}{N}{}^j_k = N^j_k + A^j_k$, unde $A^j_k = \overset{2}{h}{}^{\bar{m}j}\partial_k(\sigma B_l B_{\bar{m}})\eta^l$.

Considerăm în continuare o funcţie olomorfă $f : M \to \mathbb{R}$, iar pe produsul "warped" $\mathcal{T}T'M \times_f \mathcal{T}T'M \equiv T_{\mathbb{C}}(T'M) \times_f T_{\mathbb{C}}(T'M)$ definim metrica Finsler

$$F(z, \eta) = F_1(z, \eta) + f^2(z) F_2(z, \eta), \tag{7.3.11}$$

care oferă un posibil model pentru teorii de unificare a gravitaţiei şi electromagnetismului, depinzând de două funcţii pe M, f şi σ.

Capitolul 8

Contribuţii originale. Diseminarea rezultatelor

Prezentăm în acest capitol contribuţiile originale ale autorului prezentei teze, precum şi publicaţiile în care au apărut rezultatele obţinute.

- Definirea şi studiul proprietăţilor operatorului Laplace pentru funcţii olomorfe definite pe un grup Lie complex. Studiul ultim multiplicatorilor olomorfi definiţi pe un grup Lie complex.
- Rezolvarea problemei determinării unui spray complex din problema varia-ţională în cazul algebroizilor Lie complecşi.
- Înzestrarea fibratului tangent olomorf al unui algebroid Lie olomorf cu o structură de algebroid Lie. Studiul geometriei acestui nou algebroid Lie.
- Definirea noţiunii de prelungire olomorfă a unui algebroid Lie olomorf şi investigarea proprietăţilor acesteia (conexiuni neliniare şi liniare, torsiuni, curburi, semispray-uri şi spray-uri).
- Investigarea relaţiilor dintre structurile Lagrange (Finsler) ale fibratului tangent olomorf al varietăţii bază a unui algebroid şi ale algebroidului, în funcţie de dimensiunile varietăţii bază, ale algebroidului şi rangul ancorei acestuia.
- Definirea noţiunii de algebroid Finsler olomorf prin înzestrarea unui algebroid cu o structură Finsler complexă. Studiul proprietăţilor acestui tip de algebroid.

- Definirea unor operatori de tip Laplace verticali şi orizontali pentru funcţii olomorfe pe un algebroid Lie Finsler olomorf. Definirea unui operator Laplace orizontal pentru forme definite pe prelungirea unui algebroid Lie Finsler olomorf.

- Realizarea unui studiu de tip Bochner pentru algebroizi olomorfi şi obţinerea în cadrul acestuia a unor teoreme de anulare pentru câmpuri vectoriale orizontale.

- Definirea produsului "warp" de algebroizi olomorfi şi investigarea proprietăţilor acestuia.

Rezultatele obţinute de autorul tezei au fost publicate în următoarele articole:

- Ida, C., Ionescu, A., *On a metric holomorphic connection in complex Lie groups*, BSG Proceedings 21, The Int. Conf. "Differential Geometry – Dynamical Systems" DGDS-2013, Bucharest, Romania (2013), 74–83.

- Ionescu, A., *On lifts of left-invariant holomorphic vector fields in complex Lie groups*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 7(56), No. 2 (2014), 65–72.

- Ionescu, A., *On holomorphic Lie algebroids*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 9(58), No. 1 (2016), 53–66.

- Ionescu, A., *A note on the Laplace operator for holomorphic functions on complex Lie groups*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 62, No. 1 (2017), 15–25.

- Ionescu, A., Munteanu, G., *Connections in holomorphic Lie algebroids*, Mediterr. J. Math., 4, Vol. 14 (2017), DOI: 10.1007/s00009-017-0960-4.

- Ionescu, A., *Finsler structures on holomorphic Lie algebroids*, Novi Sad J. Math., Vol. 47, No. 2 (2017), 117–132.

- Ionescu, A., *Laplace operators on holomorphic Lie algebroids*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 26(1) (2018), 141–158.

- Ionescu, A., *Vanishing theorems on holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.

- Ionescu, A., Munteanu, G., *The warped product of holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.

O parte din rezultate au fost prezentate într-o serie de conferinţe naţionale şi internaţionale:

- The International Conference ”Differential Geometry and Dynamical Systems”, 10–13 Octombrie 2013, Bucureşti;
- The X-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory, 18–24 August 2014, Braşov;
- International Conference on Applied Mathematics and Numerical Methods, 14–16 Aprilie 2016, Craiova;
- The International Conference on Mathematics and Computer Science, 8–10 Septembrie 2016, Braşov;
- The International Conference on Applied and Pure Mathematics - dedicated to the 90th anniversary of Academician Radu Miron, 2–5 Noiembrie 2017, Iaşi.

Bibliografie – Selecţie

[A-P] Abate, M., Patrizio, G., *Finsler Metrics – A Global Approach with Applications to Geometric Function Theory*, Springer-Verlag, 1591, 1994.

[AT1] Aikou, T., *On Complex Finsler Manifolds*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. **35** (1991), 9-25.

[AT2] Aikou, T., *A Partial Connection on Complex Finsler Bundles and its Applications*, Illinois J. of Math. **42** (1998), 481–492.

[AT3] Aikou, T., *Applications of Bott Connection to Finsler Geometry*, Steps in Diff. Geom., Proc. of Coll. on Diff. Geom., Debrecen (2000), 3–13.

[AT4] Aikou, T., *Finsler geometry on complex vector bundles*, Riemann Finsler Geometry, MSRI Publications, **50** (2004), 85–107.

[A-M] Aldea, N., Munteanu, G.,*New candidates for a Hermitian approach of gravity*, Int. J. of Geom. Meth. in Mod. Phys., Vol. 10, No. 9 (2013).

[AM1] Anastasiei, M., *Geometry of Lagrangians and semisprays on Lie algebroids*, BSG Proc. **13**, Geom. Balkan Press, Bucharest (2006), 10–17.

[AM2] Anastasiei, M., *Semisprays On Lie Algebroids. Applications*, Tensor (N.S.) **69** (2008), 190–198.

[A-L] Antonelli, P. L., Lackey, B., *The Theory of Finslerian Laplacians and Applications*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 459, MAIA, 1998.

[AGS] Asanov, G. S., *Finslerian metric functions over the product* $\mathbb{R} \times M$ *and their potential applications*, Rep. Math. Phys. **41** (1998), 117–132.

[B-L] Bao, D., Lackey, B., *A Hodge decomposition theorem for Finsler spaces*, C.R. Acad. Sci. Paris **323**, Serie 1 (1996), 51–56.

[B-K] Bland, J., Kalka, M., *Variations of holomorphic curvature for Kähler Finsler metrics* Cont. Math. **196** (1996), 121–132.

[BS1] Bochner, S., *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776-797.

[BS2] Bochner, S., *Curvature in Hermitian metric*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 179-195.

[CBY] Chen, B.-Y., *Geometry of warped product CR-submanifolds in Kähler manifolds*, Monatsh. Math. **133** (2001), 177–195.

[CCH] Chen, C.-H., *Warped products of metric spaces of curvature bounded from above*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4727–4740.

[C-S] Chern, S. S., Shen, Z., *Riemann-Finsler Geometry*, Singapore: World Scientific, 2005.

[CL] Colombo, L., *Second-order constrained variational problems on Lie algebroids: Applications to optimal control*, J. Geom. Mech. **9**, no. 1 (2017), 1-45.

[CM1] Crâşmăreanu, M., *Last multipliers theory on manifolds*, Tensor **66**, no. 1 (2005), 18–25.

[CM4] Crâşmăreanu, M., *Last multipliers on weighted manifolds and the weighted Liouville equation*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **77**, No. 3 (2015), 53–58.

[C-I-P1] Crâşmăreanu, M., Ida, C., Popescu, P., *An* 1-*differentiable cohomology induced by a vector field*, J. Lie Theory, Vol. 26., No. 4 (2016), 911–926.

[C-I-P2] Crâşmăreanu, M., Ida, C., Popescu, P., *Holomorphic last multipliers on complex manifolds*, J. of Nonl. Math. Phys. **24**, No. 4 (2017), 596–619.

[G-O] Gheorghiev, G., Oproiu, V., *Varietă ţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, Ed. Academiei, Vol. I, 1976, Vol. II, 1979.

[GSI] Goldberg, S. I., *Curvature and Homology*, Revised Edition. ISBN 0-486-40207-X, Dover Publication, Inc. Mineola, New-York, 1998.

[G-H] Griffiths, P., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], New York, 1978.

[H-M] Higgins, P., Mackenzie, K. C. H., *Algebraic constructions in the cathegory of Lie algebroids*, J. Algebra **129**, no. 1 (1990), 195–230.

[IC1] Ida, C., *Weitzenböck type formulas and a vanishing theorem on complex Finsler bundles*, Tensor (N.S.) **71**, No. 1 (2009), p. 61–68.

[IC2] Ida, C., *Vertical Laplacian on complex Finsler bundles*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (NS) **26**, No. 2 (2010), 313–327.

[IC3] Ida, C., *A vanishing theorem for vertical tensor fields on complex Finsler bundles*, Analele Şt. ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iaşi, Mat., Tomul LVII, Suppl. (2011), 103–112.

[IC4] Ida, C., *Lichnerowicz-Poisson cohomology and Banach Lie algebroids*, Ann. Funct. Anal., Vol. 2, No. 2 (2011), 130–137.

[I-I] Ida, C., **Ionescu, A.**, *On a metric holomorphic connection in complex Lie groups*, BSG Proceedings **21**, The Int. Conf. "Differential Geometry – Dynamical Systems" DGDS-2013, Bucharest, Romania (2013), 74–83.

[I-P] Ida, C., Popescu, P., *On Almost Complex Lie Algebroids*, Mediterr. J. Math. **2**, Vol. 13 (2016), 803–824.

[IA1] **Ionescu, A.**, *On lifts of left-invariant holomorphic vector fields in complex Lie groups*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 7(56), No. 2 (2014), 65–72.

[IA2] **Ionescu, A.**, *On holomorphic Lie algebroids*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 9(58), No. 1 (2016), 53–66.

[IA3] **Ionescu, A.**, *A note on the Laplace operator for holomorphic functions on complex Lie groups*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **62**, No. 1 (2017), 15–25.

[I-M4] **Ionescu, A.**, Munteanu, G., *Connections in holomorphic Lie algebroids*, Mediterr. J. Math., **4**, Vol. 14 (2017), DOI: 10.1007/s00009-017-0960-4.

[IA5] **Ionescu, A.**, *Finsler structures on holomorphic Lie algebroids*, Novi Sad J. Math., Vol. 47, No. 2 (2017), 117–132.

[IA6] **Ionescu, A.**, *Laplace operators on holomorphic Lie algebroids*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 26(1) (2018), 141–158.

[IA7] **Ionescu, A.**, *Vanishing theorems on holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.

[I-M8] **Ionescu, A.**, Munteanu, G., *The warped product of holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.

[J] Jozwikowski, M., *Prolongations vs. Tulczyjew triples in Geometric Mechanics*, (2017), arXiv:1712.09858 [math-ph].

[K] J. Klein, *Espaces variationelles et mécaniques*, Ann. Inst. Fourier **12** (1962), 1–124.

[K-N] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry II*, Wiley Interscience, New York, 1969.

[KS] Kobayashi, S., *Negative vector bundles and complex Finsler structures*, Nagoya Math. J. **57** (1975), 153-166.

[K-P-V1] Kozma, L., Peter, I. R., Varga, C., *Warped product of Finsler manifolds*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **44** (2001), 157–170.

[L-S-X] Laurent-Gengoux, G., Stiénon, M., Xu, P., *Holomorphic Poisson manifolds and holomorphic Lie algebroids*, Int. Math. Res. Not. IMRN **rnn88**, 46 (2008).

[LDH] Lee, D. H., *The structure of complex Lie groups*, Research Notes in Mathematics Series, Chapman and Hall/CRC, 2001.

[dL-M-M] de León, M., Marrero, J. C., Martinez, E., *Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids*, J. of Phys. A, Vol. 38, No. 24 (2005).

[MCM] Marle, C.-M., *Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds*, Dissertationes Mathematicae, Inst. Math., Polish Acad. Sci. **457**, 57, 2008.

[ME1] Martinez, E., *Lagrangian mechanics on Lie algebroids*, Acta Appl. Math. **67** (2001), 295–320.

[ME2] Martinez, E., *Geometric formulation of mechanics on Lie algebroids*, Proc. of the VIIIth Workshop on Geometry and Physics (Medina del Campo, 1999), vol. 2 of Publ. R. Soc. Mat. Esp. (2001), 209–222.

[ME3] Martinez, E., *Lie algebroids in classical mechanics and optimal control*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3**, 17 (2007).

[IM] Mihai, I., *Complex differential geometry*, in Handbook of Differential Geometry, Vol. 2, eds. F. Dillen, L. Verstraelen, 2006.

[M-K] Morrow, J., Kodaira, K., *Complex Manifolds*, New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971.

[MG1] Munteanu, G., *Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 2004.

[MG2] Munteanu, G., *The equations of a holomorphic subspace in a complex Finsler space*, Periodica Math. Hungarica, **55(1)** (2007), 81–95.

[MO1] Munteanu, O., *Weitzenböck formulas for horizontal and vertical Laplacians*, Houston J. of Math, **29 (4)** (2003), 889–900.

[P-M] Pitiş, G., Munteanu, G., *v-cohomology of complex Finsler manifolds*, Studia Univ. Babeş-Bolyai **18** (1998), 75–81.

[PP3] Popescu, P., *Poisson structures on almost complex Lie algebroids*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **11(08)** (2014).

[PL1] Popescu, L., *On the geometry of Lie algebroids and applications to optimal control*, An. Şt. ale Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, Vol. LI, s. I (2005), 155–170.

[PL2] Popescu, L., *Geometrical structures on Lie algebroids*, Publ. Math. Debrecen **72(1-2)** (2008), 95–109.

[RH] Rund, H., *Local differential-geometric structures on Lie groups*, Tensor, N. S., **48** (1998), 64–87.

[S] Szász, A., *Beil metrics in complex Finsler geometry*, Balkan J. of Geom. and Its Appl., Vol. 20, No. 2 (2015), 72–83.

[T-V] Toth, A., Varolin, D., *Holomorphic diffeomorphisms of complex semisimple Lie groups*, Inventiones mathematicae, **139** (2000), 351–369.

[WHC] Wang, H.-C., *Complex Parallelisable Manifolds*, Proceedings of the American Math. Soc. **5** (1954), 771–776.

[WA1] Weinstein, A., *Lagrangian mechanics and grupoids*, Fields Inst. Comm., **7** (1996), 206–231.

[WA2] Weinstein, A., *The integration problem for complex Lie algebroids*, in Maeda, Yoshiaki (ed.) et al., From geometry to quantum mechanics. In honor of Hideki Omori, Basel: Birkhäuser, Progress in Mathematics, **252** (2007), 93–109.

[WH] Wu, H., *The Bochner technique in differential geometry*, Math. Rep., **3** (1988), 289–538.

[W-Z] Wu, Z., Zhong, C., *Some results on product complex Finsler manifolds*, Acta Math. Sci. 31B(4)m (2011), 1541–1552.

[X-Z-Q] Xiao, J., Zhong, T., Qiu, C., *Bochner technique on strong Kähler-Finsler manifolds*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., **30** (2010), 89-106.

[ZC2] Zhong, C., *On the fundamental formulas of complex Finsler submanifolds*, J. of Geometry and Physics, **58(4)** (2008), 423–449.

[ZC3] Zhong, C., *A vanishing theorem on Kähler Finsler manifolds*, Diff. Geom. and Appl. **27** (2009), 551–565.

[Z-Z1] Zhong, C., Zhong, T., *Horizontal $\bar{\partial}$-Laplacian on complex Finsler manifolds*, Sci. China Ser. A, Math., **48** (2005), 377–391.

[Z-Z2] Zhong, C., Zhong, T., *Hodge decomposition theorem on strongly Kähler Finlser manifolds*, Sci. China Math. **49** (2006), no. 11, 1696–1714.

Anexe

Anexa 1. Scurt rezumat al tezei

Teza de doctorat intitulată *Operatori diferenţiali pe spaţii Finsler complexe* prezintă un studiu al operatorilor din geometria diferenţială definiţi pe anumite clase de spaţii Finsler complexe. În Capitolul 1, după o scurtă recapitulare a noţiunilor legate de operatori Laplace pe varietăţi Finsler complexe, analizăm grupurile Lie complexe, pe care definim un operator Laplace pentru funcţii olomorfe. În Capitolul 2, iniţiem studiul operatorilor diferenţiali definiţi pe algebroizi Lie prin descrierea cadrului geometric al studiului, reprezentat de algebroizii Lie olomorfi. Capitolul 3 prezintă un studiu detaliat al geometriei spaţiului total al unui algebroid olomorf, introducând de asemenea noţiunea de prelungire a unui algebroid şi studiind structuri Lagrange induse pe un algebroid olomorf de către structuri Lagrange pe spaţiul tangent olomorf al varietăţii bază a algebroidului. În Capitolul 4, studiem geometria Finsler a algebroizilor olomorfi, definind structura Finsler, conexiunea Chern-Finsler a unui astfel de algebroid, investigând curburile şi torsiunile, diferenţiala unei funcţii. Aceste noţiuni sunt necesare studiului prezentat in Capitolul 5, în care introducem două tipuri de operatori Laplace în cazul algebroizilor olomorfi. Primul operator este definit pentru funcţii, cel de-al doilea pentru forme diferenţiale. În Capitolul 6, prezentăm un studiu de tip Bochner pe algebroizi olomorfi, în cadrul căruia obţinem teoreme de anulare importante pentru câmpuri vectoriale orizontale. Capitolul 7 este dedicat studiului produselor de tip "warp" ale algebroizilor olomorfi, investigând legăturile dintre conexiunile produsului şi cele ale algebroizilor constituenţi ai acestuia.

The PhD thesis entitled *Differential operators on complex Finsler spaces*, represents a study of operators from differential geometry defined on some classes of complex Finsler spaces. In Chapter 1, after a brief resume on Laplace operators on complex Finsler manifolds, we analyze complex Lie groups, on which we define a Laplace operator for holomorphic functions. In Chapter 2, we initiate the study of differential operators defined on Lie algebroids by describing the geometrical setting of the study, represented by holomorphic Lie algebroids. In Chapter 3, we present a detailed study of the geometry of the total space of a holomorphic Lie algebroid, also introducing the notion of prolongation of such an algebroid and studying Lagrange structures induced on a holomorphic algebroid by Lagrange structures defined on the holomorphic tangent space of the base manifold of the algebroid. In Chapter 4, we study the Finsler geometry of holomorphic algebroids, by defining the Finsler structure, the Chern-Finsler connection of such an algebroid, also investigating the curvatures and torsions, the differential of a function. These notions are necessary in the study presented in Chapter 5, where we introduce two types of Laplace operators for holomorphic algebroids. The first operator is defined for functions, the second one, for differential forms. In Chapter 6, we present a Bochner-type study on holomorphic algebroids, where we obtain some interesting vanishing theorems for horizontal vector fields. Chapter 7 is dedicated to the study of warped products of holomorphic algebroids, investigating the relations between connections on the warped product and on the constituting algebroids.

Anexa 2. Curriculum vitae

Informaţii personale	**Alexandru Codrin IONESCU** E-mail: alexandru-codrin.ionescu@unitbv.ro
Experienţa profesională	**2016-prezent** – Asistent universitar în cadrul Departamentului de Matematică şi Informatică al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov **2014-2016** – Cadru didactic asociat în cadrul Departamentului de Matematică şi Informatică al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov
Educaţie	**2013-prezent** – Doctorand, Domeniul matematică, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea *Transilvania*, Braşov **2011-2013** – Master în matematică Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea *Transilvania*, Braşov **2008-2011** – Licenţă în matematică, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea *Transilvania*, Braşov **2004-2008** – Liceu, Colegiul Naţional *Andrei Şaguna*, Braşov, Specializarea Matematică-informatică, intensiv informatică
Aptitudini şi competenţe personale	**Limbi străine cunoscute/Autoevaluare:** Engleză – înţelegere-avansat, vorbire-mediu, scriere-avansat Franceză – înţelegere-avansat, vorbire-mediu, scriere-mediu **Competenţe şi abilităţi sociale:** Comunicativ, serios, organizat, responsabil, adaptabil, perfecţionist, dinamic **Competenţe informatice:** Limbajele de programare C++, Java, HTML Editoarele din pachetul Microsoft Office Programele Mathematica, Scilab, Matlab, LaTeX

Personal information	**Alexandru Codrin IONESCU** E-mail: alexandru-codrin.ionescu@unitbv.ro
Work experience	**2016-now** – Assistant professor, Departament of Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2014-2016** – Adjunct professor, Departament of Mathematics and Computer Science Faculty of Mathematics and Computer Science *Transilvania* University of Braşov
Education	**2013-now** – PhD student in Mathematics Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2011-2013** – Master degree in Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2008-2011** – Bachelor degree in Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2004-2008** – High school, *Andrei Şaguna* High School of Braşov
Personal skills	**Foreign languages/Self-evaluation:** English – understanding-advanced, speaking-medium, writing-advanced French – understanding-advanced, speaking-medium, writing-medium **Social skills:** Communicative, serious, organized, responsable, adaptable, perfectionist, dynamic **PC skills:** Programming languages: C++, Java, HTML Microsoft Office package Mathematica, Scilab, Matlab, LaTeX