Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Facultatea de Matematică și Informatică

Adina CHIRILĂ

Studiul problemelor mixte pentru medii continue generalizate

The study of mixed problems for generalized continua

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător științific

Prof. dr. Marin MARIN

BRAȘOV, 2019

COMPONENȚA
Comisiei de doctorat
Numită prin ordinul Rectorului Universității Transilvania din Brașov
Nr. ..... din .....

PREȘEDINTE :	Prof. dr. Radu PĂLTĂNEA Coordonator Centru de Cercetare Modelare Matematică și Produse Software Universitatea Transilvania din Brașov
CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC :	Prof. dr. Marin MARIN Universitatea Transilvania din Brașov
REFERENȚI :	Acad. CSI dr. Gabriela MARINOSCHI Institutul de Statistică Matematică și Matematică Aplicată *Gheorghe Mihoc-Caius Iacob* al Academiei Române
	Prof. dr. Vicențiu RĂDULESCU Universitatea din Craiova
	Prof. dr. Marius-Eduard CRĂCIUN Universitatea *Ovidius* din Constanța

Data, ora și locul susținerii publice a tezei de doctorat : ....., ora ....., sala ..... .

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa adina.chirila@unitbv.ro.

Totodată, vă invităm să luați parte la ședința publică de susținere a tezei de doctorat.

Vă mulțumim !

Cuprins

		Pg. teză	Pg. rezumat
	Introducere	13	5
1	Proprietăți ale mediilor termoelastice micropolare	17	9
	1.1 Unicitatea soluției	18	9
	1.1.1 Preliminarii	18	9
	1.1.2 Identități utile	20	11
	1.1.3 Unicitate	24	12
	1.2 O generalizare cu deformație de ordin fracționar	30	14
	1.2.1 Preliminarii	30	14
	1.2.2 Ecuații constitutive	32	16
2	Studiul mediilor dipolare cu porozitate simplă și dublă	35	17
	2.1 Soluții ale problemei Saint-Venant pentru medii elastice dipolare poroase	36	17
	2.1.1 Ecuații de bază	36	17
	2.1.2 Rezultate principale	39	20
	2.2 Medii termoelastice dipolare cu dublă porozitate	48	26
	2.2.1 Preliminarii	48	26
	2.2.2 Cazul anizotrop	52	29
	2.2.3 Cazul izotrop	55	30
	2.3 Simulări numerice pentru medii dipolare cu dublă porozitate	60	32
	2.3.1 Modelul matematic	60	32
	2.3.2 Formulare variațională	62	33
	2.3.3 Simulări numerice	64	35
3	Medii termoelastice dipolare cu microtemperaturi	67	38
	3.1 O extindere a rezultatelor lui Dafermos	68	38
	3.1.1 Preliminarii	68	38
	3.1.2 Rezultate de unicitate și existență	71	41
	3.2 Un model pentru medii termoelastice cu microtemperaturi	78	44
	3.2.1 Notații, ecuații și condiții de bază	78	45
	3.2.2 Rezultate de bază	80	47
	3.2.3 Simulări numerice	86	50
4	Medii elastice microstretch cu efecte termice și de difuzie	91	53
	4.1 Preliminarii	93	53
	4.2 Unicitatea soluției în cazul anizotrop	98	57
	4.3 Comportarea spațială a soluției	101	58
	4.4 Dependența continuă în cazul anizotrop	108	61
	4.5 Dependența continuă în cazul izotrop	115	66
	4.6 Propagare de unde în medii elastice microstretch	120	70
	4.7 Caz particular	122	72
	4.8 Concluzie	124	74
5	Medii termo-electro-elastice poroase pentru studiul procesului de remodelare osoasă	127	75
	5.1 Ecuații de echilibru	129	75
	5.1.1 Forme integrale ale ecuațiilor de echilibru	130	76
	5.1.2 Legi de echilibru locale	131	78
	5.2 Ipoteze constitutive și restricții	132	79
	5.3 Dependență continuă	144	83
6	Concluzii finale. Contribuții originale. Diseminarea rezultatelor	149	84
	Bibliografie	154	89
	Anexe	165	94

Contents

		Thesis page	Abstract page
	Introduction	13	5
1	Properties of micropolar thermoelastic media	17	9
	1.1 Uniqueness of the solution	18	9
	1.1.1 Preliminaries	18	9
	1.1.2 Useful identities	20	11
	1.1.3 Uniqueness	24	12
	1.2 A generalization with fractional order strain	30	14
	1.2.1 Preliminaries	30	14
	1.2.2 Constitutive equations	32	16
2	The study of dipolar media with simple and double porosity	35	17
	2.1 Solutions of Saint-Venant's problem	36	17
	2.1.1 Basic equations	36	17
	2.1.2 Main results	39	20
	2.2 Dipolar thermoelastic media with double porosity	48	26
	2.2.1 Preliminaries	48	26
	2.2.2 The anisotropic case	52	29
	2.2.3 The isotropic case	55	30
	2.3 Numerical simulations for dipolar media with double porosity	60	32
	2.3.1 The mathematical model	60	32
	2.3.2 Variational formulation	62	33
	2.3.3 Numerical simulation	64	35
3	Dipolar thermoelastic media with microtemperatures	67	38
	3.1 An extension of Dafermos' resuls	68	38
	3.1.1 Preliminaries	68	38
	3.1.2 Uniqueness and existence results	71	41
	3.2 A model for thermoelastic media with microtemperatures	78	44
	3.2.1 Notations, basic equations and conditions	78	45
	3.2.2 Basic results	80	47
	3.2.3 Numerical simulations	86	50
4	Microstretch elastic media with thermal and diffusive effects	91	53
	4.1 Preliminaries	93	53
	4.2 Uniqueness of the solution in the anisotropic case	98	57
	4.3 Spatial behaviour of the solution	101	58
	4.4 Continuous dependence in the anisotropic case	108	61
	4.5 Continuous dependence in the isotropic case	115	66
	4.6 Wave propagation in microstretch elastic media	120	70
	4.7 Particular case	122	72
	4.8 Conclusion	124	74
5	Thermo-electro-elastic media for the study of the process of bone remodelling	127	75
	5.1 Equations	129	75
	5.1.1 Integral forms of the equations	130	76
	5.1.2 Local forms of the equations	131	78
	5.2 Constitutive assumptions ans restrictions	132	79
	5.3 Continuous dependence	144	83
6	Final conclusions. Original contributions. Dissemination	149	84
	References	154	89
	Annexes	165	94

Introducere

Mecanica mediilor continue generalizate este un domeniu al matematicii aplicate care studiază materialele cu microstructură. Recent, au fost publicate mai multe volume colective care tratează subiecte din mecanica mediilor continue generalizate, ceea ce dovedește interesul sporit pentru acest domeniu de cercetare [2], [5], [35], [66], [96], [3], [4], [8].

Frații Cosserat au pus bazele mecanicii mediilor continue generalizate în anul 1909 în lucrarea [38]. Contribuția esențială a acestei cărți este considerarea punctelor materiale ale unui solid elastic ca fiind înzestrate cu vectori directori, ceea ce conduce la conceptul de micromoment și la o nouă lege de conservare pentru momentul impulsului [96]. Dar frații Cosserat nu au dat ecuații constitutive. Aceste contribuții au subliniat ideea că într-un mediu continuu translațiile și rotațiile ar trebui să fie definite în mod independent [5]. Verificarea experimentală a metodelor teoretice de modelare a mediului continuu Cosserat este o provocare deoarece este dificilă producerea materialelor cu efecte de rotație vizibile și cu microstructură bine controlată pentru a determina în mod independent parametrii Cosserat [96].

Mecanica mediilor continue generalizate a apărut deoarece mecanica mediilor continue clasice nu reușește să descrie cu acuratețe comportamentul materialelor cu microstructură. Experimentele au dovedit că există procese de deformare care nu pot fi reprezentate cu acuratețe prin intermediul teoriilor clasice, în care fiecare punct material are trei grade de libertate. Aceasta se datorează naturii moleculare și granulare a materialelor [35]. Scopul teoriei materialelor cu microstructură este eliminarea diferențelor care apar între rezultatele teoriei clasice a elasticității și rezultatele experimentale în cazul corpurilor a căror macrodeformare este influențată în mod semnificativ de structura internă. Astfel de materiale sunt materialele granulare cu molecule mari (de exemplu, polimerii), grafitul sau osul uman. Teoria clasică a elasticității nu poate explica anumite contradicții din teoria vibrațiilor produse de unde ultrasonice, care se referă la vibrații elastice cu o lungime de undă scurtă și de frecvență înaltă.

Medii micropolare

Mai târziu, Eringen a propus teoria mediilor micropolare, care este analoagă teoriei fraților Cosserat, dar spre deosebire de aceasta, conține o lege de conservare pentru tensorul de microinerție. În teoria mediilor continue micropolare se consideră șase grade de libertate, trei fiind cele de microrotație. Acestea rezultă prin considerarea unui câmp vectorial de trei directori. În plus, forțele care acționează asupra elementului de suprafață sunt date de tensorul de tensiune clasic, dar și de un tensor cuplu superficial. Teoria liniară a termoelasticității micropolare extinde teoria mediilor continue micropolare prin includerea efectelor termice. Termoelasticitatea micropolară este studiată, de exemplu, în [47] și cel mai recent în [21].

Eringen a afirmat că posibile substanțe care pot fi modelate cu ajutorul mediilor continue Cosserat sau micropolare sunt compozitele cu fibre rigide, solidele elastice cu incluziuni granulare rigide, cristalele lichide cu molecule rigide, sângele animalelor cu celule rigide, oasele, fluidele magnetice, norii cu praf sau cimentul cu nisip [47].

Medii dipolare

O altă teorie importantă în studiul materialelor cu microstructură este teoria elasticității dipolare. Primele studii sunt cele realizate de Mindlin și Green și Rivlin [61], iar recent această teorie a fost

studiată în [87], [112]. În această teorie, fiecare microelement are doisprezece grade de libertate, și anume trei translații și nouă microdeformații. În plus, fiecare punct material se deformează în mod omogen. Modelul materialelor dipolare se bazează pe ipoteza că deformarea este corect reprezentată de gradienții deformației de ordinul întâi și al doilea. Celula unitate poate fi interpretată ca molecula unui polimer, componenta unui policristal sau bobul unui material granular. Dacă celula devine rigidă, atunci ecuațiile se reduc la cele ale unui mediu micropolar sau Cosserat liniar.

Medii poroase

O clasă importantă de materiale cu microstructură este reprezentată de materialele poroase. Teoria elasticității cu pori este o extindere a teoriei clasice a elasticității în care se consideră un grad de libertate suplimentar pentru fiecare microelement, și anume fracțiunea de volum. Are multe aplicații în diferite domenii ale ingineriei și biologiei, de exemplu industria petrolului, știința materialelor, ceramică, pulberi formate prin presare și oase [50].

În modelul matematic al elasticității cu porozitate dublă, considerăm că la nivel macro avem porii corpului, iar la nivel micro avem fisurile matricei poroase. [71]. A fost propus și conceptul de porozitate triplă, unde se consideră pori la nivel macro, mezo și micro [107].

Medii dipolare cu dublă porozitate

Multe articole au fost dedicate modelelor matematice complexe pentru descrierea cu acuratețe a materialelor la nivel macro și micro, de exemplu termovâscoelasticitate cu goluri [16], [32], [100], termoelasticitate dipolară cu porozitate simplă sau dublă [50], [93], [26].

Modelul matematic al termoelasticității dipolare cu dublă porozitate a fost introdus în [94]. Autorii pun în evidență faptul că deplasarea influențează structura dublu poroasă a corpului [71].

Medii microstretch

Elasticitatea micropolară este generalizată prin includerea efectului de contractare și dilatare axială în timpul rotației moleculelor. Astfel se obține elasticitatea microstretch, care a fost propusă de Eringen în [48] și este studiată, de exemplu, în [47], [67], [6], [22], [68], [36], [102]. Un solid elastic microstretch are șapte grade de libertate : trei pentru translații, trei pentru rotații și unul pentru efectul de contractare și dilatare.

Acest model matematic poate fi aplicat în diferite domenii ale științei, ingineriei și biomecanicii. De exemplu, elasticitatea microstretch poate fi utilizată pentru a modela un mediu continuu miofascial, mușchiul iliopsoas sau alți mușchi funcționali [75], [76]. Dar poate fi utilă și pentru caracterizarea materialelor compozite ranforsate cu fibre elastice, a materialelor cu pori care conțin gaz sau lichid nevâscos, a asfaltului și a altor materiale granulare [48]. Un model simplificat, care consideră dilatarea axială a particulelor materiale, și anume elasticitatea cu microdilatări, a fost utilizată pentru modelarea țesutului inimii, de exemplu [108].

Modele ale conducției termice

O descriere detaliată a unor modele importante ale conducției termice utilizate în termoelasticitate este dată în lucrarea [56]. În această teză de doctorat, se utilizează legea Fourier, modelul Cattaneo și modelul Green-Naghdi.

Conform legii Fourier de conducție termică, vectorul care descrie fluxul de căldură este direct proporțional cu gradientul temperaturii absolute și are sens opus. Această relație se exprimă astfel

$$q_i = -k_{ij}\theta_{,j} \tag{0.0.1}$$

pe $\Omega \times [0, \infty)$. Această lege poate conduce la o ecuație parabolică a căldurii. Conform [56, p. 1053], legea Fourier de conducție termică "oferă o descriere la nivel macroscopic a fenomenelor de la nivel microscopic care sunt asociate cu difuzia termică și este o aproximare foarte bună la scale de lungime mult mai mari decât distanța medie dintre două coliziuni ale unei particule" (conform definiției din [52, p. 43-3]) și "la scale de timp mult mai mari decât timpul de relaxare termică și prin urmare se poate aplica ipoteza de echilibru local". Dar legea Fourier de conducție termică stabilește că efectul unui flux

de căldură instantaneu într-un punct al unui mediu este resimțit imediat în toate celelalte puncte ale mediului, ceea ce este imposibil din punct de vedere fizic deoarece căldura este transportată de particule (de exemplu, electroni) care se propagă la viteze mai mici decât viteza luminii (conform [56, p. 1053]). De aceea, cercetătorii au început să caute modele care conduc la o viteză de propagare finită.

Un astfel de model este cel propus de Cattaneo

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -k_{ij}\theta_{,j}, \tag{0.0.2}$$

unde k_{ij} este tensorul de conductivitate termică și τ_0 este timpul de relaxare. Acesta a propus adăugarea termenului cu derivata în raport cu timpul a vectorului care descrie fluxul de căldură pentru a "extinde descrierea macroscopică a transferului de căldură la scale de timp foarte mici, pentru care legea Fourier nu mai este aplicabilă" (conform [56, p. 1053]). Acest model poate conduce la o ecuație hiperbolică a căldurii.

Alte modele ale conducției termice sunt cele propuse de Green și Naghdi [56].

Teoria lor se bazează pe înlocuirea inegalității entropiei cu o egalitate și considerarea conceptului de deplasare termică, care este definit astfel

$$\alpha = \alpha(\mathbf{X}, t) = \int_0^t T(\mathbf{X}, \tau)\mathrm{d}\tau + \alpha_0(\mathbf{X}), \qquad t > 0, \tag{0.0.3}$$

unde T este temperatura empirică. Se poate considera că temperatura absolută este o funcție crescătoare de temperatura empirică. În teoria liniară se disting trei modele ale conducției termice : tipul I (legea Fourier), tipul II și tipul III. Modelul liniar Green-Naghdi de tip II este definit astfel

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \alpha, \qquad \lambda > 0 \tag{0.0.4}$$

și conduce la o ecuație hiperbolică a căldurii. Modelul liniar Green-Naghdi de tip III este definit astfel

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \alpha - k \nabla \dot{\alpha} \tag{0.0.5}$$

și conduce la o ecuație parabolică a căldurii.

Pionierul teoriei materialelor cu microtemperaturi este considerat Grot [62], care a propus o teorie a materialelor termoelastice cu microstructură și care au proprietatea că microelementele posedă microtemperaturi. Aceasta este de fapt o extindere a teoriilor anterioare dedicate teoriei corpurilor cu structură internă. În acest caz, inegalitatea entropiei este adaptată pentru a include microtemperaturi. Prin urmare, ecuația primului moment al energiei este adăugată la celelalte ecuații de mișcare ale mediului continuu cu microstructură. Prin adăugarea conceptului de microtemperaturi, căldura se propagă cu unde termice de viteză finită.

Este important atât din punct de vedere teoretic cât și din punct de vedere practic ca specialiștii să studieze modele din mecanica mediilor continue care descriu interacțiuni ale mai multor câmpuri fizice datorită numărului mare de aplicații în știința materialelor, industria chimică, aviație și biologie [7].

Structura tezei de doctorat

Rezultatele originale sunt cuprinse în următoarele cinci capitole.

În primul capitol studiem proprietăți ale mediilor termoelastice micropolare. Arătăm unicitatea soluției în anumite condiții asupra coeficienților elastici [21] și propunem o generalizare cu deformație de ordin fracționar [20].

În al doilea capitol studiem medii dipolare cu porozitate simplă și dublă. Deducem soluții ale problemei Saint-Venant pentru medii elastice dipolare poroase [93]. Propunem o generalizare cu deformație de ordin fracționar pentru medii termoelastice dipolare cu dublă porozitate [26] și realizăm simulări numerice cu ajutorul metodei elementului finit și a metodei implicite a lui Euler, pornind de la formularea variațională a problemei la limită cu date inițiale corespunzătoare [24].

În al treilea capitol studiem medii termoelastice dipolare cu microtemperaturi. Propunem o extindere a rezultatelor lui Dafermos pentru corpuri cu structură dipolară [89], arătăm existența și unicitatea soluției și realizăm simulări numerice cu ajutorul metodei elementului finit [88].

În cel de-al patrulea capitol studiem medii elastice microstretch din perspectiva efectelor termice și de difuzie la nivel macro și micro. În cazul anizotrop și non-centro-simetric, demonstrăm unicitatea soluției și analizăm comportarea spațială a soluției [25]. Arătăm dependența continuă de datele inițiale și externe pentru materiale cu centru de simetrie în cazurile anizotrop [23] și izotrop [22]. În final, studiem propagarea undelor atât în medii microstretch, cât și în cazul termoelasticității cu difuzie, microtemperaturi și microconcentrații fără efecte de rotație, dilatare sau contractare [27].

În cel de-al cincilea capitol analizăm un model al mediilor termo-electro-elastice poroase pentru studiul procesului de remodelare osoasă [28]. Propunem forme integrale și locale ale ecuațiilor de echilibru, deducem ipoteze constitutive și restricții și studiem corpurile cu izotropie transversală. În ultima secțiune demonstrăm un rezultat de dependență continuă pentru cazul neliniar.

În cel de-al șaselea capitol sunt enunțate concluziile finale, contribuțiile originale, modalitățile de diseminare a rezultatelor și direcțiile viitoare de cercetare.

Notații

Dacă nu se specifică alte condiții, fiecare dintre materialele studiate ocupă un domeniu mărginit Ω al spațiului euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$ cu frontiera $\partial\Omega$. Închiderea lui Ω se notează cu $\bar{\Omega}$.

Mișcarea corpului se raportează la un sistem de axe ortogonale fixat $Ox_i, i = 1, 2, 3$. Se utilizează o notație tensorială. Indicii i, j, k, m, n iau valorile $1, 2, 3$. O virgulă urmată de un indice i desemnează derivarea parțială în raport cu variabila spațială corespunzătoare x_i, unde $i = 1, 2, 3$. Un punct deasupra unei litere reprezintă derivarea în raport cu variabila temporală t. Este utilizată convenția de însumare a lui Einstein pentru indici care se repetă. În anumite cazuri, se omit variabilele spațiale și temporale ale unei funcții.

Se utilizează simbolul $C^{i,j}$ pentru clasa de funcții care au derivatele parțiale în raport cu variabilele spațiale de ordin cel mult i și derivatele în raport cu timpul de ordin cel mult j continue. Dacă nu se specifică altfel, atunci aceste condiții formale de continuitate sunt valabile pentru orice ordin cerut de expresiile curente.

Mulțumiri

În primul rând, aș dori să mulțumesc conducătorului meu de doctorat, domnului profesor Marin Marin, pentru îndrumarea pe care mi-a oferit-o în realizarea acestei teze de doctorat.

Mulțumesc Universității Transilvania din Brașov pentru finanțarea unei mobilități externe la Universitatea din Padova în 2018 și pentru sprijinul acordat în vederea participării la conferințe internaționale. Mulțumesc domnului profesor Adriano Montanaro de la Universitatea din Padova pentru numeroasele discuții pe care le-am avut în timpul și după efectuarea mobilității externe și pentru invitația dumnealui de a ne continua colaborarea.

Mulțumesc Universității din București și Agenției Universitare a Francofoniei prin centrul din cadrul Institutului de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române pentru sprijinul acordat în vederea participării la cele trei ediții ale școlii de vară Regional Romanian-French Summer School in Applied Mathematics în 2017, 2018 și 2019.

Aș dori să le mulțumesc celor cu care am colaborat în cercetările ce au dus la publicarea de articole științifice. Le sunt recunoscătoare tuturor profesorilor care au contribuit la formarea mea.

Nu în ultimul rând, le sunt recunoscătoare părinților mei pentru că mi-au fost alături și m-au sprijinit în toate demersurile mele, ajutându-mă să îmi îndeplinesc toate proiectele.

Capitolul 1

Proprietăți ale mediilor termoelastice micropolare

1.1 Unicitatea soluției

În această secțiune deducem identități pentru soluția problemei termoelasticității micropolare omogene și anizotrope prin extinderea rezultatelor pentru soluția problemei Cauchy pentru ecuațiile standard ale termoelasticității liniare dinamice. Acestea sunt aplicate pentru demonstrarea unicității soluției problemei la limită cu date inițiale corespunzătoare. Rezultatele din această secțiune sunt publicate în lucrarea [21].

1.1.1 Preliminarii

Fie Ω o regiune netedă a spațiului euclidian tridimensional ocupată de un corp micropolar omogen cu frontiera $\partial\Omega$. Ecuațiile care guvernează teoria termoelasticității micropolare omogene și anizotrope [69] sunt ecuațiile de mișcare

$$\begin{aligned} &t_{ji,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \\ &m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + \rho M_i = I_{ij} \ddot{\varphi}_j \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

și ecuația energiei

$$q_{i,i} + \rho Q = \rho T_0 \dot{\eta}. \tag{1.1.2}$$

Ecuațiile (1.1.1) și (1.1.2) sunt definite pentru $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$.

Dacă solidul este anizotrop, atunci ecuațiile constitutive, definite pentru $(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty)$ sunt [64]

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} - D_{ij}\theta, \\ m_{ij} &= B_{mnij}\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} - E_{ij}\theta, \\ \rho\eta &= D_{ij}\varepsilon_{ij} + E_{ij}\gamma_{ij} + c\theta, \\ q_i &= -k_{ij}\theta_{,j}. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Tensorii de deformație ε_{ij} și γ_{ij} utilizați în ecuațiile (1.1.3) sunt definiți în $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ prin intermediul ecuațiilor geometrice

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{jik}\varphi_k, \qquad \gamma_{ij} = \varphi_{j,i}. \tag{1.1.4}$$

În ecuațiile de mai sus am utilizat notațiile din Tabelul 1.1.

Coeficienții din (1.1.1) și (1.1.3), adică A_{ijmn}, B_{ijmn}, C_{ijmn}, D_{ij}, E_{ij}, I_{ij}, k_{ij} și c sunt coeficienți de elasticitate cu următoarele proprietăți de simetrie

$$A_{ijmn} = A_{mnij}, \qquad C_{ijmn} = C_{mnij}, \qquad I_{ij} = I_{ji}, \qquad k_{ij} = k_{ji}. \tag{1.1.5}$$

Tabelul 1.1 – Interpretare fizică

u_i	componentele vectorului deplasare
φ_i	componentele vectorului microrotație
t_{ij}	componentele tensorului tensiune
m_{ij}	componentele tensorului micromoment
q_i	componentele vectorului de conducție termică
η	entropia specifică pe unitatea de masă
ρ	densitatea de referință constantă
T_0	temperatura de referință constantă
θ	variația temperaturii de la temperatura T_0
c	căldura specifică
I_{ij}	componentele inerției
F_i	componentele vectorului forță masică externă
M_i	componentele vectorului cuplu masic
ε_{ijk}	simbolul Levi-Civita

Energia liberă Ψ, utilizată pentru a obține ecuațiile constitutive, este dată de

$$\begin{aligned}\rho\Psi = &\frac{1}{2}A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} - \\ &- D_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - E_{ij}\gamma_{ij}\theta - \frac{c}{2}\theta^2.\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Se consideră condițiile inițiale

$$\begin{aligned}&u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x),\\ &\theta(x,0) = \theta^0(x), \quad \varphi_j(x,0) = \varphi_j^0(x),\\ &\dot{\varphi}_j(x,0) = \varphi_j^1(x), x \in \bar{\Omega}\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

și condițiile la limită

$$\begin{aligned}&u_i(x,t) = \tilde{u}_i(x,t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_1 \times [0,\infty), \quad t_i(x,t) = \tilde{t}_i(x,t) \text{ pe } \Sigma_2 \times [0,\infty),\\ &\theta(x,t) = \tilde{\theta}(x,t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_3 \times [0,\infty), \quad q(x,t) = \tilde{q}(x,t) \text{ pe } \Sigma_4 \times [0,\infty),\\ &\varphi_j(x,t) = \tilde{\varphi}_j(x,t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_5 \times [0,\infty), \quad m_i(x,t) = \tilde{m}_i(x,t) \text{ pe } \Sigma_6 \times [0,\infty),\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

unde $u_i^0, u_i^1, \theta^0, \varphi_j^0, \varphi_j^1, \tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_j$ și $\tilde{m}_i$ sunt funcții date. Se utilizează notațiile

$$t_i(x,s) := t_{ji}(x,s)n_j(x), \tag{1.1.9}$$

$$q(x,s) := q_i(x,s)n_i(x), \tag{1.1.10}$$

$$m_i(x,s) := m_{ji}(x,s)n_j(x), \tag{1.1.11}$$

unde n_i sunt componentele versorului normalei exterioare la frontieră și $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ și Σ_6 sunt submulțimi ale $\partial\Omega$ astfel încât $\bar{\Sigma}_1 \cup \Sigma_2 = \bar{\Sigma}_3 \cup \Sigma_4 = \bar{\Sigma}_5 \cup \Sigma_6 = \partial\Omega$ și $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \Sigma_5 \cap \Sigma_6 = \varnothing$.

Impunem următoarele condiții de continuitate [46]

$$\begin{aligned}&\{u_i, \varphi_j\} \in C^{2,2}, \quad \{\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}\} \in C^{1,1},\\ &\{F_i, M_i, Q\} \in C^{0,0}, \quad \{t_i, m_i, q\} \in C^{1,0}, \quad \theta \in C^{1,1}, \eta \in C^{0,1},\\ &\{\tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{\varphi}_j, \tilde{m}_i, \tilde{\theta}, \tilde{q}\} \in C^{0,0} \text{ pe } \partial\Omega \times [0,\infty),\\ &\{u_i^0, u_i^1, \varphi_j^0, \varphi_j^1, \theta^0\} \in C^0 \text{ în } \bar{\Omega},\\ &\{D_{ij}, E_{ij}, A_{ijmn}, B_{ijmn}, C_{ijmn}, c, k_{ij}, \rho, I_{ij}\} \in C^1 \text{ în } \bar{\Omega}.\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

O stare admisibilă este o colecție $S\{u_i, \varphi_i; \varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}; t_i, m_i; q, \theta\}$ a mulțimii ordonate de funcții u_i, φ_i, ε_{ij}, γ_{ij}, t_i, m_i, q și θ care satisfac condițiile de continuitate de mai sus [46]. Dacă S satisface ecuațiile constitutive (1.1.3) și ecuațiile geometrice (1.1.4), atunci S se numește stare admisibilă cinematică. Dacă o stare admisibilă cinematică satisface condițiile inițiale și la limită și ecuațiile de mișcare (1.1.1) și ecuația energiei (1.1.2), atunci se numește soluție a problemei mixte.

Prin înlocuirea ecuațiilor constitutive (1.1.3) și a ecuațiilor geometrice (1.1.4) în ecuațiile de mișcare (1.1.1) și ecuația energiei (1.1.2), obținem următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale cuplate în funcție de deplasările u_i, microrotațiile φ_i și variația de temperatură θ

$$\begin{aligned}
&[A_{jimn}(u_{n,m} + \varepsilon_{nmk}\varphi_k) + B_{jimn}\varphi_{n,m} - D_{ji}\theta]_{,j} + \rho F_i = \rho\ddot{u}_i,\\
&[B_{mnji}(u_{n,m} + \varepsilon_{nmk}\varphi_k) + C_{jimn}\varphi_{n,m} - E_{ji}\theta]_{,j} +\\
&+ \varepsilon_{ijk}[A_{jkmn}(u_{n,m} + \varepsilon_{nmk}\varphi_k) + B_{jkmn}\varphi_{n,m} - D_{jk}\theta] + \rho M_i = I_{ij}\ddot{\varphi}_j,\\
&D_{ij}(\dot{u}_{j,i} + \varepsilon_{jik}\dot{\varphi}_k) + E_{ij}\dot{\varphi}_{j,i} + c\dot{\theta} = \frac{\rho}{T_0}Q - \frac{1}{T_0}(k_{ij}\theta_{,j})_{,i},
\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

oricare ar fi $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$.

O soluție a problemei la limită cu date inițiale a termoelasticității micropolare în cilindrul $\Omega \times [0,T)$ este o mulțime ordonată $\{u_i, \varphi_i, \theta\}$ care satisface sistemul (1.1.13) oricare ar fi $(x,t) \in \Omega \times [0,T)$, condițiile inițiale (1.1.7) și condițiile la limită (1.1.8).

1.1.2 Identități utile

În această secțiune presupunem că există o soluție $\{u_i, \varphi_i, \theta\}$. Vom stabili identități auxiliare pentru soluția problemei la limită cu date inițiale conform [34] și [29]. Considerăm datele externe

$$\mathcal{D} = \{F_i, M_i, Q; u_i^0, u_i^1, \theta^0, \varphi_j^0, \varphi_j^1; \tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_j, \tilde{m}_i\}. \tag{1.1.14}$$

Lema 1.1.1 *Fie o soluție a problemei la limită cu date inițiale corespunzătoare datelor externe $\mathcal{D}$. Atunci oricare ar fi $t \in [0,T)$ au loc*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho\dot{u}_i(t)\dot{u}_i(t)\,\mathrm{d}v = \int_\Omega \rho\dot{u}_i(0)\dot{u}_i(0)\,\mathrm{d}v + 2\int_0^t\int_\Omega \rho F_i(s)\dot{u}_i(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s +\\
&+ 2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \dot{u}_i(s)t_i(s)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}s + 2\int_0^t\int_\Omega D_{ij}\theta(s)\dot{u}_{j,i}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s - 2\int_0^t\int_\Omega A_{ijmn}\cdot\\
&\cdot\,\varepsilon_{mn}(s)\dot{u}_{j,i}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s - 2\int_0^t\int_\Omega B_{ijmn}\gamma_{mn}(s)\dot{u}_{j,i}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega c\theta^2(t)\,\mathrm{d}v - 2\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s = \int_\Omega c\theta^2(0)\,\mathrm{d}v +\\
&+ 2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{1}{T_0}\theta(s)q(s)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}s - 2\int_0^t\int_\Omega [D_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}(s)\theta(s) + E_{ij}\dot{\gamma}_{ij}(s)\theta(s)]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s +\\
&+ 2\int_0^t\int_\Omega \frac{\rho Q}{T_0}\theta(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega I_{ij}\dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_j(t)\,\mathrm{d}v = \int_\Omega I_{ij}\dot{\varphi}_i(0)\dot{\varphi}_j(0)\,\mathrm{d}v + 2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\dot{\varphi}_i(s)m_i(s)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}s -\\
&- 2\int_0^t\int_\Omega B_{mnij}\varepsilon_{mn}(s)\dot{\gamma}_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s - 2\int_0^t\int_\Omega C_{ijmn}\gamma_{mn}(s)\dot{\gamma}_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s +
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_0^t\int_\Omega E_{ij}\theta(s)\dot\gamma_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s-2\int_0^t\int_\Omega A_{ijmn}\varepsilon_{mn}(s)\varepsilon_{jik}\dot\varphi_k(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s-\\
&-2\int_0^t\int_\Omega B_{ijmn}\gamma_{mn}(s)\varepsilon_{jik}\dot\varphi_k(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+2\int_0^t\int_\Omega D_{ij}\theta(s)\varepsilon_{jik}\dot\varphi_k(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\\
&+2\int_0^t\int_\Omega \rho M_i\dot\varphi_i(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega[\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)+C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+\\
&+2B_{mnij}\varepsilon_{mn}(t)\gamma_{ij}(t)]\,\mathrm{d}v=\int_\Omega[\rho\dot u_i(0)\dot u_i(0)+I_{ij}\dot\varphi_i(0)\dot\varphi_j(0)+C_{ijmn}\gamma_{ij}(0)\gamma_{mn}(0)+\\
&+A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(0)\varepsilon_{mn}(0)+2B_{mnij}\varepsilon_{mn}(0)\gamma_{ij}(0)]\,\mathrm{d}v+2\int_0^t\int_\Omega\rho F_i(s)\dot u_i(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\\
&+2\int_0^t\int_\Omega\rho M_i\dot\varphi_i(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\dot u_i(s)t_i(s)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}s+2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\dot\varphi_i(s)m_i(s)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}s+\\
&+2\int_0^t\int_\Omega D_{ij}\theta(s)\dot\varepsilon_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+2\int_0^t\int_\Omega E_{ij}\theta(s)\dot\gamma_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{1.1.18}
$$

Lema 1.1.2 *Fie o soluție a problemei la limită cu date inițiale corespunzătoare datelor externe $\mathcal{D}$. Atunci oricare ar fi $t\in[0,\frac{T}{2})$ are loc*

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\{\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)-[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+\\
&+C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+c\theta^2(t)]\}\,\mathrm{d}v=\\
&=\int_\Omega\{\rho\dot u_i(0)\dot u_i(2t)+I_{ij}\dot\varphi_i(0)\dot\varphi_j(2t)-[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(0)\varepsilon_{mn}(2t)+\\
&+C_{ijmn}\gamma_{ij}(0)\gamma_{mn}(2t)+B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(0)\gamma_{mn}(2t)+B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(2t)\gamma_{mn}(0)+\\
&+c\theta(2t)\theta(0)]\}\,\mathrm{d}v+\int_0^t\int_\Omega[\dot u_i(t+s)\rho F_i(t-s)-\dot u_i(t-s)\rho F_i(t+s)+\\
&+\dot\varphi_i(t+s)\rho M_i(t-s)-\dot\varphi_i(t-s)\rho M_i(t+s)]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s-\\
&-\int_0^t\int_\Omega\frac{\rho}{T_0}[\theta(t+s)Q(t-s)-\theta(t-s)Q(t+s)]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\\
&+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\{[\dot u_i(t+s)t_i(t-s)-\dot u_i(t-s)t_i(t+s)]+\\
&+[\dot\varphi_i(t+s)m_i(t-s)-\dot\varphi_i(t-s)m_i(t+s)]+\\
&+\frac{1}{T_0}[\theta(t-s)q(t+s)-\theta(t+s)q(t-s)]\Big\}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{1.1.19}
$$

1.1.3 Unicitate

În continuare, presupunem că problema la limită cu date inițiale a elastodinamicii micropolare liniare are două soluții $u^{(\alpha)}$, $\varphi^{(\alpha)}$, $\theta^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$. Fie $u=u^{(1)}-u^{(2)}$, $\varphi=\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}$, $\theta=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}$. Atunci u, φ și θ satisfac (1.1.1)-(1.1.4), (1.1.7) și (1.1.8) cu $F_i=M_i=0$, $Q=0$, $\tilde u_i=\tilde t_i=\tilde\theta=\tilde q=\tilde\varphi_j=\tilde m_i=0$, $u_i^0=u_i^1=\theta^0=\varphi_j^0=\varphi_j^1=0$, adică ecuații omogene și condiții inițiale și la limită omogene.

Lema 1.1.3 *Fie o soluție a problemei la limită cu date inițiale corespunzătoare datelor externe nule*

$\mathcal{D}=0$. *Atunci oricare ar fi* $t\in[0,T)$ *au loc*

$$\int_\Omega[\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)+C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+ \\ +2B_{mnij}\varepsilon_{mn}(t)\gamma_{ij}(t)]\,\mathrm{d}v=2\int_0^t\int_\Omega D_{ij}\theta(s)\dot\varepsilon_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s+2\int_0^t\int_\Omega E_{ij}\theta(s)\dot\gamma_{ij}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s, \tag{1.1.20}$$

$$\int_\Omega c\theta^2(t)\,\mathrm{d}v-2\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s= \\ =-2\int_0^t\int_\Omega[D_{ij}\dot\varepsilon_{ij}(s)\theta(s)+E_{ij}\dot\gamma_{ij}(s)\theta(s)]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s, \tag{1.1.21}$$

$$\int_\Omega[\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)+C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+ \\ +2B_{mnij}\varepsilon_{mn}(t)\gamma_{ij}(t)+c\theta^2(t)]\,\mathrm{d}v-2\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s=0, \tag{1.1.22}$$

$$\int_\Omega[\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)]\,\mathrm{d}v=\int_\Omega[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+ \\ +C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+c\theta^2(t)]\,\mathrm{d}v, \tag{1.1.23}$$

$$\int_\Omega[\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)]\,\mathrm{d}v=\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s, \tag{1.1.24}$$

$$\int_\Omega[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+ \\ +c\theta^2(t)]\,\mathrm{d}v=\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s, \tag{1.1.25}$$

$$\int_\Omega c\theta^2(t)\,\mathrm{d}v-2\int_\Omega[\rho\dot u_i(t)\dot u_i(t)+I_{ij}\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t)]\,\mathrm{d}v= \\ =-2\int_0^t\int_\Omega[D_{ij}\dot\varepsilon_{ij}(s)\theta(s)+E_{ij}\dot\gamma_{ij}(s)\theta(s)]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s. \tag{1.1.26}$$

În continuare vom utiliza următoarele ipoteze :

(I1) k_{ij} este un tensor pozitiv definit, adică $k_{ij}\xi_i\xi_j\geq k_0\xi_i\xi_i$ oricare ar fi (ξ_1,ξ_2,ξ_3) și k_0 o constantă strict pozitivă ;

(I2) are loc $A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{mn}(t)+C_{ijmn}\gamma_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)+2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(t)\gamma_{mn}(t)\leq 0$;

(I3) I_{ij} este un tensor pozitiv definit, adică $I_{ij}\xi_i\xi_j\geq I_0\xi_i\xi_i$ oricare ar fi (ξ_1,ξ_2,ξ_3) și I_0 o constantă strict pozitivă ;

(I4) există o constantă strict pozitivă β astfel încât $\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}s\leq M^2e^{\beta t}$ oricare ar fi $t\in[0,\infty)$, unde M este o constantă ;

(I5) are loc $\lim_{t\to\infty}\int_0^t\int_0^s\int_\Omega\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(\tau)\theta_{,j}(\tau)\mathrm{d}v\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=0$.

În continuare vom demonstra rezultate de unicitate. Vom considera că $\{u_i,\varphi_j,\theta\}(x,t)$ este o soluție a problemei la limită cu date inițiale corespunzătoare datelor externe nule $\mathcal{D}=0$. Vom demonstra că $\{u_i,\varphi_j,\theta\}(x,t)=0$ în $\bar\Omega\times[0,\infty)$.

Teorema 1.1.1 *Presupunem că au loc ipotezele (I1), (I2), (I3) și (I4). În plus, presupunem că* $\rho>0$, $c>0$ *în* Ω *și* $meas\Sigma_3\neq 0$. *Atunci problema la limită cu date inițiale are cel mult o soluție.*

Teorema 1.1.2 *Presupunem că au loc ipotezele (I1), (I3) și (I5). În plus, fie* $\rho>0$, $c>0$ *în* $\bar\Omega$ *și* $meas\Sigma_4=0$. *Atunci problema la limită cu date inițiale are cel mult o soluție.*

1.2 O generalizare cu deformație de ordin fracționar

În această secțiune construim un nou model al termoelasticității micropolare prin considerarea deformației de ordin fracționar, după modelul din [111]. Prezentăm ecuațiile de bază, condițiile inițiale și la limită ale problemei mixte a termoelasticității micropolare și utilizăm derivata fracționară Caputo în acest context. Teoremele demonstrate în această secțiune oferă formulări pentru ecuațiile constitutive în cazul fracționar și pentru ecuațiile Cattaneo de conducție a căldurii. Rezultatele din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea [20]. Rezultate similare au fost deduse în [37] și în [95].

1.2.1 Preliminarii

În această secțiune studiem un material termoelastic micropolar anizotrop care ocupă domeniul mărginit Ω al spațiului euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{1,1}$. Deformarea mediului este descrisă de vectorul deplasare $u = (u_i)_{i=1}^3$ și de vectorul microrotație $\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^3$. Ecuațiile de mișcare [64] sunt definite pentru $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$

$$\begin{aligned} &t_{ji,j} + \rho_0 F_i = \rho_0 \ddot{u}_i, \\ &m_{ji,j} + e_{ijk} t_{jk} + \rho_0 M_i = I_{ij} \ddot{\varphi}_j. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Notațiile sunt cuprinse în Tabelul 1.2.

Tabelul 1.2 – Interpretare fizică

t_{ij}	componentele tensorului tensiune
m_{ij}	componentele tensorului micromoment
ρ_0	densitatea constantă a mediului în configurația de referință
I_{ij}	coeficienții de inerție
F_i	componentele vectorului forță masică externă
M_i	componentele vectorului cuplu masic
e_{ijk}	simbolul Levi-Civita
T	temperatura
q_i	componentele vectorului de conducție a căldurii
S	cantitatea de căldură pe unitatea de volum, $S = \rho_0 Q$

Tensorii de deformație ε_{ij} și γ_{ij} sunt definiți în $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ prin intermediul ecuațiilor geometrice [64]

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + e_{jik}\varphi_k, \quad \gamma_{ij} = \varphi_{j,i}. \tag{1.2.2}$$

Sistemului de ecuații de mai sus i se adaugă următoarele condiții inițiale [45]

$$\begin{aligned} &u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x), \\ &\varphi_i(x,0) = \varphi_i^0(x), \quad \dot{\varphi}_i(x,0) = \varphi_i^1(x), \\ &T(x,0) = T^0(x), \quad \dot{T}(x,0) = T^1(x), \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

unde $u_i^0, u_i^1, \varphi_i^0, \varphi_i^1, T^0, T^1$ sunt funcții date care depind de x în Ω. În plus, condițiile la limită pe $\partial\Omega \times [0,\infty)$ sunt [45]

$$\begin{aligned} &u_i(x,t) = \tilde{u}_i(x,t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_1 \times [0,\infty), \\ &t_i(x,t) = \tilde{t}_i(x,t) \text{ pe } \Sigma_2 \times [0,\infty), \\ &T(x,t) = \tilde{T}(x,t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_3 \times [0,\infty), \\ &q(x,t) = \tilde{q}(x,t) \text{ pe } \Sigma_4 \times [0,\infty), \\ &\varphi_j(x,t) = \tilde{\varphi}_j(x,t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_5 \times [0,\infty), \\ &m_i(x,t) = \tilde{m}_i(x,t) \text{ pe } \Sigma_6 \times [0,\infty), \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

cu

$$\begin{aligned} t_i(x,s) &:= t_{ji}(x,s)n_j(x), \\ q(x,s) &:= q_i(x,s)n_i(x), \\ m_i(x,s) &:= m_{ji}(x,s)n_j(x), \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

unde n_i sunt componentele versorului normalei exterioare la suprafața și Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 și Σ_6 sunt submulțimi ale $\partial\Omega$ pentru care are loc $\bar{\Sigma}_1 \cup \Sigma_2 = \bar{\Sigma}_3 \cup \Sigma_4 = \bar{\Sigma}_5 \cup \Sigma_6 = \partial\Omega$ și $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \Sigma_5 \cap \Sigma_6 = \emptyset$. În plus, $\tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{T}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_j$ și $\tilde{m}_i$ sunt funcții date pe mulțimea corespunzătoare.

Legea conservării masei este [111]

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_0 \mathrm{d}V = 0, \tag{1.2.6}$$

ceea ce conduce la condiția de continuitate în forma

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 dV) = 0. \tag{1.2.7}$$

Energia internă pe unitatea de masă este notată cu e. Principiul conservării energiei este [45]

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\rho_0 \dot{e} + \rho_0 \dot{u}_i \ddot{u}_i + I_{ij}\dot{\varphi}_i\ddot{\varphi}_j)\,\mathrm{d}V = \int_\Omega \rho_0 F_i \dot{u}_i \mathrm{d}V + \int_\Omega \rho_0 M_i \dot{\varphi}_i \mathrm{d}V + \\ &+ \int_{\partial\Omega} t_{ji}n_j\dot{u}_i \mathrm{d}A + \int_{\partial\Omega} m_{ji}n_j\dot{\varphi}_i \mathrm{d}A + \int_\Omega S\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} q_i n_i \mathrm{d}A. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Ecuațiile Cattaneo de conducție a căldurii sunt

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -K_{ij}T_{,j}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.2.9}$$

unde K_{ij} este tensorul de conductivitate termică și τ_0 este timpul de relaxare. Acestea înlocuiesc legea Fourier. Caputo a introdus derivata fracționară în raport cu timpul

$$D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\beta}\mathrm{d}\tau, \quad 0 \le \beta \le 1. \tag{1.2.10}$$

În plus, ϕ, energia liberă Helmholtz, se exprimă în funcție de energia internă și de funcția entropie η și este definită astfel

$$\phi = e - T\eta. \tag{1.2.11}$$

Definim ecuațiile constitutive ale unui material termoelastic Cosserat în cazul fracționar astfel

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, T, T_{,i}), \\ e &= e(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, T, T_{,i}), \\ \eta &= \eta(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, T, T_{,i}), \\ q &= q(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, T, T_{,i}), \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

unde

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = (1 + \tau^\beta D_t^\beta)\varepsilon_{ij} \tag{1.2.13}$$

și τ este un parametru constant numit timp de relaxare mecanică.

Energia liberă este [45]

$$\begin{aligned} &\rho_0\phi(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, \theta) = \frac{1}{2}A_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{mn} + B_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} - \\ &- D_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}\theta - E_{ij}\gamma_{ij}\theta - \frac{1}{2}c\theta^2 \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

unde $T = T^0 + \theta$.

În expresia energiei libere, coeficienții de elasticitate satisfac următoarele relații de simetrie

$$A_{ijmn} = A_{mnij}, \quad C_{ijmn} = C_{mnij}, \quad I_{ij} = I_{ji}. \tag{1.2.15}$$

1.2.2 Ecuații constitutive

În această secțiune vom scrie derivata în raport cu timpul a energiei libere în două moduri : prin intermediul ecuațiilor de mișcare și a principiului conservării energiei pe de o parte și cu ajutorul ecuațiilor constitutive ale unui material termoelastic Cosserat pe de altă parte. Astfel vom obține ecuațiile constitutive și ecuația energiei pentru termoelasticitatea micropolară generalizată de ordin fracționar. În plus, ecuația energiei, expresiile entropiei și ale energiei libere conduc la o nouă formulare a legilor Cattaneo de conducție a căldurii.

Vom utiliza abordarea uzuală de derivare a ecuației energiei. Vom obține astfel o formulă cu deformație de ordin fracționar.

Lema 1.2.1 *Derivata energiei libere în raport cu timpul este reprezentată prin formula*

$$\rho_0\dot{\phi} = t_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + m_{ij}\dot{\gamma}_{ij} + \rho_0 Q + q_{i,i} - \rho_0\dot{T}\eta - \rho_0 T\dot{\eta}. \tag{1.2.16}$$

Teorema 1.2.1 *Ecuațiile constitutive ale teoriei generalizate a termoelasticității cu deformație de ordin fracționar pentru materiale micropolare sunt*

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} - D_{ij}\theta = \\ &= A_{ijmn}(1+\tau^\beta D_t^\beta)\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} - D_{ij}\theta, \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

$$\begin{aligned} m_{ij} &= B_{mnij}\tilde{\varepsilon}_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} - E_{ij}\theta = \\ &= B_{mnij}(1+\tau^\beta D_t^\beta)\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} - E_{ij}\theta, \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

$$\begin{aligned} \rho_0\eta &= D_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} + E_{ij}\gamma_{ij} + c\theta = \\ &= D_{ij}(1+\tau^\beta D_t^\beta)\varepsilon_{ij} + E_{ij}\gamma_{ij} + c\theta. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Teorema 1.2.2 *În contextul teoriei termoelasticității generalizate cu deformație de ordin fracționar pentru materiale micropolare ecuațiile Cattaneo ale căldurii conduc la*

$$\begin{aligned} (K_{ij}T_{,j})_{,i} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[-T^0 D_{ij}(1+\tau^\beta D_t^\beta)\varepsilon_{ij} - E_{ij}T^0\gamma_{ij} - cT^0 T\right] + \\ &+ \rho_0\left(1+\tau_0\frac{\partial}{\partial t}\right)Q. \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Capitolul 2

Studiul mediilor dipolare cu porozitate simplă și dublă

2.1 Soluții ale problemei Saint-Venant pentru medii elastice dipolare poroase

Acest capitol este dedicat problemei Saint-Venant în contextul teoriei corpurilor dipolare poroase. Considerăm un cilindru drept format dintr-un material neomogen și anizotrop. În ecuațiile de mișcare ale problemei, variabila axială este privită ca un parametru. Rezultatul principal este descris de o clasă de soluții semi-inverse ale problemei Saint-Venant în funcție de problemele plane generalizate.

Acest studiu are aplicații în domeniile care se ocupă cu materiale poroase, cum ar fi materiale geologice, materialele granulare solide, studiul oaselor umane și animale. Primele investigații asupra materialelor cu goluri au fost publicate de Goodman și Cowin, care au pus bazele teoriei granulare [58].

2.1.1 Ecuații de bază

Vom considera un mediu elastic poros și dipolar care este constituit dintr-un material anizotrop și neomogen și care ocupă, la momentul de timp $t = 0$, un domeniu regulat B al spațiului euclidian tridimensional R^3, și anume un cilindru drept de lungime L. Vom nota cu ∂B frontiera domeniului B și cu $\bar{B}$ închiderea lui B, $\bar{B} = B \cup \partial B$, unde ∂B este o suprafață netedă pe porțiuni. Mișcarea corpului se raportează la un sistem fix de axe carteziene $Ox_i, i = 1, 2, 3$, care este ales astfel încât generatoarea cilindrului să fie paralelă la axa Ox_3 și planul x_1Ox_2 să conțină unul din capetele cilindrului. Cu $D(x_3)$ vom nota interiorul secțiunii transversale mărginite care este realizată la distanța x_3 de baza x_1Ox_2. Vom adopta o notație tensorială. Punctele din B se notează cu x_j și $t \in [0, \infty)$ este variabila timp. Vom utiliza convenția de însumare a lui Einstein pentru indici care se repetă. Un punct deasupra unei litere desemnează derivata în raport cu variabila timp t și indicele j după o virgulă indică derivarea parțială în raport cu argumentul spațial x_j. Toți indicii grecești iau valori întregi $(1, 2)$, unde indicii latini iau valorile $(1, 2, 3)$. Vom considera ipoteze de regularitate pentru funcțiile considerate. De exemplu, vom presupune că suprafața ∂B este suficient de regulată pentru a aplica teorema divergenței.

Mișcarea corpului va fi caracterizată cu ajutorul vectorului deplasare de componente u_i, a tensorului deplasare dipolară de componente φ_{ij}, și a funcției de distribuție a volumului φ, care în configurația de referință este φ_0. În continuare, vom utiliza funcția de distribuție a volumului σ dată de diferența $\sigma = \varphi - \varphi_0$.

Utilizând procedura propusă de Green și Rivlin, vom considera o nouă mișcare care diferă de mișcarea dată doar printr-o mișcare rigidă suprapusă, definită de o rotație de viteză unghiulară uniformă a corpului rigid și presupunem că pentru mișcarea dată, toate caracteristicile corpului rămân neschimbate de o astfel de mișcare rigidă suprapusă. Deducem următoarele ecuații geometrice, care dau expresii

ale măsurilor de deformație ε_{ij}, γ_{ij}, χ_{ijk} și ϕ_i în raport cu variabilele de mișcare

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\ \gamma_{ij}=u_{j,i}-\varphi_{ij},\ \chi_{ijk}=\varphi_{jk,i},\ \phi_i=\sigma_{,i}. \tag{2.1.1}$$

În cazul în care corpul, în configurația de referință, nu este supus unor tensiuni, iar forțele masice de echilibru sunt zero, considerăm că densitatea energiei interne este o formă pătratică în raport cu variabilele constititutive independente. Atunci din principiul de conservare a energiei putem deduce că densitatea energiei interne poate fi scrisă sub următoarea formă

$$\begin{aligned}\Psi=&\frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}+G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}+F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}+\frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+\\&+D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr}+\frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}+\mathsf{a}_{ij}\varepsilon_{ij}\sigma+c_{ij}\gamma_{ij}\sigma+e_{ijk}\chi_{ijk}\sigma+\\&+b_{ijk}\varepsilon_{ij}\phi_k+d_{ijk}\gamma_{ij}\phi_k+f_{ijkm}\chi_{ijk}\phi_m+\frac{1}{2}p_{ij}\phi_i\phi_j+d_i\sigma\phi_i+\frac{1}{2}\xi\sigma^2.\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

În consecință, vom utiliza următoarele ecuații constitutive care descriu relația dintre mărimea tensiunii în funcție de mărimea deformației

$$\begin{aligned}\tau_{ij}&=C_{ijmn}\varepsilon_{mn}+G_{mnij}\gamma_{mn}+F_{mnrij}\chi_{mnr}+\mathsf{a}_{ij}\sigma+b_{ijk}\phi_k,\\\eta_{ij}&=G_{ijmn}\varepsilon_{mn}+B_{ijmn}\gamma_{mn}+D_{ijmnr}\chi_{mnr}+c_{ij}\sigma+d_{ijk}\phi_k,\\\mu_{ijk}&=F_{ijkmn}\varepsilon_{mn}+D_{mnijk}\gamma_{mn}+A_{ijkmnr}\chi_{mnr}+e_{ijk}\sigma+f_{ijkm}\phi_m,\\\lambda_i&=b_{mni}\varepsilon_{mn}+d_{mni}\gamma_{mn}+f_{mnri}\chi_{mnr}+d_i\sigma+p_{ij}\phi_j,\\s&=-\mathsf{a}_{ij}\varepsilon_{ij}-c_{ij}\gamma_{ij}-e_{ijk}\chi_{ijk}-\xi\sigma-d_i\phi_i.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Presupunem că materialul din care este realizat cilindrul este neomogen într-o secțiune transversală a cilindrului, adică toți coeficienții constitutivi C_{ijmn}, G_{ijmn}, ..., ξ din (2.1.2) sunt funcții care depind de (x_1,x_2), adică

$$C_{ijmn}=C_{ijmn}\left(x_1,x_2\right),\ G_{ijmn}=G_{ijmn}\left(x_1,x_2\right),\ ...,\xi=\xi\left(x_1,x_2\right)$$

În plus, au loc următoarele relații de simetrie pentru acești coeficienți elastici

$$\begin{aligned}&C_{ijmn}=C_{jimn}=C_{mnij},\ G_{ijmn}=G_{jimn},\ F_{ijmnr}=F_{jimnr},\\&\mathsf{a}_{ij}=\mathsf{a}_{ji},\ b_{ijk}=b_{jik},\ p_{ij}=p_{ji}.\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Fie n_i componentele versorului normalei exterioare la suprafața ∂B. Atunci în fiecare punct regulat al frontierei ∂B putem defini componentele tracțiunii de suprafață t_i, componentele cuplului superficial μ_{jk} și tracțiunea de suprafață de echilibru h prin

$$t_i=\left(\tau_{ij}+\eta_{ij}\right)n_j,\ \mu_{jk}=\mu_{ijk}n_i,\ h=\lambda_i n_i. \tag{2.1.5}$$

Vom nota frontiera secțiunii transversale cu ∂D. Astfel, frontiera laterală a cilindrului este $\partial D\times[0,L]$. În absența forțelor masice, ecuațiile de echilibru în contextul elasticității corpurilor dipolare poroase sunt (conform [65])

$$\left(\tau_{ij}+\eta_{ij}\right)_{,j}=0,\ \mu_{ijk,i}+\eta_{jk}=0, \tag{2.1.6}$$

$$\lambda_{i,i}+s=0. \tag{2.1.7}$$

Pentru ecuațiile (2.1.6) și (2.1.7) vom considera următoarele condiții la limită laterale

$$t_i=0,\ \mu_{jk}=0,\ h=0 \text{ pe } \partial D\times[0,L] \tag{2.1.8}$$

și condițiile pe frontieră în capetele cilindrului

$$\begin{aligned}&t_{3i}=t_i^{(1)},\ \mu_{3jk}=\mu_{jk}^{(1)},\ \lambda_3=h^{(1)} \text{ pe } D(0),\\&t_{3i}=t_i^{(2)},\ \mu_{3jk}=\mu_{jk}^{(2)},\ \lambda_3=h^{(2)} \text{ pe } D(L),\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

unde $t_i^{(1)}$, $t_i^{(2)}$, $\mu_{jk}^{(1)}$, $\mu_{jk}^{(2)}$, $h^{(1)}$ și $h^{(2)}$ sunt funcții date pe domeniul lor de definiție.

Definiția 2.1.1 *Numim problema Saint-Venant pentru domeniul B, problema determinării vectorului deplasare u_i, tensorului deplasare dipolară φ_{ij} și funcției de distribuție a volumului σ care satisfac ecuațiile (2.1.6) și (2.1.7), condițiile la limită laterale (2.1.8) și condițiile pe frontieră la capete (2.1.9).*

Utilizând procedura propusă de Ieşan și Ciarletta, vom deduce condițiile necesare și suficiente pentru existența soluției problemei Saint-Venant, și anume

$$\begin{aligned}
&\int_{D(0)} t_i^{(1)} dA + \int_{D(L)} t_i^{(2)} dA = 0,\\
&\int_{D(0)} \mu_{ij}^{(1)} dA + \int_{D(L)} \mu_{ij}^{(2)} dA = 0,\\
&\int_{D(0)} \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(1)} dA + \int_{D(L)} \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(2)} dA = 0,\\
&\int_{D(0)} \varepsilon_{ijk} x_i \mu_{jk}^{(1)} dA + \int_{D(L)} \varepsilon_{ijk} x_i \mu_{jk}^{(2)} dA = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Relațiile (2.1.10) afirmă că pentru a ajunge la starea de echilibru a cilindrului, tracțiunile pe bazele cilindrului ar trebui să aibă rezultanta zero și torsiunea zero.

Lema 2.1.1 *Ecuațiile de echilibru (2.1.6) și (2.1.7) pot fi scrise sub forma*

$$\begin{aligned}
&\left[\left(C_{ijmn}+G_{ijmn}\right)u_{n,m}+\left(G_{mnij}+B_{ijmn}\right)\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+\right.\\
&\left.+\left(F_{mnrij}+D_{ijmnr}\right)\varphi_{nr,m}+\left(\mathtt{a}_{ij}+c_{ij}\right)\sigma+\left(b_{ijk}+d_{ijk}\right)\sigma_{,k}\right]_{,j}=0,\\
&\quad\left[F_{ijkmn}u_{n,m}+D_{mnijk}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+A_{ijkmnr}\varphi_{nr,m}+e_{ijk}\sigma+\right.\\
&\quad\left.+f_{ijkm}\sigma_{,m}\right]_{,i}+G_{jkmn}u_{m,n}+B_{jkmn}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+\\
&\quad+D_{jkmnr}\varphi_{nr,m}+c_{jk}\sigma+d_{jkm}\sigma_{,m}=0,\\
&\qquad\left[b_{mni}u_{m,n}+d_{mni}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+f_{mnri}\varphi_{nr,m}+d_i\sigma+p_{ij}\sigma_{,j}\right]_{,i}-\\
&\qquad-\mathtt{a}_{ij}u_{i,j}-c_{ij}\left(u_{j,i}-\varphi_{ij}\right)-e_{ijk}\varphi_{jk,i}-\xi\sigma-d_i\sigma_{,i}=0,
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

în domeniul $B=D\times(0,L)$.

Lema 2.1.2 *Condițiile la limită laterale (2.1.8) pot fi scrise sub forma*

$$\begin{aligned}
&\left[\left(C_{i\alpha mn}+G_{i\alpha mn}\right)u_{n,m}+\left(G_{mni\alpha}+B_{i\alpha mn}\right)\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+\right.\\
&\left.+\left(F_{mnri\alpha}+D_{i\alpha mnr}\right)\varphi_{nr,m}+\left(\mathtt{a}_{i\alpha}+c_{i\alpha}\right)\sigma+\left(b_{i\alpha k}+d_{i\alpha k}\right)\sigma_{,k}\right]n_\alpha=0,\\
&\left[F_{\alpha jkmn}u_{n,m}+D_{mn\alpha jk}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+A_{\alpha jkmnr}\varphi_{nr,m}+e_{\alpha jk}\sigma+\right.\\
&\left.+\ f_{\alpha jkm}\sigma_{,m}\right]n_\alpha=0,\\
&\left[b_{mn\alpha}u_{m,n}+d_{mn\alpha}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+f_{mnr\alpha}\varphi_{nr,m}+d_\alpha\sigma+p_{\alpha j}\sigma_{,j}\right]n_\alpha=0,
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

pe $\partial D\times(0,L)$.

Lema 2.1.3 *Condițiile pe frontieră la capete (2.1.9) pot fi scrise sub forma*

$$\begin{aligned}
&\left(C_{i3mn}+G_{i3mn}\right)u_{n,m}+\left(G_{mni3}+B_{i3mn}\right)\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+\\
&\quad+\left(F_{mnri3}+D_{i3mnr}\right)\varphi_{nr,m}+\left(\mathtt{a}_{ij}+c_{ij}\right)\sigma+\left(b_{i3k}+d_{i3k}\right)\sigma_{,k}=t_i^{(1)}\ \text{pe } D(0),\\
&F_{i3kmn}u_{n,m}+D_{mni3k}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+A_{i3kmnr}\varphi_{nr,m}+e_{i3k}\sigma+f_{i3km}\sigma_{,m}=\mu_{jk}^{(1)}\ \text{pe } D(0),\\
&b_{mn3}u_{m,n}+d_{mn3}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+f_{mnr3}\varphi_{nr,m}+d_3\sigma+p_{3j}\sigma_{,j}=h^{(1)}\ \text{pe } D(0),\\
&\left(C_{i3mn}+G_{i3mn}\right)u_{n,m}+\left(G_{mni3}+B_{i3mn}\right)\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+\\
&\quad+\left(F_{mnri3}+D_{i3mnr}\right)\varphi_{nr,m}+\left(\mathtt{a}_{i3}+c_{i3}\right)\sigma+\left(b_{i3k}+d_{i3k}\right)\sigma_{,k}=t_i^{(1)}\ \text{pe } D(L),\\
&F_{i3kmn}u_{n,m}+D_{mni3k}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+A_{i3kmnr}\varphi_{nr,m}+e_{i3k}\sigma+f_{i3km}\sigma_{,m}=\mu_{jk}^{(1)}\ \text{pe } D(L),\\
&b_{mn3}u_{m,n}+d_{mn3}\left(u_{n,m}-\varphi_{mn}\right)+f_{mnr3}\varphi_{nr,m}+d_3\sigma+p_{3j}\sigma_{,j}=h^{(1)}\ \text{pe } D(L).
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

În continuare vom nota cu (S-V) problema care este formată din ecuațiile (2.1.11), din condițiile la limită laterale (2.1.12) și din condițiile pe frontieră la capete (2.1.13). În plus, vom presupune că densitatea energiei interne Ψ, definită în (2.1.2) și asociată soluției problemei la limită (S-V) este pozitiv definită. Dacă densitatea energiei interne Ψ este pozitiv definită, atunci problema la limită (S-V) are o soluție unică, până la o deplasare rigidă.

2.1.2 Rezultate principale

În articolele care abordează problema Saint-Venant este definită starea plană generalizată pentru interiorul secțiunii transversale.

Astfel, vectorul deplasare $\mathbf{u}$, tensorul deplasare dipolară $\boldsymbol{\varphi}$ și funcția de distribuție a volumului σ depind pe D doar de x_1 și x_2

$$u_i = u_i\left(x_1, x_2\right),\ \varphi_{ij} = \varphi_{ij}\left(x_1, x_2\right),\ \sigma = \sigma\left(x_1, x_2\right),\ \left(x_1, x_2\right) \in D \tag{2.1.14}$$

unde domeniul $D \subset R^2$ este o secțiune transversală a cilindrului considerat. În consecință, și celelalte funcții din problema (S-V) depind doar de x_1 și x_2. Prin urmare, dacă considerăm mărimile tensiunii, au loc

$$\begin{gathered}\tau_{ij} = \tau_{ij}\left(x_1, x_2\right),\ \eta_{ij} = \eta_{ij}\left(x_1, x_2\right),\ \mu_{ijk} = \mu_{ijk}\left(x_1, x_2\right), \\ \lambda_i = \lambda_i\left(x_1, x_2\right),\ s = s\left(x_1, x_2\right),\ \left(x_1, x_2\right) \in D\end{gathered}$$

și dacă notăm cu $\mathbf{U}$ componentele vectorului deplasare $\mathbf{u}$, tensorului deplasare dipolară $\boldsymbol{\varphi}$ și funcția de distribuție a volumului σ în domeniul D, adică $\mathbf{U} = (u_i, \varphi_{ij}, \sigma)$, atunci ecuațiile constitutive (2.1.3) pot fi rescrise sub forma

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(\mathbf{U}) &= C_{ijm\alpha}u_{m,\alpha} + G_{\alpha nij}\left(u_{n,\alpha} - \varphi_{\alpha n}\right) + F_{\alpha nrij}\varphi_{nr,\alpha} + \mathsf{a}_{ij}\sigma + b_{ij\alpha}\sigma_{,\alpha}, \\ \eta_{ij}(\mathbf{U}) &= G_{ijm\alpha}u_{m,\alpha} + B_{ij\alpha n}\left(u_{n,\alpha} - \varphi_{\alpha n}\right) + D_{ij\alpha nr}\varphi_{nr,\alpha} + c_{ij}\sigma + d_{ij\alpha}\sigma_{,\alpha}, \\ \mu_{ijk}(\mathbf{U}) &= F_{ijkm\alpha}u_{m,\alpha} + D_{\alpha nijk}\left(u_{n,\alpha} - \varphi_{\alpha n}\right) + A_{ijk\alpha nr}\varphi_{nr,\alpha} + e_{ijk}\sigma + f_{ijk\alpha}\sigma_{,\alpha}, \\ \lambda_i(\mathbf{U}) &= b_{m\alpha i}u_{m,\alpha} + d_{\alpha ni}\left(u_{n,\alpha} - \varphi_{\alpha n}\right) + f_{\alpha nri}\varphi_{nr,\alpha} + d_i\sigma + p_{i\alpha}\sigma_{,\alpha}, \\ s(\mathbf{U}) &= -\mathsf{a}_{\alpha j}u_{j,\alpha} - c_{\alpha j}\left(u_{j,\alpha} - \varphi_{\alpha j}\right) - e_{\alpha jk}\varphi_{jk,\alpha} - \xi\sigma - d_\alpha\sigma_{,\alpha}.\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

În continuare vom adapta problema (S-V) de mai sus pentru domeniul D și frontiera sa ∂D la o problemă plană. Vom nota cu (P-S-V) această problemă plană, care constă în

- ecuațiile de echilibru

$$\begin{gathered}\left(\tau_{i\alpha}(\mathbf{U}) + \eta_{i\alpha}(\mathbf{U})\right)_{,\alpha} + f_i = 0,\ \mu_{\alpha jk,\alpha}(\mathbf{U}) + \eta_{jk}(\mathbf{U}) + g_{jk} = 0, \\ \lambda_{\alpha,\alpha}(\mathbf{U}) + s(\mathbf{U}) + l = 0\ pe\ D,\end{gathered} \tag{2.1.16}$$

unde $f_i = f_i\left(x_1, x_2\right)$ sunt componentele forței masice, $g_{jk} = g_{jk}\left(x_1, x_2\right)$ sunt componentele forței masice dipolare și $l = l\left(x_1, x_2\right)$ este forța de echilibru externă;

- condițiile la limită

$$\left(\tau_{i\alpha}(\mathbf{U}) + \eta_{i\alpha}(\mathbf{U})\right)n_\alpha = \tilde{t}_i,\ \mu_{\alpha jk}(\mathbf{U})n_\alpha = \tilde{m}_{jk},\ \lambda_\alpha(\mathbf{U})n_\alpha = \tilde{h}\ pe\ \partial D, \tag{2.1.17}$$

unde $\tilde{t}_i$ sunt componentele tracțiunii pe frontieră, $\tilde{m}_{jk}$ sunt componentele cuplului tracțiunii pe frontieră și $\tilde{h}$ este tracțiunea de echilibru pe frontieră. Putem afla o altă expresie a problemei (P-S-V) formată din (2.1.16) și (2.1.17) prin considerarea ecuațiilor constitutive (2.1.15). Prin urmare, ecuațiile de echilibru sunt de forma

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i(\mathbf{U}) \equiv &\left[\left(C_{i\alpha m\beta} + G_{i\alpha m\beta}\right)u_{m,\beta} + \left(G_{\beta ni\alpha} + B_{i\alpha\beta n}\right)\left(u_{n,\beta} - \varphi_{\beta n}\right) + \right. \\ &\left. + \left(F_{\beta nri\alpha} + D_{i\alpha\beta nr}\right)\varphi_{nr,\beta} + \left(\mathsf{a}_{i\alpha} + c_{i\alpha}\right)\sigma + \left(b_{i\alpha\beta} + d_{i\alpha\beta}\right)\sigma_{,\beta}\right]_{,\alpha} = -f_i, \\ \mathcal{G}_{jk}(\mathbf{U}) \equiv &\left[F_{\alpha jkm\beta}u_{m,\beta} + D_{\beta n\alpha jk}\left(u_{n,\beta} - \varphi_{\beta n}\right) + A_{\alpha jk\beta nr}\varphi_{nr,\beta} + e_{\alpha jk}\sigma + f_{\alpha jk\beta}\sigma_{,\beta}\right]_{,\alpha} + \\ &+ G_{jkm\alpha}u_{m,\alpha} + B_{jk\alpha n}\left(u_{n,\alpha} - \varphi_{\alpha n}\right) + D_{jk\alpha nr}\varphi_{nr,\alpha} + c_{jk}\sigma + d_{jk\alpha}\sigma_{,\alpha} = -g_{jk}, \\ \mathcal{L}(\mathbf{U}) \equiv &\left[b_{m\beta\alpha}u_{m,\beta} + d_{\beta n\alpha}\left(u_{n,\beta} - \varphi_{\beta n}\right) + f_{\beta nr\alpha}\varphi_{nr,\beta} + d_\alpha\sigma + p_{\alpha\beta}\sigma_{,\beta}\right]_{,\alpha} - \\ &- \mathsf{a}_{\alpha j}u_{j,\alpha} - c_{\alpha j}\left(u_{j,\alpha} - \varphi_{\alpha j}\right) - e_{\alpha jk}\varphi_{jk,\alpha} - \xi\sigma - d_\alpha\sigma_{,\alpha} = -l\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

și condițiile pe frontieră devin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_i(\mathbf{U}) \equiv [(C_{i\alpha m\beta}+G_{i\alpha m\beta})\,u_{m,\beta}+(G_{\beta ni\alpha}+B_{i\alpha\beta n})\,(u_{n,\beta}-\varphi_{\beta n})+\\
&+(F_{\beta nri\alpha}+D_{i\alpha\beta nr})\,\varphi_{nr,\beta}+(\mathsf{a}_{i\alpha}+c_{i\alpha})\,\sigma+(b_{i\alpha\beta}+d_{i\alpha\beta})\,\sigma_{,\beta}]\,n_\alpha=\tilde{t}_i,\\
&\mathcal{M}_{jk}(\mathbf{U}) \equiv [F_{\alpha jkm\beta}u_{m,\beta}+D_{\beta n\alpha jk}\,(u_{n,\beta}-\varphi_{\beta n})+A_{\alpha jk\beta nr}\varphi_{nr,\beta}+e_{\alpha jk}\sigma+f_{\alpha jk\beta}\sigma_{,\beta}]n_\alpha=\tilde{m}_{jk},\\
&\mathcal{H}(\mathbf{U}) \equiv [b_{m\beta\alpha}u_{m,\beta}+d_{\beta n\alpha}\,(u_{n,\beta}-\varphi_{\beta n})+f_{\beta nr\alpha}\varphi_{nr,\beta}+d_\alpha\sigma+p_{\alpha\beta}\sigma_{,\beta}]\,n_\alpha=\tilde{h}.
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Presupunem că funcțiile f_i, g_{jk}, l, $\tilde{t}_i$, $\tilde{m}_{jk}$ și $\tilde{h}$ satisfac, pe domeniul lor de definiție, condițiile necesare de regularitate pentru existența unei soluții a problemei plane de mai sus (de exemplu, cele din articolul[53]).

Condițiile necesare și suficiente pentru existența unei soluții a problemei plane sunt ca rezultanta și torsiunea încărcărilor să fie nule

$$\begin{aligned}
&\int_D f_i dA+\int_{\partial D}\tilde{t}_i ds=0,\ \int_D g_{3i}dA+\int_{\partial D}\tilde{m}_{3i}ds=0,\\
&\int_D \varepsilon_{3\alpha\beta}x_\alpha f_\beta dA+\int_{\partial D}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\alpha\tilde{t}_\beta ds=0,\ \int_D\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\alpha g_{3\beta}dA+\int_{\partial D}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\alpha\tilde{m}_{3\beta}ds=0.
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Pentru a obține o problemă plană generalizată asociată sistemului de ecuații (2.1.11) și condițiilor pe frontieră laterale (2.1.12), vom considera că ecuațiile de echilibru (2.1.11) sunt satisfăcute pe domeniul plan D și condițiile la limită laterale (2.1.12) sunt satisfăcute pe curba plană ∂D, variabila x_3 fiind considerată ca un parametru, $x_3\in(0,L)$. În consecință, pe secțiunea transversală D a cilindrului acționează o forță rezultantă care are componentele

$$(\mathcal{R}_i(\mathbf{U}),\mathcal{R}_{jk}(\mathbf{U}))\,,\ unde\ \mathcal{R}_i(\mathbf{U})=\int_D(\tau_{3i}+\eta_{3i})\,(\mathbf{U})dA,\ \mathcal{R}_{jk}(\mathbf{U})=\int_D\mu_{3jk}(\mathbf{U})dA, \tag{2.1.21}$$

și un moment rezultant al tracțiunii de componente

$$\mathcal{M}_i(\mathbf{U})=\int_D\varepsilon_{ijk}x_j\,(\tau_{3k}+\eta_{3k})\,(\mathbf{U})dA+\int_D\varepsilon_{ijk}x_j\mu_{33k}(\mathbf{U})dA. \tag{2.1.22}$$

Caz particular Din (2.1.22) deducem că

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{U}) &= \varepsilon_{3\alpha\beta}\int_D x_\beta\,(\tau_{33}+\eta_{33})\,(\mathbf{U})dA+\varepsilon_{3\alpha\beta}\int_D x_\beta\mu_{333}(\mathbf{U})dA-\\
&-x_3\varepsilon_{3\alpha\beta}\int_D(\tau_{3\beta}+\eta_{3\beta})\,(\mathbf{U})dA-x_3\varepsilon_{3\alpha\beta}\int_D\mu_{33\beta}(\mathbf{U})dA,\\
\mathcal{M}_3(\mathbf{U}) &= \varepsilon_{3\alpha\beta}\int_D x_\alpha\,(\tau_{3\beta}+\eta_{3\beta})\,(\mathbf{U})dA+\varepsilon_{3\alpha\beta}\int_D x_\alpha\mu_{33\beta}(\mathbf{U})dA.
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

În următoarea teoremă vom determina o condiție suficientă care permite exprimarea soluției problemei Saint-Venant în funcție de starea plană generalizată.

Teorema 2.1.1 *Dacă* $\mathbf{U}$ *este o soluție a problemei Saint-Venant și forța rezultantă asociată* $(\mathcal{R}_i(\mathbf{U}),\mathcal{R}_{jk}(\mathbf{U}))$ *și momentul rezultant al tracțiunii* $\mathcal{M}_3(\mathbf{U})$ *sunt independente de* x_3*, atunci* $\mathbf{U}$ *poate fi exprimată în funcție de starea plană generalizată.*

Următorul rezultat se obține cu ajutorul rezultatelor din Teorema 2.1.1.

Teorema 2.1.2 *Dacă* $\mathbf{U}$ *este o soluție a problemei Saint-Venant astfel încât forțele rezultante* $(\mathcal{R}_i(\mathbf{U}),\mathcal{R}_{jk}(\mathbf{U}))$ *și momentul rezultant al tracțiunii* $\mathcal{M}_3(\mathbf{U})$ *sunt independente de* x_3*, atunci* $\mathcal{M}_1(\mathbf{U})$ *și* $\mathcal{M}_2(\mathbf{U})$ *sunt de asemenea independente de* x_3*.*

Observația 2.1.1 *Considerând că $\mathcal{R}_\alpha(\mathbf{U})$ este independent de x_3, putem deduce prin calcul direct că*

$$\int_D x_\alpha \left(\tau_{33}(\mathbf{U}_{,33}) + \eta_{33}(\mathbf{U}_{,33})\right) dA = 0. \tag{2.1.24}$$

În continuare vom aborda o clasă de soluții semi-inverse a problemei Saint-Venant, care pot fi exprimate în funcție de starea plană generalizată.

După cum sugerează relațiile (2.1.30) și (2.1.31), vom considera acele soluții ale problemei Saint-Venant care au proprietatea că expresiile deplasării $\mathbf{u}_{,3}$ și deplasării dipolare $\boldsymbol{\varphi}_{,3}$ se comportă ca o deplasare rigidă și funcția de distribuție a volumului σ este independentă de x_3.

Vom nota cu $(S-V)_s$ clasa acestor soluții și cu $\mathbf{U}^0$ un element al acestei clase, $\mathbf{U}^0 = \left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \sigma^0\right) \in (S-V)_s$. Luând în considerare (2.1.21)-(2.1.23), ajungem la concluzia că

$$\left(\mathcal{R}_\alpha\left(\mathbf{U^0}\right)\right)_{,3} = 0,\ \left(\mathcal{R}_3\left(\mathbf{U^0}\right)\right)_{,3} = 0,\ \left(\mathcal{M}_i\left(\mathbf{U^0}\right)\right)_{,3} = 0. \tag{2.1.25}$$

În cazul unei deplasări rigide și al unei deplasări dipolare rigide, deducem prin integrare directă că

$$\begin{aligned}
u^0_\alpha &= -\frac{1}{2}a_\alpha x_3^2 - \varepsilon_{3\alpha\beta}a_4 x_\beta x_3 + v_\alpha(x_1,x_2),\\
u^0_3 &= \left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3\right)x_3 + v_3(x_1,x_2),\\
\varphi^0_{\alpha k} &= -\frac{1}{2}b_{\alpha k}x_3^2 - \varepsilon_{3\alpha\beta}b_{4k}x_\beta x_3 + w_{\alpha k}(x_1,x_2),\\
\varphi^0_{3k} &= \left(b_{1k}x_1 + b_{2k}x_2 + b_{3k}\right)x_3 + w_{3k}(x_1,x_2),\\
\sigma^0 &= \psi(x_1,x_2),
\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

pentru $\mathbf{U}^0 = \left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \sigma^0\right) \in (S-V)_s$, unde $\alpha = 1,2$. Coeficienții a_m și b_{mk} din (2.1.26) sunt constante arbitrare, pentru $m = 1,2,3,4$ și $k = 1,2,3$. În plus, v_i și w_{ik} sunt funcții arbitrare independente de x_3, pentru $i,k = 1,2,3$.
Dacă înlocuim (2.1.26) în (2.1.3), vom determina componentele tensiunii în această clasă de soluții, și anume

$$\begin{aligned}
\tau_{ij}\left(\mathbf{U}^0\right) &= C_{ij33}\left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3\right) - a_4C_{ij\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta +\\
&\quad + F_{ijk33}\left(b_{1k}x_1 + b_{2k}x_2 + b_{3k}\right) - b_{4k}F_{ij\alpha33}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta + \tau_{ij}\left(\mathbf{U}\right),\\
\eta_{ij}\left(\mathbf{U}^0\right) &= G_{ij33}\left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3\right) - a_4G_{ij\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta +\\
&\quad + D_{ijk33}\left(b_{1k}x_1 + b_{2k}x_2 + b_{3k}\right) - b_{4k}D_{ij\alpha33}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta + \eta_{ij}\left(\mathbf{U}\right),\\
\mu_{ijk}\left(\mathbf{U}^0\right) &= F_{ijk33}\left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3\right) - a_4F_{ijk\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta +\\
&\quad + A_{ijkm33}\left(b_{1m}x_1 + b_{2m}x_2 + b_{3m}\right) - b_{4m}A_{ijkm\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta + \mu_{ijk}\left(\mathbf{U}\right),\\
\lambda_i\left(\mathbf{U}^0\right) &= b_{33i}\left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3\right) - a_4b_{i\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta +\\
&\quad + f_{ik33}\left(b_{1k}x_1 + b_{2k}x_2 + b_{3k}\right) - b_{4k}f_{ik\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta + \lambda_i\left(\mathbf{U}\right),\\
\mathfrak{s}\left(\mathbf{U}^0\right) &= -\mathfrak{a}_{33}\left(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3\right) - a_4\mathfrak{a}_{\alpha3}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta -\\
&\quad - e_{33k}\left(b_{1k}x_1 + b_{2k}x_2 + b_{3k}\right) - b_{4k}e_{\alpha3k}\varepsilon_{3\alpha\beta}x_\beta - \mathfrak{s}\left(\mathbf{U}\right).
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Expresiile pentru $\tau_{ij}(\mathbf{U})$, $\eta_{ij}(\mathbf{U})$, $\mu_{ijk}(\mathbf{U})$, $\lambda_i(\mathbf{U})$ și $s(\mathbf{U})$ sunt cele din (2.1.15).

Luând în considerare relațiile (2.1.27), ecuațiile de echilibru (2.1.18) devin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_i^0\left(\mathbf{U}^0\right)=\mathcal{F}_i\left(\mathbf{U}\right)+\\
&\quad+\left[\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)a_\beta x_\beta+\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)a_3-a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(C_{i\alpha\gamma 3}+G_{i\alpha\gamma 3}\right)x_\beta\right]_{,\alpha}+\\
&+\left[\left(F_{i\alpha k33}+D_{i\alpha k33}\right)b_{\beta k}x_\beta+\left(F_{i\alpha k33}+D_{i\alpha k33}\right)b_{3k}-b_{4k}\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(F_{i\alpha k\gamma 3}+D_{i\alpha k\gamma 3}\right)x_\beta\right]_{,\alpha}=0,\\
&\mathcal{G}_{ij}^0\left(\mathbf{U}^0\right)=\mathcal{G}_{ij}\left(\mathbf{U}\right)+\left[F_{ij\alpha 33}a_\beta x_\beta+F_{ij\alpha 33}a_3-a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}F_{ij\alpha\gamma 3}x_\beta\right]_{,\alpha}+\\
&\quad+\left[A_{ij\alpha k33}b_{\beta k}x_\beta+A_{ij\alpha k33}b_{3k}-b_{4k}\varepsilon_{3\gamma\beta}A_{ij\alpha k\gamma 3}x_\beta\right]_{,\alpha}=0,\\
&\mathcal{L}^0\left(\mathbf{U}^0\right)=\mathcal{L}\left(\mathbf{U}\right)+\\
&\quad+\left[\left(b_{33\alpha}+d_{33\alpha}\right)a_\beta x_\beta+\left(b_{33\alpha}+d_{33\alpha}\right)a_3-a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(b_{3\gamma\alpha}+d_{3\gamma\alpha}\right)x_\beta\right]_{,\alpha}+\\
&\quad+\left[f_{\alpha k33}b_{\beta k}x_\beta+f_{\alpha k33}b_{3k}-b_{4k}\varepsilon_{3\gamma\beta}f_{\alpha k\gamma 3}x_\beta\right]_{,\alpha}-\\
&-\mathsf{a}_{33}a_\beta x_\beta-\mathsf{a}_{33}a_3+a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}\mathsf{a}_{\gamma 3}x_\beta-e_{33k}b_{\beta k}x_\beta-e_{33k}b_{3k}+b_{4k}e_{\gamma 3k}\varepsilon_{3\gamma\beta}x_\beta=0,
\end{aligned}\tag{2.1.28}$$

care au loc în domeniul D. În plus, cu ajutorul relației (2.1.27), condițiile pe frontieră (2.1.19) devin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_i^0\left(\mathbf{U}^0\right)=\mathcal{T}_i\left(\mathbf{U}\right)+\\
&\quad+\left[\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)a_\beta x_\beta+\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)a_3-a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(C_{i\alpha\gamma 3}+G_{i\alpha\gamma 3}\right)x_\beta\right]n_\alpha+\\
&+\left[\left(F_{i\alpha k33}+D_{i\alpha k33}\right)b_{\beta k}x_\beta+\left(F_{i\alpha k33}+D_{i\alpha k33}\right)b_{3k}-b_{4k}\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(F_{i\alpha k\gamma 3}+D_{i\alpha k\gamma 3}\right)x_\beta\right]n_\alpha=0,\\
&\mathcal{M}_{ij}^0\left(\mathbf{U}^0\right)=\mathcal{M}_{ij}\left(\mathbf{U}\right)+\left[F_{ij\alpha 33}a_\beta x_\beta+F_{ij\alpha 33}a_3-a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}F_{ij\alpha\gamma 3}x_\beta\right]n_\alpha+\\
&\quad+\left[A_{ij\alpha k33}b_{\beta k}x_\beta+A_{ij\alpha k33}b_{3k}-b_{4k}\varepsilon_{3\gamma\beta}A_{ij\alpha k\gamma 3}x_\beta\right]n_\alpha=0,\\
&\mathcal{H}^0\left(\mathbf{U}^0\right)=\mathcal{H}\left(\mathbf{U}\right)+\\
&\quad+\left[\left(b_{33\alpha}+d_{33\alpha}\right)a_\beta x_\beta+\left(b_{33\alpha}+d_{33\alpha}\right)a_3-a_4\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(b_{3\gamma\alpha}+d_{3\gamma\alpha}\right)x_\beta\right]n_\alpha+\\
&\quad+\left[f_{\alpha k33}b_{\beta k}x_\beta+f_{\alpha k33}b_{3k}-b_{4k}\varepsilon_{3\gamma\beta}f_{\alpha k\gamma 3}x_\beta\right]n_\alpha=0
\end{aligned}\tag{2.1.29}$$

care au loc pe suprafața ∂D.
În acest fel, problema la limită definită de (2.1.18) și (2.1.19) este înlocuită de problema la limită definită de (2.1.28) și (2.1.29).

Luând în considerare condițiile (2.1.20), deducem că toate condițiile necesare și suficiente pentru ca problema la limită (2.1.28) și (2.1.29) să aibă o soluție $\mathbf{U}=(u_i,\varphi_{jk},\sigma)$ sunt îndeplinite pentru orice $a_s,\ s=1,2,3,4$ și $b_{sk},\ s=1,2,3,4,\ k=1,2,3$.

În continuare vom considera trei forme particulare ale problemei la limită (2.1.28) și (2.1.29), și anume cazurile $a_i=\delta_{ij},a_4=0$ și $b_{ik}=\delta_{ij},b_{4k}=0$, unde j este numărul problemei particulare. Soluțiile corespunzătoare vor fi notate cu $\mathbf{U}^{(s)}=\left(u_i^{(s)},\varphi_{ij}^{(s)},\sigma^{(s)}\right)$, $s=1,2,3$. În plus, vom nota cu $\mathbf{U}^{(4)}=\left(u_i^{(4)},\varphi_{ij}^{(4)},\sigma^{(4)}\right)$ o soluție a problemei la limită (2.1.28), (2.1.29) în cazul particular în care $a_i=0,\ i=1,2,3,\ a_4=1$ și $b_{ik}=0,\ i=1,2,3,\ b_{4k}=1$.

Astfel, funcțiile $\mathbf{U}^{(s)}=\left(u_i^{(s)},\varphi_{ij}^{(s)},\sigma^{(s)}\right),\ s=1,2,3,4$ satisfac ecuațiile

$$\mathcal{F}_i\left(\mathbf{U}^{(s)}\right)+f_i^{(s)}=0,\ \mathcal{G}_{ij}\left(\mathbf{U}^{(s)}\right)+g_{ij}^{(s)}=0,\ \mathcal{L}\left(\mathbf{U}^{(s)}\right)+l^{(s)}=0\ \text{în}\ D,\tag{2.1.30}$$

și condițiile pe frontieră

$$\mathcal{T}_i\left(\mathbf{U}^{(s)}\right)=\tilde{T}_i^{(s)},\ \mathcal{G}_{ij}\left(\mathbf{U}^{(s)}\right)=\tilde{M}_{ij}^{(s)},\ \mathcal{L}\left(\mathbf{U}^{(s)}\right)=\tilde{L}^{(s)}\ pe\ \partial D.\tag{2.1.31}$$

În (2.1.30) și (2.1.31) am utilizat notațiile

$$
\begin{aligned}
f_i^{(\beta)} &= \left[\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)x_\beta+\left(F_{i\alpha k33}+D_{i\alpha k33}\right)\delta_{k\beta}x_\beta\right]_{,\alpha},\\
f_i^{(3)} &= \left[\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)+\left(F_{i\alpha k33}+F_{i\alpha k33}\right)\delta_{k3}\right]_{,\alpha},\\
f_i^{(4)} &= -\left[\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(C_{i\alpha\gamma 3}+G_{i\alpha\gamma 3}\right)x_\beta+\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(F_{i\alpha k\gamma 3}+D_{i\alpha k\gamma 3}\right)\delta_{k3}x_\beta\right]_{,\alpha},\\
g_{ij}^{(\beta)} &= \left[\left(F_{ij\alpha 33}a_\beta+A_{ij\alpha k33}b_{\beta k}\right)x_\beta\right]_{,\alpha},\ g_{ij}^{(3)}=\left(F_{ij\alpha 33}a_3+A_{ij\alpha k33}b_{3k}\right)_{,\alpha},\\
g_{ij}^{(4)} &= -\left[\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(F_{ij\alpha\gamma 3}+\delta_{3k}A_{ij\alpha k\gamma 3}\right)x_\beta\right]_{,\alpha},\\
l^{(\beta)} &= \left[\left(b_{\alpha 33}+d_{\alpha 33}\right)x_\beta+f_{\alpha k33}\delta_{k\beta}x_\beta\right]_{,\alpha}-\left(\mathsf{a}_{33}+e_{k33}\delta_{k3}\right)x_\beta,\\
l^{(3)} &= \left[\left(b_{\alpha 33}+d_{\alpha 33}\right)+f_{\alpha k33}\delta_{k3}\right]_{,\alpha}-\left(\mathsf{a}_{33}+e_{k33}\delta_{k3}\right),\\
l^{(4)} &= -\left[\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(b_{3\gamma\alpha}+d_{3\gamma\alpha}+f_{\alpha k\gamma 3}\right)x_\beta\right]_{,\alpha}+\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(\mathsf{a}_{\gamma 3}+e_{\gamma 3k}\delta_{k3}\right),\\
\tilde{T}_i^{(\beta)} &= -\left[\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)x_\beta+\left(F_{i\alpha k33}+D_{i\alpha k33}\right)\delta_{k\beta}x_\beta\right]n_\alpha,\\
\tilde{T}_i^{(3)} &= -\left[\left(C_{i\alpha 33}+G_{i\alpha 33}\right)+\left(F_{i\alpha k33}+F_{i\alpha k33}\right)\delta_{k3}\right]n_\alpha,\\
\tilde{T}_i^{(4)} &= \left[\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(C_{i\alpha\gamma 3}+G_{i\alpha\gamma 3}\right)x_\beta+\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(F_{i\alpha k\gamma 3}+D_{i\alpha k\gamma 3}\right)\delta_{k3}x_\beta\right]n_\alpha,\\
\tilde{M}_{ij}^{(\beta)} &= \left[\left(F_{ij\alpha 33}a_\beta+A_{ij\alpha k33}b_{\beta k}\right)x_\beta\right]n_\alpha,\ \tilde{M}_{ij}^{(3)}=\left(F_{ij\alpha 33}a_3+A_{ij\alpha k33}b_{3k}\right)n_\alpha,\\
\tilde{M}_{ij}^{(4)} &= \left[\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(F_{ij\alpha\gamma 3}+\delta_{3k}A_{ij\alpha k\gamma 3}\right)x_\beta\right]n_\alpha,\ \tilde{L}^{(\beta)}=-\left[\left(b_{\alpha 33}+d_{\alpha 33}\right)x_\beta+f_{\alpha k33}\delta_{k\beta}x_\beta\right]n_\alpha,\\
\tilde{L}^{(3)} &= -\left[\left(b_{\alpha 33}+d_{\alpha 33}\right)+f_{\alpha k33}\delta_{k3}\right]n_\alpha,\ \tilde{L}^{(4)}=\left[\varepsilon_{3\gamma\beta}\left(b_{3\gamma\alpha}+d_{3\gamma\alpha}+f_{\alpha k\gamma 3}\right)x_\beta\right]n_\alpha.
\end{aligned}
\tag{2.1.32}
$$

Dacă $\mathbf{U}^{(s)}$ sunt soluțiile problemelor de mai sus, atunci putem scrie

$$
\mathbf{U}=\sum_{s=1}^{4}a_s\mathbf{U}^{(s)},
\tag{2.1.33}
$$

deoarece toate problemele formulate mai sus sunt liniare. Prin urmare, dacă $\mathbf{W}^0=\left(\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\sigma^0\right)$ este o soluție din clasa noastră, $\mathbf{W}^0\in(S-V)_s$, atunci are loc

$$
\mathbf{W}^{(0)}=\sum_{s=1}^{4}a_s\mathbf{W}^{(s)},
\tag{2.1.34}
$$

unde componentele soluțiilor sunt definite de

$$
\begin{aligned}
&u_\alpha^{(\beta)}=-\frac{1}{2}x_3^2\delta_{\alpha\beta}+v_\alpha^{(\beta)},\ u_3^{(\beta)}=x_\beta x_3+v_3^{(\beta)},\ u_\alpha^{(3)}=v_\alpha^{(3)},\\
&u_3^{(3)}=x_3+v_3^{(3)},\ u_\alpha^{(4)}=\varepsilon_{3\beta\alpha}x_\beta x_3+v_\alpha^{(4)},\ u_3^{(4)}=v_3^{(4)},\\
&\varphi_{\alpha 3}^{(\beta)}=-\frac{1}{2}x_3^2\delta_{\alpha\beta}+w_{\alpha 3}^{(\beta)},\ \varphi_{33}^{(\beta)}=x_\beta x_3+w_{33}^{(\beta)},\ \varphi_{\alpha 3}^{(3)}=w_{\alpha 3}^{(3)},\\
&\varphi_{33}^{(3)}=x_3+w_{33}^{(3)},\ \varphi_{\alpha 3}^{(4)}=\varepsilon_{3\beta\alpha}x_\beta x_3+w_{\alpha 3}^{(4)},\ \varphi_{33}^{(4)}=w_{33}^{(4)}.
\end{aligned}
\tag{2.1.35}
$$

Potrivit relațiilor (2.1.34) și (2.1.27), componentele tensiunii devin

$$
\begin{aligned}
&\tau_{ij}\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{r=1}^{4}a_r\tau_{ij}\left(\mathbf{W}^{(r)}\right),\ \eta_{ij}\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{r=1}^{4}a_r\eta_{ij}\left(\mathbf{W}^{(r)}\right),\\
&\mu_{ijk}\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{r=1}^{4}a_r\mu_{ijk}\left(\mathbf{W}^{(r)}\right),\ \lambda_i\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{r=1}^{4}a_r\lambda_i\left(\mathbf{W}^{(r)}\right),\\
&\mathsf{s}\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{r=1}^{4}a_r\mathsf{s}\left(\mathbf{W}^{(r)}\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.36}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
\tau_{ij}\left(\mathbf{W}^{(\alpha)}\right) &= C_{ij33}x_\alpha + F_{ij\beta 33}\delta_{\beta 3}x_\alpha + \tau_{ij}\left(\mathbf{U}^{(\alpha)}\right),\\
\tau_{ij}\left(\mathbf{W}^{(3)}\right) &= C_{ij33} + F_{ij\beta 33}\delta_{\beta 3} + \tau_{ij}\left(\mathbf{U}^{(3)}\right),\\
\tau_{ij}\left(\mathbf{W}^{(4)}\right) &= -\varepsilon_{3\alpha\beta}C_{ij\alpha 3}x_\beta - \varepsilon_{3\gamma\beta}F_{ijk\gamma 3}\delta_{k3}x_\beta + \tau_{ij}\left(\mathbf{U}^{(4)}\right),\\
\eta_{ij}\left(\mathbf{W}^{(\alpha)}\right) &= G_{ij33}x_\alpha + D_{ij\beta 33}\delta_{\beta 3}x_\alpha + \eta_{ij}\left(\mathbf{U}^{(\alpha)}\right),\\
\eta_{ij}\left(\mathbf{W}^{(3)}\right) &= G_{ij33} + D_{ij\beta 33}\delta_{\beta 3} + \eta_{ij}\left(\mathbf{U}^{(3)}\right),\\
\eta_{ij}\left(\mathbf{W}^{(4)}\right) &= -\varepsilon_{3\alpha\beta}G_{ij\alpha 3}x_\beta - \varepsilon_{3\gamma\beta}D_{ijk\gamma 3}\delta_{k3}x_\beta + \eta_{ij}\left(\mathbf{U}^{(4)}\right),\\
\mu_{ijk}\left(\mathbf{W}^{(\alpha)}\right) &= F_{ijk33}x_\alpha + A_{ijk\beta 33}\delta_{\beta 3}x_\alpha + \mu_{ijk}\left(\mathbf{U}^{(\alpha)}\right),\\
\mu_{ijk}\left(\mathbf{W}^{(3)}\right) &= F_{ijk33} + A_{ijk\beta 33}\delta_{\beta 3} + \mu_{ijk}\left(\mathbf{U}^{(3)}\right),\\
\mu_{ijk}\left(\mathbf{W}^{(4)}\right) &= -\varepsilon_{3\alpha\beta}F_{ijk\alpha 3}x_\beta - \varepsilon_{3\gamma\beta}A_{ijkm\gamma 3}\delta_{m3}x_\beta + \mu_{ijk}\left(\mathbf{U}^{(4)}\right),\\
\lambda_i\left(\mathbf{W}^{(\alpha)}\right) &= b_{33i}x_\alpha + f_{i\beta 33}\delta_{\beta 3}x_\alpha + \lambda_i\left(\mathbf{U}^{(\alpha)}\right),\\
\lambda_i\left(\mathbf{W}^{(3)}\right) &= b_{33i} + f_{i\beta 33}\delta_{\beta 3} + \lambda_i\left(\mathbf{U}^{(3)}\right),\\
\lambda_i\left(\mathbf{W}^{(4)}\right) &= -\varepsilon_{3\alpha\beta}b_{3\alpha i}x_\beta - \varepsilon_{3\gamma\beta}f_{ik\gamma 3}\delta_{k3}x_\beta + \lambda_i\left(\mathbf{U}^{(4)}\right),\\
\mathsf{s}\left(\mathbf{W}^{(\alpha)}\right) &= -\mathsf{a}_{33}x_\alpha - e_{33\beta}\delta_{\beta 3}x_\alpha + \mathsf{s}\left(\mathbf{U}^{(\alpha)}\right)\\
\mathsf{s}\left(\mathbf{W}^{(3)}\right) &= -\mathsf{a}_{33} - e_{33\beta}\delta_{\beta 3} + \mathsf{s}\left(\mathbf{U}^{(3)}\right)\\
\mathsf{s}\left(\mathbf{W}^{(4)}\right) &= \varepsilon_{3\alpha\beta}\mathsf{a}_{\alpha 3}x_\beta + \varepsilon_{3\gamma\beta}e_{3\gamma k}\delta_{k3}x_\beta + \mathsf{s}\left(\mathbf{U}^{(4)}\right).
\end{aligned}
\tag{2.1.37}
$$

Din relațiile (2.1.30), (2.1.36) și (2.1.37) se poate deduce că

$$
\begin{gathered}
\tau_{\alpha i,\,\alpha}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \eta_{\alpha i,\,\alpha}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) = 0,\ \mu_{\alpha jk,\,\alpha}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \eta_{jk}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) = 0,\\
\lambda_{\alpha,\,\alpha}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \mathsf{s}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) = 0 \ \text{în}\ D.
\end{gathered}
\tag{2.1.38}
$$

În mod similar, din relațiile (2.1.31), (2.1.36) și (2.1.37) se poate deduce că

$$
\tau_{\alpha i}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)n_\alpha + \eta_{\alpha i}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)n_\alpha = 0,\ \mu_{\alpha jk}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)n_\alpha = 0,\ \lambda_\alpha\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)n_\alpha = 0 \ \text{ pe }\ \partial D. \tag{2.1.39}
$$

Luând în considerare relațiile (2.1.22), (2.1.36), (2.1.38) și (2.1.39), obținem următoarele două ecuații

$$
\begin{gathered}
\mathcal{R}_\alpha\left(\mathbf{W}^{(0)}\right) - \int_D \sum_{s=1}^{4}\left[\tau_{3\alpha}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \eta_{3\alpha}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]dA -\\
-\int_D \sum_{s=1}^{4}\left\{\left[x_\alpha\tau_{3\beta}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]_{,\beta} + \left[x_\alpha\eta_{3\beta}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]_{,\beta}\right\}dA = 0,
\end{gathered}
\tag{2.1.40}
$$

$$
\mathcal{R}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{W}^{(0)}\right) - \int_D \sum_{s=1}^{4}\mu_{3\alpha\beta}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)dA - \int_D \sum_{s=1}^{4}\left[x_\alpha\,\mu_{3\beta\gamma}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]_{,\gamma}dA = 0. \tag{2.1.41}
$$

Se observă că dacă $\left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \sigma^0\right)$ este o soluție din clasa noastră, adică $\left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \sigma^0\right) \in (S-V)_s$, atunci, prin utilizarea notațiilor

$$
\begin{gathered}
C_{3s} = \int_D\left[\tau_{33}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \eta_{33}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]dA, C_{\beta s} = \int_D x_\beta\left[\tau_{33}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \eta_{33}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]dA,\\
C_{4s} = \int_D \varepsilon_{3\alpha\beta}x_\alpha\left[\tau_{3\beta}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right) + \eta_{3\beta}\left(\mathbf{W}^{(s)}\right)\right]dA,\ s = 1,2,3,4
\end{gathered}
$$

obținem

$$\mathcal{R}_3\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{s=1}^{4}a_sC_{3s},\ \mathcal{M}_\alpha\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{s=1}^{4}\varepsilon_{3\alpha\beta}a_sC_{\beta s},\ \mathcal{M}_3\left(\mathbf{W}^{(0)}\right)=\sum_{s=1}^{4}a_sC_{4s}.$$

2.2 O generalizare cu deformație de ordin fracționar pentru medii termoelastice dipolare cu dublă porozitate

Această secțiune continuă studiul materialelor termoelastice dipolare, care sunt un caz special al mecanicii mediilor continue multipolare. Această teorie permite considerarea unei structuri cu dublă porozitate : o macroporozitate asociată porilor din material și o microporozitate care constă în fisurile din scheletul poros. Construim un model matematic pentru materiale dipolare care au o structură dublu poroasă prin considerarea unei relații Duhamel-Neumann între tensiune și deformație de ordin fracționar. Conducția termică este descrisă de ecuațiile lui Cattaneo. Obținem astfel ecuațiile constitutive ale teoriei liniare a termoelasticității cu deformație de ordin fracționar. În final, considerăm cazul izotrop în condiții de deformare plană pentru a realiza simulări numerice pentru probe de cupru poros.

2.2.1 Preliminarii

În această secțiune studiem un mediu termoelastic dipolar cu dublă porozitate care ocupă un domeniu mărginit Ω al spațiului euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{1,1}$. Închiderea lui Ω se notează cu $\bar{\Omega}$.

Mișcarea corpului este descrisă de vectorul deplasare $u=(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ și de tensorul dipolar $\phi=(\phi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$. Cel de-al doilea apare deoarece presupunem [112] că fiecare punct material este un micromediu care are un microvolum Ω'. În cadrul acestui microvolum, poziția este definită în raport cu un nou sistem de axe Ox_i', care sunt paralele cu axele Ox_i, respectiv și a căror origine este fixată în centrul de masă al microvolumului și se mută odată cu deplasarea u_i. În cadrul lui Ω' se definește un vector microdeplasare u_j', care, în cel mai simplu caz, este o funcție liniară de poziție în cadrul microvolumului. Întrucât deformarea mediului este presupusă omogenă [112], are loc $u_j'(x_i,x_i',t)=x_i'\phi_{ij}(x_i,t)$, unde partea simetrică a tensorului $\phi_{ij}=u_{j,i'}'$ este microdeformația mediului, iar partea sa antisimetrică este microrotația mediului.

Presiunea datorată porilor este reprezentată prin funcția φ și presiunea datorată fisurilor este caracterizată prin funcția ψ.

Ecuațiile de mișcare pentru un mediu termoelastic dipolar cu dublă porozitate sunt [64], [94]

$$\begin{aligned}&(t_{ji}+\eta_{ji})_{,j}+\rho_0F_i=\rho_0\ddot{u}_i \text{ în } \Omega\times(0,\infty)\\&\mu_{ijk,i}+\eta_{jk}+\rho_0M_{jk}=I_{ks}\ddot{\phi}_{js} \text{ în } \Omega\times(0,\infty)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Ecuația forțelor echilibrate este [94]

$$\begin{aligned}&\sigma_{i,i}+\xi+\rho_0G=\kappa_1\ddot{\varphi} \text{ in } \Omega\times(0,\infty)\\&\tau_{i,i}+\zeta+\rho_0L=\kappa_2\ddot{\psi} \text{ in } \Omega\times(0,\infty)\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Variabilele din ecuațiile de mai sus au interpretările fizice descrise în Tabelul 2.1 și Tabelul 2.2.

În contextul teoriei liniare, ecuația energiei este [94]

$$\rho_0T\dot{\eta}=q_{i,i}+\rho_0Q,\quad \text{în}\quad \Omega\times(0,\infty).\tag{2.2.3}$$

Utilizăm notațiile

$$t_i:=(t_{ji}+\eta_{ji})n_j,\mu_{jk}:=\mu_{ijk}n_i,\sigma:=\sigma_in_i,\tau:=\tau_in_i,q:=q_in_i \text{ pe } \partial\Omega,\tag{2.2.4}$$

Tabelul 2.1 – Interpretare fizică

t_{ij}	componentele tensorului de tensiune Cauchy
η_{ij}	componentele tensorului de tensiune relativ
μ_{ijk}	componentele tensorului de tensiune dublu
ρ_0	densitatea constantă a mediului în configurația de referință
I_{ks}	coeficienții de microinerție
F_i	forța masică pe unitate de masă
M_{jk}	forța masică dipolară pe unitate de masă
σ	vectorul tensiune echilibrată asociată porilor
τ	vectorul tensiune echilibrată asociată fisurilor
ξ	forța masică echilibrată intrinsecă asociată porilor
ζ	forța masică echilibrată intrinsecă asociată fisurilor
G	forța masică echilibrată extrinsecă pe unitate de masă asociată porilor
L	forța masică echilibrată extrinsecă pe unitate de masă asociată fisurilor
κ_1, κ_2	coeficienții inerției echilibrate

Tabelul 2.2 – Interpretare fizică

u_i	componentele câmpului vectorial deplasare
ϕ_{ij}	componentele câmpului tensorial dipolar
φ	presiunea din pori
ψ	presiunea din fisuri
θ	temperatura
q_i	vectorul flux de căldură
η	entropia
Q	sursa de căldură pe unitate de masă
S	sursa de căldură pe unitate de volum, $S = \rho_0 Q$

unde n_i sunt componentele versorului normalei exterioare la suprafață.

Tensorul de deformație $\varepsilon_{ij}(u)$ (macrodeformația), tensorul de deformație relativă $\kappa_{ij}(u, \phi)$ și tensorul de pantă a microdeformației $\chi_{ijk}(\phi)$ asociate cu u și ϕ sunt definite prin intermediul următoarelor ecuații

$$2\varepsilon_{ij}(u) = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad \kappa_{ij}(u, \phi) = u_{j,i} - \phi_{ij}, \quad \chi_{ijk}(\phi) = \phi_{jk,i}, \tag{2.2.5}$$

care sunt numite ecuații geometrice.

La sistemul de ecuații de mai sus se adaugă următoarele condiții inițiale

$$\begin{aligned} &u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x), \\ &\phi_{ij}(x,0) = \phi_{ij}^0(x), \quad \dot{\phi}_{ij}(x,0) = \phi_{ij}^1(x), \\ &\varphi(x,0) = \varphi^0(x), \quad \dot{\varphi}(x,0) = \varphi^1(x), \\ &\psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \dot{\psi}(x,0) = \psi^1(x), \\ &T(x,0) = T_0(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

și condiții la limită

$$\begin{aligned} &u_i(x,t) = \tilde{u}_i, \quad \phi_{ij}(x,t) = \tilde{\phi}_{ij}, \\ &\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}, \quad \psi(x,t) = \tilde{\psi}, \\ &T(x,t) = \tilde{T}, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

În (2.2.6) și (2.2.7) $u_i^0, u_i^1, \phi_{ij}^0, \phi_{ij}^1, \varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1, T_0$ și $\tilde{u}_i, \tilde{\phi}_{ij}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{T}$ sunt funcții cunoscute.

Definiția 2.2.1 *Se numește soluție a primei probleme la limită cu date inițiale, în contextul termoelasticității dipolare cu dublă porozitate, o mulțime ordonată* $(u, \phi, \varphi, \psi, T)$ *care satisface sistemul de ecuații de bază (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), condițiile inițiale (2.2.6) și condițiile la limită (2.2.7) în cilindrul* $\Omega \times (0, \infty)$.

Observația 2.2.1 *O altă posibilitate este considerarea celei de-a doua probleme la limită cu date inițiale, care constă în înlocuirea condițiilor la limită (2.2.7) prin condițiile la limită*

$$\begin{aligned} &t_i(x,t) = \tilde{t}_i, \quad \mu_{jk}(x,t) = \tilde{\mu}_{jk}, \\ &\sigma(x,t) = \tilde{\sigma}, \quad \tau(x,t) = \tilde{\tau}, \\ &q(x,t) = \tilde{q}, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

unde $\tilde{t}_i, \tilde{\mu}_{jk}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ *şi* $\tilde{q}$ *sunt funcții cunoscute.*

Legea de conservare a masei este [111]

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_0 \, \mathrm{d}V = 0 \tag{2.2.9}$$

de unde se poate deduce condiția de continuitate în forma

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 dV) = 0. \tag{2.2.10}$$

Energia internă pe unitatea de masă se notează cu e. Principiul conservării energiei este [94]

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\rho_0 \dot{u}_i \ddot{u}_i + I_{ks}\dot{\phi}_{jk}\ddot{\phi}_{js} + \kappa_1 \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \kappa_2 \dot{\psi}\ddot{\psi}) \, \mathrm{d}V + \int_\Omega \rho_0 \dot{e} \, \mathrm{d}V = \\ &= \int_\Omega (\rho_0 F_i \dot{u}_i + \rho_0 M_{jk}\dot{\phi}_{jk} + \rho_0 G\dot{\varphi} + \rho_0 L\dot{\psi} + S) \, \mathrm{d}V + \\ &+ \int_{\partial\Omega} (t_i \dot{u}_i + \mu_{jk}\dot{\phi}_{jk} + \sigma\dot{\varphi} + \tau\dot{\psi} + q) \, \mathrm{d}A. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Ecuațiile Cattaneo de conducție a căldurii sunt

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -K_{ij}T_{,j}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{2.2.12}$$

unde K_{ij} este tensorul de conductivitate termică și τ_0 este timpul de relaxare. Aceste ecuații înlocuiesc legea lui Fourier.

Caputo a introdus derivata fracționară în raport cu timpul

$$D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} \, \mathrm{d}\tau, \quad 0 \le \gamma \le 1. \tag{2.2.13}$$

Energia liberă Helmholtz ϕ se exprimă în funcție de energia internă și de funcția entropie și este definită astfel

$$\phi = e - T\eta. \tag{2.2.14}$$

Propunem următoarele ecuații constitutive pentru un material termoelastic dipolar cu dublă porozitate

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \kappa_{ij}, \chi_{ijk}, \varphi, \varphi_{,i}, \psi, \psi_{,i}, T, T_{,i}), \\ e &= e(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \kappa_{ij}, \chi_{ijk}, \varphi, \varphi_{,i}, \psi, \psi_{,i}, T, T_{,i}), \\ \eta &= \eta(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \kappa_{ij}, \chi_{ijk}, \varphi, \varphi_{,i}, \psi, \psi_{,i}, T, T_{,i}), \\ q &= q(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \kappa_{ij}, \chi_{ijk}, \varphi, \varphi_{,i}, \psi, \psi_{,i}, T, T_{,i}), \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

unde

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = (1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{ij} \tag{2.2.16}$$

și τ este parametrul de relaxare mecanică.

Inegalitatea Clausius-Duhem este îndeplinită dacă ϕ, η nu depind de $T_{,i}$.

Energia liberă poate fi reprezentată astfel [21]

$$\begin{aligned}
&\rho_0\phi(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \kappa_{ij}, \chi_{ijk}, \varphi, \varphi_{,i}, \psi, \psi_{,i}, \theta) = \frac{1}{2}C_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{mn} + G_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\kappa_{mn} + \\
&+ F_{ijmnr}\tilde{\varepsilon}_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\kappa_{ij}\kappa_{mn} + D_{ijmnr}\kappa_{ij}\chi_{mnr} + \\
&+ \frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + A_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}\varphi + B_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}\psi - \alpha_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}\theta + C_{ij}\kappa_{ij}\varphi + \\
&+ D_{ij}\kappa_{ij}\psi - \beta_{ij}\kappa_{ij}\theta + E_{ijk}\chi_{ijk}\varphi + F_{ijk}\chi_{ijk}\psi - \gamma_{ijk}\chi_{ijk}\theta + \\
&+ \frac{1}{2}a_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j} + b_{ij}\varphi_{,i}\psi_{,j} + \frac{1}{2}c_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + \frac{1}{2}\alpha_1\varphi^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\psi^2 + \alpha_3\varphi\psi - \\
&- \gamma_1\varphi\theta - \gamma_2\psi\theta - \frac{1}{2}a\theta^2
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

unde $T = T_0 + \theta$.

În expresia energiei libere, coeficienții caracteristici materialului considerat sunt funcții de clasă $C^1(\bar{\Omega})$ și satisfac următoarele relații de simetrie

$$\begin{aligned}
&C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn}, \quad B_{ijmn} = B_{mnij}, \quad G_{ijmn} = G_{jimn}, \\
&F_{ijmnr} = F_{jimnr}, \quad A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}, \quad A_{ij} = A_{ji}, \\
&B_{ij} = B_{ji}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Funcțiile utilizate sunt considerate suficient de netede.

2.2.2 Cazul anizotrop

Lema 2.2.1 *Derivata energiei libere în raport cu timpul este dată de următoarea formulă*

$$\begin{aligned}
&\rho_0\dot{\phi} = (t_{ji} + \eta_{ji})\dot{u}_{i,j} + \mu_{ijk}\dot{\phi}_{jk,i} - \eta_{jk}\dot{\phi}_{jk} + \sigma_i\dot{\varphi}_{,i} - \xi\dot{\varphi} + \\
&+ \tau_i\dot{\psi}_{,i} - \zeta\dot{\psi} + q_{i,i} + \rho_0 Q - \rho_0\eta\dot{T} - \rho_0 T\dot{\eta}.
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Teorema 2.2.1 *Ecuațiile constitutive ale teoriei termoelasticității generalizate cu deformație de ordin fracționar pentru materiale dipolare anizotrope cu dublă porozitate sunt următoarele*

$$\begin{aligned}
t_{ij} &= C_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{mn} + G_{ijmn}\kappa_{mn} + F_{ijmnr}\chi_{mnr} + A_{ij}\varphi + B_{ij}\psi - \alpha_{ij}\theta = \\
&= C_{ijmn}(1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\kappa_{mn} + F_{ijmnr}\chi_{mnr} + \\
&+ A_{ij}\varphi + B_{ij}\psi - \alpha_{ij}\theta,
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{ij} &= G_{mnij}\tilde{\varepsilon}_{mn} + B_{ijmn}\kappa_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} + C_{ij}\varphi + D_{ij}\psi - \beta_{ij}\theta = \\
&= G_{mnij}(1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\kappa_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} + \\
&+ C_{ij}\varphi + D_{ij}\psi - \beta_{ij}\theta,
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{ijk} &= F_{mnijk}(1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\kappa_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} + \\
&+ E_{ijk}\varphi + F_{ijk}\psi - \gamma_{ijk}\theta,
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

și

$$\begin{aligned}
&\xi = -A_{ij}(1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{ij} - C_{ij}\kappa_{ij} - E_{ijk}\chi_{ijk} - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta, \\
&\zeta = -B_{ij}(1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{ij} - D_{ij}\kappa_{ij} - F_{ijk}\chi_{ijk} - \alpha_2\psi - \alpha_3\varphi + \gamma_2\theta, \\
&\sigma_i = a_{ij}\varphi_{,j} + b_{ij}\psi_{,j}, \\
&\tau_i = b_{ji}\varphi_{,j} + c_{ij}\psi_{,j}, \\
&\rho_0\eta = \alpha_{ij}(1 + \tau^{\gamma} D_t^{\gamma})\varepsilon_{ij} + \beta_{ij}\kappa_{ij} + \gamma_{ijk}\chi_{ijk} + \gamma_1\varphi + \gamma_2\psi + a\theta.
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Teorema 2.2.2 *În contextul teoriei termoelasticității generalizate cu deformație de ordin fracționar pentru materiale dipolare cu dublă porozitate, din ecuațiile Cattaneo ale căldurii se deduce următoarea formulă*

$$(K_{ij}T_{,j})_{,i} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)[T_0\alpha_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} + T_0\beta_{ij}\kappa_{ij} + \\ + T_0\gamma_{ijk}\chi_{ijk} + T_0\gamma_1\varphi + T_0\gamma_2\psi + aT_0T] + \rho_0\left(1 + \tau_0\frac{\partial}{\partial t}\right)Q. \tag{2.2.24}$$

2.2.3 Cazul izotrop

Pentru realizarea unor simulări numerice reducem problema termoelasticității dipolare cu dublă porozitate la cazul izotrop. Considerăm expresia energiei libere (2.2.17). În cazul unui material izotrop cu simetrie față de centru numărul coeficienților independenți se reduce semnificativ și se poate considera că tensorii izotropi de rang impar sunt zero. De aceea considerăm că $F_{ijmnr}, D_{ijmnr}, E_{ijk}, F_{ijk}$ și γ_{ijk} se anulează. Astfel obținem

$$C_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu_1\delta_{im}\delta_{jn} + \mu_2\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{2.2.25}$$

$$G_{ijmn} = g_1\delta_{ij}\delta_{mn} + g_2\delta_{im}\delta_{jn} + g_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{2.2.26}$$

$$B_{ijmn} = b_1\delta_{ij}\delta_{mn} + b_2\delta_{im}\delta_{jn} + b_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{2.2.27}$$

$$A_{ijkmnr} = a_1\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nr} + a_2\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{rm} + a_3\delta_{ij}\delta_{kr}\delta_{mn} + a_4\delta_{jk}\delta_{im}\delta_{nr} + \\ + a_5\delta_{jk}\delta_{in}\delta_{rm} + a_6\delta_{jk}\delta_{ir}\delta_{mn} + a_7\delta_{ki}\delta_{jm}\delta_{nr} + a_8\delta_{ki}\delta_{jn}\delta_{rm} + \\ + a_9\delta_{ki}\delta_{jr}\delta_{mn} + a_{10}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kr} + a_{11}\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{ir} + a_{12}\delta_{km}\delta_{in}\delta_{jr} + \\ + a_{13}\delta_{im}\delta_{jr}\delta_{kn} + a_{14}\delta_{jm}\delta_{kr}\delta_{in} + a_{15}\delta_{km}\delta_{ir}\delta_{jn}, \tag{2.2.28}$$

$$A_{ij} = d_1\delta_{ij}, \quad B_{ij} = d_2\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}, \quad C_{ij} = d_3\delta_{ij}, \quad D_{ij} = d\delta_{ij}, \tag{2.2.29}$$

$$\beta_{ij} = \beta\delta_{ij}, \quad a_{ij} = d_4\delta_{ij}, \quad b_{ij} = d_5\delta_{ij}, \quad c_{ij} = d_6\delta_{ij}, \quad I_{rs} = I\delta_{rs}, \tag{2.2.30}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Utilizând relațiile (2.2.18), simetriile $C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn}$ implică $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, simetriile $G_{ijmn} = G_{jimn}$ implică $g_2 = g_3$, iar simetriile $A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}$ implică $a_1 = a_6$, $a_2 = a_9$, $a_5 = a_7$ și $a_{11} = a_{12}$.

Teorema 2.2.3 *Ecuațiile constitutive ale teoriei termoelasticității generalizate cu deformație de ordin fracționar pentru materiale dipolare izotrope cu dublă porozitate sunt*

$$t_{pq} = \lambda\tilde{\varepsilon}_{ii}\delta_{pq} + 2\mu\tilde{\varepsilon}_{pq} + g_1\delta_{pq}\kappa_{nn} + g_2\kappa_{pq} + g_2\kappa_{qp} + d_1\delta_{pq}\varphi + d_2\delta_{pq}\psi - \alpha\delta_{pq}\theta, \tag{2.2.31}$$

$$\eta_{pq} = g_1\tilde{\varepsilon}_{ii}\delta_{pq} + 2g_2\tilde{\varepsilon}_{pq} + b_1\kappa_{ii}\delta_{pq} + b_2\kappa_{pq} + b_3\kappa_{qp} + d_3\delta_{pq}\varphi + d\delta_{pq}\psi - \beta\delta_{pq}\theta, \tag{2.2.32}$$

$$\mu_{pqr} = a_1(\chi_{iip}\delta_{qr} + \chi_{rnn}\delta_{pq}) + a_2(\chi_{iiq}\delta_{pr} + \chi_{mrm}\delta_{pq}) + a_3\chi_{iir}\delta_{pq} + \\ + a_4\chi_{pkk}\delta_{qr} + a_5(\chi_{qkk}\delta_{pr} + \chi_{mpm}\delta_{qr}) + a_8\chi_{iqi}\delta_{pr} + a_{10}\chi_{pqr} + \\ + a_{11}(\chi_{rpq} + \chi_{qrp}) + a_{13}\chi_{prq} + a_{14}\chi_{qpr} + a_{15}\chi_{rqp}, \tag{2.2.33}$$

$$\xi = -(d_1\tilde{\varepsilon}_{ii} + d_3\kappa_{ii} + \alpha_1\varphi + \alpha_3\psi - \gamma_1\theta), \tag{2.2.34}$$

$$\zeta = -(d_2\tilde{\varepsilon}_{ii} + d\kappa_{ii} + \alpha_2\psi + \alpha_3\varphi - \gamma_2\theta), \tag{2.2.35}$$

$$\sigma_i = d_4\varphi_{,i} + d_5\psi_{,i}, \tag{2.2.36}$$

$$\tau_i = d_5\varphi_{,i} + d_6\psi_{,i}, \tag{2.2.37}$$

$$\rho_0\eta = \alpha\tilde{\varepsilon}_{ii} + \beta\kappa_{ii} + \gamma_1\varphi + \gamma_2\psi + a\theta. \tag{2.2.38}$$

Înlocuim formulele de mai sus în ecuațiile (2.2.1) și (2.2.2) pentru a obține următoarele ecuații în funcție de u, ϕ, φ, ψ și θ în cazul izotrop.

Lema 2.2.2 *Ecuațiile satisfăcute de u, ϕ, φ, ψ și θ în cazul termoelasticității generalizate cu deformație de ordin fracționar pentru materiale dipolare izotrope cu dublă porozitate sunt*

$$\begin{aligned}&(\mu + 2g_2 + b_2)u_{q,pp} + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3)u_{p,qp} + \\ &+ (\mu + g_2)\tau^\gamma D_t^\gamma u_{q,pp} + (\lambda + \mu + g_1 + g_2)\tau^\gamma D_t^\gamma u_{p,qp} - (g_1 + b_1)\phi_{pp,q} - \\ &- (g_2 + b_2)\phi_{pq,p} - (g_2 + b_3)\phi_{qp,p} + (d_1 + d_3)\varphi_{,q} + (d_2 + d)\psi_{,q} - \\ &- (\alpha + \beta)\theta_{,q} + \rho_0 F_q = \rho_0\ddot{u}_q,\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

$$\begin{aligned}&a_1\phi_{ip,ip}\delta_{qr} + a_1\phi_{nn,rq} + a_2\phi_{iq,ir} + a_2\phi_{rm,mq} + a_3\phi_{ir,iq} + a_4\phi_{kk,pp}\delta_{qr} + \\ &+ a_5\phi_{kk,qr} + a_5\phi_{pm,mp}\delta_{qr} + a_8\phi_{qi,ir} + a_{10}\phi_{qr,pp} + a_{11}\phi_{pq,rp} + \\ &+ a_{11}\phi_{rp,qp} + a_{13}\phi_{rq,pp} + a_{14}\phi_{pr,qp} + a_{15}\phi_{qp,rp} + \\ &+ g_1(1 + \tau^\gamma D_t^\gamma)u_{i,i}\delta_{qr} + g_2(1 + \tau^\gamma D_t^\gamma)(u_{q,r} + u_{r,q}) + \\ &+ b_1(u_{i,i} - \phi_{ii})\delta_{qr} + b_2(u_{r,q} - \phi_{qr}) + b_3(u_{q,r} - \phi_{rq}) + d_3\delta_{qr}\varphi + \\ &+ d\delta_{qr}\psi - \beta\delta_{qr}\theta + \rho_0 M_{qr} = I\ddot{\phi}_{qr},\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

$$\begin{aligned}&d_4\varphi_{,ii} + d_5\psi_{,ii} - (d_1 + d_3)u_{i,i} - d_1\tau^\gamma D_t^\gamma u_{i,i} + d_3\phi_{ii} - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \\ &+ \gamma_1\theta + \rho_0 G = \kappa_1\ddot{\varphi},\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

$$\begin{aligned}&d_5\varphi_{,ii} + d_6\psi_{,ii} - (d_2 + d)u_{i,i} - d_2\tau^\gamma D_t^\gamma u_{i,i} + d\phi_{ii} - \alpha_2\psi - \alpha_3\varphi + \\ &+ \gamma_2\theta + \rho_0 L = \kappa_2\ddot{\psi}.\end{aligned} \tag{2.2.42}$$

În continuare, simplificăm modelul matematic prin considerarea acestor ecuații în condițiile de deformare plană, la fel ca în [112]. În acest caz, au loc [112], $u_3 = u_{3'}' = 0$ și $\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_{3'}'} = 0$, ceea ce conduce la $\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{i3} = 0$, $\phi_{3j} = \phi_{i3} = 0$, $\kappa_{3j} = \kappa_{i3} = 0$, $\chi_{3ij} = \chi_{k3j} = \chi_{ki3} = 0$, $t_{i3} = t_{3i} = 0$ pentru $i = 1, 2$, în timp ce $t_{33} \neq 0$, $\eta_{i3} = \eta_{3j} = 0$ pentru $i, j = 1, 2$, iar $\eta_{33} \neq 0$, $\mu_{k3j} = \mu_{ki3} = 0$ pentru $i, j, k = 1, 2$, iar $\mu_{k33} \neq 0$ pentru $k = 1, 3$. În general [112], doar șase variabile independente sunt diferite de zero : u_1, u_2, ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{12} și ϕ_{21}. Considerăm că $F_q = 0$, $M_{qr} = 0$, $G = 0$ și $L = 0$.

În continuare considerăm problema deformării plane (biaxiale) a unei probe dreptunghiulare după modelul din [112] pentru $\tau = 0$ și pentru starea de echilibru din elasticitatea dipolară izotropă cu dublă porozitate.

Teorema 2.2.4 (Soluția exactă în cazul izotrop) *În cazul staționar al elasticității dipolare izotrope cu dublă porozitate și în condiții de deformare plană, soluția exactă este*

$$u_1 = \frac{1}{\Delta}(b_2 + b_3)^2(-2\alpha_3 d_1 d_2 + \alpha_1 d_2^2 + \alpha_3^2\lambda + \alpha_2(d_1^2 - \alpha_1\lambda))\tilde{t}_2 x_1, \tag{2.2.43}$$

$$\begin{aligned}u_2 = &-\frac{1}{\Delta}(b_2 + b_3)(-2\alpha_3(b_2 + b_3)d_1 d_2 + \alpha_1(b_2 + b_3)d_2^2 + \\ &+ \alpha_3^2(-4g_2^2 + (b_2 + b_3)(\lambda + 2\mu)) + \\ &+ \alpha_2(4\alpha_1 g_2^2 + (d_1^2 - \alpha_1(\lambda + 2\mu))(b_2 + b_3)\tilde{t}_2 x_2,\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{\Delta}(b_2+b_3)(b_2+b_3+2g_2)(-2\alpha_3 d_1 d_2 + \alpha_1 d_2^2 + \alpha_3^2\lambda + \alpha_2(d_1^2 - \alpha_1\lambda))\tilde{t}_2, \tag{2.2.45}$$

$$\begin{aligned}\phi_{22} = &-\frac{1}{\Delta}(b_2+b_3+2g_2)(-2\alpha_3(b_2+b_3)d_1 d_2 + \alpha_1(b_2+b_3)d_2^2 + \\ &+ \alpha_3^2(-4g_2^2 + (b_2+b_3)(\lambda+2\mu)) + \\ &+ \alpha_2(4\alpha_1 g_2^2 + (d_1^2 - \alpha_1(\lambda+2\mu))(b_2+b_3)))\tilde{t}_2,\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\Delta_1}(b_2+b_3)(\alpha_2 d_1 - \alpha_3 d_2)\tilde{t}_2, \tag{2.2.47}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\Delta_1}(b_2+b_3)(\alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2)\tilde{t}_2, \tag{2.2.48}$$

unde

$$\begin{aligned}\Delta_1 = &-2\alpha_3(b_2+b_3)d_1 d_2 + \alpha_1(b_2+b_3)d_2^2 + \\ &+ \alpha_3^2(-2g_2^2 + (b_2+b_3)(\lambda+\mu)) + \\ &+ \alpha_2(2\alpha_1 g_2^2 + b_2(d_1^2 - \alpha_1(\lambda+\mu)) + b_3(d_1^2 - \alpha_1(\lambda+\mu))),\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

$$\Delta = 4(2g_2^2 - (b_2+b_3)\mu)\Delta_1. \tag{2.2.50}$$

2.3 Simulări numerice pentru medii termoelastice dipolare cu dublă porozitate

În această secțiune studiem din punct de vedere numeric soluția sistemului de ecuații cu derivate parțiale asociate teoriei termoelasticității dipolare cu dublă porozitate în cazul izotrop. Scriem formularea variațională și introducem aproximări discrete utilizând metoda elementului finit pentru a aproxima domeniul și schema lui Euler implicită pentru a discretiza derivatele de ordinul întâi în raport cu timpul. Cu ajutorul acestor algoritmi, realizăm simulări numerice pentru a arăta comportarea soluției. În acest sens, utilizăm programul specializat FreeFem++. Rezultatele din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea [24].

2.3.1 Modelul matematic care se discretizează cu ajutorul metodei elementului finit

Vom studia comportamentul unui corp care se supune următoarelor ecuații de mișcare pentru vectorul deplasare, tensorul de microdeformații, presiunea din pori, presiunea din fisuri și temperatura

$$\begin{aligned}&(t_{ji} + \eta_{ji})_{,j} + \rho_0 F_i = \rho_0 \ddot{u}_i, \\ &\mu_{ijk,i} + \eta_{jk} + \rho_0 M_{jk} = I_{ks}\ddot{\phi}_{js}, \\ &\sigma_{i,i} + \xi + \rho_0 G = \kappa_1 \ddot{\varphi}, \\ &\tau_{i,i} + \zeta + \rho_0 L = \kappa_2 \ddot{\psi}, \\ &\rho_0 T_0 \dot{\eta} = q_{i,i} + \rho_0 Q\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

în $\Omega \times (0,\infty)$. Mai jos sunt ecuațiile constitutive în forma izotropă [26]

$$
\begin{aligned}
&t_{pq} = \lambda\varepsilon_{ii}\delta_{pq} + 2\mu\varepsilon_{pq} + g_1\delta_{pq}\kappa_{nn} + g_2\kappa_{pq} + g_2\kappa_{qp} + d_1\delta_{pq}\varphi + d_2\delta_{pq}\psi - \alpha\delta_{pq}\theta,\\
&\eta_{pq} = g_1\varepsilon_{ii}\delta_{pq} + 2g_2\varepsilon_{pq} + b_1\kappa_{ii}\delta_{pq} + b_2\kappa_{pq} + b_3\kappa_{qp} + d_3\delta_{pq}\varphi + d\delta_{pq}\psi - \beta\delta_{pq}\theta,\\
&\mu_{pqr} = a_1(\chi_{iip}\delta_{qr} + \chi_{rnn}\delta_{pq}) + a_2(\chi_{iiq}\delta_{pr} + \chi_{mrm}\delta_{pq}) +\\
&\qquad + a_3\chi_{iir}\delta_{pq} + a_4\chi_{pkk}\delta_{qr} + a_5(\chi_{qkk}\delta_{pr} + \chi_{mpm}\delta_{qr}) + a_8\chi_{iqi}\delta_{pr} +\\
&\qquad + a_{10}\chi_{pqr} + a_{11}(\chi_{rpq} + \chi_{qrp}) + a_{13}\chi_{prq} + a_{14}\chi_{qpr} + a_{15}\chi_{rqp},\\
&\xi = -(d_1\varepsilon_{ii} + d_3\kappa_{ii} + \alpha_1\varphi + \alpha_3\psi - \gamma_1\theta),\\
&\zeta = -(d_2\varepsilon_{ii} + d\kappa_{ii} + \alpha_2\psi + \alpha_3\varphi - \gamma_2\theta),\\
&\sigma_i = d_4\varphi_{,i} + d_5\psi_{,i},\\
&\tau_i = d_5\varphi_{,i} + d_6\psi_{,i},\\
&\rho_0\eta = \alpha\varepsilon_{ii} + \beta\kappa_{ii} + \gamma_1\varphi + \gamma_2\psi + a\theta.
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

În expresiile de mai sus, am utilizat următoarele relații geometrice

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = u_{i,j} + u_{j,i},\\
&\kappa_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi}) = u_{j,i} - \phi_{ij},\\
&\chi_{ijk}(\boldsymbol{\phi}) = \phi_{jk,i}.
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

Variabilele independente din sistemul de ecuații cu derivate parțiale satisfac următoarele condiții inițiale

$$
\begin{aligned}
&u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x),\\
&\phi_{ij}(x,0) = \phi_{ij}^0(x), \quad \dot{\phi}_{ij}(x,0) = \phi_{ij}^1(x),\\
&\varphi(x,0) = \varphi^0(x), \quad \dot{\varphi}(x,0) = \varphi^1(x),\\
&\psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \dot{\psi}(x,0) = \psi^1(x),\\
&\theta(x,0) = \theta^0(x), \quad x \in \Omega
\end{aligned}
\tag{2.3.4}
$$

și condiții la limită

$$
\begin{aligned}
&u_i(x,t) = 0, \quad \phi_{ij}(x,t) = 0, \quad \varphi(x,t) = 0,\\
&\psi(x,t) = 0, \quad \theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty),
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

unde $u_i^0, u_i^1, \phi_{ij}^0, \phi_{ij}^1, \varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1, \theta^0$ sunt funcții date.

2.3.2 Formulare variațională

Pentru a realiza simulări numerice, este necesară formularea variațională corespunzătoare sistemului de ecuații cu derivate parțiale. Aceasta se obține prin înmulțirea ecuațiilor cu funcții test adecvate, prin integrarea pe Ω și prin utilizarea teoremei divergenței. Vom studia întregul sistem, această abordare fiind necesară în FreeFem++ pentru a impune condițiile la limită adecvate. Spațiile pentru soluție și pentru funcțiile test vor fi specificate în cele ce urmează.

Vom scrie formularea variațională pentru u_i corespunzătoare sistemului de ecuații (2.3.1)$_1$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho_0\ddot{u}_p z_p dV + \int_\Omega \{(\lambda+g_1)u_{i,i}z_{p,p} + (\mu+g_2)(u_{p,q}+u_{q,p})z_{q,p} +\\
&+ (g_1+b_1)u_{i,i}z_{p,p} + (g_2+b_2)u_{q,p}z_{q,p} + (g_2+b_3)u_{p,q}z_{q,p}\}\,dV =\\
&= \int_\Omega \rho_0 F_p z_p dV + \int_{\partial\Omega} (t_{pq}+\eta_{pq})z_q n_p dA + \int_\Omega \{(g_1+b_1)\phi_{ii}z_{p,p} +\\
&+ (g_2+b_2)\phi_{pq}z_{q,p} + (g_2+b_3)\phi_{qp}z_{q,p} - (d_1+d_3)\varphi z_{p,p} -\\
&-(d_2+d)\psi z_{p,p} + (\alpha+\beta)\theta z_{p,p}\}\,dV.
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

În formularea de mai sus, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ este o funcție suficient de netedă și satisface condiții la limită omogene.

Luând în considerare rezultatele de existență și unicitate, alegem condiții la limită nule pentru u_i. Astfel, nu avem deplasare la frontieră, este fixată. Dacă în loc de condiții la limită Dirichlet omogene alegem condiții la limită Neumann neomogene, atunci înseamnă că este aplicată o forță de suprafață externă. La fel ca în [50], alegem spațiul $[H_0^2(\Omega)]^3$ pentru funcția test și definim $Q_{\boldsymbol{u}} = L^2\left(0,T;[H_0^2(\Omega)]^3\right)$.

În continuare, scriem formularea variațională pentru ϕ_{ij}, cu funcția test $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ suficient de netedă

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega I\ddot{\phi}_{qr}\varphi_{qr}dV + \int_\Omega (a_1\phi_{ip,i}\varphi_{qq,p} + a_1\phi_{nn,r}\varphi_{pr,p} + a_2\phi_{iq,i}\varphi_{qp,p} + \\
&+ a_2\phi_{rm,m}\varphi_{pr,p} + a_3\phi_{ir,i}\varphi_{pr,p} + a_4\phi_{kk,p}\varphi_{qq,p} + a_5\phi_{kk,q}\varphi_{qp,p} + \\
&+ a_5\phi_{pm,m}\varphi_{qq,p} + a_8\phi_{qi,i}\varphi_{qp,p} + a_{10}\phi_{qr,p}\varphi_{qr,p} + a_{11}\phi_{pq,r}\varphi_{qr,p} + \\
&+ a_{11}\phi_{rp,q}\varphi_{qr,p} + a_{13}\phi_{rq,p}\varphi_{qr,p} + a_{14}\varphi_{qr,p}\phi_{pr,q} + a_{15}\varphi_{qr,p}\phi_{qp,r})\,dV + \\
&+ \int_\Omega (b_1\phi_{ii}\varphi_{qq} + b_2\phi_{qr}\varphi_{qr} + b_3\phi_{rq}\varphi_{qr})\,dV = \\
&= \int_{\partial\Omega} \mu_{pqr}\varphi_{qr}n_p dA + \int_\Omega [g_1u_{i,i}\varphi_{qq} + g_2(u_{q,r} + u_{r,q})\varphi_{qr} + b_1u_{i,i}\varphi_{qq} + \\
&+ b_2u_{r,q}\varphi_{qr} + b_3u_{q,r}\varphi_{qr} + d_3\varphi\varphi_{qq} + d\psi\varphi_{qq} - \beta\theta\varphi_{qq}]\,dV + \int_\Omega \rho_0 M_{qr}\varphi_{qr}dV.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Alegem spațiul $[H_0^2(\Omega)]^{3\times3}$ pentru funcția test și definim $Q_{\boldsymbol{\phi}} = L^2\left(0,T;[H_0^2(\Omega)]^{3\times3}\right)$.

În continuare, considerăm formularea variațională pentru câmpurile care descriu modificarea porozității din ecuațiile (2.3.1)$_3$ și (2.3.1)$_4$, la fel ca în [74]. În acest sens, definim următoarele produse scalare

$$\begin{aligned}
a(\varphi,w) &= \int_\Omega (d_4\varphi_{,i}w_{,i} + \alpha_1\varphi w)\,dV, \\
b(\psi,\omega) &= \int_\Omega (d_6\psi_{,i}\omega_{,i} + \alpha_2\psi\omega)\,dV.
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

În expresiile de mai sus, funcțiile $w(\boldsymbol{x})$ și $\omega(\boldsymbol{x})$ sunt suficient de netede.

La fel ca în [74], notăm cu spațiul Hilbert $H_\varphi(\Omega)$ închiderea mulțimii de funcții $w \in C^1(\Omega)$ în norma generată de produsul scalar $a(\varphi,w)$ din (2.3.8)$_1$. În mod similar, notăm cu spațiul Hilbert $H_\psi(\Omega)$ închiderea mulțimi de funcții $\omega \in C^1(\Omega)$ în norma generată de produsul scalar $b(\psi,\omega)$ din (2.3.8)$_2$.

La fel ca în [74], reamintim că pentru X un spațiu Banach cu norma $||\cdot||_X$, spațiul $L^2(0,T;X)$ este spațiul de funcții definit pe $[0,T]$ cu valori în X care satisfac condiția $\left(\int_0^T ||f(t)||_X^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = ||f||_{L^2(0,T;X)} < \infty$. Definim spațiile de funcții $Q_\varphi = L^2\left(0,T;H_\varphi(\Omega)\right)$ și $Q_\psi = L^2\left(0,T;H_\psi(\Omega)\right)$.

Scriem formularea variațională pentru φ

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \kappa_1\ddot{\varphi}w dV - \int_{\partial\Omega} \sigma_i w n_i dA + \int_\Omega (d_4\varphi_{,i}w_{,i} + d_5\psi_{,i}w_{,i})\,dV + \\
&+ \int_\Omega (d_1\varepsilon_{ii}w + d_3\kappa_{ii}w + \alpha_1\varphi w + \alpha_3\psi w - \gamma_1\theta w)\,dV - \int_\Omega \rho_0 G w dV = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Scriem formularea variațională pentru ψ

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \kappa_2\ddot{\psi}\omega dV - \int_{\partial\Omega} \tau_i\omega n_i dA + \int_\Omega (d_5\varphi_{,i}\omega_{,i} + d_6\psi_{,i}\omega_{,i})\,dV + \\
&+ \int_\Omega (d_2\varepsilon_{ii}\omega + d\kappa_{ii}\omega + \alpha_2\psi\omega + \alpha_3\varphi\omega - \gamma_2\theta\omega)\,dV - \int_\Omega \rho_0 L\omega dV = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Scriem formularea variațională pentru θ cu $\chi(\boldsymbol{x})$ o funcție suficient de netedă

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[(\alpha+\beta)\dot{u}_{i,i}T_0\chi-\beta\dot{\phi}_{ii}T_0\chi+\gamma_1\dot{\varphi}T_0\chi+\gamma_2\dot{\psi}T_0\chi+a\dot{\theta}T_0\chi\right]dV=\\&=\int_{\partial\Omega}q_i\chi n_i dA-\int_\Omega k\theta_{,i}\chi_{,i}dV+\int_\Omega\rho_0 S\chi dV.\end{aligned}\tag{2.3.11}$$

La fel ca în [50], alegem spațiul $H_0^1(\Omega)$ pentru funcția test și definim $Q_\theta=L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

Luând în considerare rezultatele de mai sus, funcțiile $\boldsymbol{u}\in Q_{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{\phi}\in Q_{\boldsymbol{\phi}}$, $\varphi\in Q_\varphi$, $\psi\in Q_\psi$, $\theta\in Q_\theta$ sunt soluțiile slabe ale problemei dinamice a termoelasticității dipolare cu porozitate dublă în cazul izotrop dacă au loc condițiile inițiale (2.3.4) și ecuațiile (2.3.6), (2.3.7), (2.3.9), (2.3.10) și (2.3.11) sunt satisfăcute oricare ar fi $t\in[0,T]$ și oricare ar fi $\boldsymbol{z}\in[H_0^2(\Omega)]^3$, $\boldsymbol{\varphi}\in[H_0^2(\Omega)]^{3\times3}$, $\varphi\in H_\varphi(\Omega)$, $\psi\in H_\psi(\Omega)$ și $\chi\in H_0^1(\Omega)$.

În continuare, vom studia problema plană. Vom considera condițiile din [112]. Mai precis, Ω este o regiune plană din $\mathbb{R}^2$ și $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$. În plus, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$, $u_j=u_j(x_1,x_2)$ pentru $j=1,2$, $\boldsymbol{\phi}=(\phi_{11},\phi_{22},\phi_{12},\phi_{21})$, $\phi_{ij}=\phi_{ij}(x_1,x_2)$ pentru $i,j=1,2$, $\varphi=\varphi(x_1,x_2)$, $\psi=\psi(x_1,x_2)$ și $\theta=\theta(x_1,x_2)$.

De exemplu, formularea variațională pentru φ devine în condițiile de deformare plană

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\kappa_1\ddot{\varphi}wdV+\int_\Omega\left(d_4\varphi_{,1}w_{,1}+d_4\varphi_{,2}w_{,2}+d_5\psi_{,1}w_{,1}+d_5\psi_{,2}w_{,2}\right)dV-\\&-\int_{\partial\Omega}\sigma_i w n_i dA+\int_\Omega\left[u_{1,1}w(d_1+d_3)+u_{2,2}w(d_1+d_3)-d_3\phi_{11}w-\right.\\&\left.-d_3\phi_{22}w+\alpha_1\varphi w+\alpha_3\psi w-\gamma_1\theta w\right]dV-\int_\Omega\rho_0 Gw dV=0.\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

În plus, formularea variațională pentru ψ devine în condițiile de deformare plană

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\kappa_2\ddot{\psi}\omega dV+\int_\Omega\left(d_5\varphi_{,1}\omega_{,1}+d_5\varphi_{,2}\omega_{,2}+d_6\psi_{,1}\omega_{,1}+d_6\psi_{,2}\omega_{,2}\right)dV-\\&-\int_{\partial\Omega}\tau_i\omega n_i dA+\int_\Omega\left[u_{1,1}\omega(d_2+d)+u_{2,2}\omega(d_2+d)-d\phi_{11}\omega-\right.\\&\left.-d\phi_{22}\omega+\alpha_2\psi\omega+\alpha_3\varphi\omega-\gamma_2\theta\omega\right]dV-\int_\Omega\rho_0 L\omega dV=0.\end{aligned}\tag{2.3.13}$$

Formularea variațională pentru θ devine în condițiile de deformare plană

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left[(\alpha+\beta)(\dot{u}_{1,1}+\dot{u}_{2,2})T_0\chi-\beta(\dot{\phi}_{11}+\dot{\phi}_{22})T_0\chi+\gamma_1\dot{\varphi}T_0\chi+\gamma_2\dot{\psi}T_0\chi+\right.\\&\left.+a\dot{\theta}T_0\chi\right]dV=\int_{\partial\Omega}q_i\chi n_i dA-\int_\Omega\left(k\theta_{,1}\chi_{,1}+k\theta_{,2}\chi_{,2}\right)dV+\int_\Omega\rho_0 S\chi dV.\end{aligned}\tag{2.3.14}$$

Funcțiile test și soluțiile slabe sunt alese în spații de funcții adecvate, pe baza alegerilor corespunzătoare cazului tridimensional.

2.3.3 Simulări numerice

În Tabelul 2.3, rezumăm pașii principali care sunt necesari pentru a calcula o soluție numerică a problemei la limită cu date inițiale pentru termoelasticitatea dipolară cu dublă porozitate în cazul izotrop. Pornim de la discretizarea formulării variaționale a sistemului de ecuații cu derivate parțiale corespunzător în condiții de deformare plană, care a fost dedusă în secțiunea anterioară. Pentru simulările numerice utilizăm programul specializat pentru metoda elementului finit FreeFem++ 3.54.

Alegem o triangulare adecvată pentru a discretiza domeniul plan. Utilizăm spațiul $P1$ de elemente finite continue și liniare pe porțiuni, unde gradele de libertate sunt valorile în noduri. O descriere detaliată a spațiilor de elemente finite adecvate pentru modelul elasticității dipolare este dată în [112].

Tabelul 2.3 – Pași în implementarea din FreeFem++

1. Definim frontiera domeniului prin utilizarea cuvântului cheie *border*.
2. Discretizăm domeniul prin utilizarea cuvântului cheie *mesh*.
3. Alegem spații de elemente finite adecvate prin utilizarea cuvântului cheie *fespace*.
4. Definim constantele.
5. Alegem condiții inițiale adecvate.
6. Scriem formularea variațională pentru vectorul deplasare, tensorul de microdeformație, presiunea din pori, presiunea din fisuri și temperatura prin utilizarea cuvântului cheie *problem*.
7. Scriem un ciclu *for* pentru a actualiza valorile câmpurile fizice implicate la fiecare moment de timp și trasăm graficul soluției.

Valorile pentru coeficienții elastici sunt luați din [26] și [112]. Utilizăm variabile adimensionale pentru simulările numerice.

Alegem condiția inițială $u_1(0,x,y) = -\frac{x}{100}$, pentru $(x,y) \in \Omega$. Celelalte condiții inițiale sunt nule.

Schema Euler implicită este utilizată pentru discretizarea derivatei în raport cu timpul, la fel ca în [50]. Vom utiliza formularea variațională a problemei în funcție de vectorul viteză $\dot{\boldsymbol{u}}$, viteza tensorului de microdeformație $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, viteza porozității din pori $\dot{\varphi}$, viteza porozității din fisuri $\dot{\psi}$ și temperatura θ. Prin urmare, câmpurile deplasare, microdeformație și porozitate sunt recuperate din relațiile

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= \int_0^t \dot{\boldsymbol{u}}(s)ds + \boldsymbol{u}^0, \quad \boldsymbol{\phi}(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\phi}}(s)ds + \boldsymbol{\phi}^0, \\ \varphi(t) &= \int_0^t \dot{\varphi}(s)ds + \varphi^0, \quad \psi(t) = \int_0^t \dot{\psi}(s)ds + \psi^0. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Pentru discretizarea în timp, vom considera o partiție uniformă a intervalului de timp $[0,T]$ cu lungimea pasului $dt = \frac{T}{N}$ și nodurile $t_n = t_{n-1} + dt$ pentru $n = 1,\dots,N$ astfel încât $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$.

În Graficul 2.1 se înfățișează temperatura.

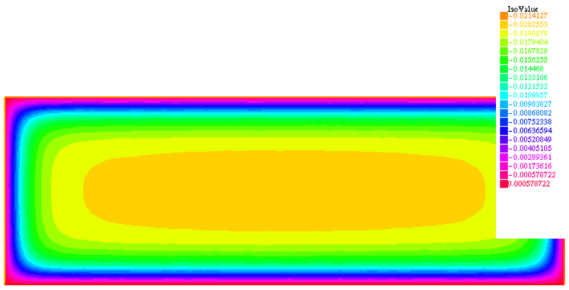

Figura 2.1 – Temperatura θ

În Graficul 2.2 se trasează deplasarea u_1 pentru valori diferite ale parametrilor dipolari. Mai precis, pentru al doilea grafic se înmulțesc valorile corespunzătoare primei imagini din Graficul 2.2 cu 10 și se observă că rigiditatea corpului crește prin creșterea lungimii de scală interne. Această proprietate a fost observată și în [112].

În continuare vom considera un domeniu dreptunghiular cu un orificiu circular în mijloc și vom înfățișa discretizarea domeniului în Graficul 2.3 și vom trasa deplasarea u_1 în Graficul 2.4.

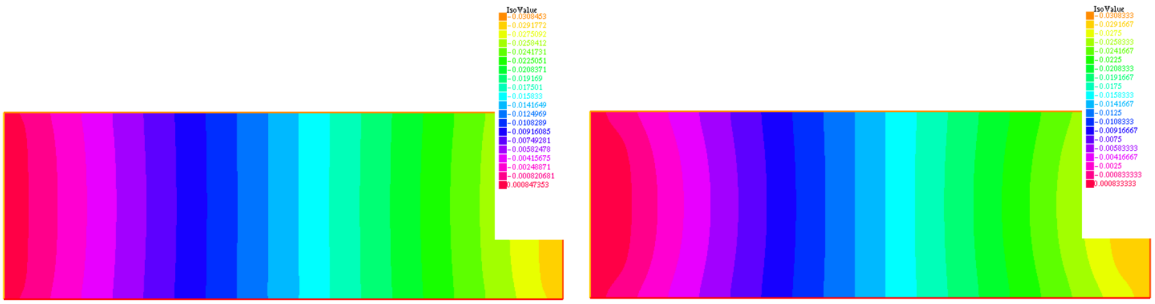

Figura 2.2 – Deplasarea u_1 pentru valori diferite ale parametrilor dipolari la aceeași iterație

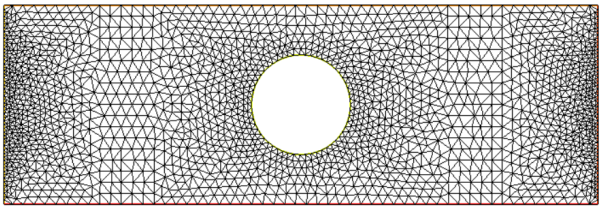

Figura 2.3 – Discretizarea domeniului dreptunghiular cu un orificiu circular

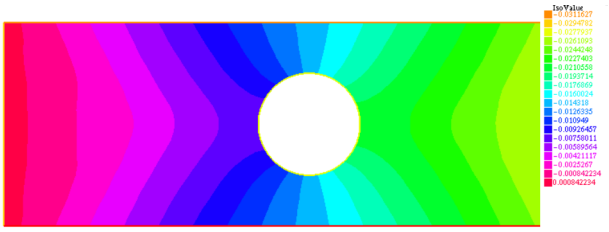

Figura 2.4 – Deplasarea u_1

2.3.4 Discuție și concluzii

Potrivit sursei [78], abordările bazate pe mecanica mediilor continue generalizate sunt necesare astăzi, întrucât multe materiale inovative din inginerie sunt caracterizate de o microstructură internă.

Am tratat formularea variațională pentru sistemul de ecuații cu derivate parțiale care caracterizează problema dinamică a termoelasticității dipolare cu dublă porozitate în cazul izotrop. Am discretizat prin aplicarea metodei elementului finit pentru variabila spațială și aplicarea schemei Euler implicită pentru derivata în raport cu timpul. Pentru a calcula o soluție numerică, am scris un program în FreeFem++.

Am tratat cazul deformării plane. În primul rând, am studiat un domeniu dreptunghiular și am trasat graficul deplasării pentru diferite valori ale lungimii de scală internă. Am trasat și graficul temperaturii. În al doilea rând, am considerat un orificiu circular în centrul domeniului și am trasat grafic deplasarea.

Putem concluziona că mecanica mediilor continue generalizate este un domeniu al matematicii aplicate în care se studiază sisteme de ecuații cu derivate parțiale care pot fi discretizate cu ajutorul metodei elementului finit. Această tehnică conduce la algoritmi numerici variați, care depind de tipul de ecuații cu derivate parțiale implicate (fie parabolice sau hiperbolice).

Capitolul 3

Medii termoelastice dipolare cu microtemperaturi

3.1 O extindere a rezultatelor lui Dafermos pentru corpuri cu structură dipolară

În acest capitol studiem modelul termoelasticității dipolare cu microtemperaturi. Neglijăm efectele de microrotație și considerăm doar deplasarea, temperatura și microtemperaturile, acestea din urmă fiind motivate de structura internă a mediului. Pentru problema la limită cu date inițiale mixtă corespunzătoare obținem rezultate de unicitate. Unul dintre rezultate este dedus prin generalizarea abordării lui Dafermos din [42]. Demonstrăm existența și unicitatea soluției cu energie finită și deducem o estimare prin care se poate arăta stabilitatea soluției problemei mixte [90]. Rezultatele din această secțiune au fost publicate în [89].

3.1.1 Preliminarii

Considerăm un material omogen și anizotrop. Acesta este un corp elastic dipolar cu microtemperaturi și la momentul de timp $t = 0$ ocupă o regiune regulată B a spațiului euclidian R^3. Vom nota cu ∂B frontiera domeniului B și cu $\bar{B}$ închiderea domeniului B, $\bar{B} = B \cup \partial B$, unde ∂B este presupusă o suprafață netedă pe porțiuni.

Ecuații

În continuare studiem un corp solid a cărui mișcare este descrisă utilizând componentele u_i ale vectorului deplasare și componentele φ_{ij} ale tensorului deplasare dipolară.

Putem utiliza procedeul propus de Green și Rivlin și să considerăm o mișcare suplimentară care diferă de mișcarea inițială a corpului rigid prin suprapunerea unei rotații de viteză unghiulară uniformă (adică printr-o mișcare rigidă). Subliniem că prin suprapunerea unei astfel de mișcări rigide, toate caracteristicile corpului corespunzătoare mișcării inițiale rămân neschimbate. În acest mod, obținem următoarele relații geometrice, care exprimă tensorii de deformație ε_{ij}, γ_{ij} și χ_{ijk} ca funcții de variabilele de mișcare

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ \gamma_{ij} = u_{j,i} - \varphi_{ij},\ \chi_{ijk} = \varphi_{jk,i}. \tag{3.1.1}$$

Vom scrie ecuațiile de mișcare în forma

$$\begin{aligned} \left(\tau_{ij} + \eta_{ij}\right)_{,j} + \varrho F_i &= \varrho \ddot{u}_i, \\ \mu_{ijk,i} + \eta_{jk} + \varrho G_{jk} &= I_{js}\ddot{\varphi}_{ks}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

În contextul corpurilor cu structură dipolară, ecuația energiei este

$$\varrho\dot{\varepsilon} = (\tau_{ij} + \eta_{ij})\,\dot{\varepsilon}_{ij} + \eta_{ij}\dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ijk}\dot{\chi}_{ijk} + q_{i,i} + \varrho r, \tag{3.1.3}$$

și ecuația primului moment al energiei este

$$\varrho\dot{\varepsilon}_i = \mu_{jki}\dot{\varepsilon}_{jk} + q_{ji,j} + q_i - H_i + \varrho R_i. \tag{3.1.4}$$

În ecuațiile (3.1.2) - (3.1.4) am utilizat notațiile din Tabelul 3.1.

Tabelul 3.1 – Interpretare fizică

ϱ	densitatea de masă de referință
F_i	forța masică
G_{jk}	forța masică dipolară
ε	densitatea energiei interne
ε_i	primul moment al energiei
q_i	componentele vectorului flux de căldură
r	sursa de căldură
q_{ij}	componentele tensorului primul moment al fluxului de căldură
H_i	componentele vectorului flux de căldură mediu
R_i	componentele vectorului primul moment al sursei de căldură

Vom nota densitatea entropiei cu η, temperatura absolută cu T și componentele vectorului de microtemperaturi cu T_i. Atunci principiul entropiei va avea următoarea formă locală (de exemplu, în [55]) :

$$\varrho\dot{\eta} - \left(\frac{1}{T}q_i + \frac{1}{T}q_{ij}T_j\right)_{,i} - \frac{1}{T}\varrho\,(r + R_iT_i) \geq 0. \tag{3.1.5}$$

Relații constitutive

În continuare, vom exprima energia liberă Ψ sub forma unei relații între densitatea energiei interne ε, primul moment al vectorului energie de componente ε_i și densitatea entropiei η :

$$\Psi = \varepsilon + T_i\varepsilon_i - T\eta. \tag{3.1.6}$$

Vom nota cu T_0 temperatura absolută în configurația de referință, care este o constantă dată și vom defini temperatura relativă θ prin

$$\theta = T - T_0. \tag{3.1.7}$$

Vom presupune că mediul dipolar este fără tensiuni în configurația de referință și că are forțe masice nule și cuplu masic zero. În plus, ne vom limita la teoria liniară și prin urmare vom presupune că densitatea energiei poate fi scrisă ca o formă pătratică în raport cu variabilele sale independente. Prin urmare, se poate utiliza principiul conservării energiei pentru a exprima energia liberă în următoarea formă

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{2}A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + \\ + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} - \\ - a_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - b_{ij}\gamma_{ij}\theta - c_{ijk}\chi_{ijk}\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 - \frac{1}{2}\alpha_{ij}T_iT_j.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

În plus, vom utiliza inegalitatea entropiei în forma

$$k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} + (\mathcal{K}_{ij} + T_0K_{ij})\,\theta_{,i}T_i + T_0M_{ij}T_iT_j + T_0g_{ijkl}T_{j,i}T_{l,k} \geq 0. \tag{3.1.9}$$

În consecință, vom obține măsuri ale tensiunii ca funcții de măsuri ale deformării, adică ecuațiile constitutive, care au următoarele expresii

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= A_{ijmn}\varepsilon_{mn} + G_{mnij}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} - a_{ij}\theta,\\
\eta_{ij} &= G_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} - b_{ij}\theta,\\
\mu_{ijk} &= F_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + C_{ijkmnr}\chi_{mnr} - c_{ijk}\theta,\\
\varrho\eta &= a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\gamma_{ij} + c_{ijk}\chi_{ijk} + a\theta,\\
\varrho\varepsilon_i &= -\alpha_{ij}T_j,\\
q_i &= k_{ij}\theta_{,j} + \mathcal{K}_{ij}T_j,\\
H_i &= (k_{ij} - K_{ij})\,\theta_{,j} + (\mathcal{K}_{ij} - M_{ij})\,T_j,\\
q_{ij} &= -g_{ijkl}T_{l,k}.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Coeficienții constitutivi au următoarele proprietăți de simetrie

$$\begin{aligned}
A_{ijmn} = A_{jimn} = A_{mnij},\ G_{ijmn} = G_{jimn},\\
F_{ijmnr} = F_{jimnr},\ a_{ij} = a_{ji},\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

În cazul liniar, ecuația energiei (3.1.3) devine

$$\varrho T_0\dot{\eta} = q_{i,i} + \varrho r, \tag{3.1.12}$$

și ecuația primului moment al energiei (3.1.4) devine

$$\varrho\dot{\varepsilon}_i = q_{ji,j} + q_i - H_i + \varrho R_i. \tag{3.1.13}$$

Tracțiunile superficiale, care se notează cu t_i, m_{jk}, q și Λ_i, sunt asociate cu vectorul deplasare de componente u_i, tensorul deplasare dipolară de componente φ_{jk}, fluxul de căldură q_i și cu primul moment al fluxului q_{ij} și sunt definite astfel

$$(\tau_{ij} + \eta_{ij})\,n_j = t_i,\ \mu_{ijk}n_i = m_{jk},\ q_in_i = q,\ q_{ij}n_j = \Lambda_i.$$

Mai sus, $\mathbf{n} = (n_i)$ este versorul normalei exterioare la suprafața ∂B.
Vom adăuga la ecuațiile de bază de mai sus, condiții la limită în următoarea formă generală (neomogenă)

$$\begin{aligned}
&u_i(x,t) = \tilde{u}_i(x,t),\ (x,t) \in \partial B_1 \times [0,t_0),\ t_i(x,t) = \tilde{t}_i(x,t),\ (x,t) \in \partial B_1^c \times [0,t_0),\\
&\varphi_{ij}(x,t) = \tilde{\varphi}_{ij}(x,t),\ (x,t) \in \partial B_2 \times [0,t_0),\ m_{ij}(x,t) = \tilde{m}_{ij}(x,t),\ (x,t) \in \partial B_2^c \times [0,t_0),\\
&\theta(x,t) = \tilde{\theta}(x,t),\ (x,t) \in \partial B_3 \times [0,t_0),\ q(x,t) = \tilde{q}(x,t),\ (x,t) \in \partial B_3^c \times [0,t_0),\\
&T_i(x,t) = \tilde{T}_i(x,t),\ (x,t) \in \partial B_4 \times [0,t_0),\ \Lambda_i(x,t) = \tilde{\Lambda}_i(x,t),\ (x,t) \in \partial B_4^c \times [0,t_0).
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Mai sus, suprafețele $\partial B_1, \partial B_2, \partial B_3$ și ∂B_4, cu complementele lor $\partial B_1^c, \partial B_2^c, \partial B_3^c$ și ∂B_4^c, sunt submulțimi ale suprafeței ∂B și au următoarele proprietăți

$$\begin{aligned}
&\partial B_1 \cup \partial B_1^c = \partial B_2 \cup \partial B_2^c = \partial B_3 \cup \partial B_3^c = \partial B_4 \cup \partial B_4^c = \partial B,\\
&\partial B_1 \cap \partial B_1^c = \partial B_2 \cap \partial B_2^c = \partial B_3 \cap \partial B_3^c = \partial B_4 \cap \partial B_4^c = \emptyset.
\end{aligned}$$

În plus, în ecuațiile (3.1.14), $\tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{\varphi}_{ij}, \tilde{m}_{ij}, \tilde{\theta}_i, \tilde{q}_i, \tilde{T}_i, \tilde{\Lambda}_i$ sunt funcții date și regulate în fiecare punct al domeniului lor de definiție. Problema mixtă va fi completă prin considerarea datelor inițiale, în forma de mai jos

$$\begin{aligned}
&u_i(x,0) = u_i^0(x),\ \dot{u}_i(x,0) = v_i^0(x),\ \varphi_{ij}(x,0) = \varphi_{ij}^0(x),\\
&\dot{\varphi}_{ij}(x,0) = \phi_{ij}^0(x),\ \theta(x,0) = \theta^0(x),\ T_i(x,0) = T_i^0(x),\ x \in \bar{B},
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

unde $u_i^0, \varphi_{ij}^0, v_i^0, \phi_{ij}^0, \theta^0$ și T_i^0 sunt funcții date și regulate în $\bar{B}$.
Vom nota cu $\mathcal{P}$ problema mixtă formată din ecuațiile de mișcare (3.1.2), ecuațiile energiei (3.1.12) și (3.1.13), datele la limită (3.1.14) și datele inițiale (3.1.15).

3.1.2 Rezultate de unicitate și existență

Vom nota cu $\mathbf{u}$ o soluție a problemei, adică $\mathbf{u} = (u_i, \varphi_{ij}, \theta, T_i)$.
Rezultatul de unicitate pentru soluția problemei mixte $\mathcal{P}$ va fi obținut cu ajutorul următoarei forme pătratice, definite pe $B \times (0, t_0)$ prin

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{mn}(\mathbf{u}) + G_{ijmn}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\gamma_{mn}(\mathbf{u}) + \\ +F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\chi_{mnr}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}(\mathbf{u})\gamma_{mn}(\mathbf{u}) + \\ +D_{ijmnr}\gamma_{ij}(\mathbf{u})\chi_{mnr}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}C_{ijkmnr}\chi_{ijk}(\mathbf{u})\chi_{mnr}(\mathbf{u}),\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

oricare ar fi $\mathbf{u} \in B \times (0, t_0)$. Mai sus am utilizat notațiile

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ \gamma_{ij}(\mathbf{u}) = u_{j,i} - \varphi_{ij},\ \chi_{ijk}(\mathbf{u}) = \varphi_{jk,i}.$$

Un prim rezultat, inclus în următoarea teoremă, se referă la unicitatea soluției pentru problema notată mai sus cu $\mathcal{P}$.

Teorema 3.1.1. *Vom presupune că au loc următoarele condiții*

H_1. $\varrho,\ I_{ij}$ *și* a *sunt strict pozitive ;*

H_2. *tensorul* α_{ij} *este un tensor pozitiv definit ;*

H_3. *forma pătratică* $\Omega(\mathbf{u})$ *este pozitiv semi-definită.*

Atunci problema mixtă $\mathcal{P}$ *nu poate avea mai mult de o soluție.*

În continuare vom obține existența unei soluții cu energie finită pentru problema $\mathcal{P}$. O soluție cu energie finită este o soluție generalizată a problemei $\mathcal{P}$ și va fi definită în cele ce urmează. Vom demonstra și un rezultat de unicitate analog cu cel din Teorema 3.1.1, dar pentru o soluție cu energie finită. O mulțime ordonată $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \mathbf{T})$, unde $\mathbf{u} = (u_i), \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{ij}), \mathbf{T} = (T_i)$, se numește proces admisibil în cilindrul $\bar{B} \times [0, t_0)$ dacă îndeplinește următoarele condiții

1) $\mathbf{u} \in C^2\left(B \times [0, t_0)\right)$; $\mathbf{u},\ \dot{\mathbf{u}},\ \ddot{\mathbf{u}},\ \text{grad}\,\mathbf{u},\ \text{grad}\,\dot{\mathbf{u}} \in C\left(\bar{B} \times [0, t_0)\right)$;

2) $\boldsymbol{\varphi} \in C^2\left(B \times [0, t_0)\right)$; $\boldsymbol{\varphi},\ \dot{\boldsymbol{\varphi}},\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}},\ \text{grad}\,\boldsymbol{\varphi}, \text{grad}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} \in C\left(\bar{B} \times [0, t_0)\right)$;

3) $\theta \in C^2\left(B \times [0, t_0)\right)$; $\dot{\theta},\ \text{grad}\,\theta \in C\left(\bar{B} \times [0, t_0)\right)$;

4) $\mathbf{T} \in C^2\left(B \times [0, t_0)\right)$; $\mathbf{T},\ \dot{\mathbf{T}},\ \text{grad}\,\mathbf{T} \in C\left(\bar{B} \times [0, t_0)\right)$.
În continuare vom considera problema mixtă $\mathcal{P}$, dar în cazul particular în care condițiile la limită sunt omogene, adică

$$u_i(x,t) = 0,\ \varphi_{ij}(x,t) = 0,\ \theta(x,t) = 0,\ T_i(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial B \times [0, t_0). \tag{3.1.17}$$

Vom nota această problemă cu $\mathcal{P}_0$.
Să considerăm $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \mathbf{T}')$ un proces admisibil și o soluție a problemei omogene $\mathcal{P}_0$, adică $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \mathbf{T})$.

Vom utiliza următoarea identitate

$$\begin{aligned}
&\varrho\left(F_i\dot{u}_i'+G_{ij}\dot{\varphi}_{ij}'+\frac{1}{T_0}r\theta'-R_iT_i'\right)=\\
&\quad=\varrho\ddot{u}_i\dot{u}_i'+I_{kj}\ddot{\varphi}_{jr}\dot{\varphi}_{kr}'+a\dot{\theta}\theta'+\alpha_{ij}\dot{T}_iT_i'-\\
&\qquad-\left[\left(\tau_{ij}+\eta_{ij}\right)\dot{u}_j'+\mu_{ijk}\dot{\varphi}_{jk}'+\frac{1}{T_0}q_i\theta'-q_{ij}T_j'\right]_{,i}+\\
&\quad+A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}'+G_{ijmn}\left[\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}'+\varepsilon_{ij}'\gamma_{mn}\right]+\\
&\qquad+F_{ijmnr}\left[\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}'+\varepsilon_{ij}'\chi_{mnr}\right]+B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}'+\\
&\qquad\quad+D_{ijmnr}\left[\gamma_{ij}\chi_{mnr}'+\gamma_{ij}'\chi_{mnr}\right]+C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}'+\\
&\qquad\quad+a_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\theta'-\dot{\varepsilon}_{ij}'\theta\right)+b_{ij}\left(\dot{\gamma}_{ij}\theta'-\dot{\gamma}_{ij}'\theta\right)+c_{ijk}\left(\dot{\chi}_{ijk}\theta'-\dot{\chi}_{ijk}'\theta\right)+\\
&\qquad+\frac{1}{T_0}\left[k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}'+\left(\mathcal{K}_{ij}+T_0K_{ij}\right)\theta_{,i}T_i'+T_0M_{ij}T_iT_j'+T_0g_{ijkl}T_{j,i}T_{l,k}'\right]
\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

care se obține prin combinarea ecuațiilor de mișcare (3.1.2) cu ecuațiile constitutive (3.1.10) și ecuațiile energiei (3.1.12) și (3.1.13).
Să considerăm un spațiu Hilbert H. Notația $C^m\left([0,t_0);H\right)$ va desemna mulțimea de funcții f cu următoarele proprietăți : $f:[0,t_0)\to H$, f admite derivate în raport cu timpul în H până la ordinul m și ultima derivată (cea de ordinul m) este o funcție continuă pe $[0,t_0)$.
Pentru termenii de încărcare vom utiliza notațiile vectoriale $\mathbf{F}=(F_i),\mathbf{G}=(G_{ij}),\mathbf{R}=(R_i)$ și $\mathbf{u}=(u_i),\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_{ij}),\mathbf{T}=(T_i)$, astfel încât putem utiliza notațiile

$$\begin{aligned}
C_0^1(B)&=\left\{f\in C^1(B):f=0\text{ pe }\partial B\right\},\ \mathbf{C}_0^1(B)=\left\{\mathbf{f}\in\mathbf{C}^1(B):\mathbf{f}=\mathbf{0}\text{ pe }\partial B\right\},\\
\tilde{C}^0(B)&=\left\{(\mathbf{F},\mathbf{G},r,\mathbf{R}):(\mathbf{F},\mathbf{G},r,\mathbf{R})\in\mathbf{C}^0(B)\times\mathbf{C}^0(B)\times C^1(B)\times\mathbf{C}^0(B)\right\},\\
\tilde{C}^1(B)&=\left\{(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T}):(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})\in\mathbf{C}_0^1(B)\times\mathbf{C}_0^1(B)\times C_0^1(B)\times\mathbf{C}_0^0(B)\right\}.
\end{aligned}$$

În plus, în cazul cilindrului $\Omega=B\times(0,t_0)$, avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\Omega)&=C^\infty\left([0,t_0);\tilde{C}^1(B)\right),\\
\mathcal{C}^0(\Omega)&=\left\{(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T}):(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})\in\mathcal{C}(\Omega),\ \mathbf{u}=0,\ \boldsymbol{\varphi}=0\text{ pe }B\times\{0\}\right\}.
\end{aligned}$$

Dacă $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})$ este o soluție pentru $\mathcal{P}_0$ și $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})$ este un element arbitrar din $\mathcal{C}^0(\Omega)$, atunci vom scrie identitatea (3.1.18) utilizând substituția

$$\mathbf{u}'=(t-t_0)\,\tilde{\mathbf{u}},\boldsymbol{\varphi}'=(t-t_0)\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\theta'=(t-t_0)\,\tilde{\theta},\mathbf{T}'=(t-t_0)\,\tilde{\mathbf{T}}.$$

Atunci egalitatea obținută este integrată în cilindrul Ω și vom obține relația

$$\begin{aligned}
&E(\beta,\alpha)+\int_0^{t_0}\int_B\varrho\,(t-t_0)\left(F_i\ddot{\tilde{u}}_i+G_{ij}\ddot{\tilde{\varphi}}_{ij}+\frac{1}{T_0}r\dot{\tilde{\theta}}-R_i\dot{\tilde{T}}_i\right)dVdt=\\
&\qquad=t_0\int_B\left[\varrho v_i^0\ddot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\phi_{jr}^0\ddot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\theta^0\dot{\tilde{\theta}}+\alpha_{ij}T_i^0\dot{\tilde{T}}_j\right]|_{t=0}dV+\\
&\qquad\quad+t_0\int_B\left[a_{ij}u_{i,j}^0+b_{ij}\left(u_{i,j}^0-\varphi_{ij}^0\right)+c_{ijk}\varphi_{jk,i}^0\right]|_{t=0}dV,
\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

oricare ar fi $\beta=(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})$ și $\alpha=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})\in\mathcal{C}^0(\Omega)$.
Pentru simplificarea redactării, am utilizat mai sus notația

$$\begin{aligned}E(\beta,\alpha)=&\int_0^{t_0}\int_B\left[\varrho\dot{u}_i\dot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\dot{\varphi}_{jr}\dot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\theta\dot{\tilde{\theta}}+\alpha_{ij}T_i\dot{\tilde{T}}_j\right]dVdt+\\&+\frac{1}{T_0}\int_0^{t_0}\int_B\int_0^t\left[k_{ij}\theta_{,i}\tilde{\theta}_{,j}+(\mathcal{K}_{ij}+T_0K_{ij})\,\theta_{,i}\tilde{T}_i+T_0M_{ij}T_i\tilde{T}_j+T_0g_{ijkl}T_{j,i}\tilde{T}_{l,k}\right]dtdVds\\&+\int_0^{t_0}\int_B(t-t_0)\left[\varrho\dot{u}_i\dot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\dot{\varphi}_{jr}\dot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\theta\dot{\tilde{\theta}}+\alpha_{ij}T_i\dot{\tilde{T}}_j\right]dVdt-\\&-\int_0^{t_0}\int_B[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\tilde{\varepsilon}_{mn}+G_{ijmn}\,(\varepsilon_{ij}\tilde{\gamma}_{mn}+\tilde{\varepsilon}_{ij}\gamma_{mn})+F_{ijmnr}\,(\varepsilon_{ij}\tilde{\chi}_{mnr}+\tilde{\varepsilon}_{ij}\chi_{mnr})+\\&+B_{ijmn}\gamma_{ij}\tilde{\gamma}_{mn}+D_{ijmnr}\,(\gamma_{ij}\tilde{\chi}_{mnr}+\tilde{\gamma}_{ij}\chi_{mnr})+C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\tilde{\chi}_{mnr}]\,dVdt\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

În plus, în (3.1.19) $\left(u_i^0,v_i^0,\varphi_{ij}^0,\phi_{ij}^0,\theta^0,T_i^0\right)$ sunt datele inițiale din (3.1.15).
În cazul particular $\beta=\alpha$, mai exact $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})$, obținem pentru $E(\alpha,\alpha)$ următoarea expresie

$$\begin{aligned}E(\alpha,\alpha)=&\int_0^{t_0}\int_B\frac{1}{2}\left[\varrho\dot{\tilde{u}}_i\dot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\dot{\tilde{\varphi}}_{jr}\dot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\tilde{\theta}^2+\alpha_{ij}\tilde{T}_i\dot{\tilde{T}}_j\right]dVdt+\\&+\int_0^{t_0}\int_B\frac{1}{2}[A_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{mn}+2G_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\gamma}_{mn}+2F_{ijmnr}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\chi}_{mnr}+\\&+B_{ijmn}\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\gamma}_{mn}+2D_{ijmnr}\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\chi}_{mnr}+C_{ijkmnr}\tilde{\chi}_{ijk}\tilde{\chi}_{mnr}]\,dVdt+\\&+\frac{1}{T_0}\int_0^{t_0}\int_B\int_0^t\left[k_{ij}\tilde{\theta}_{,i}\tilde{\theta}_{,j}+(\mathcal{K}_{ij}+T_0K_{ij})\,\tilde{\theta}_{,i}\tilde{T}_i+T_0M_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j+T_0g_{ijkl}\tilde{T}_{j,i}\tilde{T}_{l,k}\right]dtdVds\\&+\frac{t_0}{2}\int_B\left[\varrho\dot{\tilde{u}}_i\dot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\dot{\tilde{\varphi}}_{jr}\dot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\tilde{\theta}^2+\alpha_{ij}\tilde{T}_i\dot{\tilde{T}}_j\right]|_{t=0}\,dV,\ \forall y=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})\in\mathcal{C}^0(\Omega).\end{aligned}\tag{3.1.21}$$

Cu ajutorul acestei expresii pentru $E(\alpha,\alpha)$ vom obține inegalitatea

$$\begin{aligned}E(\alpha,\alpha)\geq&\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\int_B\left[\varrho\dot{\tilde{u}}_i\dot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\dot{\tilde{\varphi}}_{jr}\dot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\tilde{\theta}^2+\alpha_{ij}\tilde{T}_i\dot{\tilde{T}}_j\right]dVdt+\\&+\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\int_B[A_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{mn}+2G_{ijmn}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\gamma}_{mn}+2F_{ijmnr}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\chi}_{mnr}+\\&+B_{ijmn}\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\gamma}_{mn}+2D_{ijmnr}\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\chi}_{mnr}+C_{ijkmnr}\tilde{\chi}_{ijk}\tilde{\chi}_{mnr}]\,dVdt+\\&+\int_0^{t_0}\int_B\int_0^t\left[\frac{1}{T_0}k_{ij}\tilde{\theta}_{,i}\tilde{\theta}_{,j}+\left(\frac{1}{T_0}\mathcal{K}_{ij}+K_{ij}\right)\tilde{\theta}_{,i}\tilde{T}_i+M_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j+g_{ijkl}\tilde{T}_{j,i}\tilde{T}_{l,k}\right]dtdVds\end{aligned}\tag{3.1.22}$$

oricare ar fi $\alpha=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})\in\mathcal{C}^0(\Omega)$.
Vom propune următorul produs scalar

$$\begin{aligned}&\left\langle(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T}),\ (\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})\right\rangle=\\=&\int_0^{t_0}\int_B\left[u_i\tilde{u}_i+\varphi_{jk}\tilde{\varphi}_{jk}+\theta\tilde{\theta}+T_i\tilde{T}_i+u_{i,j}\tilde{u}_{i,j}+\varphi_{jk,i}\tilde{\varphi}_{jk,i}+\dot{u}_i\dot{\tilde{u}}_i+\dot{\varphi}_{jk}\dot{\tilde{\varphi}}_{jk}\right]dVdt\\&+\int_0^{t_0}\int_B\int_0^t\left[\theta_{,i}\tilde{\theta}_{,i}+T_i\tilde{T}_i+T_{j,i}\tilde{T}_{j,i}\right]dtdVds.\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

Vom nota cu $\|.\|$ norma indusă de acest produs scalar. În plus, fie $U(\Omega)$ un spațiu Hilbert înzestrat cu această normă $\|.\|$. Astfel, putem considera spațiul $U(\Omega)$ ca fiind completatul spațiului $\mathcal{C}^0(\Omega)$ în raport cu norma $\|.\|$.
În plus, prin utilizarea inegalității lui Korn, putem deduce că există o constantă reală pozitivă c_1 astfel încât

$$E(\alpha,\alpha)\geq c_1\|\alpha\|^2,\ \forall\alpha=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})\in U(\Omega).\tag{3.1.24}$$

Datele inițiale ale problemei $\mathcal{P}$ ne sugerează să considerăm mulțimea

$$H_0(B)=\left\{(\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi},\theta,\mathbf{T}):(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})\in\tilde{C}^1(B),\ \mathbf{v},\boldsymbol{\phi}\in\mathbf{C}_0^1(B)\right\},$$

unde $(\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi},\theta,\mathbf{T})=(u_i,v_i,\varphi_{ij},\phi_{ij},\theta,T_i)$.
Pe mulțimea $H_0(B)$ vom considera următoarea normă

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi},\theta,\mathbf{T})\|_0^2=&\frac{1}{2}\int_B\left[\varrho v_iv_i+I_{kj}\phi_{jr}\phi_{kr}+a\theta^2+\alpha_{ij}T_iT_j\right]dV+\\&+\frac{1}{2}\int_B[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}+2G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}+2F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}+\\&+B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+2D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr}+C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}]\,dV.\end{aligned}$$

Mai jos vom defini o soluție cu energie finită.

Definiția 3.1.1. *O mulțime ordonată $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\mathbf{T})\in U(\Omega)$ se numește soluție cu energie finită a problemei $\mathcal{P}$, corespunzătoare condițiilor la limită nule (3.1.17), datelor inițiale $\delta=(\mathbf{u}^0,\mathbf{v}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{\phi}^0,\theta^0,\mathbf{T}^0)\in H_0(B)$ și încărcărilor $\gamma=(\mathbf{F},\mathbf{G},r,\mathbf{R})\in L_1\left([0,t_0);\tilde{C}^0(B)\right)$, dacă îndeplinește următoarele două condiții*

- $\lim\limits_{t\to0}\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}^0,\ \lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}^0,$ *în spațiul* $\mathbf{C}^0\left(\bar{B}\right)$;

- $E(\beta,\alpha)=F(\gamma,\alpha)+G(\delta,\alpha),\ \forall\alpha=(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{T}})\in U(\Omega)$,

unde $E(\beta,\alpha)$ este definit în (3.1.20) și $F(\gamma,\alpha)$, $G(\delta,\alpha)$ au următoarele expresii conform relației (3.1.19)

$$\begin{aligned}F(\gamma,\alpha)=&-\int_0^{t_0}\int_B\varrho\,(t-t_0)\left(F_i\dot{\tilde{u}}_i+G_{ij}\dot{\tilde{\varphi}}_{ij}+\frac{1}{T_0}r\tilde{\theta}-R_i\tilde{T}_i\right)dVdt,\\G(\delta,\alpha)=&\,t_0\int_B\left[\varrho v_i^0\dot{\tilde{u}}_i+I_{kj}\phi_{jr}^0\dot{\tilde{\varphi}}_{kr}+a\theta^0\tilde{\theta}+\alpha_{ij}T_i^0\tilde{T}_j\right]|_{t=0}dV+\\&+t_0\int_B\left[a_{ij}u_{i,j}^0+b_{ij}\left(u_{i,j}^0-\varphi_{ij}^0\right)+c_{ijk}\varphi_{jk,i}^0\right]|_{t=0}dV.\end{aligned}\tag{3.1.25}$$

Următorul rezultat se referă la existența unei soluții cu energie finită pentru problema mixtă $\mathcal{P}$.

Teorema 3.1.2. *Vom presupune că sunt îndeplinite condițiile standard H_1-H_3 și că sursele satisfac $\gamma=(\mathbf{F},\mathbf{G},r,\mathbf{R})\in L_1\left([0,t_0);\tilde{C}^0(B)\right)$. Dacă condițiile inițiale sunt omogene, atunci problema $\mathcal{P}$ are cel puțin o soluție cu energie finită, definită pe Ω.*

Corolarul 3.1.1. *Fie β o soluție cu energie finită a problemei mixte $\mathcal{P}$, corespunzătoare unor condiții inițiale omogene și încărcărilor γ. Atunci β satisface estimarea*

$$\exists c_0>0,\ \textit{astfel încât}\ \|\beta\|\le c_0\|\gamma\|.$$

3.2 Un model pentru medii termoelastice cu microtemperaturi

În această secțiune studiem o problemă la limită cu date inițiale mixtă pentru un material termoelastic dipolar cu particule materiale care posedă microtemperaturi. Această problemă mixtă este transformată într-o problemă Cauchy formată dintr-o ecuație temporală de evoluție pe un anumit spațiu Hilbert. Existența și unicitatea soluției problemei se obțin cu ajutorul unor rezultate specifice teoriei semigrupurilor de contracții [91]. Astfel se demonstrează și un rezultat de dependență continuă de datele inițiale și de încărcări. Rezultatele din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea [88].

3.2.1 Notații, ecuații și condiții de bază

Considerăm un domeniu mărginit B al spațiului euclidian tridimensional R^3 care este ocupat de un material elastic dipolar. Notăm cu $\bar{B}$ închiderea lui B și cu ∂B frontiera domeniului B și presupunem că ∂B este o suprafață netedă pe porțiuni. Componentele versorului normalei exterioare la suprafața ∂B se notează cu n_i. Câmpurile vectoriale și tensorii se notează cu litere bold. Notația w_i desemnează componentele vectorului **w**. Derivata în raport cu timpul se reprezintă cu ajutorul unui punct deasupra unei litere. Se utilizează convenția uzuală de diferențiere : un indice precedat de o virgulă reprezintă derivarea parțială în raport cu variabila corespunzătoare. Se utilizează convenția de însumare pentru indici care se repetă și indicii iau valorile întregi $(1, 2, 3)$. Mișcarea corpului se raportează la un sistem fix de axe carteziene $Ox_i,\ i = 1, 2, 3$.

Pentru a caracteriza comportarea unui material termoelastic dipolar cu microtemperaturi, vom utiliza variabilele $(u_i,\ \varphi_{ij}, \theta, T_i)$, unde u_i sunt componentele vectorului deplasare, φ_{ij} sunt componentele tensorului de deplasare dipolară, T_i sunt componentele vectorului de microtemperaturi și θ este temperatura măsurată de la temperatura absolută constantă T_0 a corpului în configurația de referință. Vom nota cu ϑ_i microtemperaturile măsurate de la microtemperaturile T_i^0 în configurația de referință, și anume, $\vartheta_i = T_i - T_i^0$.

Comportarea corpurilor termoelastice dipolare cu microtemperaturi poate fi caracterizată cu ajutorul variabilelor menționate mai sus u_i, φ_{ij}, θ, T_i și a variabilelor χ și τ_i, definite de

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^{t} \theta(\mathbf{x}, s)ds,\ \tau_i(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^{t} \vartheta_i(\mathbf{x}, s)ds, \tag{3.2.1}$$

unde t_0 este timpul de referință. În aceste relații, χ este deplasarea termică introdusă de Green și Naghdi și τ_i sunt deplasările microtermice [82].

Definim tensorii de deformație ε_{ij}, γ_{ij} și χ_{ijk} cu ajutorul ecuațiilor geometrice

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right), \\ \gamma_{ij} &= u_{j,i} - \varphi_{ij}, \\ \chi_{ijk} &= \varphi_{jk,i}. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Ecuațiile constitutive pentru un corp dipolar omogen și anizotrop cu microtemperaturi sunt

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= A_{ijmn}\ \varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} - \alpha_{ij}\dot{\chi} + d_{ijmn}\tau_{m,n}, \\ \eta_{ij} &= G_{ijmn}\ \varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} - \beta_{ij}\dot{\chi} + e_{ijmn}\tau_{m,n}, \\ \mu_{ijk} &= F_{ijkmn}\ \varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + C_{ijkmnr}\chi_{mnr} - \delta_{ijk}\dot{\chi} + f_{ijkmn}\tau_{m,n}, \\ \varrho\eta &= \alpha_{ij}\ \varepsilon_{ij} + \beta_{ij}\gamma_{ij} + \delta_{ijk}\chi_{ijk} + a\dot{\chi} + l_{ij}\tau_{i,j}, \\ \varrho\eta_i &= A_{ij}\dot{\tau}_j + B_{ij}\chi_{,j}, \\ S_i &= -B_{ij}\dot{\tau}_j + K_{ij}\chi_{,j}, \\ \Lambda_{ij} &= d_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{ijmn}\gamma_{mn} + f_{ijmnr}\chi_{mnr} - l_{ij}\dot{\chi} + g_{ijmn}\tau_{m,n}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ecuațiile de mișcare pentru un material termoelastic dipolar cu microtemperaturi sunt (conform Ieșan și Nappa [69])

$$\begin{aligned} \left(\tau_{ij} + \eta_{ij}\right)_{,j} + \varrho F_i &= \varrho\ddot{u}_i, \\ \mu_{ijk,i} + \eta_{jk} + \varrho G_{jk} &= I_{kr}\ddot{\varphi}_{jr}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Coeficienții A_{ijmn}, B_{ijmn}, ..., l_{ji} și g_{ijmn} sunt coeficienți elastici caracteristici și satisfac următoarele relații de simetrie

$$\begin{aligned} &A_{ijmn} = A_{mnij},\ B_{ijmn} = B_{mnij},\ C_{ijkmnr} = C_{mnrijk},\ B_{ij} = B_{ji}, \\ &K_{ij} = K_{ji},\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji},\ d_{ijmn} = d_{mnij},\ e_{ijmn} = e_{mnij},\ g_{ijmn} = g_{mnij}. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Tabelul 3.2 – Notații

F_i	componentele forței masice clasice
G_{ij}	elementele forței masice dipolare
ϱ	densitatea de masă constantă în configurația de referință
$I_{ij}=I_{ji}$	coeficienții de microinerție
$\tau_{ij},\ \eta_{ij}$ și μ_{ijk}	componentele tensorului de tensiune
η	entropia specifică pe unitate de masă
η_i	vectorul primul moment al entropiei
S_i	vectorul flux de entropie
Λ_{ij}	tensorul primul moment al fluxului de entropie

Să notăm cu ξ_i rata internă de producere a entropiei pe unitate de masă și prin H_i vectorul fluxului de entropie mediu. Știind că vectorul fluxului de entropie are componentele S_i, deducem din ecuația energiei că

$$\varrho\xi_i + S_i - H_i = 0. \tag{3.2.6}$$

Notăm cu r rata externă a sursei de entropie pe unitate de masă și cu R_i primul moment al ratei externe pentru sursa de entropie. Datorită prezenței microtemperaturilor, obținem încă două ecuații ale energiei

$$\begin{aligned} \varrho\dot{\eta} &= S_{i,i} + \varrho r, \\ \varrho\dot{\eta}_i &= \Lambda_{ji,j} + \varrho R_i. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Dacă înlocuim ecuațiile geometrice (3.2.2) și ecuațiile constitutive (3.2.3) în ecuațiile de mișcare (3.2.4) și în ecuațiile energiei (3.2.7), obținem următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{aligned} &\left[(A_{ijmn}+G_{ijmn})\,u_{m,n}+(G_{mnij}+B_{ijmn})\,(u_{n,m}-\varphi_{mn})+(F_{mnrij}+D_{ijmnr})\,\varphi_{mn,r}\right]_{,j} - \\ &\qquad -(\alpha_{ij}+\beta_{ij})\,\dot{\chi}_{,j}+(d_{ijmn}+e_{ijmn})\,\tau_{m,nj}+\varrho F_i=\varrho\ddot{u}_i, \\ &\left[F_{ijkmn}u_{m,n}+D_{mnijk}\,(u_{n,m}-\varphi_{mn})+C_{ijkmnr}\varphi_{mn,r}-\delta_{ijk}\dot{\chi}+f_{ijkmn}\tau_{m,n}\right]_{,i}+ \\ &+G_{jkmn}u_{m,n}+B_{jkmn}\,(u_{n,m}-\varphi_{mn})+D_{jkmnr}\varphi_{mn,r}-\beta_{jk}\dot{\chi}+e_{jkmn}\tau_{m,n}+\varrho G_{jk}=I_{kr}\ddot{\varphi}_{jr}, \\ &(B_{ij}+l_{ij})\,\dot{\tau}_{j,i}-K_{ij}\chi_{,ij}+\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j}+\beta_{ij}\,(\dot{u}_{j,i}-\dot{\varphi}_{ij})+\delta_{ijk}\dot{\varphi}_{jk,i}+a\dot{\chi}=\varrho r, \\ &\qquad d_{ijmn}u_{m,nj}+e_{ijmn}\,(u_{n,mj}-\varphi_{mn,j})+f_{ijmnr}\varphi_{mn,rj}- \\ &\qquad\qquad -(B_{ij}+l_{ij})\,\dot{\chi}_{,j}+g_{ijmn}\tau_{m,nj}-A_{ij}\ddot{\tau}_j=-\varrho R_i. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Pentru acest sistem, funcțiile necunoscute sunt u_i, φ_{ij}, χ și τ_i.
Potrivit problemei Dirichlet asociate sistemului de ecuații (3.2.8), vom considera condițiile pe frontieră în forma

$$\begin{aligned} &u_i(x,t)=\bar{u}_i(x,t),\ \varphi_{ij}(x,t)=\bar{\varphi}_{ij}(x,t), \\ &\chi(x,t)=\bar{\chi}(x,t),\ \tau_i(x,t)=\bar{\tau}_i(x,t),\quad (x,t)\in\partial B\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

funcțiile $\bar{u}_i$, $\bar{\varphi}_{ij}$, $\bar{\chi}$ și $\bar{\tau}_i$ fiind date.
Vom utiliza notațiile t_i, m_{jk}, S și Λ_i pentru tracțiunile forțelor de suprafață, care corespund deplasărilor u_i, deplasării dipolare φ_{jk}, vectorului flux de entropie S_i și tensorului primul moment al fluxului de entropie Λ_{ij}, și anume

$$(\tau_{ij}+\eta_{ij})\,n_j=t_i,\ \mu_{ijk}n_i=m_{jk},\ S_in_i=S,\ \Lambda_{ij}n_j=\Lambda_j.$$

Vom considera pentru sistemul de ecuații (3.2.8) o problemă la limită în care condițiile pe frontieră (3.2.9) sunt

$$t_i=\bar{t}_i,\ m_{jk}=\bar{m}_{jk},\ S=\bar{S},\ \Lambda_i=\bar{\Lambda}_i,\quad pe\ \ \partial B\times(0,\infty). \tag{3.2.10}$$

În (3.2.10) funcțiile $\bar{t}_i$, $\bar{m}_{jk}$, $\bar{S}$ și $\bar{\Lambda}_i$ sunt date.

În cele ce urmează, vom asocia sistemului de ecuații (3.2.8) doar condiții de tip Dirichlet și anume, de forma (3.2.9).

Pentru a completa problema la limită cu date inițiale mixtă asociată sistemului (3.2.8), considerăm următoarele condiții inițiale

$$\begin{aligned} &u_i(x,0)=u_i^0(x),\ \dot{u}_i(x,0)=u_i^1(x),\ \varphi_{ij}(x,0)=\varphi_{ij}^0(x),\\ &\dot{\varphi}_{ij}(x,0)=\varphi_{ij}^1(x),\ \chi(x,0)=\chi^0(x),\ \dot{\chi}(x,0)=\chi^1(x),\\ &\tau_i(x,0)=\tau_i^0(x),\ \dot{\tau}_i(x,0)=\tau_i^1(x),\ \forall x\in B, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

unde funcțiile u_i^0, u_i^1, φ_{ij}^0, φ_{ij}^1, χ^0, χ^1, τ_i^0 și τ_i^1 sunt date.

3.2.2 Rezultate de bază

În această secțiune obținem existența și unicitatea soluției pentru problema la limită cu date inițiale corespunzătoare. Vom obține și un rezultat de dependență continuă în raport cu datele inițiale și încărcări. Vom considera că funcțiile utilizate satisfac condiții suficiente de regularitate pe domeniul lor de definiție.

În cele ce urmează, vom studia doar teoria liniară. Vom nota cu Φ următoarea formă pătratică

$$\begin{aligned} \varrho\Phi=&\frac{1}{2}A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}+G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}+F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}+\\ &+\frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr}+\frac{1}{2}C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}+\\ &+d_{ijmn}\varepsilon_{ij}\tau_{m,n}+e_{ijmn}\gamma_{ij}\tau_{m,n}+f_{ijkmn}\chi_{ijk}\tau_{m,n}+\\ &+\frac{1}{2}K_{ij}\chi_{,i}\chi_{,j}+g_{ijmn}\tau_{m,n}\tau_{i,j}+\frac{1}{2}A_{ij}\dot{\tau}_i\dot{\tau}_j. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

În următoarea teoremă vom demonstra un rezultat auxiliar care va fi util în obținerea uncității soluției pentru problema mixtă.

Teorema 3.2.1. *Pentru orice soluție a sistemului de ecuații (3.2.8) are loc următoarea egalitate*

$$\begin{aligned} &\tau_{ij}\varepsilon_{ij}+\eta_{ij}\gamma_{ij}+\mu_{ijk}\chi_{ijk}+\varrho\eta\dot{\chi}+\varrho\eta_i\dot{\tau}_i+S_i\chi_{,i}+\Lambda_{ij}\tau_{i,j}=\\ &=A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}+2G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}+2F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}+B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+\\ &+2D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr}+C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}+2d_{ijmn}\varepsilon_{ij}\tau_{m,n}+2e_{ijmn}\gamma_{ij}\tau_{m,n}+\\ &+2f_{ijkmn}\chi_{ijk}\tau_{m,n}+K_{ij}\chi_{,i}\chi_{,j}+g_{ijmn}\tau_{m,n}\tau_{i,j}+a\dot{\chi}^2+A_{ij}\dot{\tau}_i\dot{\tau}_j. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

În următoarea teoremă vom demonstra unicitatea soluției pentru problema la limită cu date inițiale mixtă. Vor fi necesare următoarele ipoteze standard :

H_1. ϱ, I_{ij} și coeficientul constitutiv a sunt strict pozitive ;

H_2. forma pătratică Φ definită în (3.2.12) este pozitiv semi-definită ;

H_3. tensorul de conductivitate K_{ij} și tensorul constitutiv A_{ij} sunt pozitiv definite.

Următorul rezultat se referă la problema la limită cu date inițiale formată din ecuațiile (3.2.8), condițiile inițiale (3.2.11) și condițiile la limită (3.2.9). Vom nota cu $\mathcal{P}$ această problemă mixtă.

Teorema 3.2.2. *Dacă sunt îndeplinite condițiile standard H_1-H_3 și relațiile de simetrie (3.2.5), atunci problema $\mathcal{P}$ nu poate avea mai mult de o soluție.*

Vom trata problema existenței soluției pentru problema $\mathcal{P}$. Vom transforma problema $\mathcal{P}$ într-o problemă Cauchy formată dintr-o ecuație de evoluție pe un spațiu Hilbert. Vom considera problema $\mathcal{P}$ în cazul condițiilor la limită omogene

$$\bar{u}_i(x,t) = \bar{\varphi}_{ij}(x,t) = \bar{\chi}(x,t) = \bar{\tau}_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial B \times (0,\infty). \tag{3.2.14}$$

Spațiul Hilbert H va fi definit cu ajutorul spațiilor Hilbert $W_0^{1,2}$ și L^2, astfel

$$H = \mathbf{W}_0^{1,2} \times \mathbf{L}^2 \times \mathbf{W}_0^{1,2} \times \mathbf{L}^2 \times W_0^{1,2} \times L^2 \times W_0^{1,2} \times L^2 \times \mathbf{W}_0^{1,2} \times \mathbf{L}^2,$$

unde am utilizat notațiile $\mathbf{W}_0^{1,2} = W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} = \left[W_0^{1,2}\right]^3$ și, respectiv, $\mathbf{L}^2 = L^2 \times L^2 \times L^2 = \left[L^2\right]^3$. Spațiul H este înzestrat cu următorul produs scalar

$$\begin{aligned}
&\left\langle (u_i, v_i, \varphi_{ij}, \Psi_{ij}, \chi, \mu, \tau_i, \nu_i), (u_i', v_i', \varphi_{ij}', \Psi_{ij}', \chi', \mu', \tau_i', \nu_i') \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\int_B \left(\varrho v_i v_i' + I_{jk}\Psi_{jr}\Psi_{kr}' + a\mu\mu' + B_{ij}\nu_i\nu_i'\right) dV + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_B \left[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}' + G_{ijmn}\left(\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}' + \varepsilon_{ij}'\gamma_{mn}\right) + \right. \\
&\qquad + F_{ijmnr}\left(\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}' + \varepsilon_{ij}'\chi_{mnr}\right) + B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}' + \\
&\qquad\quad + D_{ijmnr}\left(\gamma_{ij}\chi_{mnr}' + \gamma_{ij}'\chi_{mnr}\right) + C_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}' + \\
&\qquad\qquad + d_{ijmn}\left(\varepsilon_{ij}\tau_{m,n}' + \varepsilon_{ij}'\tau_{m,n}\right) + e_{ijmn}\left(\gamma_{ij}\tau_{m,n}' + \gamma_{ij}'\tau_{m,n}\right) + \\
&\qquad\qquad\quad \left. + f_{ijkmn}\left(\chi_{ijk}\tau_{m,n}' + \chi_{ijk}'\tau_{m,n}\right) + g_{ijmn}\tau_{m,n}\tau_{i,j}'\right] dV.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Acest produs scalar induce o normă pe H care este echivalentă cu norma inițială pe spațiul Hilbert H.

Luând în considerare (3.2.8), vom defini operatorii

$$\begin{aligned}
&A_i^1\mathbf{u} = \frac{1}{\varrho}\left(A_{ijmn} + G_{mnij} + B_{ijmn}\right)u_{m,nj}, \\
&A_i^2\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\varrho}\left[-\left(G_{mnij} + B_{ijmn}\right)\varphi_{mn,j} + \left(F_{mnrij} + D_{ijmnr}\right)\varphi_{mn,rj}\right], \\
&B_i^1\mu = -\left(\alpha_{ij} + \beta_{ij}\right)\dot{\mu}_{,j},\ C_i^1\tau = \left(d_{ijmn} + e_{ijmn}\right)\tau_{m,nj}, \\
&A_i^3\mathbf{u} = \frac{1}{I_{jk}}\left[\left(F_{ijkmn} + D_{mnijk}\right)u_{n,mi} + \left(G_{jkmn} + B_{jkmn}\right)u_{m,n}\right], \\
&A_i^4\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{I_{jk}}\left[-D_{mnijk}\varphi_{mn,i} + C_{ijkmnr}\varphi_{mn,ri} - B_{jkmn}\varphi_{mn} + D_{jkmnr}\varphi_{mn,r}\right], \\
&B_{jk}^2\mu = -\left(\delta_{ijk}\dot{\mu}_{,i} + \beta_{jk}\dot{\mu}\right),\ C_{jk}^1\tau = f_{ijkmn}\tau_{m,ni} + e_{jkmn}\tau_{m,n}, \\
&N\chi = \frac{1}{a}K_{ij}\chi_{,ij},\ Q\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{a}\left(B_{ij} + l_{ij}\right)\nu_{j,i},\ R^1\mathbf{v} = \frac{1}{a}\left(\alpha_{ij} + \beta_{ij}\right)v_{j,i}, \\
&R^2\boldsymbol{\Psi} = -\beta_{ij}\Psi_{ij} + \delta_{ijk}\Psi_{jk,i},\ A_s^5\mathbf{u} = \Gamma_{si}\left(d_{ijmn} + e_{ijmn}\right)u_{m,nj}, \\
&A_s^6\boldsymbol{\varphi} = \Gamma_{si}f_{ijmnr}\varphi_{mn,rj},\ X_s\mu = -\Gamma_{si}\left(B_{ji} + l_{ji}\right)\mu_{,j},\ Y_s\boldsymbol{\tau} = \Gamma_{si}g_{ijmn}\tau_{m,nj}.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Matricea Γ_{si} este definită cu ajutorul tensorului B_{ji} și al ecuației

$$\Gamma_{ij}B_{ik} = \delta_{jk},$$

unde δ_{jk} este simbolul lui Kronecker.

Vom nota cu $\mathcal{U}$ matricea funcțiilor necunoscute

$$\mathcal{U} = \left(u_i, v_i, \varphi_{ij}, \Psi_{ij}, \chi, \mu, \tau_i, \nu_i\right).$$

Matricea $\mathcal{U}_0$ corespunzătoare datelor inițiale este

$$\mathcal{U}_0 = \left(u_i^0, v_i^0, \varphi_{ij}^0, \Psi_{ij}^0, \chi^0, \mu^0, \tau_i^0, \nu_i^0\right).$$

Vom nota cu $\mathcal{F}$ matricea de încărcări

$$\mathcal{F} = (\mathbf{0}, F_i, \mathbf{0}, G_{ij}, 0, s, \mathbf{0}, Q_i)\,.$$

Vom construi operatorul matricial $\mathcal{A}$ ale cărui componente sunt operatorii definiți în (3.2.16). Astfel, problema la limită cu date inițiale mixtă este transformată într-o problemă Cauchy asociată unei ecuații de evoluție

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}}{dt} &= \mathcal{A}\mathcal{U}(t) + \mathcal{F}(t), \\ \mathcal{U}(0) &= \mathcal{U}_0. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Domeniul de definiție al operatorului $\mathcal{A}$ este

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \left(\mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{W}^{2,2}\right) \times \mathbf{W}_0^{1,2} \times \left(\mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{W}^{2,2}\right) \times \mathbf{W}_0^{1,2} \times \\ \times \left(W_0^{1,2} \cap W^{2,2}\right) \times W_0^{1,2} \times \left(\mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{W}^{2,2}\right) \times \mathbf{W}_0^{1,2}, \end{aligned}$$

unde spațiile Sobolev $W_0^{1,2}$, $W^{2,2}$, $\mathbf{W}_0^{1,2}$ și $\mathbf{W}^{2,2}$ au semnificațiile cunoscute.

Pentru a demonstra existența soluției problemei abstracte (3.2.17), va fi necesară caracterizarea operatorului $\mathcal{A}$ din teorema următoare.

Teorema 3.2.3. *Presupunem că sunt îndeplinite ipotezele standard $H_1 - H_3$ și relațiile de simetrie (3.2.5). Atunci are loc*

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle = 0, \ \forall\, \mathcal{U} \in D(\mathcal{A}). \tag{3.2.18}$$

Vom aplica teorema Hille-Yosida operatorului $\mathcal{A}$. În acest sens, mai este necesară o condiție demonstrată în teorema următoare.

Teorema 3.2.4. *Dacă sunt îndeplinite aceleași condiții ca în Teorema 3.2.3, atunci codomeniul operatorului $\mathcal{A}$ este întregul spațiu H.*

Teorema 3.2.5. *Dacă sunt îndeplinite aceleași condiții ca în Teorema 3.2.3, atunci pe spațiul Hilbert H, operatorul abstract $\mathcal{A}$ poate genera un semigrup de contracții pe spațiul Hilbert H.*

Cu ajutorul corolarului Lumer-Phillips se poate obține și un rezultat de unicitate.

Teorema 3.2.6. *Presupunem că sunt satisfăcute condițiile din Teorema 3.2.3, că datele inițiale $\mathcal{U}_0$ aparțin domeniului operatorului $\mathcal{A}$ și că încărcările satisfac condiția*

$$F_i, G_{ij}, s, Q_i \in C^1([0,\infty), L^2) \cap C^0([0,\infty), W_0^{1,2}).$$

Atunci problema abstractă (3.2.17) admite unica soluție $\mathcal{U}(t) \in C^1([0,\infty), \mathcal{H})$.

Un alt rezultat important se referă la dependența continuă a soluției de încărcări și de datele inițiale.

Teorema 3.2.7. *Presupunem că sunt satisfăcute condițiile din Teorema 3.2.3. Atunci soluția $\mathcal{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \chi, \boldsymbol{\tau})$ a problemei (3.2.17) depinde continuu de încărcări F_i, G_{ij}, s, Q_i și de datele inițiale $\mathcal{U}_0$ astfel*

$$|\mathcal{U}(t)| \leq \int_0^t \|(F_i, G_{ij}, s, Q_i)\|\, ds + |\mathcal{U}_0|.$$

3.2.3 Simulări numerice

În continuare, vom realiza simulări numerice în cazul izotrop, care este mult mai simplu decât cel anizotrop deoarece numărul de coeficienți descreşte în mod semnificativ. În primul rând, vom scrie ecuațiile constitutive în forma izotropă. În acest sens, avem nevoie de următoarele ipoteze asupra coeficienților.

$$A_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu_1\delta_{im}\delta_{jn} + \mu_2\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{3.2.19}$$

$$G_{ijmn} = g_1\delta_{ij}\delta_{mn} + g_2\delta_{im}\delta_{jn} + g_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{3.2.20}$$

$$B_{ijmn} = b_1\delta_{ij}\delta_{mn} + b_2\delta_{im}\delta_{jn} + b_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{3.2.21}$$

$$\begin{aligned} C_{ijkmnr} = {} & a_1\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nr} + a_2\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{rm} + a_3\delta_{ij}\delta_{kr}\delta_{mn} + a_4\delta_{jk}\delta_{im}\delta_{nr} + \\ & + a_5\delta_{jk}\delta_{in}\delta_{rm} + a_6\delta_{jk}\delta_{ir}\delta_{mn} + a_7\delta_{ki}\delta_{jm}\delta_{nr} + a_8\delta_{ki}\delta_{jn}\delta_{rm} + \\ & + a_9\delta_{ki}\delta_{jr}\delta_{mn} + a_{10}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kr} + a_{11}\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{ir} + a_{12}\delta_{km}\delta_{in}\delta_{jr} + \\ & + a_{13}\delta_{im}\delta_{jr}\delta_{kn} + a_{14}\delta_{jm}\delta_{kr}\delta_{in} + a_{15}\delta_{km}\delta_{ir}\delta_{jn}, \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

$$d_{ijmn} = d_1\delta_{ij}\delta_{mn} + d_2\delta_{im}\delta_{jn} + d_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{3.2.23}$$

$$e_{ijmn} = e_1\delta_{ij}\delta_{mn} + e_2\delta_{im}\delta_{jn} + e_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{3.2.24}$$

$$g_{ijmn} = h_1\delta_{ij}\delta_{mn} + h_2\delta_{im}\delta_{jn} + h_3\delta_{in}\delta_{jm}, \tag{3.2.25}$$

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta\delta_{ij}, \quad l_{ij} = l\delta_{ij}, \tag{3.2.26}$$

$$A_{ij} = f_1\delta_{ij}, \quad B_{ij} = f_2\delta_{ij}, \quad K_{ij} = f_3\delta_{ij}. \tag{3.2.27}$$

Prin înlocuirea coeficienților de mai sus în ecuațiile constitutive (3.2.3), obținem

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = {} & \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{mm} + \mu_1\varepsilon_{ij} + \mu_2\varepsilon_{ji} + g_1\delta_{ij}\gamma_{mm} + g_2\gamma_{ij} + g_3\gamma_{ji} - \\ & - \alpha\delta_{ij}\dot{\chi} + d_1\delta_{ij}\tau_{m,m} + d_2\tau_{i,j} + d_3\tau_{j,i}, \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

$$\begin{aligned} \eta_{ij} = {} & g_1\delta_{ij}\varepsilon_{mm} + g_2\varepsilon_{ij} + g_3\varepsilon_{ji} + b_1\delta_{ij}\gamma_{mm} + b_2\gamma_{ij} + b_3\gamma_{ji} - \\ & - \beta\delta_{ij}\dot{\chi} + e_1\delta_{ij}\tau_{m,m} + e_2\tau_{i,j} + e_3\tau_{j,i}, \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = {} & a_1\delta_{ij}\chi_{knn} + a_2\delta_{ij}\chi_{mkm} + a_3\delta_{ij}\chi_{mmk} + a_4\delta_{jk}\chi_{inn} + \\ & + a_5\delta_{jk}\chi_{mim} + a_6\delta_{jk}\chi_{nni} + a_7\delta_{ki}\chi_{jnn} + a_8\delta_{ki}\chi_{mjm} + \\ & + a_9\delta_{ki}\chi_{nnj} + a_{10}\chi_{ijk} + a_{11}\chi_{jki} + a_{12}\chi_{kij} + \\ & + a_{13}\chi_{ikj} + a_{14}\chi_{jik} + a_{15}\chi_{kji}, \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

$$\rho\eta = \alpha\varepsilon_{ii} + \beta\gamma_{ii} + a\dot{\chi} + l\tau_{i,i}, \tag{3.2.31}$$

$$\rho\eta_i = f_1\dot{\tau}_i + f_2\chi_{,i}, \tag{3.2.32}$$

$$S_i = -f_2\dot{\tau}_i + f_3\chi_{,i}, \tag{3.2.33}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} = {} & d_1\delta_{ij}\varepsilon_{nn} + d_2\varepsilon_{ij} + d_3\varepsilon_{ji} + e_1\delta_{ij}\gamma_{nn} + e_2\gamma_{ij} + e_3\gamma_{ji} - \\ & - l\delta_{ij}\dot{\chi} + h_1\delta_{ij}\tau_{n,n} + h_2\tau_{i,j} + h_3\tau_{j,i}. \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Pentru analiza numerică a problemei sunt necesare formulările variaționale ale ecuațiilor de mișcare. Prin urmare, sunt necesare anumite spații de funcții.

Fie Y un spațiu Banach cu norma $||\cdot||_Y$. Se definește spațiul $L^2(0,T;Y)$ ca fiind spațiul funcțiilor definite pe $[0,T]$ cu valori în Y care au o normă finită, unde norma este definită astfel $||g||_{L^2(0,T;Y)} = \left(\int_0^T ||g(t)||_Y^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ [74].

Fie $\mathbf{z} \in [H_0^2(\Omega)]^3$ și să definim spațiul $Q_{\mathbf{u}} = L^2(0,T;[H_0^2(\Omega)]^3)$ [50]. Atunci formularea variațională pentru vectorul deplasare u_i este

$$\begin{aligned}
&\int_B \rho\ddot{u}_i z_i dV + \int_B \Big[(\lambda+g_1)\delta_{ji}u_{m,m}z_{i,j} + (\mu_1+\mu_2+g_2+g_3)\frac{1}{2}(u_{j,i}+u_{i,j})z_{i,j} + \\
&+ (g_1+b_1)\delta_{ji}u_{m,m}z_{i,j} + (g_2+b_2)u_{i,j}z_{i,j} + (g_3+b_3)u_{j,i}z_{i,j}\Big]\,dV = \\
&= \int_B \rho F_i z_i dV + \int_{\partial B}(\tau_{ji}+\eta_{ji})z_i n_j dA + \int_B \big[(g_1+b_1)\delta_{ji}\varphi_{mm}z_{i,j} + \\
&+ (g_2+b_2)\varphi_{ji}z_{i,j} + (g_3+b_3)\varphi_{ij}z_{i,j} + (\alpha+\beta)\delta_{ji}\dot{\chi}z_{i,j} - \\
&-(d_1+e_1)\delta_{ji}\tau_{m,m}z_{i,j} - (d_2+e_2)\tau_{j,i}z_{i,j} - (d_3+e_3)\tau_{i,j}z_{i,j}\big]\,dV.
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Se consideră că $\phi \in [H_0^2(\Omega)]^{3\times 3}$ și se definește spațiul de funcții $Q_\varphi = L^2\left(0,T;[H_0^2(\Omega)]^{3\times 3}\right)$. Atunci formularea variațională a tensorului de deplasare dipolară φ_{ij} este

$$\begin{aligned}
&-\int_B I\ddot{\varphi}_{jk}\phi_{jk}dV + \int_B \big[-(a_1\delta_{ij}\varphi_{nn,k} + a_2\delta_{ij}\varphi_{km,m} + a_3\delta_{ij}\varphi_{mk,m} + \\
&+ a_4\delta_{jk}\varphi_{nn,i} + a_5\delta_{jk}\varphi_{im,m} + a_6\delta_{jk}\varphi_{ni,n} + a_7\delta_{ki}\varphi_{nn,j} + a_8\delta_{ki}\varphi_{jm,m} + \\
&+ a_9\delta_{ki}\varphi_{nj,n} + a_{10}\varphi_{jk,i} + a_{11}\varphi_{ki,j} + a_{12}\varphi_{ij,k} + a_{13}\varphi_{kj,i} + a_{14}\varphi_{ik,j} + \\
&+a_{15}\varphi_{ji,k})\,\phi_{jk,i} - b_1\delta_{jk}\varphi_{mm}\phi_{jk} - b_2\varphi_{jk}\phi_{jk} - b_3\varphi_{kj}\phi_{jk}\big]\,dV = \\
&= -\int_B \big[(g_1\delta_{jk}\varepsilon_{mm} + g_2\varepsilon_{jk} + g_3\varepsilon_{kj} + b_1\delta_{jk}u_{m,m} + b_2u_{k,j} + b_3u_{j,k} - \\
&-\beta\delta_{jk}\dot{\chi} + e_1\delta_{jk}\tau_{m,m} + e_2\tau_{j,k} + e_3\tau_{k,j})\,\phi_{jk} + \rho G_{jk}\phi_{jk}\big]\,dV - \\
&-\int_{\partial B}\mu_{ijk}\phi_{jk}n_i dA.
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Se consideră că $\psi \in H_0^2(\Omega)$ și se definește spațiul de funcții $Q_\chi = L^2\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right)$. Atunci formularea variațională pentru temperatura χ este

$$\begin{aligned}
&\int_B (\alpha\dot{\varepsilon}_{ii} + \beta\dot{\gamma}_{ii} + a\ddot{\chi} + l\dot{\tau}_{i,i})\,\psi dV + \int_B (-f_2\dot{\tau}_i\psi_{,i} + f_3\chi_{,i}\psi_{,i})\,dV = \\
&= \int_B \rho r\psi dV + \int_{\partial B} S_i n_i \psi dA.
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

În final, considerăm că $\mathbf{w} \in [H_0^2(\Omega)]^3$ și definim spațiul de funcții $Q_\tau = L^2\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right)$. Atunci formularea variațională pentru vectorul de microtemperaturi τ_i este

$$\begin{aligned}
&\int_B (h_1\delta_{ji}\tau_{n,n} + h_2\tau_{j,i} + h_3\tau_{i,j})\,w_{i,j}dV + \int_B (f_1\ddot{\tau}_i + f_2\dot{\chi}_{,i})\,w_i dV = \\
&= \int_B \rho R_i w_i dV - \int_B (d_1\delta_{ji}\varepsilon_{nn} + d_2\varepsilon_{ji} + d_3\varepsilon_{ij} + e_1\delta_{ji}\gamma_{nn} + e_2\gamma_{ji} + \\
&+e_3\gamma_{ij} - l\delta_{ji}\dot{\chi})\,w_{i,j}dV + \int_{\partial B}\Lambda_{ji}w_i n_j dA.
\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Pentru a realiza simulări numerice, vom reduce problema la cazul deformării plane, așa cum este definit în [112]. Prin analizarea rezultatelor din [112], concluzionăm că putem utiliza elemente finite

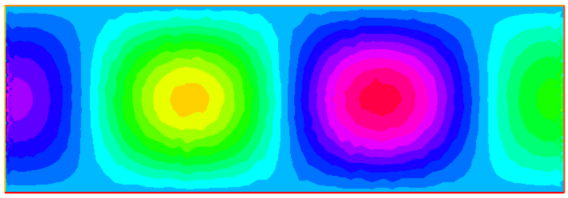

Figura 3.1 – Deplasarea u_1

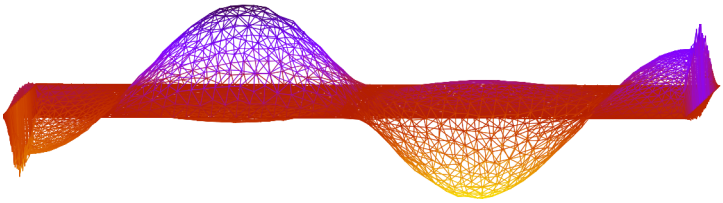

Figura 3.2 – Deplasarea u_1

P1 pentru deplasări și microdeformații și o divizare mai fină a domeniului. Utilizăm coeficienții elastici din [112].

Potrivit rezultatului de dependență continuă din secțiunea anterioară, vom utiliza condiții pe frontieră nule pentru variabile. Vom utiliza condiția inițială $u_1(0, x, y) = -\frac{x}{100}$, pentru $(x, y) \in B$.

Pentru schema numerică, vom utiliza abordarea din [10] și [51] și programul FreeFem++. Simulările numerice sunt realizate pe un domeniu dreptunghiular plan.

Graficul rezultat din simulările numerice realizate în FreeFem++ pentru deplasarea u_1 este descris în Figura 3.1. Deplasarea u_1 este trasată și cu ajutorul gnuplot 5.2 pentru a obține reprezentarea 3D corespunzătoare din Figura 3.2. Observăm că avem o propagare de unde.

Microtemperatura ϑ_1 este descrisă în Figura 3.3. Se observă și în acest caz propagarea undelor.

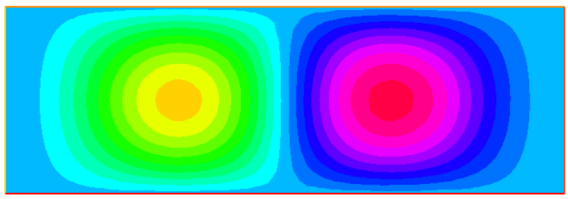

Figura 3.3 – Microtemperatura ϑ_1

Temperatura este înfățișată în Figura 3.4. Se observă cum se propagă unda termică.

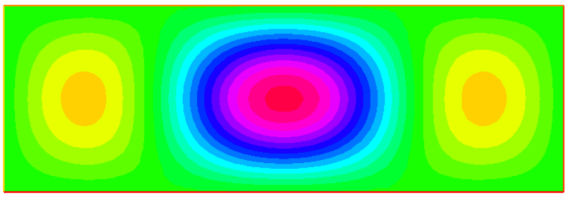

Figura 3.4 – Temperatura θ

Capitolul 4

Medii elastice microstretch cu efecte termice și de difuzie la nivel macro și micro

Analizăm un model matematic pentru termoelasticitate microstretch cu difuzie, în care fiecărui element i se asociază microtemperaturi și microconcentrații. Studiem cazul liniar și anizotrop. În primul rând, demonstrăm unicitatea soluției pentru problema la limită cu date inițiale corespunzătoare în cazul non-centro-simetric.

Analizăm comportarea spațială a termoelasticității microstretch cu efecte de difuzie cu microtemperaturi și microconcentrații în cazul liniar, anizotrop și non-centro-simetric. Definim o funcție cu o pondere care depinde de timp și descrie principalele caracteristici ale modelului și studiem proprietățile sale și deducem o inegalitate diferențială. Obținem o descreștere spațială exponențială care este independentă de timp și este validă pentru corpuri nemărginite.

Problema mixtă se reduce la o problemă abstractă pe un spațiu Hilbert în cazul cu centru de simetrie. Un rezultat de dependență continuă este arătat cu ajutorul unui semigrup de operatori liniari. Studiem cazul anizotrop și aplicăm corolarul Lumer-Phillips al teoremei Hille-Yosida. În cazul centro-simetric, tensorii de rang impar sunt nuli și modelul pe care îl analizăm devine mai simplu.

Dependența continuă a soluției de date inițiale și încărcări a fost deja demonstrată în cazul izotrop pentru termoelasticitatea microstretch cu efecte de difuzie cu microtemperaturi și microconcentrații în [22] cu ajutorul inegalității Gronwall.

4.1 Preliminarii

Considerăm un corp care la un anumit moment în timp ocupă un domeniu mărginit Ω al spațiului euclidian tridimensional cu frontiera netedă pe porțiuni $\partial\Omega$.

Ecuațiile de mișcare ale teoriei liniare a termoelasticității microstretch sunt [67]

$$t_{ji,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \tag{4.1.1}$$

$$h_{k,k} + g + \rho l = J\ddot{\varphi} \tag{4.1.2}$$

și

$$m_{ji,j} + \varepsilon_{irs} t_{rs} + \rho g_i = I_{ij}\ddot{\varphi}_j. \tag{4.1.3}$$

Are loc [7]

$$\dot{C} = \eta_{i,i}. \tag{4.1.4}$$

Tensorii de deformație sunt

$$e_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{jik}\varphi_k, \qquad \kappa_{ij} = \varphi_{j,i}, \qquad \zeta_i = \varphi_{,i}. \tag{4.1.5}$$

Tabelul 4.1 – Notații pentru funcțiile mecanice

u_i	componentele vectorului deplasare în Ω
t_{ij}	componentele tensorului tensiune
ρ	densitatea mediului în configurația de referință
f	forță masică
φ	funcția de microdilatare
φ_i	componentele vectorului microrotație
h_j	componentele vectorului microstretch
m_{ij}	componentele tensorului micromoment
g	forța masică internă
l	încărcarea masică externă microstretch
g_i	cuplul masic
ε_{ijk}	simbolul Levi-Civita
δ_{ij}	simbolul lui Kronecker
e	densitatea energiei interne pe unitatea de masă
ε_i	componentele vectorului de prim moment al energiei

Ecuațiile energiei și ale primului moment al energiei pot fi exprimate sub forma

$$\rho\dot{e} = t_{ij}\dot{e}_{ij} + m_{ij}\dot{\kappa}_{ij} + h_j\dot{\zeta}_j - g\dot{\varphi} + q_{j,j} + \rho s \tag{4.1.6}$$

și

$$\rho\dot{\varepsilon}_i = q_{ji,j} + q_i - Q_i + \rho G_i. \tag{4.1.7}$$

Tabelul 4.2 – Notații pentru funcțiile termice

q_i	componentele vectorului flux al căldurii
s	sursa de căldură pe unitate de masă
q_{ij}	componentele tensorului de prim moment al fluxului de căldură
Q_i	componentele vectorului de medie a fluxului de microcăldură
G_i	componentele vectorului de prim moment al sursei de căldură
T	temperatura absolută
T_0	temperatura absolută în configurația de referință
$\theta = T - T_0$	
T_i	componentele vectorului de microtemperaturi

Primul moment al difuziei masei este [7]

$$\rho\dot{\omega}_i = \eta_{ji,j} + \eta_i - \tilde{\sigma}_i. \tag{4.1.8}$$

Tabelul 4.3 – Notații pentru funcțiile de difuzie

η_i	componentele vectorului flux de difuzie a masei
C	concentrația
η_{ij}	componentele tensorului de prim moment al fluxului de difuzie a masei
$\tilde{\sigma}_i$	componentele vectorului de medie a fluxului de difuzie a micromasei
S	microentropia
P	potențialul chimic al particulei
C_i	componentele vectorului de microconcentrații

Considerăm $\tilde{\sigma}$ în teoria liniară pentru cazul anizotrop și non-centro-simetric de forma [7], [67]

$$\begin{aligned}2\tilde{\sigma} &= A_{ijrs}e_{ij}e_{rs} + 2B_{ijrs}e_{ij}\kappa_{rs} + C_{ijrs}\kappa_{ij}\kappa_{rs} + 2D_{ij}e_{ij}\varphi + \\ &+ 2E_{ij}\kappa_{ij}\varphi + 2F_{ijk}e_{ij}\zeta_k - 2a_{ij}e_{ij}\theta + 2L_{ijk}e_{ij}T_k + \\ &+ 2G_{ijk}\kappa_{ij}\zeta_k + A_{ij}\zeta_i\zeta_j - 2b_{ij}\kappa_{ij}\theta + 2M_{ijk}\kappa_{ij}T_k + 2B_i\zeta_i\varphi - \\ &- 2d_i\zeta_i\theta - 2N_{ij}\zeta_iT_j + \xi\varphi^2 - 2F\varphi\theta + 2R_i\varphi T_i - a\theta^2 - \\ &- 2b_i\theta T_i - B_{ij}T_iT_j - 2\varpi\theta C + \varrho C^2 - 2R_{ij}T_iC_j - C_{ij}C_iC_j + \\ &+ 2d_{ij}e_{ij}C + 2f_{ij}\kappa_{ij}C + 2\tilde{f}_i\zeta_iC + 2\tilde{g}_1\varphi C + 2L'_{ijk}e_{ij}C_k + \\ &+ 2M'_{ijk}\kappa_{ij}C_k - 2N'_{ij}\zeta_iC_j + 2R'_i\varphi C_i - 2b'_i\theta C_i - \\ &- 2m_iT_iC - 2m'_iC_iC,\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

unde coeficienții elastici satisfac următoarele relații de simetrie

$$\begin{aligned}&A_{ijrs} = A_{rsij}, \quad C_{ijrs} = C_{rsij}, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji}, \\ &C_{ij} = C_{ji}, \quad R_{ij} = R_{ji}.\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

În continuare, vom urmări strategia din [7] și vom introduce difuzia și microconcentrațiile în modelul matematic propus în [67] pentru termoelasticitatea microstretch cu microtemperaturi. Pentru teoria liniară a difuziei în termoelasticitatea microstretch cu microtemperaturi și microconcentrații vom deduce ecuațiile constitutive în cazul anizotrop și non-centro-simetric

$$\begin{aligned}t_{ij} &= A_{ijrs}e_{rs} + B_{ijrs}\kappa_{rs} + D_{ij}\varphi + F_{ijk}\zeta_k + t^*_{ij}, \\ m_{ij} &= B_{rsij}e_{rs} + C_{ijrs}\kappa_{rs} + E_{ij}\varphi + G_{ijk}\zeta_k + m^*_{ij}, \\ h_i &= F_{rsi}e_{rs} + G_{rsi}\kappa_{rs} + A_{ij}\zeta_j + B_i\varphi + h^*_i, \\ g &= -D_{ij}e_{ij} - E_{ij}\kappa_{ij} - B_i\zeta_i - \xi\varphi + g^*, \\ \rho S &= a_{ij}e_{ij} + b_{ij}\kappa_{ij} + d_i\zeta_i + F\varphi + S^*, \\ \rho\varepsilon_i &= L_{rsi}e_{rs} + M_{rsi}\kappa_{rs} - N_{ji}\zeta_j + R_i\varphi + \varepsilon^*_i, \\ P &= d_{ij}e_{ij} + f_{ij}\kappa_{ij} + \tilde{f}_i\zeta_i + \tilde{g}_1\varphi + P^*, \\ \rho\omega_i &= L'_{rsi}e_{rs} + M'_{rsi}\kappa_{rs} - N'_{ji}\zeta_j + R'_i\varphi + \omega^*_i,\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

unde termenii care exprimă efectele termice și de difuzie sunt dați de

$$\begin{aligned}&t^*_{ij} = L_{ijk}T_k - a_{ij}\theta + d_{ij}C + L'_{ijk}C_k, \quad m^*_{ij} = M_{ijk}T_k - b_{ij}\theta + f_{ij}C + M'_{ijk}C_k, \\ &h^*_i = -N_{ij}T_j - d_i\theta + \tilde{f}_iC - N'_{ij}C_j, \quad g^* = -R_iT_i + F\theta - \tilde{g}_1C - R'_iC_i, \\ &S^* = b_iT_i + a\theta + \varpi C + b'_iC_i, \quad \varepsilon^*_i = -B_{ij}T_j - b_i\theta - R_{ij}C_j - m_iC, \\ &P^* = -\varpi\theta + \varrho C - m_iT_i - m'_iC_i, \quad \omega^*_i = -C_{ij}C_j - R_{ji}T_j - b'_i\theta - m'_iC.\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

La fel ca în [7], deducem că

$$\begin{aligned}&q_i = k_{ij}\theta_{,j} + K_{ij}T_j, \qquad \eta_i = h_{ij}P_{,j} + H_{ij}C_j, \\ &q_{ij} = -P_{ijkl}T_{l,k}, \qquad \eta_{ij} = -F_{ijkl}C_{l,k}, \\ &Q_i = (k_{ij} - \tilde{k}_{ij})\theta_{,j} + (K_{ij} - \tilde{K}_{ij})T_j, \qquad \tilde{\sigma}_i = (h_{ij} - \tilde{h}_{ij})P_{,j} + (H_{ij} - \tilde{H}_{ij})C_j,\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

unde au loc următoarea inegalitate

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} + \left(\frac{1}{T_0}K_{ij} + \tilde{k}_{ij}\right)\theta_{,i}T_j + P_{ijkl}T_{l,k}T_{j,i} + \tilde{K}_{ij}T_iT_j + \\ &+ \tilde{H}_{ij}C_iC_j + (\tilde{h}_{ij} + H_{ij})P_{,i}C_j + h_{ij}P_{,i}P_{,j} - F_{jikl}C_{l,kj}C_i \geq 0\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

și relațiile de simetrie

$$\begin{aligned}&P_{ijkl} = P_{klij}, \qquad F_{ijkl} = F_{klij}, \qquad K_{ij} = K_{ji}, \qquad H_{ij} = H_{ji}, \qquad k_{ij} = k_{ji}, \\ &h_{ij} = h_{ji}, \qquad \tilde{K}_{ij} = \tilde{K}_{ji}, \qquad \tilde{H}_{ij} = \tilde{H}_{ji}, \quad \tilde{k}_{ij} = \tilde{k}_{ji}, \qquad \tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}.\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

La fel ca în [7] și [67], considerăm că

$$\rho T_0 \dot{S} = q_{i,i} + \rho s. \tag{4.1.16}$$

Din (4.1.11)$_7$ rezultă că putem exprima concentrația astfel

$$\varrho C = P - d_{ij}e_{ij} - f_{ij}\kappa_{ij} - \tilde{f}_i\zeta_i - \tilde{g}_1\varphi + \varpi\theta + m_iT_i + m'_iC_i. \tag{4.1.17}$$

Propunem următoarele notații

$$\begin{aligned}
&A^*_{ijrs} = A_{ijrs} - \frac{d_{ij}d_{rs}}{\varrho}, \qquad B^*_{ijrs} = B_{ijrs} - \frac{d_{ij}f_{rs}}{\varrho}, \qquad C^*_{ijrs} = C_{ijrs} - \frac{f_{ij}f_{rs}}{\varrho},\\
&D^*_{ij} = D_{ij} - \frac{d_{ij}\tilde{g}_1}{\varrho}, \qquad F^*_{ijk} = F_{ijk} - \frac{d_{ij}\tilde{f}_k}{\varrho}, \qquad E^*_{ij} = E_{ij} - \frac{f_{ij}\tilde{g}_1}{\varrho},\\
&G^*_{ijk} = G_{ijk} - \frac{f_{ij}\tilde{f}_k}{\varrho}, \qquad a^*_{ij} = a_{ij} - \frac{d_{ij}\varpi}{\varrho}, \qquad b^*_{ij} = b_{ij} - \frac{f_{ij}\varpi}{\varrho},\\
&A^*_{ij} = A_{ij} - \frac{\tilde{f}_i\tilde{f}_j}{\varrho}, \qquad B^*_i = B_i - \frac{\tilde{f}_i\tilde{g}_1}{\varrho}, \qquad d^*_i = d_i - \frac{\tilde{f}_i\varpi}{\varrho},\\
&F^* = F - \frac{\tilde{g}_1\varpi}{\varrho}, \qquad \xi^* = \xi - \frac{\tilde{g}_1^2}{\varrho}, \qquad a^* = a + \frac{\varpi^2}{\varrho}, \qquad L^*_{ijk} = L_{ijk} + \frac{d_{ij}m_k}{\varrho},\\
&L'^*_{ijk} = L'_{ijk} + \frac{d_{ij}m'_k}{\varrho}, \qquad M^*_{ijk} = M_{ijk} + \frac{f_{ij}m_k}{\varrho}, \qquad M'^*_{ijk} = M'_{ijk} + \frac{f_{ij}m'_k}{\varrho},\\
&N^*_{ij} = N_{ij} - \frac{\tilde{f}_im_j}{\varrho}, \qquad N'^*_{ij} = N'_{ij} - \frac{\tilde{f}_im'_j}{\varrho}, \qquad R^*_i = R_i + \frac{\tilde{g}_1m_i}{\varrho},\\
&R'^*_i = R'_i + \frac{\tilde{g}_1m'_i}{\varrho}, \qquad b^*_i = b_i + \frac{\varpi m_i}{\varrho}, \qquad b'^*_i = b'_i + \frac{\varpi m'_i}{\varrho},\\
&B^*_{ij} = B_{ij} + \frac{m_im_j}{\varrho}, \qquad C^*_{ij} = C_{ij} + \frac{m'_im'_j}{\varrho}, \qquad R^*_{ij} = R_{ij} + \frac{m_im'_j}{\varrho}.
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Cu notațiile de mai sus și utilizând formula (4.1.17) pentru a exprima concentrația în funcție de potențialul chimic, ecuațiile constitutive devin în cazul anizotrop și non-centro-simetric

$$\begin{aligned}
t_{ij} &= A^*_{ijrs}e_{rs} + B^*_{ijrs}\kappa_{rs} + D^*_{ij}\varphi + F^*_{ijk}\zeta_k + t'^*_{ij},\\
m_{ij} &= B^*_{rsij}e_{rs} + C^*_{ijrs}\kappa_{rs} + E^*_{ij}\varphi + G^*_{ijk}\zeta_k + m'^*_{ij},\\
h_i &= F^*_{rsi}e_{rs} + G^*_{rsi}\kappa_{rs} + A^*_{ij}\zeta_j + B^*_i\varphi + h'^*_i,\\
g &= -D^*_{ij}e_{ij} - E^*_{ij}\kappa_{ij} - B^*_i\zeta_i - \xi^*\varphi + g'^*,\\
\rho S &= a^*_{ij}e_{ij} + b^*_{ij}\kappa_{ij} + d^*_i\zeta_i + F^*\varphi + S'^*,\\
\rho\varepsilon_i &= L^*_{rsi}e_{rs} + M^*_{rsi}\kappa_{rs} - N^*_{ji}\zeta_j + R^*_i\varphi + \varepsilon'^*_i,\\
\rho\omega_i &= L'^*_{rsi}e_{rs} + M'^*_{rsi}\kappa_{rs} - N'^*_{ji}\zeta_j + R'^*_i\varphi + \omega'^*_i,
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

unde efectele termice și de difuzie sunt descrise de

$$\begin{aligned}
&t'^*_{ij} = L^*_{ijk}T_k - a^*_{ij}\theta + \frac{d_{ij}}{\varrho}P + L'^*_{ijk}C_k, \quad m'^*_{ij} = M^*_{ijk}T_k - b^*_{ij}\theta + \frac{f_{ij}}{\varrho}P + M'^*_{ijk}C_k,\\
&h'^*_i = -N^*_{ij}T_j - d^*_i\theta + \frac{\tilde{f}_i}{\varrho}P - N'^*_{ij}C_j, \quad g'^* = -R^*_iT_i + F^*\theta - \frac{\tilde{g}_1}{\varrho}P - R'^*_iC_i,\\
&S'^* = b^*_iT_i + a^*\theta + \frac{\varpi}{\varrho}P + b'^*_iC_i, \quad \varepsilon'^*_i = -B^*_{ij}T_j - b^*_i\theta - R^*_{ij}C_j - \frac{m_i}{\varrho}P,\\
&\omega'^*_i = -C^*_{ij}C_j - R^*_{ji}T_j - b'^*_i\theta - \frac{m'_i}{\varrho}P,
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

cu următoarele simetrii pentru coeficienți

$$A^*_{ijrs} = A^*_{rsij}, \quad C^*_{ijrs} = C^*_{rsij}, \quad A^*_{ij} = A^*_{ji}, \quad B^*_{ij} = B^*_{ji}, \quad C^*_{ij} = C^*_{ji}. \tag{4.1.21}$$

Prin urmare, ecuațiile de bază ale teoriei difuziei în termoelasticitatea microstretch cu microtemperaturi și microconcentrații sunt ecuațiile de mișcare (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), ecuațiile energiei (4.1.6) și (4.1.7), ecuațiile de difuzie (4.1.4) și (4.1.8), ecuațiile constitutive (4.1.19) și ecuațiile geometrice (4.1.5). În plus, se consideră condiții inițiale și la limită. Condițiile inițiale sunt

$$\begin{aligned}
&u_i(x,0) = u_i^0(x), \qquad \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x), \qquad \varphi_i(x,0) = \varphi_i^0(x), \qquad \dot{\varphi}_i(x,0) = \varphi_i^1(x),\\
&\varphi(x,0) = \varphi^0(x), \qquad \dot{\varphi}(x,0) = \varphi^1(x), \qquad \theta(x,0) = \theta^0(x), \qquad T_i(x,0) = T_i^0(x),\\
&P(x,0) = P^0(x), \qquad C_i(x,0) = C_i^0(x), \qquad x \in \bar{\Omega},
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

unde u_i^0, u_i^1, φ_i^0, φ_i^1, φ^0, φ^1, θ^0, T_i^0, P^0 și C_i^0 sunt date. Fie S_r, $r = 1, ..., 14$ submulțimi ale frontierei $\partial\Omega$ astfel încât $\bar{S}_1 \cup S_2 = \bar{S}_3 \cup S_4 = \bar{S}_5 \cup S_6 = \bar{S}_7 \cup S_8 = \bar{S}_9 \cup S_{10} = \bar{S}_{11} \cup S_{12} = \bar{S}_{13} \cup S_{14} = \partial\Omega$ și $S_1 \cap S_2 = S_3 \cap S_4 = S_5 \cap S_6 = S_7 \cap S_8 = S_9 \cap S_{10} = S_{11} \cap S_{12} = S_{13} \cap S_{14} = \varnothing$. Condițiile la limită sunt

$$\begin{aligned}
&u_i = \bar{u}_i \text{ pe } \bar{S}_1 \times I, \qquad \varphi_i = \bar{\varphi}_i \text{ pe } \bar{S}_3 \times I, \qquad \varphi = \bar{\varphi} \text{ pe } \bar{S}_5 \times I,\\
&\theta = \bar{\theta} \text{ pe } \bar{S}_7 \times I, \qquad T_i = \bar{T}_i \text{ pe } \bar{S}_9 \times I, \qquad P = \bar{P} \text{ pe } \bar{S}_{11} \times I,\\
&C_i = \bar{C}_i \text{ pe } \bar{S}_{13} \times I, \qquad t_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ pe } S_2 \times I, \qquad m_{ji}n_j = \bar{m}_i \text{ pe } S_4 \times I,\\
&h_k n_k = \bar{h} \text{ pe } S_6 \times I, \qquad q_j n_j = \bar{q} \text{ pe } S_8 \times I, \qquad q_{ki}n_k = \bar{q}_i \text{ pe } S_{10} \times I,\\
&\eta_i n_i = \bar{\eta} \text{ pe } S_{12} \times I, \qquad \eta_{ki}n_k = \bar{\eta}_i \text{ pe } S_{14} \times I,
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

unde $\bar{u}_i$, $\bar{\varphi}_i$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{T}_i$, $\bar{P}$, $\bar{C}_i$, $\bar{t}_i$, $\bar{m}_i$, $\bar{h}$, $\bar{q}$, $\bar{q}_i$, $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}_i$ sunt funcții date și $I = (0, \infty)$.

4.2 Unicitatea soluției în cazul anizotrop

În această secțiune vom demonstra unicitatea soluției pentru problema termoelasticității microstretch cu microtemperaturi și microconcentrații în cazul anizotrop și non-centro-simetric. În acest sens, examinăm procesul admisibil

$$p = \{u_i, \varphi_i, \varphi, \theta, T_i, P, C_i, t_{ij}, m_{ij}, h_i, g, S, \varepsilon_i, q_i, Q_i, q_{ij}, \omega_i, \eta_i, \eta_{ij}\}. \tag{4.2.1}$$

Utilizăm strategia din [67]. Definim funcțiile W_p, Γ_p și $\mathcal{D}_p$ pe $\Omega \times I$ prin

$$\begin{aligned}
W_p = &\frac{1}{2}A^*_{ijrs}e_{ij}e_{rs} + B^*_{ijrs}e_{ij}\kappa_{rs} + \frac{1}{2}C^*_{ijrs}\kappa_{ij}\kappa_{rs} + D^*_{ij}e_{ij}\varphi + E^*_{ij}\kappa_{ij}\varphi +\\
&+ F^*_{ijk}e_{ij}\zeta_k + G^*_{ijk}\kappa_{ij}\zeta_k + B^*_i\varphi\zeta_i + \frac{1}{2}A^*_{ij}\zeta_i\zeta_j + \frac{1}{2}\xi^*\varphi^2,
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

unde efectele termice și de difuzie sunt caracterizate de următoarele expresii

$$\begin{aligned}
\Gamma_p = &b^*_i\theta T_i + \frac{1}{2}a^*\theta^2 + \frac{1}{2}B^*_{ij}T_iT_j + \frac{\varpi}{\varrho}\theta P + \frac{1}{2}C^*_{ij}C_iC_j + R^*_{ij}T_iC_j +\\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{\varrho}P^2 + b'^*_i\theta C_i + \frac{m_i}{\varrho}PT_i + \frac{m'_i}{\varrho}PC_i,
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_p = &\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} + \left(\frac{1}{T_0}K_{ij} + \tilde{k}_{ij}\right)\theta_{,i}T_j + P_{ijkl}T_{l,k}T_{j,i} + \tilde{K}_{ij}T_iT_j +\\
&+ \tilde{H}_{ij}C_iC_j + \left(\tilde{h}_{ij} + H_{ij}\right)P_{,i}C_j + h_{ij}P_{,i}P_{,j} - F_{jikl}C_{l,kj}C_i.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Observația 4.2.1 *Oricare ar fi procesul admisibil p, are loc următoarea inegalitate motivată de (4.1.14)*

$$\mathcal{D}_p \geq 0. \tag{4.2.5}$$

La fel ca în [67], vom avea nevoie de următoarele ipoteze

(H1) ρ și J sunt strict pozitive,

(H2) I_{ij} este un tensor pozitiv definit,

(H3) W_p este o formă pătratică pozitiv semidefinită,

(H4) Γ_p este pozitiv definită oricare ar fi procesul admisibil p.

Teorema 4.2.1 *Să presupunem că au loc ipotezele (H1), (H2), (H3) și (H4). Atunci problema termoelasticității microstretch cu microtemperaturi și microconcentrații are cel mult o soluție.*

4.3 Comportarea spațială a soluției

Rezultatele din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea [25].

La fel ca în [36], notăm cu $\hat{D}_T$ suportul datelor inițiale și pe frontieră și al forțelor masice în problema $\mathcal{P}$. Utilizăm convenția că $\hat{D}_T$ este un domeniu regulat și mărginit. Definim mulțimea D_R, $R \geq 0$, prin

$$D_R = \{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \,|\, \hat{D}_T \cap \overline{\Sigma(\boldsymbol{x}, R)} \neq \emptyset\}, \tag{4.3.1}$$

unde $\Sigma(\boldsymbol{x}, R)$ este bila deschisă de rază R și cu centrul în $\boldsymbol{x}$. La fel ca în [36], vom presupune că B_R este parte din Ω inclusă în $\Omega \setminus D_R$ și că $B(R_1, R_2)$ este mulțimea $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$, $R_1 > R_2$. În plus, vom utiliza notația S_R pentru partea din suprafața ∂B_R inclusă în interiorul lui Ω și pentru care versorul normalei exterioare este direcționat spre exteriorul mulțimii D_R. Observăm că B_R este parte din Ω unde datele inițiale și pe frontieră și forțele masice sunt zero.

În continuare vom introduce câteva notații utile. În primul rând, W este exprimat în funcție de tensorii de deformare

$$\begin{aligned} W(s) = {} & \frac{1}{2}A^*_{ijrs}e_{rs}(s)e_{ij}(s) + B^*_{ijrs}e_{ij}(s)\kappa_{rs}(s) + \frac{1}{2}C^*_{ijrs}\kappa_{rs}(s)\kappa_{ij}(s) + \\ & + D^*_{ij}e_{ij}(s)\varphi(s) + E^*_{ij}\kappa_{ij}(s)\varphi(s) + F^*_{ijk}e_{ij}(s)\zeta_k(s) + G^*_{ijk}\kappa_{ij}(s)\zeta_k(s) + \\ & + B^*_i\varphi(s)\zeta_i(s) + \frac{1}{2}\xi^*\varphi(s)^2 + \frac{1}{2}A^*_{ij}\zeta_j(s)\zeta_i(s) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

și este utilizat în expresia pentru $\bar{\Gamma}$. Efectele termice și de difuzie sunt considerate în expresiile de mai jos

$$\bar{\Gamma}(s) = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i(s)\dot{u}_i(s) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}(s)^2 + \frac{1}{2}I_{ij}\dot{\varphi}_i(s)\dot{\varphi}_j(s) + W(s) + \Gamma_p(s), \tag{4.3.3}$$

unde

$$\begin{aligned} \Gamma_p(s) = {} & a^*\frac{1}{2}\theta(s)^2 + \frac{1}{\varrho}\frac{1}{2}P(s)^2 + \frac{1}{2}B^*_{ij}T_i(s)T_j(s) + \frac{1}{2}C^*_{ij}C_i(s)C_j(s) + \\ & + b^*_iT_i(s)\theta(s) + \frac{\varpi}{\varrho}\theta(s)P(s) + R^*_{ij}C_j(s)T_i(s) + b'^*_i\theta(s)C_i(s) + \\ & + \frac{m_i}{\varrho}P(s)T_i(s) + \frac{m'_i}{\varrho}P(s)C_i(s) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

și

$$\begin{aligned} \bar{K}(s) = {} & \frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s) + \left(\frac{1}{T_0}K_{ij} + \tilde{k}_{ij}\right)\theta_{,i}(s)T_j(s) + \\ & + P_{ijkl}T_{l,k}(s)T_{j,i}(s) + \tilde{K}_{ij}T_i(s)T_j(s) + \tilde{H}_{ij}C_i(s)C_j(s) + \\ & + \left(\tilde{h}_{ij} + H_{ij}\right)P_{,i}(s)C_j(s) + h_{ij}P_{,i}(s)P_{,j}(s) - F_{jikl}C_{l,kj}(s)C_i(s). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Are loc următoarea inegalitate

$$\bar{K}(s) \geq 0. \tag{4.3.6}$$

Următoarele ipoteze vor fi necesare pentru obținerea unor rezultate despre comportarea spațială a soluției

(H1) ρ și J sunt strict pozitive ;

(H2) I_{ij} este pozitiv definit ;

(H3) W este o formă pătratică pozitiv semidefinită ;

(H4) Γ_p este pozitiv definită ;

(H5) W este o formă pătratică pozitiv definită, prin urmare există constantele pozitive μ_m și μ_M astfel încât

$$\begin{aligned}&\mu_m\left(e_{ij}e_{ij}+\varphi^2+\frac{I_0}{\varrho}\kappa_{ij}\kappa_{ij}+\frac{J_0}{\varrho}\zeta_i\zeta_i\right)\leq 2W\leq\\&\leq\mu_M\left(e_{ij}e_{ij}+\varphi^2+\frac{I_0}{\varrho}\kappa_{ij}\kappa_{ij}+\frac{J_0}{\varrho}\zeta_i\zeta_i\right).\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

În plus, presupunem că $\bar{K}(s)$ este o fomă pătratică pozitiv definită, prin urmare

$$\begin{aligned}&\bar{K}(s)\leq\frac{1}{T_0}k_M\theta_{,i}(s)\theta_{,i}(s)+P_MT_{i,j}(s)T_{i,j}(s)+\tilde{K}_MT_i(s)T_i(s)+\\&+\tilde{H}_MC_i(s)C_i(s)+h_MP_{,i}(s)P_{,i}(s)+F_MC_{i,j}(s)C_{i,j}(s)\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

și

$$\begin{aligned}&\bar{K}(s)\geq\frac{1}{T_0}k_m\theta_{,i}(s)\theta_{,i}(s)+P_mT_{i,j}(s)T_{i,j}(s)+\tilde{K}_mT_i(s)T_i(s)+\\&+\tilde{H}_mC_i(s)C_i(s)+h_mP_{,i}(s)P_{,i}(s)+F_mC_{i,j}(s)C_{i,j}(s).\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

Fie $\lambda>0$ un parametru real dat. Definim

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_1(t)=&\int_0^t\int_{\partial\Omega}e^{-\lambda s}\left[t_{ji}(s)n_j(s)\dot{u}_i(s)+h_i(s)n_i(s)\dot{\varphi}(s)+\right.\\&+m_{ji}(s)n_j(s)\dot{\varphi}_i(s)+\frac{1}{T_0}q_i(s)n_i(s)\theta(s)+\eta_i(s)n_i(s)P(s)-\\&\left.-q_{ji}(s)n_j(s)T_i(s)\right]\mathrm{d}a\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

o funcție care va fi utilizată în evaluarea comportării spațiale prin considerarea integralei interioare pe submulțimea S_R. În următoarea lemă vom studia principalele proprietăți ale acestei funcții.

Lema 4.3.1 *Presupunem că un corp elastic microstretch cu conducție termică și difuzie masică la nivel macro și micro este modelat cu ajutorul ecuațiilor de mișcare (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.16), (4.1.7), (4.1.8) și al ecuațiilor constitutive (4.1.19), cu relațiile geometrice (4.1.5). Cu notațiile de mai sus și în anumite condiții de regularitate, are loc următoarea identitate*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{-\lambda t}\bar{\Gamma}(t)\mathrm{d}v+\int_0^t\int_\Omega\left[e^{-\lambda s}\lambda\bar{\Gamma}(s)+e^{-\lambda s}\bar{K}(s)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}s=\\&=\int_\Omega\bar{\Gamma}(0)\mathrm{d}v+\int_0^t\int_\Omega e^{-\lambda s}\left[\rho f_i(s)\dot{u}_i(s)+\rho l(s)\dot{\varphi}(s)+\rho g_i(s)\dot{\varphi}_i(s)+\right.\\&\left.+\frac{1}{T_0}\rho s(s)\theta(s)-\rho G_i(s)T_i(s)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\bar{\Lambda}_1(t).\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

În lema de mai jos deducem o estimare care ne va fi utilă în următoarea teoremă pentru a demonstra o inegalitate diferențială pentru o funcțională cu o pondere care depinde de timp și care va fi utilizată pentru caracterizarea comportării spațiale a soluției.

Lema 4.3.2 *În condițiile Lemei 4.3.1 și oricare ar fi $\varepsilon > 0$ constant, are loc următoarea inegalitate*

$$\begin{aligned}
&t_{ij}t_{ij} + \frac{\rho_0}{J_0}h_i h_i + \frac{\rho_0}{I_0}m_{ij}m_{ij} \leq \\
&\leq 2\mu_M(1+\varepsilon)W + \\
&+ 4\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\left[(L^*_{ijk})^2 + (N^*_{ik})^2 + (M^*_{ijk})^2\right]T_k^2 + \right. \\
&+ \left[(a^*_{ij})^2 + (d^*_i)^2 + (b^*_{ij})^2\right]\theta^2 + \\
&+ \left[\left(\frac{d_{ij}}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{f}_i}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{f_{ij}}{\varrho}\right)^2\right]P^2 + \\
&+ \left.\left[(L'^*_{ijk})^2 + (N'^*_{ik})^2 + (M'^*_{ijk})^2\right]C_k^2\right\}.
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Fie λ un parametru pozitiv dat. Definim funcția

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(R,t) = -\int_0^t \int_{S_R} e^{-\lambda s}\left[t_{ji}(s)n_j(s)\dot{u}_i(s) + h_i(s)n_i(s)\dot{\varphi}(s) + \right. \\
+ m_{ji}(s)n_j(s)\dot{\varphi}_i(s) + \frac{1}{T_0}q_i(s)n_i(s)\theta(s) + \eta_i(s)n_i(s)P(s) - \\
\left. - q_{ji}(s)n_j(s)T_i(s)\right]\mathrm{d}a\mathrm{d}s, \qquad R \geq 0, t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

care va fi utilă în analizarea comportării spațiale. În următoarea teoremă vom studia proprietățile acestei funcții.

Teorema 4.3.1 (Proprietățile funcției $\Lambda_1(R,t)$) *Presupunem că au loc condițiile din lema 4.3.1, ipotezele (H1), (H2), (H3), (H4) și (H5) și considerăm că datele externe prescrise ale problemei $\mathcal{P}$ au suportul mărginit $\hat{D}_T$ în intervalul de timp $[0,T]$. Atunci pentru fiecare $t \in [0,T]$, funcția $\Lambda_1(R,t)$ are următoarele proprietăți*

(i) pentru $0 \leq R_2 < R_1$, are loc

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(R_1,t) - \Lambda_1(R_2,t) = -\int_{B(R_1,R_2)} e^{-\lambda t}\bar{\Gamma}(t)\mathrm{d}v - \\
- \int_0^t \int_{B(R_1,R_2)} \left[e^{-\lambda s}\lambda\bar{\Gamma}(s) + e^{-\lambda s}\bar{K}(s)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}s;
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

(ii) $\Lambda_1(R,t)$ este o funcție continuă și diferențiabilă în raport cu $R \geq 0$ și

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial R}(R,t) = -\int_{S_R} e^{-\lambda t}\bar{\Gamma}(t)\mathrm{d}v - \int_0^t \int_{S_R}\left[e^{-\lambda s}\lambda\bar{\Gamma}(s) + e^{-\lambda s}\bar{K}(s)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}s; \tag{4.3.15}$$

(iii) $\Lambda_1(R,t)$ este o funcție descrescătoare în raport cu $R \geq 0$;

(iv) $\Lambda_1(R,t)$ satisface următoarea inegalitate diferențială

$$\frac{\lambda}{k}|\Lambda_1(R,t)| + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial R}(R,t) \leq 0, \quad R \geq 0, \tag{4.3.16}$$

cu

$$k = \sqrt{\frac{\mu_M(1+\varepsilon_0)}{\rho_0}}, \tag{4.3.17}$$

unde ε_0 este rădăcina pozitivă a ecuației

$$\varepsilon^2 + \varepsilon\left(1 - \frac{4m_2}{a_0\mu_M} - \frac{\rho_0\lambda T_0 k_m^2}{a_0\underline{k}_m\mu_M}\right) - \frac{4m_2}{a_0\mu_M} = 0. \tag{4.3.18}$$

Pe baza proprietăților din teorema anterioară, stabilim estimări care descriu comportarea spațială pentru corpuri nemărginite. Se observă că funcția exponențială nu depinde de timp.

Teorema 4.3.2 (Comportare spațială pentru domenii nemărginite) *În condițiile teoremei 4.3.1 și pentru fiecare $t \in [0,T]$, au loc*

(i) dacă $\Lambda_1(R,t) \geq 0$, oricare ar fi $R \geq 0$, are loc

$$\Lambda_1(R,t) \leq \Lambda_1(0,t)e^{-\frac{\lambda}{k}R}, \quad R \geq 0; \tag{4.3.19}$$

(ii) dacă există o valoare $R_1 \geq 0$ astfel încât $\Lambda_1(R_1,t) < 0$ și $\Lambda_1(R,t) < 0$ oricare ar fi $R \geq R_1$, atunci are loc

$$-\Lambda_1(R,t) \geq -\Lambda_1(R_1,t)e^{\frac{\lambda}{k}(R-R_1)}, \quad R \geq R_1. \tag{4.3.20}$$

4.4 Dependența continuă în cazul anizotrop

În această secțiune, vom demonstra un rezultat de dependență continuă pentru problema termoelasticității microstretch cu microtemperaturi și efecte de difuzie la nivel macro și micro în cazul anizotrop și cu centru de simetrie. În acest sens, vom deduce expresii pentru derivata în raport cu timpul a vectorului de microtemperaturi și pentru derivata în raport cu timpul a vectorului de microconcentrații. Vom scrie ecuațiile constitutive și ecuațiile de mișcare în funcție de potențialul chimic și vom alege un spațiu Hilbert potrivit pentru a obține o problemă abstractă din problema la limită cu date inițiale. Vom utiliza strategia descrisă în [6] și [7]. Rezultatele din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea [23].

Pentru materiale cu centru de simetrie, ecuațiile constitutive devin [103]

$$\begin{aligned}
t_{ij} &= A^*_{ijrs}e_{rs} + D^*_{ij}\varphi - a^*_{ij}\theta + \frac{d_{ij}}{\varrho}P,\\
m_{ij} &= C^*_{ijrs}\kappa_{rs},\\
h_i &= A^*_{ij}\zeta_j - N^*_{ij}T_j - N'^*_{ij}C_j,\\
g &= -D^*_{ij}e_{ij} - \xi^*\varphi + F^*\theta - \frac{\tilde{g}_1}{\varrho}P,\\
\rho S &= a^*_{ij}e_{ij} + F^*\varphi + a^*\theta + \frac{\varpi}{\varrho}P,\\
\rho\varepsilon_i &= -N^*_{ji}\zeta_j - B^*_{ij}T_j - R^*_{ij}C_j,\\
\rho\omega_i &= -C^*_{ij}C_j - R^*_{ji}T_j - N'^*_{ji}\zeta_j,\\
C &= \frac{1}{\varrho}P - \frac{d_{ij}}{\varrho}e_{ij} - \frac{\tilde{g}_1}{\varrho}\varphi + \frac{\varpi}{\varrho}\theta.
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Din formulele $(4.4.1)_6$, $(4.1.13)_{1,3,5}$ și (4.1.7) obținem

$$B^*_{ij}\dot{T}_j + R^*_{ij}\dot{C}_j = (P_{jikl}T_{l,k})_{,j} - \tilde{k}_{ij}\theta_{,j} - \tilde{K}_{ij}T_j - \rho G_i - N^*_{ji}\dot{\zeta}_j. \tag{4.4.2}$$

Cu ajutorul formulelor $(4.4.1)_8$, $(4.1.13)_{2,4,6}$ și (4.1.8) obținem

$$R^*_{ji}\dot{T}_j + C^*_{ij}\dot{C}_j = (F_{jikl}C_{l,k})_{,j} - \tilde{h}_{ij}P_{,j} - \tilde{H}_{ij}C_j - N'^*_{ji}\dot{\zeta}_j. \tag{4.4.3}$$

De fapt, în cazul cu centru de simetrie au loc $B_{ij} = B^*_{ij}$, $R_{ij} = R^*_{ij}$, $C_{ij} = C^*_{ij}$, $N_{ij} = N^*_{ij}$ și $N'_{ij} = N'^*_{ij}$. Vom utiliza notația

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & \tilde{\mathbb{R}} \\ \tilde{\mathbb{R}} & \tilde{\mathbb{C}} \end{pmatrix}, \tag{4.4.4}$$

unde $\mathbb{B}=B_{ij}$, $\tilde{\mathbb{R}}=R_{ij}$ și $\tilde{\mathbb{C}}=C_{ij}$. În plus, vom considera că Λ este o matrice pozitiv definită, ceea ce conduce la

$$B_{ij}T_iT_j+C_{ij}C_iC_j+2R_{ij}T_iC_j>0. \tag{4.4.5}$$

Matricea Λ este pozitiv definită dacă și numai dacă $\tilde{\mathbb{C}}$ și $\Lambda/\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{B}-\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}$ sunt ambele pozitiv definite [7], [12]. În acest caz, soluțiile ecuațiilor (4.4.2) și (4.4.3) pot fi date sub forma

$$\begin{aligned}
&\dot{T}_j=(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\left\{(P_{jikl}T_{l,k})_{,j}-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}-\tilde{K}_{ij}T_j-\rho G_i-N^*_{ji}\dot{\zeta}_j-\right.\\
&\left.-\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\left[(F_{jikl}C_{l,k})_{,j}-\tilde{h}_{ij}P_{,j}-\tilde{H}_{ij}C_j-N'^*_{ji}\dot{\zeta}_j\right]\right\},\\
&\dot{C}_j=-\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\left[(P_{jikl}T_{l,k})_{,j}-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}-\tilde{K}_{ij}T_j-\rho G_i-N^*_{ji}\dot{\zeta}_j\right]+\\
&+\left(\tilde{\mathbb{C}}^{-1}+\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\right)\left[(F_{jikl}C_{l,k})_{,j}-\tilde{h}_{ij}P_{,j}-\tilde{H}_{ij}C_j-N'^*_{ji}\dot{\zeta}_j\right].
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Matricea Λ este pozitiv definită dacă și numai dacă $\mathbb{B}$ și $\Lambda/\mathbb{B}=\tilde{\mathbb{C}}-\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}$ sunt ambele pozitiv definite [7], [12]. În acest caz, soluțiile ecuațiilor (4.4.2) și (4.4.3) pot fi reprezentate sub forma

$$\begin{aligned}
&\dot{T}_j=-\mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\left[(F_{jikl}C_{l,k})_{,j}-\tilde{h}_{ij}P_{,j}-\tilde{H}_{ij}C_j-N'^*_{ji}\dot{\zeta}_j\right]+\\
&+\left(\mathbb{B}^{-1}+\mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\right)\left[(P_{jikl}T_{l,k})_{,j}-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}-\tilde{K}_{ij}T_j-\rho G_i-N^*_{ji}\dot{\zeta}_j\right],\\
&\dot{C}_j=(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\left\{(F_{jikl}C_{l,k})_{,j}-\tilde{h}_{ij}P_{,j}-\tilde{H}_{ij}C_j-N'^*_{ji}\dot{\zeta}_j-\right.\\
&\left.-\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\left[(P_{jikl}T_{l,k})_{,j}-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}-\tilde{K}_{ij}T_j-\rho G_i-N^*_{ji}\dot{\zeta}_j\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Înlocuim noua formă a ecuațiilor constitutive în ecuațiile de mișcare (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.16), (4.4.2) și (4.4.3), ceea ce conduce la un sistem de 15 ecuații cu 15 necunoscute, și anume cele trei componente ale vectorului deplasare, funcția de microdilatare, cele trei componente ale vectorului de microrotație, variația temperaturii, potențialul chimic, cele trei componente ale vectorului de microtemperaturi și cele trei componente ale vectorului de microconcentrații. Prin urmare, ecuațiile de mișcare pentru funcțiile u_i, φ, φ_i, θ, P, T_i și C_i sunt

$$\begin{aligned}
&\rho\ddot{u}_i=\rho f_i+\left(A^*_{jirs}e_{rs}+D^*_{ji}\varphi-a^*_{ji}\theta+\frac{d_{ji}}{\varrho}P\right)_{,j},\\
&J\ddot{\varphi}=\left(A^*_{ij}\zeta_j-N^*_{ij}T_j-N'^*_{ij}C_j\right)_{,i}+\left(-D^*_{ij}e_{ij}-\xi^*\varphi+F^*\theta-\frac{\tilde{g}_1}{\varrho}P\right)+\rho l,\\
&I_{ij}\ddot{\varphi}_j=\left(C^*_{jirs}\kappa_{rs}\right)_{,j}+\varepsilon_{imn}\left(A^*_{mnrs}e_{rs}+D^*_{mn}\varphi-a^*_{mn}\theta+\frac{d_{mn}}{\varrho}P\right)+\rho g_i,\\
&\frac{\varpi}{\varrho}\dot{\theta}+\frac{1}{\varrho}\dot{P}=\frac{d_{ij}}{\varrho}\dot{e}_{ij}+\frac{\tilde{g}_1}{\varrho}\dot{\varphi}+\left(h_{ij}P_{,j}+H_{ij}C_j\right)_{,i},\\
&a^*\dot{\theta}+\frac{\varpi}{\varrho}\dot{P}=-a^*_{ij}\dot{e}_{ij}-F^*\dot{\varphi}+\frac{1}{T_0}\left(k_{ij}\theta_{,j}+K_{ij}T_j\right)_{,i}+\frac{1}{T_0}\rho s,\\
&B_{ij}\dot{T}_j+R_{ij}\dot{C}_j=(P_{jikl}T_{l,k})_{,j}-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}-\tilde{K}_{ij}T_j-\rho G_i-N_{ji}\dot{\zeta}_j,\\
&R_{ij}\dot{T}_j+C_{ij}\dot{C}_j=(F_{jikl}C_{l,k})_{,j}-\tilde{h}_{ij}P_{,j}-\tilde{H}_{ij}C_j-N'_{ji}\dot{\zeta}_j.
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Pentru ecuațiile de mai sus, păstrăm condițiile inițiale (4.1.22), dar impunem condiții pe frontieră nule, și anume

$$\begin{aligned}
&u_i=0, \quad \varphi=0, \quad \varphi_i=0, \quad \theta=0,\\
&P=0, \quad T_i=0, \quad C_i=0 \quad \text{pe } \partial\Omega\times I.
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

În continuare, transformăm problema la limită cu date inițiale într-o problemă abstractă pe un spațiu Hilbert potrivit. Utilizăm notațiile $\dot{u}_i=v_i$, $\dot{\varphi}_i=\psi_i$ și $\dot{\varphi}=\psi$. Fie

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}=\Big\{&(u_i,v_i,\varphi,\psi,\varphi_i,\psi_i,\theta,T_i,P,C_i):u_i,\varphi_i\in\mathbb{W}^{1,2}_0(\Omega),v_i,\psi_i,T_i,C_i\in\mathbb{L}^2(\Omega),\\
&\psi,\theta,P\in L^2(\Omega),\varphi\in W^{1,2}_0(\Omega)\Big\},
\end{aligned}$$

unde $W_0^{1,2}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ sunt spații Sobolev și

$$\mathbb{W}_0^{1,2}(\Omega)=\left[W_0^{1,2}(\Omega)\right]^3,\qquad \mathbb{L}^2(\Omega)=\left[L^2(\Omega)\right]^3.$$

În spațiul $\mathcal{H}$, definim următorul produs scalar

$$\begin{aligned}&\langle(u_i,v_i,\varphi,\psi,\varphi_i,\psi_i,\theta,T_i,P,C_i),(u_i^*,v_i^*,\varphi^*,\psi^*,\varphi_i^*,\psi_i^*,\theta^*,T_i^*,P^*,C_i^*)\rangle=\\&=\int_\Omega\left[\rho v_iv_i^*+J\psi\psi^*+I_{ij}\psi_i\psi_j^*+A_{ijrs}^*e_{rs}e_{ij}^*+C_{ijrs}^*\kappa_{rs}\kappa_{ij}^*+\right.\\&+A_{ij}^*\zeta_j\zeta_i^*+D_{ij}^*\left(\varphi e_{ij}^*+\varphi^*e_{ij}\right)+\xi^*\varphi\varphi^*+a^*\theta\theta^*+\frac{1}{\varrho}PP^*+\\&\left.+\frac{\varpi}{\varrho}\left(\theta P^*+\theta^*P\right)+B_{ij}T_iT_j^*+C_{ij}C_iC_j^*+R_{ij}\left(T_iC_j^*+T_i^*C_j\right)\right]\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

În continuare, definim niște operatori, a căror formă este motivată de forma ecuațiilor de mișcare. Aceștia vor forma un operator matricial $\mathcal{A}$, pentru care vom arăta că este un semigrup de contracții C_0 cu ajutorul corolarului Lumer-Phillips. Ecuația $(4.4.8)_1$ conduce la

$$\begin{aligned}&A_i^1(\boldsymbol{u})=\rho^{-1}A_{jirs}^*u_{s,rj},\quad A_i^2(\varphi)=\rho^{-1}D_{ji}^*\varphi_{,j},\\&A_i^3(\boldsymbol{\varphi})=\rho^{-1}A_{jirs}^*\varepsilon_{srk}\varphi_{k,j},\quad A_i^4(\theta)=-\rho^{-1}a_{ji}^*\theta_{,j},\\&A_i^5(P)=\rho^{-1}\frac{d_{ji}}{\varrho}P_{,j}.\end{aligned}\tag{4.4.11}$$

Ecuația $(4.4.8)_2$ pentru funcția de microdilatare motivează forma operatorilor de mai jos

$$\begin{aligned}&B^1(\boldsymbol{u})=-J^{-1}D_{ij}^*u_{j,i},\quad B^2(\varphi)=J^{-1}A_{ij}^*\varphi_{,ji}-J^{-1}\xi^*\varphi,\\&B^3(\boldsymbol{\varphi})=-J^{-1}D_{ij}^*\varepsilon_{jik}\varphi_k,\quad B^4(\theta)=J^{-1}F^*\theta,\quad B^5(P)=-J^{-1}\frac{\tilde{g}_1}{\varrho}P,\\&B^6(\boldsymbol{T})=-J^{-1}N_{ij}^*T_{j,i},\quad B^7(\boldsymbol{C})=-J^{-1}N_{ij}'^*C_{j,i}.\end{aligned}\tag{4.4.12}$$

Următorii operatori sunt definiți pe baza ecuațiilor $(4.4.8)_3$ pentru cele trei componente ale vectorului de microrotație

$$\begin{aligned}&C_j^1(\boldsymbol{u})=I_{ij}^{-1}\varepsilon_{imn}A_{mnrs}^*u_{s,r},\quad C_j^2(\varphi)=I_{ij}^{-1}\varepsilon_{imn}D_{mn}^*\varphi,\\&C_j^3(\boldsymbol{\varphi})=I_{ij}^{-1}C_{jirs}^*\varphi_{s,rj}+I_{ij}^{-1}\varepsilon_{imn}A_{mnrs}^*\varepsilon_{srk}\varphi_k,\\&C_j^4(\theta)=-I_{ij}^{-1}\varepsilon_{imn}a_{mn}^*\theta,\quad C_j^5(P)=I_{ij}^{-1}\varepsilon_{imn}\frac{d_{mn}}{\varrho}P.\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

Cele două seturi de operatori de mai jos sunt motivate de ecuațiile $(4.4.8)_4$ și $(4.4.8)_5$ pentru temperatură și potențialul chimic. Dacă impunem condiția $\frac{a}{\varrho}\neq 0$, atunci are loc

$$\begin{aligned}&D^1(\boldsymbol{v})=-a^{-1}a_{ij}v_{j,i},\quad D^2(\psi)=-a^{-1}F\psi,\\&D^3(\boldsymbol{\psi})=-a^{-1}a_{ij}\varepsilon_{jik}\psi_k,\quad D^4(\theta)=\frac{a^{-1}}{T_0}k_{ij}\theta_{,ji},\\&D^5(P)=-a^{-1}\varpi h_{ij}P_{,ji},\quad D^6(\boldsymbol{T})=\frac{a^{-1}}{T_0}K_{ij}T_{j,i},\\&D^7(\boldsymbol{C})=-a^{-1}\varpi H_{ij}C_{j,i}\end{aligned}\tag{4.4.14}$$

și

$$\begin{aligned}&E^1(\boldsymbol{v})=(d_{ij}+a^{-1}\varpi a_{ij})v_{j,i},\quad E^2(\psi)=(\tilde{g}_1+a^{-1}\varpi F)\psi,\\&E^3(\boldsymbol{\psi})=(d_{ij}+a^{-1}\varpi a_{ij})\varepsilon_{jik}\psi_k,\quad E^4(\theta)=-a^{-1}\frac{\varpi}{T_0}k_{ij}\theta_{,ji},\\&E^5(P)=(\varrho+a^{-1}\varpi^2)h_{ij}P_{,ji},\quad E^6(\boldsymbol{T})=-a^{-1}\frac{\varpi}{T_0}K_{ij}T_{j,i},\\&E^7(\boldsymbol{C})=(\varrho+a^{-1}\varpi^2)H_{ij}C_{j,i}.\end{aligned}\tag{4.4.15}$$

În final, pentru ecuațiile $(4.4.8)_6$ și $(4.4.8)_7$ pentru microtemperaturi și microconcentrații, vom considera două cazuri. În primul caz, dacă $\tilde{\mathbb{C}}$ și $\Lambda/\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{B} - \tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}$ sunt ambele pozitiv definite, atunci definim operatorii

$$\begin{aligned}
&F_i^2(\psi) = (\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(-N_{ji}\psi_{,j} + \tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}(N'_{ji}\psi_{,j})), \quad F_i^4(\theta) = (\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}),\\
&F_i^5(P) = (\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}(\tilde{h}_{ij}P_{,j}), \quad F_i^6(\boldsymbol{T}) = (\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(P_{jikl}T_{l,kj} - \tilde{K}_{ij}T_j),\\
&F_i^7(\boldsymbol{C}) = -(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}(F_{jikl}C_{l,kj} - \tilde{H}_{ij}C_j)
\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

și

$$\begin{aligned}
&G_i^2(\psi) = -\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(-N_{ji}\psi_{,j}) - \left(\tilde{\mathbb{C}}^{-1} + \tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\right)(N'_{ji}\psi_{,j}),\\
&G_i^4(\theta) = -\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}),\\
&G_i^5(P) = \left(\tilde{\mathbb{C}}^{-1} + \tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\right)(-\tilde{h}_{ij}P_{,j}),\\
&G_i^6(\boldsymbol{T}) = -\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(P_{jikl}T_{l,kj} - \tilde{K}_{ij}T_j),\\
&G_i^7(\boldsymbol{C}) = \left(\tilde{\mathbb{C}}^{-1} + \tilde{\mathbb{C}}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\tilde{\mathbb{C}}^{-1}\right)(F_{jikl}C_{l,kj} - \tilde{H}_{ij}C_j).
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

În al doilea caz, dacă $\mathbb{B}$ și $\Lambda/\mathbb{B} = \tilde{\mathbb{C}} - \tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}$ sunt ambele pozitiv definite, atunci definim operatorii

$$\begin{aligned}
&F_i^2(\psi) = \left(\mathbb{B}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\right)(-N_{ji}\psi_{,j}) + \mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}(N'_{ji}\psi_{,j}),\\
&F_i^4(\theta) = \left(\mathbb{B}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\right)(-\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}),\\
&F_i^5(P) = -\mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}(-\tilde{h}_{ij}P_{,j}),\\
&F_i^6(\boldsymbol{T}) = \left(\mathbb{B}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}\right)(P_{jikl}T_{l,kj} - \tilde{K}_{ij}T_j),\\
&F_i^7(\boldsymbol{C}) = -\mathbb{B}^{-1}\tilde{\mathbb{R}}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}(F_{jikl}C_{l,kj} - \tilde{H}_{ij}C_j)
\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

și

$$\begin{aligned}
&G_i^2(\psi) = (\Lambda/\mathbb{B})^{-1}[-N'_{ji}\psi_{,j} - \tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}(-N_{ji}\psi_{,j})],\\
&G_i^4(\theta) = (\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}(\tilde{k}_{ij}\theta_{,j}),\\
&G_i^5(P) = (\Lambda/\mathbb{B})^{-1}(-\tilde{h}_{ij}P_{,j}),\\
&G_i^6(\boldsymbol{T}) = -(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\tilde{\mathbb{R}}\mathbb{B}^{-1}(P_{jikl}T_{l,kj} - \tilde{K}_{ij}T_j),\\
&G_i^7(\boldsymbol{C}) = (\Lambda/\mathbb{B})^{-1}(F_{jikl}C_{l,kj} - \tilde{H}_{ij}C_j).
\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

Problema la limită cu date inițiale poate fi transformată în următoarea ecuație în spatiul Hilbert $\mathcal{H}$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}\mathcal{U}(t) + \mathcal{F}(t), \qquad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \tag{4.4.20}$$

unde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} = (u_i, v_i, \varphi, \psi, \varphi_i, \psi_i, \theta, P, T_i, C_i)\,,\\
&\mathcal{U}_0 = (u_i^0, v_i^0, \varphi^0, \psi^0, \varphi_i^0, \psi_i^0, \theta^0, P^0, T_i^0, C_i^0)\,,\\
&\mathcal{F} = \left(0, f_i, 0, J^{-1}\rho l, 0, I_{ij}^{-1}\rho g_i, \frac{a^{-1}}{T_0}\rho s, -a^{-1}\frac{\varpi}{T_0}\rho s, -(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(\rho G_i), \tilde{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{R}(\Lambda/\tilde{\mathbb{C}})^{-1}(\rho G_i)\right)
\end{aligned}$$

în primul caz și

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \Big(&0, f_i, 0, J^{-1}\rho l, 0, I_{ij}^{-1}\rho g_i, \frac{a^{-1}}{T_0}\rho s, -a^{-1}\frac{\varpi}{T_0}\rho s, \left(\mathbb{B}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\mathbb{R}(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\mathbb{R}\mathbb{B}^{-1}\right)(-\rho G_i),\\
&(\Lambda/\mathbb{B})^{-1}\mathbb{R}\mathbb{B}^{-1}(\rho G_i)\Big)
\end{aligned}$$

în al doilea caz. Avem

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_i^1 & 0 & A_i^2 & 0 & A_i^3 & 0 & A_i^4 & A_i^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^1 & 0 & B^2 & 0 & B^3 & 0 & B^4 & B^5 & B^6 & B^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_i^1 & 0 & C_i^2 & 0 & C_i^3 & 0 & C_i^4 & C_i^5 & 0 & 0 \\ 0 & D^1 & 0 & D^2 & 0 & D^3 & D^4 & D^5 & D^6 & D^7 \\ 0 & E^1 & 0 & E^2 & 0 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7 \\ 0 & 0 & 0 & F_i^2 & 0 & 0 & F_i^4 & F_i^5 & F_i^6 & F_i^7 \\ 0 & 0 & 0 & G_i^2 & 0 & 0 & G_i^4 & G_i^5 & G_i^6 & G_i^7 \end{pmatrix} \tag{4.4.21}$$

În continuare vom verifica condițiile din corolarul Lumer-Phillips. Vom arăta că $\mathcal{A}$ este un operator disipativ și că $\mathcal{H}$ este codomeniul operatorului $Id-\mathcal{A}$. Dacă operatorul este disipativ, atunci energia sistemului este descrescătoare, potrivit sursei [81]. Prin definiție, un operator este disipativ dacă satisface inegalitatea din lema de mai jos.

Lema 4.4.1 *În cazul termoelasticității microstretch cu difuzie, microtemperaturi și microconcentrații, operatorul $\mathcal{A}$ satisface inegalitatea*

$$\langle \mathcal{AU},\mathcal{U}\rangle \leq 0$$

oricare ar fi $\mathcal{U}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Pentru a demonstra a doua condiție din corolarul Lumer-Phillips, va fi necesar să rezolvăm un sistem cu ajutorul lemei Lax-Milgram. Prin urmare, vom arăta că o anumită formă biliniară este mărginită inferior, ceea ce rezultă dacă presupunem că

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\left(A_{ijrs}-\frac{d_{ij}d_{rs}}{\varrho}\right) e_{rs}e_{ij}+\left(C_{ijrs}-\frac{f_{ij}f_{rs}}{\varrho}\right)\kappa_{ij}\kappa_{rs}+\left(A_{ij}-\frac{\tilde{f}_i\tilde{f}_j}{\varrho}\right)\zeta_i\zeta_j+ \right. \\ &\left. +2\left(D_{ij}-\frac{\tilde{g}_1 d_{ij}}{\varrho}\right)e_{ij}\varphi+\left(\xi-\frac{\tilde{g}_1^2}{\varrho}\right)\varphi^2\right] dV \geq \\ &\geq c_0\int_\Omega \left(e_{ij}e_{ij}+\kappa_{ij}\kappa_{ij}+\zeta_i\zeta_i+\varphi^2\right)dV. \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Lema 4.4.2 *În cazul termoelasticității microstretch cu difuzie, microtemperaturi și microconcentrații, operatorul $\mathcal{A}$ satisface următoarea proprietate*

$$Range(Id-\mathcal{A})=\mathcal{H}, \tag{4.4.23}$$

unde Id este operatorul identitate pe $\mathcal{H}$.

Teorema 4.4.1 *Operatorul $\mathcal{A}$ generează un semigrup de contracții pe $\mathcal{H}$.*

Rezultatul de mai jos este o aplicare a teoremei din [57, p. 84].

Teorema 4.4.2 *Să presupunem că $\mathcal{A}$ generează un semigrup de contracții C_0 în $\mathcal{H}$, $\mathcal{U}_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ și $\mathcal{F}\in C^1([0,\infty),\mathcal{H})$. Atunci există o unică soluție $\mathcal{U}\in C^1([0,\infty),\mathcal{H})$ cu valori în $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Observația 4.4.1 *Avem următorul rezultat de dependență continuă a soluției de datele inițiale și de încărcări*

$$||\mathcal{U}(t)||_{\mathcal{H}}\leq||\mathcal{U}_0||_{\mathcal{H}}+\int_0^t||\mathcal{F}(\tau)||_{\mathcal{H}}\mathrm{d}\tau \tag{4.4.24}$$

deoarece $\mathcal{A}$ generează un semigrup de contracții C_0.

4.5 Dependența continuă a soluției de datele inițiale și externe în cazul izotrop

Rezultatele din această secțiune au fost publicate în [22].

Vom deduce ecuațiile constitutive în cazul corpurilor izotrope și omogene, cu centru de simetrie. În acest scop, vom urmări [77] și vom considera

$$
\begin{aligned}
&A_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + (\mu+\kappa)\delta_{ik}\delta_{jm} + \mu\delta_{im}\delta_{jk},\\
&C_{ijkm} = \tilde{C}_1\delta_{ij}\delta_{km} + \tilde{C}_2\delta_{ik}\delta_{jm} + \tilde{C}_3\delta_{im}\delta_{jk},\\
&D_{ij} = D_1\delta_{ij}, \qquad E_{ij} = E\delta_{ij}, \qquad a_{ij} = A_4\delta_{ij}, \qquad N'_{ij} = N'_1\delta_{ij},\\
&A_{ij} = A_5\delta_{ij}, \qquad b_{ij} = \tilde{B}_4\delta_{ij}, \qquad N_{ij} = N_1\delta_{ij},\\
&B_{ij} = \tilde{B}_5\delta_{ij}, \qquad R_{ij} = R\delta_{ij}, \qquad C_{ij} = \tilde{C}_4\delta_{ij}, \qquad d_{ij} = D_2\delta_{ij}.
\end{aligned}
\tag{4.5.1}
$$

Ecuațiile constitutive pentru materiale cu un centru de simetrie în cazul izotrop sunt

$$
\begin{aligned}
&t_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{rr} + (\mu+\kappa)e_{ij} + \mu e_{ji} - \frac{D_2^2}{\varrho}e_{rr}\delta_{ij} + \left(D_1 - \frac{D_2\tilde{g}_1}{\varrho}\right)\delta_{ij}\varphi -\\
&- \left(A_4 - \frac{D_2\varpi}{\varrho}\right)\delta_{ij}\theta + \frac{D_2}{\varrho}\delta_{ij}P,\\
&m_{ij} = \tilde{C}_1\delta_{ij}\kappa_{rr} + \tilde{C}_2\kappa_{ij} + \tilde{C}_3\kappa_{ji},\\
&h_i = A_5\zeta_i - N_1T_i - N'_1C_i,\\
&g = -\left(D_1 - \frac{D_2\tilde{g}_1}{\varrho}\right)e_{ii} - \left(\xi - \frac{\tilde{g}_1^2}{\varrho}\right)\varphi + \left(F - \frac{\tilde{g}_1\varpi}{\varrho}\right)\theta - \frac{\tilde{g}_1}{\varrho}P,\\
&\rho S = \left(A_4 - \frac{D_2\varpi}{\varrho}\right)e_{ii} + \left(F - \frac{\tilde{g}_1\varpi}{\varrho}\right)\varphi + \left(a + \frac{\varpi^2}{\varrho}\right)\theta + \frac{\varpi}{\varrho}P,\\
&\rho\varepsilon_i = -N_1\zeta_i - \tilde{B}_5T_i - RC_i,\\
&\rho\omega_i = -\tilde{C}_4C_i - RT_i - N'_1\zeta_i,\\
&C = \frac{1}{\varrho}P - \frac{D_2}{\varrho}e_{ii} - \frac{\tilde{g}_1}{\varrho}\varphi + \frac{\varpi}{\varrho}\theta
\end{aligned}
\tag{4.5.2}
$$

și

$$
\begin{aligned}
&q_i = k\theta_{,i} + k_1T_i,\\
&\eta_i = hP_{,i} + h_1C_i,\\
&Q_i = (k-k_3)\theta_{,i} + (k_1-k_2)T_i,\\
&\tilde{\sigma}_i = (h-h_3)P_{,i} + (h_1-h_2)C_i,\\
&q_{ij} = -k_4T_{k,k}\delta_{ij} - k_5T_{i,j} - k_6T_{j,i},\\
&\eta_{ij} = -h_4C_{k,k}\delta_{ij} - h_5C_{i,j} - h_6C_{j,i}
\end{aligned}
\tag{4.5.3}
$$

Ecuațiile de mișcare devin

$$
\begin{aligned}
&\rho\ddot{u}_i = (\mu+\kappa)\Delta u_i + \left(\lambda+\mu-\frac{D_2^2}{\varrho}\right)u_{j,ji} - \left(A_4 - \frac{D_2\varpi}{\varrho}\right)\theta_{,i} - \frac{-D_2}{\varrho}P_{,i} + \rho f_i +\\
&+ \kappa\varepsilon_{ijk}\varphi_{k,j} + \left(D_1 - \frac{\tilde{g}_1D_2}{\varrho}\right)\varphi_{,i},
\end{aligned}
\tag{4.5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(A_5\Delta - \xi + \frac{\tilde{g}_1^2}{\varrho}\right)\varphi + \left(\frac{\tilde{g}_1D_2}{\varrho} - D_1\right)u_{i,i} - N_1T_{i,i} + \left(F - \frac{\tilde{g}_1\varpi}{\varrho}\right)\theta -\\
&- N'_1C_{i,i} - \frac{\tilde{g}_1}{\varrho}P + \rho l = J\ddot{\varphi},
\end{aligned}
\tag{4.5.5}
$$

$$\tilde{C}_2\Delta\varphi_i+\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_3\right)\varphi_{j,ji}+\kappa\varepsilon_{ijk}u_{k,j}-2\kappa\varphi_i+\rho g_i=I_1\ddot{\varphi}_i, \tag{4.5.6}$$

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{\varpi^2}{\varrho}\right)T_0\dot{\theta}+\frac{\varpi T_0}{\varrho}\dot{P}=-\left(A_4-\frac{D_2\varpi}{\varrho}\right)T_0\dot{u}_{i,i}+k\Delta\theta+k_1T_{i,i}+\rho s+\\&+\left(\frac{\varpi\tilde{g}_1}{\varrho}-F\right)T_0\dot{\varphi},\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

$$\frac{\varpi}{\varrho}\dot{\theta}+\frac{1}{\varrho}\dot{P}=-\frac{-D_2}{\varrho}\dot{u}_{k,k}+h\Delta P+h_1C_{i,i}+\frac{\tilde{g}_1}{\varrho}\dot{\varphi}, \tag{4.5.8}$$

$$\tilde{B}_5\dot{T}_k+R\dot{C}_k=k_6\Delta T_k+(k_4+k_5)T_{j,jk}-k_2T_k-k_3\theta_{,k}-\rho G_k-N_1\dot{\varphi}_{,k}, \tag{4.5.9}$$

$$R\dot{T}_i+\tilde{C}_4\dot{C}_i=h_6\Delta C_i+(h_4+h_5)C_{j,ji}-h_2C_i-h_3P_{,i}-N_1'\dot{\varphi}_{,i}. \tag{4.5.10}$$

Urmând pașii din [67], vom folosi mărimile adimensionale

$$\begin{aligned}&x_i'=\frac{1}{l_0}x_i,\qquad t'=\frac{c_1}{l_0}t,\qquad u_i'=\frac{1}{l_0}u_i,\qquad \varphi_i'=\varphi_i,\qquad \varphi'=\varphi,\\&\theta'=\frac{1}{T_0}\theta,\qquad T_i'=T_il_0,\qquad P'=\frac{1}{P_0}P,\qquad C_i'=C_il_0,\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

unde l_0 este o lungime standard. Prin renunțarea la semnul de apostrof, ecuațiile devin în formă adimensională

$$\alpha_1\Delta u_i+\tilde{\alpha}_1u_{j,ji}+\gamma_1\varepsilon_{ijk}\varphi_{k,j}+\gamma_2\varphi_{,i}+\tilde{k}_1\theta_{,i}+\gamma_5P_{,i}+\tilde{F}_i=\ddot{u}_i, \tag{4.5.12}$$

$$\alpha_4\Delta\varphi-\gamma_2u_{i,i}-\kappa_3T_{i,i}+\kappa_4\theta-pP-\tilde{n}_1'C_{i,i}+\alpha_5\varphi+H=J_0\ddot{\varphi}, \tag{4.5.13}$$

$$\alpha_2\Delta\varphi_i+\alpha_3\varphi_{j,ji}+\gamma_1\varepsilon_{ijk}u_{k,j}-2\gamma_1\varphi_i+\Phi_i=I_0\ddot{\varphi}_i, \tag{4.5.14}$$

$$K\Delta\theta+\kappa_5T_{i,i}+\tilde{\kappa}_1\dot{u}_{i,i}-\kappa_4\dot{\varphi}-\xi_1\dot{\theta}-\gamma_6\dot{P}=-Q_0, \tag{4.5.15}$$

$$\kappa_6\Delta T_k+\kappa_7T_{,ik}-\kappa_3\dot{\varphi}_{,k}-\xi_3\dot{T}_k-\tilde{c}\dot{C}_k-\xi_4\theta_{,k}-\xi_2T_k=\tilde{R}_k, \tag{4.5.16}$$

$$\tilde{c}\dot{T}_i+H_0\dot{C}_i=H_6\Delta C_i+H_4C_{j,ji}-H_3P_{,i}-H_2C_i-\tilde{n}_1'\dot{\varphi}_{,i}, \tag{4.5.17}$$

$$q_1\dot{P}+\gamma_6\dot{\theta}-\gamma_5\dot{u}_{i,i}-p\dot{\varphi}=q_7\Delta P+q_8C_{i,i}, \tag{4.5.18}$$

unde coeficienții au următoarele expresii

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\frac{\mu+\kappa}{\rho c_1^2},\qquad \tilde{\alpha}_1=\frac{1}{\rho c_1^2}\left(\lambda+\mu-\frac{D_2^2}{\varrho}\right),\qquad \gamma_1=\frac{\kappa}{\rho c_1^2},\\&\gamma_2=\frac{1}{\rho c_1^2}\left(D_1-\frac{\tilde{g}_1D_2}{\varrho}\right),\qquad \tilde{\kappa}_1=\frac{T_0}{\rho c_1^2}\left(\frac{D_2\varpi}{\varrho}-A_4\right),\\&\gamma_5=\frac{D_2P_0}{\varrho\rho c_1^2},\qquad \tilde{F}_i=\frac{l_0f_i}{c_1^2},\qquad \alpha_4=\frac{A_5}{l_0^2c_1^2\rho},\qquad \kappa_3=\frac{N_1}{l_0^2c_1^2\rho},\qquad \kappa_4=\frac{T_0}{c_1^2\rho}\left(F-\frac{\tilde{g}_1\varpi}{\varrho}\right),\\&\alpha_5=\frac{1}{c_1^2\rho}\left(\frac{\tilde{g}_1^2}{\varrho}-\xi\right),\qquad H=\frac{l}{c_1^2},\qquad J_0=\frac{J}{l_0^2\rho},\\&p=\frac{\tilde{g}_1P_0}{\varrho c_1^2\rho},\qquad \alpha_2=\frac{\tilde{C}_2}{l_0^2c_1^2\rho},\qquad \alpha_3=\frac{1}{l_0^2c_1^2\rho}\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_3\right),\qquad \Phi_i=\frac{g_i}{c_1^2},\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

$$I_0=\frac{I_1}{\rho l_0^2},\qquad K=\frac{kT_0}{l_0\rho c_1^3},$$

$$\kappa_5=\frac{k_1}{l_0\rho c_1^3},\qquad \xi_1=\frac{T_0^2}{\rho c_1^2}\left(a+\frac{\varpi^2}{\varrho}\right),\qquad \gamma_6=\frac{\varpi T_0P_0}{\varrho\rho c_1^2},\qquad Q_0=\frac{l_0 s}{c_1^3},$$

$$\kappa_6=\frac{k_6}{\rho l_0^3c_1^3},\qquad \kappa_7=\frac{k_4+k_5}{\rho l_0^3c_1^3},\qquad \xi_3=\frac{\tilde{B}_5}{\rho l_0^2c_1^2},\qquad \tilde{c}=\frac{R}{\rho l_0^2c_1^2},\qquad \tilde{R}_k=\frac{G_k}{c_1^3},$$

$$\xi_4=\frac{k_3T_0}{\rho l_0c_1^3},\qquad \xi_2=\frac{k_2}{\rho l_0c_1^3},\qquad H_0=\frac{\tilde{C}_4}{l_0^2\rho c_1^2},\qquad H_6=\frac{h_6}{l_0^3\rho c_1^3},\qquad H_2=\frac{h_2}{l_0\rho c_1^3},$$

$$H_4=\frac{h_4+h_5}{l_0^3\rho c_1^3},\qquad H_3=\frac{h_3P_0}{l_0\rho c_1^3},\qquad q_1=\frac{P_0^2}{\varrho\rho c_1^2},\qquad q_7=\frac{hP_0^2}{l_0\rho c_1^3},\qquad q_8=\frac{h_1P_0}{l_0\rho c_1^3}.$$

Alături de ecuațiile de mai sus vom considera condițiile inițiale (4.1.22) și condițiile la limită

$$u_i=\bar{u}_i\quad \varphi_i=\bar{\varphi}_i\quad \varphi=\bar{\varphi}\quad \theta=\bar{\theta}\quad T_i=\bar{T}_i\quad P=\bar{P}\quad C_i=\bar{C}_i \tag{4.5.20}$$

pe $\partial\Omega\times[0,t_1]$, unde $\bar{u}_i,\bar{\varphi}_i,\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{T}_i,\bar{P},\bar{C}_i$ sunt funcții date și t_1 este o constantă pozitivă dată. Vom considera două soluții $\{u_i^{(\alpha)},\varphi_i^{(\alpha)},\varphi^{(\alpha)},\theta^{(\alpha)},T_i^{(\alpha)},P^{(\alpha)},C_i^{(\alpha)}\}$ ale ecuațiilor de mai sus, corespunzătoare sistemului de încărcări $\mathcal{I}^{(\alpha)}=\{\tilde{F}_i^{(\alpha)},\Phi_i^{(\alpha)},H^{(\alpha)},Q_0^{(\alpha)},\tilde{R}_i^{(\alpha)},\bar{u}_i,\bar{\varphi}_i,\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{T}_i,\bar{P},\bar{C}_i,u_i^{0(\alpha)},u_i^{1(\alpha)},\varphi_i^{0(\alpha)},\varphi_i^{1(\alpha)},\varphi^{0(\alpha)},\varphi^{1(\alpha)},\theta^{0(\alpha)},T_i^{0(\alpha)},P^{0(\alpha)},C_i^{0(\alpha)}\}$, unde $\alpha=1,2$. Se consideră funcțiile $u_i=u_i^{(1)}-u_i^{(2)}$, $\varphi_i=\varphi_i^{(1)}-\varphi_i^{(2)}$, $\varphi=\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}$, $\theta=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}$, $T_i=T_i^{(1)}-T_i^{(2)}$, $P=P^{(1)}-P^{(2)}$, $C_i=C_i^{(1)}-C_i^{(2)}$. Prin urmare, $\{u_i,\varphi_i,\varphi,\theta,T_i,P,C_i\}$ este o soluție a problemei corespunzătoare sistemului de date extern $\mathcal{I}=\{\tilde{F}_i,\Phi_i,H,Q_0,\tilde{R}_i,0,0,0,0,0,0,0,0,u_i^0,u_i^1,\varphi_i^0,\varphi_i^1,\varphi^0,\varphi^1,\theta^0,T_i^0,P^0,C_i^0\}$ unde $\tilde{F}_i=\tilde{F}_i^{(1)}-\tilde{F}_i^{(2)}$, $\Phi_i=\Phi_i^{(1)}-\Phi_i^{(2)}$, $H=H^{(1)}-H^{(2)}$, $Q_0=Q_0^{(1)}-Q_0^{(2)}$, $\tilde{R}_i=\tilde{R}_i^{(1)}-\tilde{R}_i^{(2)}$, $u_i^0=u_i^{0(1)}-u_i^{0(2)}$, $u_i^1=u_i^{1(1)}-u_i^{1(2)}$, $\varphi_i^0=\varphi_i^{0(1)}-\varphi_i^{0(2)}$, $\varphi_i^{1(1)}-\varphi_i^{1(2)}$, $\varphi^0=\varphi^{0(1)}-\varphi^{0(2)}$, $\varphi^1=\varphi^{1(1)}-\varphi^{1(2)}$, $\theta^0=\theta^{0(1)}-\theta^{0(2)}$, $T_i^0=T_i^{0(1)}-T_i^{0(2)}$, $P^0=P^{0(1)}-P^{0(2)}$, $C_i^0=C_i^{0(1)}-C_i^{0(2)}$. Această problemă va fi notată cu $\mathcal{P}$.

În continuare vom stabili un rezultat de dependență continuă pentru problema $\mathcal{P}$. Ecuațiile de mai sus pot fi scrise în forma descrisă în lema următoare.

Lema 4.5.1 *Ecuațiile difuziei în termoelasticitatea microstretch cu microtemperaturi și microconcentrații în cazul izotrop sunt*

$$\begin{aligned}
&\pi_{ji,j}+\tilde{F}_i=\ddot{u}_i,\\
&s_{j,j}+f+H=J_0\ddot{\varphi},\\
&\mu_{ji,j}+\varepsilon_{ijk}\pi_{jk}+\Phi_i=I_0\ddot{\varphi}_i,\\
&\dot{\Pi}=\Sigma_{j,j}+Q_0,\\
&\dot{\chi}_k=\lambda_{rk,r}+\Sigma_k-\Gamma_k+\tilde{R}_k,\\
&\dot{\Omega}_i=\tilde{\eta}_{ji,j}+\tilde{\eta}_i-\tilde{\Sigma}_i,\\
&\dot{Z}=\tilde{\eta}_{i,i}\tilde{Q},
\end{aligned}\tag{4.5.21}$$

unde

$$\begin{aligned}
&\pi_{ji} = (\tilde{\alpha}_1 - \alpha_1 + \gamma_1)e_{rr}\delta_{ij} + \alpha_1 e_{ji} + (\alpha_1 - \gamma_1)e_{ij} + \\
&+ \gamma_2\varphi\delta_{ij} + \tilde{k}_1\theta\delta_{ij} + \gamma_5 P\delta_{ij}, \\
&f = -\gamma_2 e_{rr} + \kappa_4\theta - pP + \alpha_5\varphi + \nu_i\zeta_i, \\
&s_i = \alpha_4\zeta_i - \kappa_3 T_i + \varsigma\varepsilon_{rsi}\kappa_{rs} - \nu_i\varphi - \tilde{n}_1' C_i, \\
&\mu_{ji} = \tilde{\tau}\kappa_{rr}\delta_{ij} + (\alpha_3 - \tilde{\tau})\kappa_{ij} + \alpha_2\kappa_{ji} + \varsigma\varepsilon_{jik}\zeta_k, \\
&\Sigma_i = K\theta_{,i} + \kappa_5 T_i, \\
&\Pi = -\tilde{\kappa}_1 e_{rr} + \kappa_4\varphi + \xi_1\theta + \gamma_6 P, \\
&\chi_k = -\kappa_3\zeta_k - \xi_3 T_k - \tilde{c}C_k, \\
&\Gamma_k = (K - \xi_4)\theta_{,k} + (\kappa_5 - \xi_2)T_k, \\
&\lambda_{jk} = -\kappa_6 T_{k,j} - (\kappa_7 - \kappa_8)T_{j,k} - \kappa_8 T_{r,r}\delta_{jk}, \\
&\Omega_i = -\tilde{c}T_i - H_0 C_i - \tilde{n}_1'\varphi_{,i}, \\
&\tilde{\eta}_i = H_8 P_{,i} + H_9 C_i, \\
&\tilde{\Sigma}_i = (H_8 - H_3)P_{,i} + (H_9 - H_2)C_i, \\
&\tilde{\eta}_{ji} = -H_6 C_{i,j} - H_{10}C_{j,i} - (H_4 - H_{10})C_{k,k}\delta_{ij}, \\
&Z = q_1 P + \gamma_6\theta - \gamma_5 e_{rr} - p\varphi.
\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

Definim următoarele funcții, care vor fi utile în cele ce urmează

$$\begin{aligned}
&2U = (\tilde{\alpha}_1 - \alpha_1 + \gamma_1)e_{rr}e_{ss} + \alpha_1 e_{ij}e_{ij} + (\alpha_1 - \gamma_1)e_{ji}e_{ij} + \\
&+ 2\gamma_2\varphi e_{rr} + (\alpha_3 - \tilde{\tau})\kappa_{ji}\kappa_{ij} + \alpha_2\kappa_{ij}\kappa_{ij} - \alpha_5\varphi^2 - 2\nu_i\varphi\zeta_i + \\
&+ 2\varsigma\zeta_k\kappa_{ij}\varepsilon_{ijk} + \alpha_4\zeta_i^2 + 2\tilde{c}C_i T_i + 2P\theta\gamma_6 + \tilde{\tau}\kappa_{rr}\kappa_{ii}
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

și

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D} = K\theta_{,i}\theta_{,i} + (\kappa_5 + \xi_4)\theta_{,i}T_i + \xi_2 T_i T_i + \kappa_8 T_{r,r}T_{s,s} + (\kappa_7 - \kappa_8)T_{j,i}T_{i,j} + \\
&+ \kappa_6 T_{i,j}T_{i,j} + (\tilde{Q}H_9 + H_3)P_{,i}C_i + H_2 C_i C_i + \tilde{Q}H_8 P_{,i}P_{,i} + \\
&+ H_6 C_{i,j}C_{i,j} + H_{10}C_{j,i}C_{i,j} + (H_4 - H_{10})C_{r,r}C_{s,s}
\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

Definim funcția ψ pe $[0, t_1]$ sub forma

$$\begin{aligned}
\psi = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(&\dot{u}_i\dot{u}_i + I_0\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_i + J_0\dot{\varphi}^2 + 2U + \xi_1\theta^2 + \xi_3 T_i T_i + \\
&+ H_0 C_i^2 + q_1 P^2 + 2\int_0^t \mathcal{D}\mathrm{d}t\Big)\, dV
\end{aligned} \tag{4.5.25}$$

În plus, se consideră că U și $\mathcal{D}$ sunt forme pătratice pozitiv definite. Se definesc constantele pozitive $\vartheta_1, \vartheta_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ astfel încât

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1(\theta_{,i}\theta_{,i} + T_i T_i + T_{i,j}T_{i,j} + P_{,i}P_{,i} + C_i C_i + C_{i,j}C_{i,j}) \le \mathcal{D} \le \\
&\le \vartheta_2(\theta_{,i}\theta_{,i} + T_i T_i + T_{i,j}T_{i,j} + P_{,i}P_{,i} + C_i C_i + C_{i,j}C_{i,j})
\end{aligned} \tag{4.5.26}$$

$$\Lambda_1(e_{ij}e_{ij} + \kappa_{ij}\kappa_{ij} + \zeta_i\zeta_i + \varphi^2) \le U \le \Lambda_2(e_{ij}e_{ij} + \kappa_{ij}\kappa_{ij} + \zeta_i\zeta_i + \varphi^2)$$

oricare ar fi $e_{ij}, \kappa_{ij}, \zeta_i, \varphi, \theta_{,i}, T_i, T_{i,j}, P_{,i}, C_i, C_{i,j}$ și oricare ar fi $t \in [0, t_1]$.

Teorema 4.5.1 *Fie $\{u_i, \varphi_i, \varphi, \theta, T_i, P, C_i\}$ o soluție a problemei $\mathcal{P}$. Atunci*

$$\dot{\psi} = \int_\Omega \left(\tilde{F}_i\dot{u}_i + \Phi_i\dot{\varphi}_i + H\dot{\varphi} + Q_0\theta - \tilde{R}_i T_i\right) dV \tag{4.5.27}$$

Pentru următoarea teoremă definim următoarele funcții pe intervalul $[0,t_1]$

$$\tilde{P}=\left[\int_\Omega\left(\tilde{F}_i\tilde{F}_i+\Phi_i\Phi_i+H^2+Q_0^2+\tilde{R}_i\tilde{R}_i\right)dV\right]^{1/2} \tag{4.5.28}$$

și

$$\begin{aligned}\Upsilon=\Bigg\{\int_\Omega\Big[&\dot{u}_i\dot{u}_i+\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_i+\dot{\varphi}^2+e_{ij}e_{ij}+\kappa_{ij}\kappa_{ij}+\zeta_i\zeta_i+\varphi^2+C_i^2+P^2+\theta^2+T_iT_i+\\&+\int_0^t\left(\theta_{,i}\theta_{,i}+T_iT_i+T_{i,j}T_{i,j}+P_{,i}P_{,i}+C_iC_i+C_{i,j}C_{i,j}\right)\mathsf{d}t\Big]\,\mathsf{d}V\Bigg\}^{1/2}\end{aligned} \tag{4.5.29}$$

Teorema 4.5.2 *Dacă constantele $\rho, I_0, J_0, \xi_1, \xi_3, H_0, q_1$ sunt strict pozitive și U și $\mathcal{D}$ sunt pozitiv definite, atunci există constantele pozitive ρ_1 și ρ_2 astfel încât*

$$\Upsilon(t)\leq\rho_1\Upsilon(0)+\rho_2\int_0^t\tilde{P}(s)\mathsf{d}s \tag{4.5.30}$$

oricare ar fi $t\in[0,t_1)$.

4.6 Propagare de unde în medii elastice microstretch

Rezultatele din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea [27].

Considerăm, conform [18], [31]

$$\begin{aligned}&u_r(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{A}_re^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\quad \theta(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{C}e^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\\&T_r(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{B}_re^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\quad \varphi(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{I}e^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\\&\varphi_r(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{F}_re^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\quad P(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{G}e^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\\&C_r(\boldsymbol{x},t)=\Re\{\mathcal{H}_re^{i\chi(x_sn_s-\nu t)}\},\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

unde $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3)$, $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)$ și $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3)$. În formula de mai sus, $\boldsymbol{n}$ este un vector unitate real care dă direcția de propagare.

Discutăm cazul unu dimensional. Obținem următorul sistem de ecuații pentru constantele $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}$ și $\mathcal{H}_1$ care apar în expresiile pentru deplasare, temperatură, microtemperatură, microdilatare, microrotație, potențial chimic și microconcentrație.

$$\begin{aligned}&\left[\rho\nu^2-(\mu+\kappa)-(\lambda+\mu)+\frac{D_2^2}{\varrho}\right]\mathcal{A}_1+\left(\frac{D_2\varpi}{\varrho}-A_4\right)\frac{i}{\chi}\mathcal{C}+\\&+\left(D_1-\frac{\tilde{g}_1D_2}{\varrho}\right)\frac{i}{\chi}\mathcal{I}+\frac{D_2}{\varrho}\cdot\frac{i}{\chi}\mathcal{G}=0,\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_1\left(\frac{\tilde{g}_1D_2}{\varrho}-D_1\right)\frac{i}{\chi}+\mathcal{C}\left(F-\frac{\tilde{g}_1\varpi}{\varrho}\right)\frac{1}{\chi^2}-N_1i\chi\mathcal{B}_1-N_1'i\chi\mathcal{H}_1+\\&+\mathcal{I}\left[-A_5-\frac{\xi}{\chi^2}+\frac{\tilde{g}_1^2}{\varrho\chi^2}+J\nu^2\right]-\frac{\tilde{g}_1}{\varrho\chi^2}\mathcal{G}=0,\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

$$\mathcal{F}_1\left[-\left(\tilde{C}_2-I_1\nu^2+\frac{2\kappa}{\chi^2}\right)-\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_3\right)\right]=0, \tag{4.6.4}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_1\left(\frac{\varpi D_2}{\varrho}-A_4\right)T_0\nu+\mathcal{C}\left[\left(a+\frac{\varpi^2}{\varrho}\right)T_0\frac{i\nu}{\chi}-k\right]+\mathcal{B}_1k_1\frac{i}{\chi}+\\&+\mathcal{I}\left[-\left(\frac{\varpi\tilde{g}_1}{\varrho}-F\right)T_0\frac{i\nu}{\chi}\right]+\mathcal{G}\frac{\varpi T_0}{\varrho}\cdot\frac{i\nu}{\chi}=0,\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

$$\frac{D_2}{\varrho}\nu\mathcal{A}_1+\frac{\varpi i\nu}{\varrho\chi}\mathcal{C}+\mathcal{I}\left(-\frac{\tilde{g}_1}{\varrho}\cdot\frac{i\nu}{\chi}\right)+\left(\frac{i\nu}{\varrho\chi}-h\right)\mathcal{G}+\mathcal{H}_1h_1\frac{i}{\chi}=0, \tag{4.6.6}$$

$$-\mathcal{C}k_3\frac{i}{\chi}+\mathcal{B}_1\left[-(k_4+k_5)+\left(-k_6+\tilde{B}_5\frac{i\nu}{\chi}-\frac{k_2}{\chi^2}\right)\right]-\mathcal{I}N_1\nu+\mathcal{H}_1Ri\frac{\nu}{\chi}=0, \tag{4.6.7}$$

$$\mathcal{B}_1R\frac{i\nu}{\chi}-\mathcal{G}h_3\frac{i}{\chi}+\mathcal{H}_1\left[-(h_4+h_5)+\left(\tilde{C}_4\frac{i\nu}{\chi}-h_6-\frac{h_2}{\chi^2}\right)\right]-N_1'\mathcal{I}\chi^2\nu=0. \tag{4.6.8}$$

Se observă că $\mathcal{F}_1$ este zero. Deoarece acest sistem algebric este omogen, este necesar ca determinantul matricei sistemului să fie zero pentru a obține soluții diferite de zero. Prin urmare, vom obține o ecuație polinomială în necunoscuta ν.

Utilizând Mathematica, determinantul matricei în cazul decuplat pentru elasticitatea microstretch este

$$\begin{aligned}\Delta(\nu)=&-\frac{1}{\chi^8\varrho}(-i\nu+\chi h\varrho)(-\lambda-2\mu+\nu^2\rho)(\chi\kappa-ia\nu T_0)\cdot\\&\cdot\left[k_2+\chi^2(k4+k5+k6)-\chi i\nu\tilde{B}_5\right][h_2+\chi^2(h_4+h_5+h_6)-\chi i\nu\tilde{C}_4]\cdot\\&\cdot(-A_5\chi^2+\chi^2J\nu^2-\xi)\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

în cazul decuplat, cu $D_2=0,\kappa=0,D_1=0,A_4=0,\tilde{g}_1=0,N_1=0,F=0,N_1'=0,\varpi=0,k_1=0,$ $h_1=0,R=0,k_3=0.$

În cazul decuplat, ecuația $\Delta(\nu)=0$ are următoarele rădăcini care satisfac condițiile $Re(\nu)\geq 0$ și $Im(\nu)\leq 0$, și anume

$$\begin{aligned}&\nu_1=-i\chi h\varrho,\quad \nu_2=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad \nu_3=-\frac{i\chi k}{aT_0},\\&\nu_4=\frac{1}{i\chi\tilde{B}_5}[k_2+\chi^2(k_4+k_5+k_6)],\quad \nu_5=\frac{1}{\chi i\tilde{C}_4}[h_2+\chi^2(h_4+h_5+h_6)],\\&\nu_6=\frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{1}{J}(A_5\chi^2+\xi)}\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

Pentru valoarea ν_1, avem

$$\begin{aligned}&u_1^{(1)}=0,\theta^{(1)}=0,T_1^{(1)}=0,\varphi^{(1)}=0,\\&P^{(1)}=\Re\left\{\frac{i}{\chi h_3}(h_2+\chi^2h_4+\chi^2h_5+\chi^2h_6-\chi^2h\varrho\tilde{C}_4)e^{i\chi(x_1n_1-\nu_1t)}\right\},\\&C_1^{(1)}=\Re\{c_1e^{i\chi(x_1n_1-\nu_1t)}\}.\end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Pentru valoarea ν_2, avem

$$\begin{aligned}&u_1^{(2)}=\Re\{c_2e^{i\chi(x_1n_1-\nu_2t)}\},\\&\theta^{(2)}=0,T_1^{(2)}=0,\varphi^{(2)}=0,P^{(2)}=0,C_2^{(2)}=0.\end{aligned} \tag{4.6.12}$$

Pentru valoarea ν_3, avem

$$\begin{aligned}&u_1^{(3)}=0,\theta^{(3)}=\Re\{c_3e^{i\chi(x_1n_1-\nu_3t)}\},\\&T_1^{(3)}=0,\varphi^{(3)}=0,P^{(3)}=0,C_1^{(3)}=0.\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

Pentru valoarea ν_4, avem

$$\begin{aligned}&u_1^{(4)}=0,\theta^{(4)}=0,T_1^{(4)}=\Re\{c_4e^{i\chi(x_1n_1-\nu_4t)}\},\\&\varphi^{(4)}=0,P^{(4)}=0,C_1^{(4)}=0.\end{aligned} \tag{4.6.14}$$

Pentru valoarea ν_5, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(5)} = 0, \theta^{(5)} = 0, T_1^{(5)} = 0, \varphi^{(5)} = 0, P^{(5)} = 0, \\ &C_1^{(5)} = \Re\{c_5 e^{i\chi(x_1 n_1 - \nu_5 t)}\}. \end{aligned} \tag{4.6.15}$$

Pentru valoarea ν_6, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(6)} = 0, \theta^{(6)} = 0, T_1^{(6)} = 0, \\ &\varphi^{(6)} = \Re\{c_6 e^{i\chi(x_1 n_1 - \nu_6 t)}\}, P^{(6)} = 0, C_1^{(6)} = 0. \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

4.7 Cazul particular al termoelasticității cu microtemperaturi și microconcentrații

Ecuațiile de mișcare pentru modelul termoelasticității cu microtemperaturi și microconcentrații în cazul izotrop și omogen sunt

$$\begin{aligned} &\rho \ddot{u}_i = \mu \Delta u_i + (\mu + \lambda) u_{j,ji} - \gamma_1 \theta_{,i} - \gamma_2 P_{,i} + \rho f_i, \\ &c\dot{\theta} + \kappa \dot{P} = -\gamma_1 \dot{u}_{i,i} + \kappa^* \Delta\theta + \kappa_1^* T_{i,i} + \rho s, \\ &\kappa\dot{\theta} + m\dot{P} = -\gamma_2 \dot{u}_{i,i} + h^* \Delta P + h_1 C_{i,i}, \\ &c_1 \dot{T}_i + \kappa_1 \dot{C}_i = \kappa_6 \Delta T_i + (\kappa_4 + \kappa_5) T_{j,ji} - \kappa_2 T_i - \kappa_3 \theta_{,i} + \rho \mu_i, \\ &\kappa_1 \dot{T}_i + m_1 \dot{C}_i = h_6 \Delta C_i + (h_4 + h_5) C_{j,ji} - h_2 C_i - h_3 P_{,i} \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

Vom calcula soluții de tip undă plană progresivă armonică în timp pentru materiale descrise de acest model matematic. Prin urmare, considerăm soluții ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale de forma

$$\begin{aligned} &u_r(\boldsymbol{x}, t) = \Re\{\mathcal{A}_r' e^{i\chi(x_s n_s - \nu t)}\}, \quad \theta(\boldsymbol{x}, t) = \Re\{\mathcal{C}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu t)}\}, \\ &T_r(\boldsymbol{x}, t) = \Re\{\mathcal{B}_r' e^{i\chi(x_s n_s - \nu t)}\}, \quad P(\boldsymbol{x}, t) = \Re\{\mathcal{G}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu t)}\}, \\ &C_r(\boldsymbol{x}, t) = \Re\{\mathcal{H}_r' e^{i\chi(x_s n_s - \nu t)}\}, \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

unde $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}_{\mathbf{1}}', \mathcal{A}_{\mathbf{2}}', \mathcal{A}_{\mathbf{3}}')$, $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_{\mathbf{1}}', \mathcal{B}_{\mathbf{2}}', \mathcal{B}_{\mathbf{3}}')$ și $\mathcal{H}' = (\mathcal{H}_{\mathbf{1}}', \mathcal{H}_{\mathbf{2}}', \mathcal{H}_{\mathbf{3}}')$ sunt constante și au valori complexe. În formula de mai sus, $\boldsymbol{n}$ este un vector unitate real care dă direcția de propagare. În plus, ν este un număr complex de forma

$$\nu = \Re(\nu) + i\Im(\nu), \tag{4.7.3}$$

cu

$$\Re(\nu) \geq 0, \quad \Im(\nu) \leq 0. \tag{4.7.4}$$

Vom considera cazul unu dimensional. Vom presupune că axa x_1 coincide cu direcția de propagare.

Matricea sistemului algebric liniar și omogen este

$$\begin{pmatrix} \rho\nu^2 - 2\mu - \lambda & -\gamma_1 \frac{i}{\chi} & 0 & -\gamma_2 \frac{i}{\chi} & 0 \\ -\gamma_1 \nu & c\frac{i\nu}{\chi} - \kappa^* & \kappa_1^* \frac{i}{\chi} & \kappa \frac{i\nu}{\chi} & 0 \\ -\gamma_2 \nu & \kappa \frac{i\nu}{\chi} & 0 & m\frac{i\nu}{\chi} - h^* & h_1 \frac{i}{\chi} \\ 0 & -\kappa_3 \frac{i}{\chi} & \begin{matrix} -(\kappa_4+\kappa_5)+ \\ (-\kappa_6 + c_1 \frac{i\nu}{\chi} - \frac{\kappa_2}{\chi^2}) \end{matrix} & 0 & \kappa_1 i \frac{\nu}{\chi} \\ 0 & 0 & \kappa_1 \frac{i\nu}{\chi} & -h_3 \frac{i}{\chi} & \begin{matrix} -(h_4+h_5)+ \\ (m_1 \frac{i\nu}{\chi} - h_6 - \frac{h_2}{\chi^2}) \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{4.7.5}$$

Această matrice se înmulțește cu vectorul $(\mathcal{A}_1', \mathcal{C}', \mathcal{B}_1', \mathcal{G}', \mathcal{H}_1')$.

În Mathematica, se definește matricea, iar determinantul se calculează în cazul decuplat cu ajutorul instrucțiunii Det. Se calculează valorile lui ν pentru care determinantul este nul. Pentru fiecare valoare a lui ν, evaluăm matricea și calculăm soluția asociată sistemului liniar de ecuații cu ajutorul instrucțiunii $NullSpace$. În Mathematica, timpul necesar pentru aceste evaluări este calculat cu ajutorul instrucțiunii $AbsoluteTiming$ și este 0.00925124 secunde.

Considerăm că avem coeficienți de cuplare nuli

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \kappa = 0, \quad \kappa_1^* = 0, \\ &h_1 = 0, \quad \kappa_1 = 0, \quad \kappa_3 = 0, \quad h_3 = 0. \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

Cu ajutorul Mathematica, obținem următoarea expresie pentru determinantul matricei în cazul decuplat

$$\begin{aligned} \Delta_0(\nu) = &\frac{1}{\chi^6} i \left(-\chi\kappa^* + ic\nu\right) \left(i\kappa_2 + i\chi^2\kappa_4 + i\chi^2\kappa_5 + i\chi^2\kappa_6 + c_1\chi\nu\right) \cdot \\ &\cdot \left(-h_2 - \chi^2 h_4 - \chi^2 h_5 - \chi^2 h_6 + i\chi m_1 \nu\right) \left(\lambda + 2\mu - \rho\nu^2\right) \left(-\chi h^* + i\nu m\right). \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

În cazul decuplat, obținem următoarele rădăcini ale ecuației $\Delta_0(\nu) = 0$, care satisfac condițiile $Re(\nu) \geq 0$ și $Im(\nu) \leq 0$

$$\begin{aligned} &\nu_1 = -i\frac{\chi\kappa^*}{c}, \quad \nu_2 = -i\frac{\chi}{c_1}\left(\kappa_4 + \kappa_5 + \kappa_6 + \frac{\kappa_2}{\chi^2}\right), \\ &\nu_3 = -i\frac{\chi}{m_1}\left(h_4 + h_5 + h_6 + \frac{h_2}{\chi^2}\right), \quad \nu_4 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \nu_5 = -i\frac{\chi h^*}{m}. \end{aligned} \tag{4.7.8}$$

Pentru valoarea ν_1, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(1)} = 0, \theta^{(1)} = \Re\{\underline{c_1}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu_1 t)}\}, \\ &T_1^{(1)} = 0, P^{(1)} = 0, C_1^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

Pentru valoarea ν_2, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(2)} = 0, \theta^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = \Re\{\underline{c_2}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu_2 t)}\}, \\ &P^{(2)} = 0, C_1^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{4.7.10}$$

Pentru valoarea ν_3, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(3)} = 0, \theta^{(3)} = 0, T_1^{(3)} = 0, \\ &P^{(3)} = 0, C_1^{(3)} = \Re\{\underline{c_3}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu_3 t)}\}. \end{aligned} \tag{4.7.11}$$

Pentru valoarea ν_4, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(4)} = \Re\{\underline{c_4}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu_4 t)}\}, \theta^{(4)} = 0, T_1^{(4)} = 0, \\ &P^{(4)} = 0, C_1^{(4)} = 0. \end{aligned} \tag{4.7.12}$$

Pentru valoarea ν_5, avem

$$\begin{aligned} &u_1^{(5)} = 0, \theta^{(5)} = 0, T_1^{(5)} = 0, \\ &P^{(5)} = \Re\{\underline{c_5}' e^{i\chi(x_s n_s - \nu_5 t)}\}, C_1^{(5)} = 0. \end{aligned} \tag{4.7.13}$$

Considerăm valorile pentru constante din Bazarra et al. [10].

Pentru valoarea constantei ν_1, obținem $\theta(x,t) = e^{-t}cos(x)$. Pentru valoarea constantei ν_2, obținem $T_1(x,t) = e^{-2t}cos(x)$. Pentru valoarea constantei ν_3, obținem $C_1(x,t) = e^{-4t}cos(x)$. Pentru valoarea constantei ν_4, obținem $u_1(x,t) = cos(50\sqrt{3}t - x)$. Pentru valoarea constantei ν_5, obținem $P(x,t) = e^{-t}cos(x)$.

Mai jos este codul cu ajutorul căruia se trasează graficul funcției temperatură.

$$\begin{aligned} &nu1 = -i * chi * kappas/c; \\ &theta = Simplify\left[Re\left[ComplexExpand[1 * Exp[I * chi * (x - nu1 * t)]]\right],\right. \\ &\qquad \left. Element[\{x,t\}, Reals]\right] \\ &Plot3D[theta, \{x,0,10\}, \{t,0,10\}] \end{aligned} \tag{4.7.14}$$

Obținem graficele de mai jos pentru comportarea funcțiilor care descriu temperatura și deplasarea.

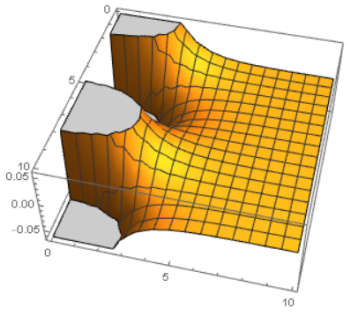

Figura 4.1 – Temperatura

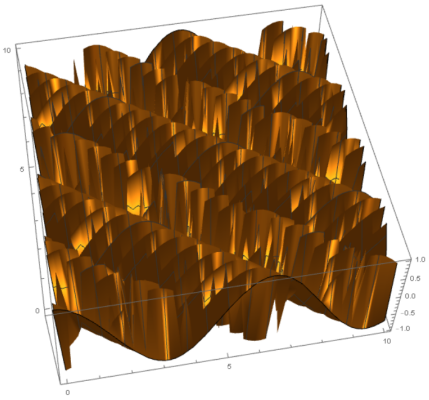

Figura 4.2 – Deplasarea

4.8 Concluzie

Noutatea acestei secțiuni constă în introducerea conceptelor de difuzie și microconcentrații în modelul matematic al termoelasticității microstretch cu microtemperaturi. Această cercetare poate fi continuată prin studierea în detaliu a tuturor proprietăților caracteristice ale modelului.

Capitolul 5

Medii termo-electro-elastice poroase pentru studiul procesului de remodelare osoasă

Dezvoltăm o teorie a mediilor continue termo-electro-elastice pentru un model al procesului de remodelare osoasă care îl extinde pe cel din [40] prin includerea câmpurilor electrice. Vom utiliza abordarea termodinamică de tip Green-Naghdi care utilizează conceptul de deplasare termică și o egalitate a entropiei în loc de o inegalitate a entropiei [87]. Pornind de la [40] și [56], studiem procesul de remodelare osoasă în contextul termo-electro-elasticității și propunem noi legi ale impulsului, energiei și entropiei. Deducem legi locale de echilibru, ipoteze constitutive, restricții constitutive și studiem cazul corpurilor cu izotropie transversală. Demonstrăm un rezultat de dependență continuă pentru un model matematic în cazul neliniar prin utilizarea inegalității Gronwall. Putem utiliza inegalitatea Gronwall pentru demonstrarea unui rezultat de dependență continuă și în cazul liniar [22].

Capitolul este organizat în cinci secțiuni, prima fiind introducerea. A doua secțiune prezintă ecuațiile de echilibru nou introduse, iar a treia secțiune prezintă ipotezele constitutive și restricțiile. În a patra secțiune analizăm cazul cu izotropie transversală pentru a studia propagarea de unde, iar în a cincea secțiune demonstrăm un rezultat de dependență continuă în cazul neliniar. Rezultatele din acest capitol sunt publicate în [28].

5.1 Ecuații de echilibru

În această secțiune vom propune ecuațiile de echilibru pentru masă, moment, energie și entropie care rezultă prin extinderea definițiilor din [40] și [56]. Vom aplica aceste ecuații matricei poroase B fără fluid. Vom adăuga termeni de transfer în fiecare ecuație pentru a modela interacțiunea dintre B și fluidul intern. Notăm cu ∂B suprafața lui B și cu $\boldsymbol{n}$ normala unitate la suprafața ∂B.

Matricea osoasă $\mathcal{B}$ este modelată ca un mediu continuu elastic care este finit deformabil, conduce căldura, este polarizabil din punct de vedere electric și interacționează cu câmpul electric. În plus, ocupă la momentul de timp t regiunea închisă (mulțimea de puncte conexă) $B = B_t$ în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$. Regiunea B_0 ocupată de $\mathcal{B}$ la un moment de timp (inițial) fixat t_0 va fi considerată configurația de referință. Punctele materiale $\boldsymbol{x}$ sunt asociate cu pozițiile lor $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3$ în B_0.

Un punct deasupra unei litere semnifică derivata materială în raport cu timpul. Notăm cu '$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \ldots$' operatorul spațial de divergență și cu '$\nabla_{\boldsymbol{X}} \cdot \ldots$' operatorul material de divergență. Simbolul d/dt indică derivata materială în raport cu timpul, dv este elementul de volum infinitezimal și ds este elementul de arie de suprafață.

Pentru noțiunile de mai jos vom utiliza definițiile din [40]. Mișcarea $\boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{X})$ dă poziția $\boldsymbol{x}$ a particulei

Tabelul 5.1 – Definiții ale cantităților mecanice

$\mathcal{B}$	structura matricială poroasă și solidă
$B = B_t$	configurația spațială la momentul de timp t pentru $\mathcal{B}$
B_0	configurația de referință pentru $\mathcal{B}$
ν	fracțiunea de volum a materialului matricial în B
γ	densitatea materialului din care este constituit B
ρ	densitatea medie ρ pentru B ($\rho = \gamma\nu$)
c	rata la care masa pe unitate de volum este adăugată sau îndepărtată din B
$\boldsymbol{\tau}$	tensorul de tensiune Cauchy
$\boldsymbol{b}$	forța masică pe unitate de masă
$\underline{\boldsymbol{p}}$	forța pe care o aplică fluidul asupra structurii matriciale poroase B

$\boldsymbol{X}$ la momentul de timp t

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(t,\, \boldsymbol{X})\,. \tag{5.1.1}$$

Viteza este dată de

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \tag{5.1.2}$$

și gradientul de deformație $\boldsymbol{F}$ de

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{X}}\,. \tag{5.1.3}$$

În plus, $J = \det \boldsymbol{F} > 0$ pe $\bar{B} \times I$. Gradientul vitezei $\boldsymbol{L}$ este dat de

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{5.1.4}$$

și prin formula de derivare a funcțiilor compuse obținem

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{F}. \tag{5.1.5}$$

În plus, obținem

$$(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\, \det \boldsymbol{F} = (tr\boldsymbol{L})\, \det \boldsymbol{F} = \overline{\det \boldsymbol{F}}\,. \tag{5.1.6}$$

Partea simetrică $\tilde{\boldsymbol{D}}$ a lui $\boldsymbol{L}$ este tensorul care descrie rata de deformație

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T)\,. \tag{5.1.7}$$

La fel ca în [40] și [58], vom presupune că densitatea ρ a matricei poroase B este exprimată în forma

$$\rho = \gamma\nu\,, \tag{5.1.8}$$

unde γ este densitatea materialului din care este constituit matricea poroasă și ν, astfel încât $0 \leq \nu \leq 1$, este fracțiunea de volum a acestui material. La fel ca în [58], atât γ, cât și ν pot fi considerate variabile.

5.1.1 Forme integrale ale ecuațiilor de echilibru

Ecuația de echilibru pentru masa structurii matriciale poroase B fără fluid este dată de

$$\frac{d}{dt}\int_B \gamma\nu\, dv = \int_B c\, dv. \tag{5.1.9}$$

Calculând derivata în (5.1.9), obținem ecuația

$$\dot{\overline{\gamma\nu}} + \gamma\nu\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = c\,, \tag{5.1.10}$$

Tabelul 5.2 – Definiții pentru cantitățile electrice [56]

ϕ	potențialul electric pe unitate de volum
ϵ_0	permitivitate electrică în vid
$\boldsymbol{E}^M = -\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi$	câmp electric Maxwell quasistatic [109, p.589]
$\boldsymbol{P}$	vector de polarizare electrică pe unitate de volum
$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{P}/\rho$	vector de polarizare electrică pe unitate de masă
$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E}^M + \boldsymbol{P}$	vector de deplasare electrică
$\boldsymbol{T}^E$	tensor de tensiune Maxwell

care prin (5.1.6) este echivalentă cu

$$\overline{\gamma\nu \det \boldsymbol{F}} = c \det \boldsymbol{F}. \tag{5.1.11}$$

Se adaugă masă corpului, deci teorema de transport clasică trebuie scrisă în forma modificată [40]

$$\frac{d}{dt}\int_B \gamma\nu\, f\, dv = \int_B (\gamma\nu \dot{f} + cf)\, dv\,, \tag{5.1.12}$$

unde f este o funcție arbitrară. Aceasta se reduce la teorema de transport uzuală a lui Reynolds când c este zero. Putem demonstra (5.1.12) utilizând (5.1.10).

Vom introduce legea lui Gauss (ecuația sarcinii electrice)

$$\int_B \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D} dv = 0 \tag{5.1.13}$$

și legea lui Faraday în formă quasistatică

$$\int_C \boldsymbol{E}^M \cdot d\boldsymbol{l} = 0. \tag{5.1.14}$$

Prin extinderea definițiilor din [40], [56] și [109], vom considera că structura matricială poroasă satisface următoarea ecuație de echilibru a momentului

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_B \gamma\nu\boldsymbol{v}\, dv = \int_{\partial B} \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}\, ds + \int_B \gamma\nu\boldsymbol{b}\, dv + \\ + \int_B (\underline{\boldsymbol{p}} + c\boldsymbol{v})\, dv + \int_B \boldsymbol{P}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^M\, dv.\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Prin extinderea definițiilor din [40], [56] și [109], vom presupune că structura matricială poroasă satisface următoarea ecuație a energiei

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_B \rho(e + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\, dv = \int_B \rho(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + r)\, dv + \\ + \int_{\partial B}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})\, ds + \int_B (\underline{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}c\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + ce + \overline{h})\, dv + \\ + \int_B \boldsymbol{E}^M\cdot\rho\dot{\boldsymbol{\pi}}\, dv + \int_B \left(\boldsymbol{P}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^M\right)\cdot\boldsymbol{v}\, dv.\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Extinzând definiția din [60], vom presupune că egalitatea entropiei are forma

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho\eta\, dv = \int_B \rho(s+\xi)\, dv - \int_{\partial B} k\, ds + \int_B \left(\frac{\overline{\overline{h}}}{\theta} + c\eta\right) dv. \tag{5.1.17}$$

Nu în ultimul rând,

$$k = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{5.1.18}$$

Tabelul 5.3 – Definiții pentru cantitățile termice [56]

α	deplasare termică [60]
$\boldsymbol{\beta} = \nabla_{\boldsymbol{X}} \alpha$	gradientul material al deplasării termice [60]
$T = \dot{\alpha}$	temperatura empirică ('rata deplasării termice' [60])
$\boldsymbol{\gamma} = \nabla_{\boldsymbol{x}} T$	gradientul spațial al temperaturii empirice
θ	temperatura absolută
$\boldsymbol{g} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \theta$	gradientul spațial al temperaturii absolute
$\boldsymbol{b}$	forța masică externă pe unitate de masă
r	rata externă a sursei de căldură pe unitatea de masă
$s = r/\theta$	rata externă a sursei de entropie pe unitate de masă
ξ	rata internă a sursei de entropie pe unitate de masă
$\boldsymbol{q}$	vectorul flux de căldură pe unitate de arie
$\boldsymbol{p}$	vectorul flux de entropie pe unitate de arie
$\boldsymbol{i}$	vectorul flux de entropie suplimentară pe unitate de arie
η	densitatea entropiei pe unitatea de masă
e	densitatea energiei interne pe unitate de masă
$\bar{h}$	transfer de energie între matrice și fluid
$\bar{\bar{h}}$	parte din $\bar{h}$ care contribuie la producerea de entropie
$h = \bar{h} - \bar{\bar{h}}$	parte din $\bar{h}$ care nu contribuie la producerea de entropie

5.1.2 Legi de echilibru locale

Considerând că avem condiții suficiente de regularitate și utilizând (5.1.12), teorema divergenței și teorema de localizare, formele integrale ale legilor de echilibru pentru masă, moment liniar, moment al impulsului, entropie și energie, adică ecuațiile (5.1.9), (5.1.15), (5.1.17), (5.1.16), (5.1.13) și (5.1.14) conduc la sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = c, \\ \rho \dot{\boldsymbol{v}} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{b} + \underline{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{P} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{E}^M, \\ \operatorname{skw} \boldsymbol{\tau} + \operatorname{skw} \boldsymbol{T}^E = \boldsymbol{0}, \\ \rho \dot{\eta} = \rho(s + \xi) - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{p} + \bar{\bar{h}}/\theta, \\ \rho \dot{e} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{L} - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q} + \rho r + \bar{h} + \boldsymbol{E}^M \cdot \rho \dot{\boldsymbol{\pi}}, \\ \nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{E}^M = 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D} = 0, \end{cases} \tag{5.1.19}$$

unde *densitatea energiei interne* e este dată de

$$e = \psi + \theta \eta + \boldsymbol{E}^M \cdot \boldsymbol{\pi}. \tag{5.1.20}$$

Potrivit sursei [56], tensorul de tensiune Maxwell $\boldsymbol{T}^E$ este

$$\boldsymbol{T}^E = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E}^M - \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\boldsymbol{E}^M \cdot \boldsymbol{E}^M \right) \boldsymbol{I} \tag{5.1.21}$$

și tensorul de tensiune totală $\boldsymbol{\sigma}$ este

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{T}^E. \tag{5.1.22}$$

Vom obține *ecuația redusă a energiei* prin eliminarea lui r din ecuațiile $(5.1.19)_4$, $(5.1.19)_5$ și utilizând (5.1.20)

$$\rho(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta) + \rho\theta\xi - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{L} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q} - \theta \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{p} - h + \dot{\boldsymbol{E}}^M \cdot \boldsymbol{P} = 0, \tag{5.1.23}$$

unde transferul de energie între matrice și fluid este caracterizat de termenul de producere a entropiei

$$h = \overline{h} - \overline{\overline{h}}. \tag{5.1.24}$$

Pentru a pune în evidență faptul că nu tot transferul de energie $\bar{h}$ contribuie la producerea de entropie, vom presupune că $\bar{h} \geq \bar{\bar{h}}$, adică

$$h \geq 0. \tag{5.1.25}$$

La fel ca în [56], definim deplasarea termică

$$\alpha = \alpha(\boldsymbol{X}, t) = \int_0^t T(\boldsymbol{X}, \tau)\mathrm{d}\tau + \alpha_0(\boldsymbol{X}), \quad t > 0. \tag{5.1.26}$$

În teoria Green-Naghdi de tip II avem

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{X}, t) = -\lambda \nabla \alpha(\boldsymbol{X}, t), \quad \lambda > 0, \tag{5.1.27}$$

iar în teoria Green-Naghdi de tip III avem

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{X}, t) = -\lambda \nabla \alpha(\boldsymbol{X}, t) - k \nabla \dot{\alpha}(\boldsymbol{X}, t). \tag{5.1.28}$$

5.2 Ipoteze constitutive și restricții

Densitatea *energiei libere Gibbs* specifice pe unitatea de masă este dată de

$$\psi = e - \theta\eta - \boldsymbol{E}^M \cdot \boldsymbol{\pi}. \tag{5.2.1}$$

Vom formula ipoteze constitutive similare cu cele pentru solide elastice, dar vom adăuga totodată o variabilă independentă care reprezintă o măsură a fracțiunii de volum a structurii matriciale. Conform [40], vom considera că

$$\nu_0 \equiv \nu J \tag{5.2.2}$$

reprezintă fracțiunea de volum a materialului din matrice în configurația de referință fără deformare și în ipoteza că γ este constantă. Într-adevăr, definiția (5.2.2) este valabilă doar pentru o densitate γ constantă a structurii matriciale. Dacă înlocuim definiția (5.2.2) în ecuația de echilibru a masei (5.1.11), atunci obținem o relație între ν_0 și c conform [40]

$$\dot{\nu}_0 = \frac{c}{\gamma} J\,. \tag{5.2.3}$$

Dorim să punem în evidență că ν_0 este o nouă notație pentru ξ din [40], care este motivată de egalitatea standard $\rho_0 = \rho J$, unde $J = \det \boldsymbol{F}$.

Vom avea nevoie de ecuații constitutive pentru energia liberă specifică ψ, entropie η, temperatură θ, vectorul flux de entropie pe unitatea de arie $\boldsymbol{p}$, vectorul flux de căldură pe unitatea de arie $\boldsymbol{q}$, tensorul tensiune pe unitatea de arie $\boldsymbol{\tau}$, rata internă a sursei de entropie pe unitate de masă ξ, termenul de producere a entropiei h, rata c la care masa pe unitate de volum este adăugată sau îndepărtată și vectorul polarizare electrică pe unitate de volum $\boldsymbol{P}$. Vom presupune că fiecare dintre următoarele cantități

$$\psi,\ \eta,\ \theta,\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{\tau},\ \xi,\ h,\ c,\ \boldsymbol{P} \tag{5.2.4}$$

este o funcție obiectivă de variabilele $(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0)$

$$\begin{cases} \psi = \hat{\psi}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ \eta = \hat{\eta}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ \theta = \hat{\theta}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ \xi = \hat{\xi}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ \boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{q}}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ \boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ h = \hat{h}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ c = \hat{c}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0), \\ \boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{P}}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0) \end{cases} \tag{5.2.5}$$

și vom considera următoarea formă generală a relației constitutive pentru fluxul de entropie

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{i}, \tag{5.2.6}$$

unde $\boldsymbol{i}$ este de obicei numit *flux de entropie suplimentar*

$$\boldsymbol{i} = \hat{\boldsymbol{i}}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0). \tag{5.2.7}$$

Din relația (5.2.6) vom obține, la fel ca în [56]

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q} - \theta \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{p} - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\theta \boldsymbol{i}) \tag{5.2.8}$$

și egalitatea redusă a energiei (5.1.23) conduce la

$$\rho(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta) + \rho\theta\xi - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{p} - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\theta \boldsymbol{i}) - h + \dot{\boldsymbol{E}}^M \cdot \boldsymbol{P} = 0. \tag{5.2.9}$$

Vom presupune că pentru temperatură constantă și forțe masice nule există o configurație de referință unică cu deformație zero oricare ar fi ν_0 și vom scrie această ipoteză constitutivă astfel

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(T_0,\, \boldsymbol{\beta}_0,\, \boldsymbol{0},\, \boldsymbol{I},\, \boldsymbol{0},\, \nu_0) = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.2.10}$$

În continuare vom prezenta niște restricții constitutive. Vom analiza restricțiile impuse asupra funcțiilor răspuns în cazul $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$, vom stabili condiții pentru a satisface principiul obiectivității materiale si vom utiliza principiul disipării pentru a obține restricții asupra ratei interne de producere a entropiei.

Dacă presupunem că $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$, atunci egalitatea redusă a energiei (5.2.9) conduce la

$$\rho(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta) + \rho\theta\xi - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{p} - h + \dot{\boldsymbol{E}}^M \cdot \boldsymbol{P} = 0. \tag{5.2.11}$$

La nivel formal, noutatea acestei abordări față de rezultatele din [56] constă în introducerea variabilei independente ν_0 pentru a măsura fracțiunea de volum a structurii matriciale.

În continuare, vom avea nevoie de următoarea ipoteză din [60, (7.2)]

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial T} > 0. \tag{5.2.12}$$

Observația 5.2.1 *Funcția $\hat{\theta}$ este inversabilă din ipoteza (5.2.12), prin urmare putem înlocui dependența de T prin θ în orice funcție răspuns [56].*

Propoziția 5.2.1 *Să presupunem că ecuațiile constitutive (5.2.5) satisfac*

$$\boldsymbol{q} = \theta \boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}) \tag{5.2.13}$$

și (5.2.12). Prin urmare, dacă ecuația redusă a energiei (5.2.9) are loc pentru orice proces p suficient de neted, atunci avem următoarele restricții asupra funcțiilor răspuns

$$\psi = \hat{\psi}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0)\,, \qquad \theta = \hat{\theta}(T), \tag{5.2.14}$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \rho \boldsymbol{F} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}}, \qquad \hat{\boldsymbol{P}} = -\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}^M}\,, \qquad \hat{\eta} = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}, \tag{5.2.15}$$

$$\rho\, \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{\gamma} + \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu_0} \dot{\nu_0} + \rho\, \hat{\theta}\, \hat{\xi} + \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{g}} - \hat{h} = 0, \tag{5.2.16}$$

unde

$$\begin{aligned} \dot{\nu_0} &= \gamma^{-1} \hat{c}(T,\, \boldsymbol{\beta},\, \boldsymbol{\gamma},\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{E}^M,\, \nu_0) J, \\ \hat{g} &= \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial T} \left(\boldsymbol{F}^T\right)^{-1} \dot{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

În continuare vom studia principiul obiectivității. În acest sens, vom considera următoarele cantități

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{F}^T \nabla_{\boldsymbol{x}} T, \tag{5.2.18}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right), \quad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{E}^M, \tag{5.2.19}$$

unde $\boldsymbol{E}$ este tensorul de deformație Green-Lagrange. Dacă ψ este o funcțională arbitrară care depinde de cantitățile de referință $T, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}, \nu_0$, atunci este invariantă în raport cu o rotație rigidă. Invarianța funcționalelor constitutive în raport cu rotațiile rigide ale corpului deformat și polarizat asigură satisfacerea principiului obiectivității. Prin urmare, fiecărei funcții răspuns obiective $\hat{\Omega}$ din (5.2.5) îi asociem o funcție răspuns invariantă $\tilde{\Omega} \in \left\{\tilde{\psi}, \tilde{\eta}, \tilde{\theta}, \tilde{\xi}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{h}, \tilde{c}, \tilde{\boldsymbol{P}}\right\}$ prin intermediul egalității

$$\tilde{\Omega}(T, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}, \nu_0) := \hat{\Omega}(T, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}^M, \nu_0), \tag{5.2.20}$$

unde legătura dintre $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}^M)$ și $(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W})$ este dată de ecuațiile (5.2.18) și (5.2.19) și $\dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}$ sunt independente. În continuare, vom utiliza ipoteza

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial T} > 0. \tag{5.2.21}$$

Propoziția 5.2.2 *Să presupunem că funcționalele constitutive nu depind de reper și sunt invariante în raport cu rotațiile rigide ale corpului deformat și polarizat, adică sunt de forma*

$$\Omega = \tilde{\Omega}(T, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}, \nu_0). \tag{5.2.22}$$

Să considerăm că au loc relațiile

$$\boldsymbol{q} = \theta \boldsymbol{p} \tag{5.2.23}$$

și (5.2.21) și să definim funcția răspuns energie internă $\tilde{e}$ ca în ecuația (5.1.20). Dacă ecuația redusă a energiei (5.2.11) are loc pentru orice proces care este suficient de neted, atunci funcțiile răspuns satisfac următoarele condiții

$$\psi = \tilde{\psi}(T, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}, \nu_0), \quad \theta = \tilde{\theta}(T), \tag{5.2.24}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{F}^T + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{W}} \otimes \boldsymbol{E}^M + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} \nu \det(\boldsymbol{F}) \left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^T\right] - \boldsymbol{F}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{0}, \tag{5.2.25}$$

$$\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{W}} \boldsymbol{F}^T + \tilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}, \tag{5.2.26}$$

$$\tilde{\eta} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}, \tag{5.2.27}$$

$$\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} \dot{\nu}_0 + \rho \tilde{\theta} \tilde{\xi} - \tilde{h} + \tilde{\boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial T} \left(\boldsymbol{F}^T \right)^{-1} \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0. \tag{5.2.28}$$

În continuare vom stabili restricții asupra ratei interne a entropiei ξ prin intermediul principiului disipării, care rezultă din al doilea principiu al termodinamicii. Din (5.2.28) se obține

$$\rho \tilde{\xi} = -\frac{1}{\tilde{\theta}} \left[\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} \dot{\nu}_0 - \tilde{h} + \tilde{\boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial T} \left(\boldsymbol{F}^T \right)^{-1} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right]. \tag{5.2.29}$$

Inegalitatea disipării $\tilde{\xi} \geq 0$ și ipoteza (5.1.25) conduc la

$$\left(\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial T} \boldsymbol{F}^{-1} \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} \dot{\nu}_0 - \tilde{h} \leq 0. \tag{5.2.30}$$

La fel ca în cazul legii Fourier, considerăm că

$$\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial T} \boldsymbol{F}^{-1} \tilde{\boldsymbol{p}} = -k \dot{\boldsymbol{\beta}}, \qquad k = \tilde{k}(T) \geq 0, \tag{5.2.31}$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} = -k_1 \dot{\nu}_0, \qquad k_1 = \tilde{k}_1(T) \geq 0, \tag{5.2.32}$$

astfel încât inegalitatea de mai sus să fie îndeplinită. Putem defini $\bar{T} = \tilde{\theta}^{-1}$ deoarece funcția $\tilde{\theta}$ este inversabilă. Prin urmare, obținem

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = -\bar{T}' \boldsymbol{F} \left(\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \tilde{k} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right), \tag{5.2.33}$$

unde $\bar{T}' = \frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\mathrm{d}\theta}$. Astfel, rezultă că

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{\tilde{\theta}} \left(\frac{\tilde{k}}{\rho} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{k}_1 \dot{\nu}_0^2 + \frac{\tilde{h}}{\rho} \right). \tag{5.2.34}$$

În plus, obținem

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = -\theta \bar{T}'(\theta) \boldsymbol{F} \left(\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \tilde{k} \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{\gamma} \right). \tag{5.2.35}$$

În comparație cu modelul definit în [56], în acest model al termo-electro-elasticității pentru remodelare osoasă am introdus un termen care descrie producerea de entropie și derivata în raport cu timpul a fracțiunii de volum a structurii matriciale în expresia ratei interne a entropiei pe unitatea de masă.

În continuare, vom utiliza definiția pentru tensiunea elastică din [56]

$$\boldsymbol{T} := \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{E}^M, \tag{5.2.36}$$

unde $\boldsymbol{E}^M = \left(\boldsymbol{F}^T \right)^{-1} \boldsymbol{W}$. Prin urmare, obținem

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \rho \boldsymbol{F} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{F}^T + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{W}} \otimes \boldsymbol{E}^M + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} \nu \det(\boldsymbol{F}) \left(\boldsymbol{F}^{-1} \right)^T \right], \tag{5.2.37}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = -\rho \boldsymbol{F} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{W}}. \tag{5.2.38}$$

Rezultă că

$$\boldsymbol{T} = \rho \boldsymbol{F} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{F}^T + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu_0} \nu \det(\boldsymbol{F}) \left(\boldsymbol{F}^{-1} \right)^T \right]. \tag{5.2.39}$$

La fel ca în [56], avem

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T} + \epsilon_0 \boldsymbol{E}^M \otimes \boldsymbol{E}^M - \frac{\epsilon_0}{2} \left(\boldsymbol{E}^M \cdot \boldsymbol{E}^M \right) \boldsymbol{I}. \tag{5.2.40}$$

5.3 Dependență continuă

În continuare vom utiliza strategia din [66] pentru a arăta dependența continuă de date în cazul neliniar. Fie

$$\mathcal{P} = \left(\rho, \boldsymbol{u}, T, \phi, \psi, \eta, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{q}, c, \underline{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{b}, r, \bar{h}, \bar{\bar{h}}\right) \tag{5.3.1}$$

și

$$\bar{\mathcal{P}} = \left(\bar{\rho}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{T}, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{c}, \underline{\bar{\boldsymbol{p}}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{r}, \underline{\bar{h}}, \underline{\bar{\bar{h}}}\right) \tag{5.3.2}$$

două procese definite pe $\bar{B} \times [0, t_1]$ care satisfac legile de echilibru pentru masă, moment liniar, momentul momentului, entropie și energie. În plus, definim funcția $\mathcal{D}$ pe $[0, t_1]$ prin

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \int_B \Big\{ &\frac{1}{2}\rho_0(\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{v}})^2 + \rho_0(\psi - \bar{\psi}) + \rho_0\eta(\theta - \bar{\theta}) - \\ &- \bar{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}) + \bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E}^M - \bar{\boldsymbol{E}}^M) \Big\} \, \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

În plus, presupunem că funcțiile pe care le utilizăm sunt suficient de netede.

Introducem următoarea definiție

$$\begin{aligned} \Gamma(\boldsymbol{X}, t) = &|\theta(\boldsymbol{X}, t) - \bar{\theta}(\boldsymbol{X}, t)| + |\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{X}, t) - \bar{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{X}, t)| + |\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{X}, t) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{X}, t)| + \\ &+ |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) - \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X}, t)| + |\boldsymbol{E}^M(\boldsymbol{X}, t) - \bar{\boldsymbol{E}}^M(\boldsymbol{X}, t)| + |\nu_0(\boldsymbol{X}, t) - \bar{\nu}_0(\boldsymbol{X}, t)| \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

oricare ar fi $(\boldsymbol{X}, t) \in B \times [0, t_1]$.

Teorema 5.3.1 *Să presupunem că există o constantă $\delta > 0$ astfel încât*

$$\begin{aligned} &\Gamma(\boldsymbol{X}, t) < \delta, \quad (\boldsymbol{X}, t) \in B \times [0, t_1], \\ &(\boldsymbol{\tau}_{ki} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ki})(\boldsymbol{v}_i - \bar{\boldsymbol{v}}_i)n_k + \frac{1}{\theta}(\bar{\boldsymbol{q}}_k - \boldsymbol{q}_k)(\theta - \bar{\theta})n_k = 0 \text{ pe } \partial B \times (0, t_1) \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Atunci există constantele $M > 0$, $N > 0$ și $\alpha_2 > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} &|| \left(\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{E}^M - \bar{\boldsymbol{E}}^M, \theta - \bar{\theta}, \nu_0 - \bar{\nu}_0, \boldsymbol{\beta} - \bar{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\gamma} - \bar{\boldsymbol{\gamma}}\right)(\cdot, t)||_{L^2(B)} \leq \\ &\leq \Big[M|| \left(\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{E}^M - \bar{\boldsymbol{E}}^M, \theta - \bar{\theta}, \nu_0 - \bar{\nu}_0, \boldsymbol{\beta} - \bar{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\gamma} - \bar{\boldsymbol{\gamma}}\right)(\cdot, 0)||_{L^2(B)} + \\ &+ N \int_0^t ||(\boldsymbol{b} - \bar{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{p}} - \underline{\bar{\boldsymbol{p}}}, r - \bar{r})(\cdot, s)||_{L^2(B)} \mathrm{d}s \Big] e^{\alpha_2 t} \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

oricare ar fi $t \in [0, t_1]$.

Capitolul 6

Concluzii finale. Contribuții originale. Diseminarea rezultatelor. Direcții viitoare de cercetare

6.1 Concluzii finale și contribuții originale

În această teză de doctorat am analizat modele matematice care descriu procese fizice complexe. Acestea sunt caracterizate de sisteme de ecuații cu derivate parțiale cu condiții inițiale și la limită. Am demonstrat rezultate de unicitate, dependență continuă, am studiat comportarea spațială a soluției și propagarea de unde și am realizat simulări numerice. Expunem în continuare principalele contribuții originale.

Am prezentat o abordare nouă de demonstrare a uncității soluției pentru medii micropolare. Am extins modelul matematic al mediilor micropolare prin considerarea unei deformații de ordin fracționar.

Am studiat soluțiile problemei Saint-Venant pentru medii elastice dipolare poroase. Am studiat problema plană în cazul mediilor dipolare cu dublă porozitate și am realizat simulări numerice cu ajutorul software-ului FreeFem++.

Am propus o extindere a rezultatelor lui Dafermos pentru medii termoelastice dipolare cu microtemperaturi și am studiat soluția cu energie finită. Am realizat simulări numerice în FreeFem++ pentru un model matematic care caracterizează astfel de medii.

Am propus un model matematic pentru a caracteriza procesele termice și de difuzie la nivel macro și micro în medii continue microstretch. Am demonstrat unicitatea soluției și am studiat comportarea spațială a soluției în cazul anizotrop și non-centro-simetric. Am arătat dependența continuă a soluției de datele inițiale și de încărcări în cazul în care materialul are un centru de simetrie și este fie anizotrop, fie izotrop. În plus, am analizat propagarea undelor în cazul izotrop și am utilizat software-ul Mathematica pentru calcule și realizarea unor simulări numerice.

În final, am studiat procesul de remodelare osoasă în contextul mediilor termo-electro-elastice poroase. Am propus forme integrale și locale pentru ecuațiile de mișcare, am analizat anumite ipoteze constitutive și restricții și am studiat corpurile cu izotropie transversală.

6.2 Diseminarea rezultatelor cercetării

Cercetarea inclusă în teza de doctorat s-a concretizat în 12 articole, din care 6 publicate în reviste de specialitate (din care 5 cotate ISI şi unul indexat BDI), unul publicat sub formă de capitol de carte (indexat BDI), unul acceptat sub formă de capitol de carte și 4 articole încă nepublicate. Rezultatele

cercetării au fost prezentate la 11 conferințe internaționale și alte manifestări științifice din Cehia (Olomouc), Italia (Padova), Polonia (Varșovia), România (Brașov, Craiova, Poiana Brașov).

6.2.1 Articole incluse în teza de doctorat

1. **Adina Chirilă**, Ravi P. Agarwal, Marin Marin, *Proving uniqueness for the solution of the problem of homogeneous and anisotropic micropolar thermoelasticity*, **Boundary Value Problems**, **2017** (2017), no. 3, 1-14, https ://link.springer.com/article/10.1186/s13661-016-0734-0 (Springer International Publishing Switzerland) (cotat **ISI**)
   – în anul 2019, factor de impact : 1.637, scor relativ de influență : 0.537, zona 1 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics*, zona 1 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics, Applied*
   – WOS : 000396134700001, Zbl 1357.35005, MR3591513, Scopus
2. **Adina Chirilă**, *Generalized micropolar thermoelasticity with fractional order strain*, **Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III : Mathematics, Informatics, Physics**, **10(59)** (2017), no. 1, 83-90 (indexat **BDI**)
   – Zbl 1399.74010, MR3680884
3. Marin Marin, Rahmat Ellahi, **Adina Chirilă**, *On solutions of Saint-Venant's problem for elastic dipolar bodies with voids*, **Carpathian Journal of Mathematics**, **33** (2017), no. 2, 199-212 (cotat **ISI**)
   – în anul 2018, factor de impact : 0.878, scor relativ de influență : 0.250, zona 2 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics*, zona 3 (după IF și AIS) în subdomeniul *Mathematics, Applied*
   – WOS : 000411780600009, Zbl 1399.74007, MR3701222, Scopus
4. **Adina Chirilă**, Marin Marin, *The theory of generalized thermoelasticity with fractional order strain for dipolar materials with double porosity*, **Journal of Materials Science**, **53** (2018), no. 5, 3470-3482 (Springer US) (cotat **ISI**)
   – în anul 2019, factor de impact : 3.442, scor relativ de influență : 1.292, zona 2 (după AIS și IF) în subdomeniul *Materials Science, Multidisciplinary*
   – WOS : 000417731300029, Scopus
5. **Adina Chirilă**, Marin Marin, *Diffusion in microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations*, in Cristina Flaut, Šárka Hošková-Mayerová, Daniel Flaut (eds.) **Models and Theories in Social Systems. Studies in Systems, Decision and Control**, **179** (2019), 149-164 (Springer Cham) (indexat **BDI**)
   – Scopus
6. **Adina Chirilă**, Marin Marin, Adriano Montanaro, *On adaptive thermo-electro-elasticity within a Green-Naghdi type II or III theory*, **Continuum Mechanics and Thermodynamics 31** (2019), no. 5, 1453-1475 (Springer Berlin Heidelberg) (cotat **ISI**)
   – în anul 2017, factor de impact : 2.529, scor relativ de influență : 2.863, zona 1 (după AIS și IF) în subdomeniul *Mechanics*, zona 1 (după AIS și IF) în subdomeniul *Thermodynamics*
   – WOS : 000477680700009, Scopus
7. Marin Marin, **Adina Chirilă**, M. I. A. Othman, *An extension of Dafermos's results for bodies with a dipolar structure*, **Applied Mathematics and Computation**, **361** (2019), 680-688 (Elsevier) (cotat **ISI**)
   – în anul 2019, factor de impact : 3.092, scor relativ de influență : 0.978, zona 1 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics, Applied*
   – WOS : 000474545500055, Scopus
8. **Adina Chirilă**, Marin Marin, *Numerical algorithms in mechanics of generalized continua*, in Cristina Flaut (ed.) **Algorithms as an approach of applied mathematics** (2020), acceptat spre publicare
9. Marin Marin, **Adina Chirilă**, Lavinia Codarcea-Munteanu, *On a thermoelastic material having a dipolar structure and microtemperatures*, 2019, în recenzie
10. **Adina Chirilă**, Marin Marin, *Spatial behaviour of microstretch elastic materials with thermal and mass diffusion*, 2019, în recenzie
11. **Adina Chirilă**, Marin Marin, *Model equations of diffusive microstretch thermoelasticity with mi-*

crotemperatures and microconcentrations, 2019, încă nepublicat

12. **Adina Chirilă**, Marin Marin, *Wave propagation in diffusive microstretch thermoelasticity*, 2019, încă nepublicat

6.2.2 Prezentarea rezultatelor cercetării

- Workshop de Matematică și Informatică, a treia ediție, Brașov, 2017/02/28
  - organizator : Universitatea Transilvania din Brașov
  - prezentare : *Proving uniqueness for the solution of the problem of homogeneous and anisotropic micropolar thermoelasticity* (articolul 1)
- BraMat 10^{th} International Conference on Materials Science and Engineering, Brașov, 2017/03/8-11
  - organizator : Universitatea Transilvania din Brașov
  - prezentare : *The theory of generalized thermoelasticity with fractional order strain for dipolar materials with double porosity* (articolul 4)
  - secțiune : Ceramics, polymers and composite materials
- 3^{rd} International Conference for Doctoral Students IPC 2017, Brașov, 2017/06/22-23
  - organizatori : Universitatea Transilvania din Brașov și Universitatea Lucian Blaga din Sibiu
  - prezentare : *Generalized micropolar thermoelasticity with fractional order strain* (articolul 2)
  - secțiune : Mathematics-Informatics
- Workshop de Matematică şi Informatică, a patra ediție, Brașov, 2018/02/28
  - organizator : Universitatea Transilvania din Brașov
  - prezentare : *Diffusion in microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations* (articolul 5)
- Seminar ştiințific de Fizică Matematică la Departamentul de Matematică Tullio Levi-Civita, Universitatea din Padova, Italia, 2018/05/08
  - organizator : Universitatea din Padova
  - prezentare : *Model equations of diffusive microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations* (articolele 5 și 11)
- International Conference on Mathematics and Computer Science 3^{rd} edition MACOS 2018, Brașov, 2018/06/14-16
  - organizator : Universitatea Transilvania din Brașov
  - prezentare : *Diffusion in microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations* (articolul 5)
  - secțiune : Differential equations and applied mathematics
- 41^{st} Solid Mechanics Conference SolMech 2018, Varșovia, Polonia, 2018/08/27-31
  - organizator : Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences
  - prezentare : *Model equations of diffusive microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations* (articolul 11)
  - secțiune : Elasticity, plasticity and phase transition
- International Conference on Applied Mathematics and Numerical Methods 2^{nd} edition ICAMNM, Craiova, 2018/10/19-20
  - organizator : Universitatea din Craiova
  - prezentare : *On adaptive thermo-electro-elasticity within a Green-Naghdi theory* (articolul 6)
  - secțiune : Applications using methods from geometry, mechanics, convex and numerical analysis
- Workshop de Matematică şi Informatică, a cincea ediție, Brașov, 2019/02/28
  - organizator : Universitatea Transilvania din Brașov
  - prezentare : *Spatial behaviour in microstretch elastic materials with thermal and mass diffusion* (articolul 10)
- BraMat 11^{th} International Conference on Materials Science and Engineering, Poiana Brașov, 2019/03/13-16
  - organizator : Universitatea Transilvania din Brașov

  - prezentare : *Microstretch elastic materials with thermal and mass diffusion* (articolul 10)
  - secțiune : Biomaterials
- International Conference on Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Modelling 2019, Olomouc, Cehia, 2019/09/16-20
  - organizatori : Institute of Geonics of the Czech Academy of Sciences, Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Technical University of Ostrava
  - prezentare : *Wave propagation in diffusive microstretch thermoelasticity* (articolul 12)
  - secțiune : Modelling of coupled processes in porous media and other multiphysics problems

6.2.3 Alte articole elaborate în timpul studiilor doctorale

- Marin Marin, Sorin Vlase, Lavinia Codarcea-Munteanu, **Adina Chirilă**, *A generalization of the minimum principle energy for Cosserat porous materials*, **Acta Technica Napocensis, Series : Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering**, **60** (2017), no. 4, 479-484 (indexat **ISI**)
  - WOS : 000428901100006
- Marin Marin, Lavinia Codarcea, **Adina Chirilă**, *Qualitative results on mixed problem of micropolar bodies with microtemperatures*, **Applications and Applied Mathematics**, **12** (2017), no. 2, 776-789 (indexat **ISI**)
  - WOS : 000418606200009, Zbl 1386.74005, MR3737186
- **Adina Chirilă**, *A new type of q-Szasz-Mirakjan operators*, **Filomat 31** (2017), no. 18, 5617-5628 (cotat **ISI**)
  - în anul 2017, factor de impact : 0.695, scor relativ de influență : 0.423, zona 2 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics*, zona 3 (după IF și AIS) în subdomeniul *Mathematics, Applied*
  - WOS : 000428734700010, MR3744165
- Lavinia Codarcea-Munteanu, **Adina Chirilă**, Marin Marin, *Modeling fractional order strain in dipolar thermoelasticity*, **9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, IFAC-PapersOnLine**, **51** (2018), no. 2, 601-606 (Elsevier) (indexat **ISI**)
  - WOS : 000435693000103, Scopus
- Marin Marin, **Adina Chirilă**, Lavinia Codarcea, Sorin Vlase, *On vibrations in Green-Naghdi thermoelasticity of dipolar bodies*, **Analele Științifice ale Universității Ovidius Constanța - Seria Matematică**, **27** (2019), no. 1, 125-140 (cotat **ISI**)
  - în anul 2019, factor de impact : 0.638, scor relativ de influență : 0.232, zona 3 (după IF și AIS) în subdomeniul *Mathematics*, zona 3 (după IF și AIS) în subdomeniul *Mathematics, Applied*
  - WOS : 000465369400007, Scopus
- Marin Marin, **Adina Chirilă**, Andreas Öchsner, Sorin Vlase, *About finite energy solutions in thermoelasticity of micropolar bodies with voids*, **Boundary Value Problems**, **2019** (2019), no. 89, 1-14 (Springer International Publishing Switzerland) (cotat **ISI**)
  - în anul 2019, factor de impact : 1.637, scor relativ de influență : 0.537, zona 1 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics*, zona 1 (după IF) și zona 3 (după AIS) în subdomeniul *Mathematics, Applied*
  - WOS : 000468144800001, Scopus

6.2.4 Premierea rezultatelor cercetării

Premierea rezultatelor cercetării - articole de către UEFISCDI pentru articolele publicate
- în Boundary Value Problems în 2017 (PN-III-P1-1.1-PRECISI-2017-17243) (articolul 1)
- în Carpathian Journal of Mathematics în 2017 (PN-III-P1-1.1-PRECISI-2017-19457) (articolul 3)
- în Filomat în 2017 (PN-III-P1-1.1-PRECISI-2018-21660)
- în Journal of Materials Science în 2018 (PN-III-P1-1.1-PRECISI-2018-24480) (articolul 4)

6.3 Direcții viitoare de cercetare

O posibilă direcție de cercetare este studiul comportării spațiale și temporale a soluției pentru medii termoelastice cu difuzie, microtemperaturi și microconcentrații, fără a considera efectele de microrotație, dilatare și contractare pentru microelemente.

Un alt subiect de cercetare este realizarea unor simulări numerice pentru problema plană asociată elasticității microstretch în care se consideră efecte termice și de difuzie la nivel de macroelement și de microelement. În plus, se pot propune diferite configurații geometrice, condiții pe frontieră Dirichlet și Neumann și diferite condiții inițiale.

O altă posibilă direcție de cercetare este studiul propagării undelor într-un cilindru în contextul vâscoelasticității cu efecte termice și electrice pentru modelarea comportării mecanice a unui material cu memorie, de exemplu, osul.

Bibliografie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Altenbach, A. Belyaev, V. A. Eremeyev, A. Krivtsov, A. V. Porubov (eds.), *Dynamical processes in generalized continua and structures*, Springer International Publishing, 2019.

[3] H. Altenbach, V. A. Eremeyev, *Generalized continua from the theory to engineering applications*, Springer, 2013.

[4] H. Altenbach, S. Forest, A. Krivtsov (eds.) *Generalized continua as models for materials - with multi-scale effects or under multi-field actions*, Advanced structured materials, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[5] H. Altenbach, G. A. Maugin, V. Erofeev (eds.) *Mechanics of generalized continua*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[6] M. Aouadi, *Some theorems in the isotropic theory of microstretch thermoelasticity with microtemperatures*, J. Therm. Stresses **31** (2008), no. 7, 649-662.

[7] M. Aouadi, M. Ciarletta, V. Tibullo, *A thermoelastic diffusion theory with microtemperatures and microconcentrations*, J. Therm. Stresses **40** (2017), no. 4, 486-501.

[8] D.G. Arseniev, A. Belyaev, A.M. Polyanskiy, V.A. Polyanskiy, Y.A. Yakovlev. *Benchmark study of measurements of hydrogen diffusion in metals*, in H. Altenbach, A. Belyaev, V.A. Eremeyev, A. Krivtsov, A.V. Porubov (eds.) Dynamical processes in generalized continua and structures. Advanced structured materials **103** (2019), 37-61.

[9] A. Arusoaie, *Spatial and temporal behavior in the theory of thermoelasticity for solids with double porosity*, J. Therm. Stresses **41** (2018), no. 4, 500-521.

[10] N. Bazarra, M. Campo, J. R. Fernandez, *A thermoelastic problem with diffusion, microtemperatures, and microconcentrations*, Acta Mech. **230** (2019), no. 1, 31-48.

[11] A. Belyaev, A.M. Polyanskiy, V.A. Polyanskiy, Y.A. Yakovlev. An approach to modeling structural materials with low hydrogen concentration. in H. Altenbach, A. Belyaev, V.A. Eremeyev, A. Krivtsov, A.V. Porubov (eds.) Dynamical processes in generalized continua and structures. Advanced structured materials, 103 :63-87, 2019

[12] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, New York, 2004.

[13] D. Braess, *Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer, 2007

[14] A. Bucur, *On spatial behavior of the solution of a non-standard problem in linear thermoviscoelasticity with voids*, Arch. Mech. **67** (2015), no. 4, 311-330.

[15] A. V. Bucur, *Probleme matematice în mecanica mediilor continue*, Teză de doctorat, Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași, 2016.

[16] A. Bucur, *Rayleigh surface waves problem in linear thermoviscoelasticity with voids*, Acta Mech. **227** (2016), 1199-1212.

[17] A. Bucur, *Spatial behavior in dynamical thermoviscoelasticity backward in time for porous media*, J. Therm. Stresses **39** (2016), no. 12, 1523-1538.

[18] A. Bucur, F. Passarella, V. Tibullo, *Rayleigh surface waves in the theory of thermoelastic materials with voids*, Meccanica **49** (2014), 2069-2078.

[19] E. Bulgariu, *On the uniqueness and continuous dependence in the linear theory of thermo-microstretch elasticity backward in time*, An. Ştiinţ. U. Al. I. - Mat **LIX** (2013), no. 2, 339-355.

[20] **A.Chirilă**, *Generalized micropolar thermoelasticity with fractional order strain*, **Bull. Transilvania Univ. Braşov Ser. III : Math. Inf. Phys. 10**(59) (2017), no. 1, 83-90.

[21] **A. Chirilă**, R. P. Agarwal, M. Marin, *Proving uniqueness for the solution of the problem of homogeneous and anisotropic micropolar thermoelasticity*, **Bound. Value Probl. 2017** (2017), no. 3, 1-14.

[22] **A. Chirilă**, M. Marin, *Diffusion in microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations*, in C. Flaut, Š. Hošková-Mayerová, D. Flaut (eds.) **Models and Theories in Social Systems. Studies in Systems, Decision and Control 179** (2019), 149-164.

[23] **A. Chirilă**, M. Marin, *Model equations of diffusive microstretch thermoelasticity with microtemperatures and microconcentrations* (2019), încă nepublicat.

[24] **A. Chirilă**, M. Marin, *Numerical algorithms in mechanics of generalized continua*, in C. Flaut (ed.) **Algorithms as an approach of applied mathematics** (2020), acceptat spre publicare.

[25] **A. Chirilă**, M. Marin, *Spatial behaviour of microstretch elastic materials with thermal and mass diffusion* (2019), în recenzie.

[26] **A. Chirilă**, M. Marin, *The theory of generalized thermoelasticity with fractional order strain for dipolar materials with double porosity*, **J. Mater. Sci. 53** (2018), no. 5, 3470-3482.

[27] **A. Chirilă**, M. Marin, *Wave propagation in diffusive microstretch thermoelasticity* (2019), încă nepublicat.

[28] **A. Chirilă**, M. Marin, A. Montanaro, *On adaptive thermo-electro-elasticity within a Green-Naghdi type II or III theory*, Continuum Mech. Therm. **31** (2019), no. 5, 1453-1475.

[29] S. Chiriță, *On the final boundary value problems in linear thermoelasticity*, Meccanica **47** (2012), 2005-2011.

[30] S. Chiriță, M. Ciarletta, C. D'Apice, *On a theory of thermoelasticity with microtemperatures*, J. Math. Anal. Appl. **397** (2013) 349-361.

[31] S. Chiriță, A. Danescu, *On the propagation waves in the theory of thermoelasticity with microtemperatures*, Mechanics Research Communications **75** (2016), 1-12.

[32] S. Chiriță, A. Danescu, *Surface waves problem in a thermoviscoelastic porous half-space*, Wave Motion **54** (2015), 100-114.

[33] S. Chiriță, I. D. Ghiba, *Rayleigh waves in Cosserat elastic materials*, Int. J. Eng. Sci. **51** (2012), 117-127.

[34] M. Ciarletta, *On the uniqueness and continuous dependence of solutions in dynamical thermoelasticity backward in time*, J. Therm. Stresses **25** (2002), 969-984.

[35] M. Ciarletta, D. Ieşan, *Non-classical elastic solids*, Pitman research notes in mathematics series, Longman Scientific and Technical, 1993.

[36] M. Ciarletta, A. Scalia, *Some results in linear theory of thermomicrostretch elastic solids*, Meccanica, **39** (2004), 191-206.

[37] L. Codarcea-Munteanu, **A. Chirilă**, M. Marin, *Modeling fractional order strain in dipolar thermoelasticity*, **9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, IFAC-PapersOnLine 51** (2018), no. 2, 601-606.

[38] E. Cosserat, F. Cosserat, *Sur la théorie des corps deformables*, Dunod, Paris, 1909.

[39] S. C. Cowin, *Bone poroelasticity*, J. of Biomechanics, **32** (1999), 217-238.

[40] S. C. Cowin, D. H. Hegedus, *Bone remodeling I : theory of adaptive elasticity*, J. Elasticity **6** (1976), no. 3.

[41] S. C. Cowin, J. W. Nunziato, *Linear elastic materials with voids*, J. Elasticity, **13** (1983), no. 2, 125-147.

[42] C. M. Dafermos, *On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. **29** (1968), 241-271.

[43] W. J. Drugan, R. S. Lakes, *Torsion of a Cosserat elastic bar with square cross section : theory and experiment*, Z. Angew. Math. Phys. **69** (2018), no. 24.

[44] J. Dyszlewicz, *Micropolar theory of elasticity*, Lect. Notes Appl. Comput. Mech. **15** Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.

[45] A. S. El-Karamany, M. A. Ezzat, *On the three-phase-lag linear micropolar thermoelasticity theory*, Eur. J. Mech. A-Solid. **40** (2013), 198-208.

[46] A. C. Eringen, *Linear theory of micropolar elasticity*, J. Math. Mech. **15** (1966), 909-924.

[47] A. C. Eringen, *Microcontinuum field theories, I. Foundations and solids*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[48] A. C. Eringen, *Theory of thermo-microstretch elastic solids* Int. J. Eng. Sci. **28**, (1990), 1291-1301.

[49] L. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2008.

[50] J. R. Fernandez, A. Magana, M. Masid, R. Quintanilla, *Analysis for the strain gradient theory of porous thermoelasticity*, J. Comput. Appl. Math. **345** (2019), 247-268.

[51] J. R. Fernandez, M. Masid, *A porous thermoelastic problem : An a priori error analysis and computational experiments*, Appl. Math. Comput. **305** (2017), 117-135.

[52] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on physics - mainly mechanics, radiation, and heat*, Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

[53] G. Fichera, *Existence theorems in elasticity* In : Truesdell, C.A. (Ed.), In : Handbuch der Physik, Band VIa/2., 1972, Springer, Berlin.

[54] S. Forest, *The micromorphic approach to plasticity and diffusion*, in D. Jeulin, S. Forest (eds.) Continuum Models and Discrete Systems, Proceedings of the International Symposium held in Paris, Les Presses de l'Ecole des Mines de Paris (2007), 105-112.

[55] E. Fried, M. E. Gurtin, *Thermomechanics of the interface between a body and its environment*, Continuum Mech. Therm. **19** (2007), no. 5, 253-271.

[56] C. Giorgi, A. Montanaro, *Constitutive equations and wave propagation in Green-Naghdi type II and III thermoelectroelasticity*, J. Therm. Stresses **39** (2016), no. 9, 1051-1073.

[57] J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, 1985.

[58] M. A. Goodman, S. C. Cowin, *A continuum theory for granular materials*, Arch. Rational Mech. Anal. **44** (1972), 249-266.

[59] A. E. Green, *Micro-materials and multipolar continuum mechanics*, Int. J. Eng. Sci. **3** (1965), 533-537.

[60] A. E. Green, P. M. Naghdi, *A Re-examination of the Basic Postulates of Thermomechanics*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **432** (1991), 171-194.

[61] A. E. Green, R. S. Rivlin, *Multipolar continuum mechanics : functional theory I* Proc. R. Soc. Lond. A **284** (1965), 303-324.

[62] R. Grot, *Thermodynamics of a continuum with microstructure*, Int. J. Eng. Sci. **7** (1969), 801-814.

[63] D. Ieșan, *A theory of thermoelastic materials with voids*, Acta Mech. **60** (1986), 67-89.

[64] D. Ieşan, *Mecanica generalizată a solidelor*, Universitatea "Al. I. Cuza", Centrul de multiplicare, Iasi, 1980.

[65] D. Ieşan, *Saint-Venant's Problem*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[66] D. Ieșan, Thermoelastic models of continua, Springer, 2004.

[67] D. Ieşan, *Thermoelasticity of bodies with microstructure and microtemperatures*, Int. J. Solids Struct. **44**, (2007), no. 25-26, 8648-8662.

[68] D. Ieșan, L. Nappa, *On the plane strain of microstretch elastic solids*, Int. J. Eng. Sci. **39** (2001), no. 16, 1815-1835.

[69] D. Ieșan, L. Nappa, *On the theory of heat for micromorphic bodies*, Int. J. Eng. Sci., **43** (2005), 17-32.

[70] D. Ieșan, R. Quintanilla, *On a theory of thermoelasticity with microtemperatures*, J. Therm. Stress. **23** (2000), 199-215.

[71] D. Ieșan, R. Quintanilla, *On a theory of thermoelastic materials with double porosity structure*, J. Therm. Stress. **37** (2014), 1017-1036.

[72] D. Ieșan, A. Scalia, *Thermoelastic deformations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[73] G. Iovane, A. V. Nasedkin, *Finite element analysis of static problems for elastic media with voids*, Comput. Struct. **84** (2005), 19-24.

[74] G. Iovane, A. V. Nasedkin, *Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids*, Comput. Struct. **87** (2009), 981-989.

[75] T. Ivancevic, L. Lukman, Z. Gojkovic, R. Greenberg, H. Greenberg, B. Jovanovic, A. Lukman, *Biomechanics of human iliopsoas and functionally related muscles*, in : The Evolved Athlete : A Guide for Elite Sport Enhancement. Cognitive Systems Monographs, Springer Cham **32** (2017), 69-126.

[76] T. Ivancevic, L. Lukman, Z. Gojkovic, R. Greenberg, H. Greenberg, B. Jovanovic, A. Lukman, *Multiphysical structure of human fascia : harmony of biomechanics and neurodynamics*, in : The Evolved Athlete : A Guide for Elite Sport Enhancement. Cognitive Systems Monographs, Springer Cham **32** (2017), 33-67.

[77] E. A. Kearsley, J. T. Fong, *Linearly independent sets of isotropic cartesian tensors of ranks up to eight*, J. Res. Natl. Stand. Sec. B 79B(1-2), (1975), 49-58.

[78] N. Kirchner, P. Steinmann, *Mechanics of extended continua : modeling and simulation of elastic microstretch materials*, Comput. Mech. **40** (2007), 651-666.

[79] R. S. Lakes, *Physical meaning of elastic constants in Cosserat, void, and microstretch elasticity*, J. Mech. Mater. Struct. **11** (2016), no. 3, 217-229.

[80] I. S. Liu, *On entropy flux of transversely isotropic elastic bodies*, J. Elasticity **96** (2009), 97-104.

[81] G. Lumer, R. S. Phillips, *Dissipative operators in a Banach space*, Pac. J. Math. **11** (1961), no. 2, 679-698.

[82] A. Magana, R. Quintanilla, *Exponential stability in type III thermoelasticity with microtemperatures*, Z. Angew. Math. Phys. **69** (2018), no. 129, 1-8.

[83] M. Marin, *On existence and uniqueness in thermoelasticity of micropolar bodies*, Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris, Serie II, **321**, (1995), no. 12, 475-480.

[84] M. Marin, *On weak solutions in elasticity of dipolar bodies with voids*, J. Comp. Appl. Math. **82** (1997), no. 1-2, 291-297.

[85] M. Marin, *Some basic theorems in elastostatics of micropolar materials with voids*, J. Comp. Appl. Math. **70** (1996), no. 1, 115-126.

[86] M. Marin, *Weak solutions in elasticity of dipolar porous materials*, *Math. Probl. Eng* **2008** (2008) no. 1-8, no. 158908.

[87] M. Marin, **A. Chirilă**, L. Codarcea, S. Vlase, *On vibrations in Green-Naghdi thermoelasticity of dipolar bodies*, **An. Sti. U. Ovid. Co. - Mat. 27** (2019), no. 1, 125-140.

[88] M. Marin, **A. Chirilă**, L. Codarcea-Munteanu, *On a thermoelastic material having a dipolar structure and microtemperatures* (2019), în recenzie.

[89] M. Marin, **A. Chirilă**, M. I. A. Othman, *An extension of Dafermos's results for bodies with a dipolar structure*, **Appl. Math. Comput. 361** (2019), 680-688.

[90] M. Marin, **A. Chirilă**, A. Öchsner, S. Vlase, *About finite energy solutions in thermoelasticity of micropolar bodies with voids*, **Bound. Value Probl. 2019**, (2019), no. 89, 1-14.

[91] M. Marin, L. Codarcea, **A. Chirilă**, *Qualitative results on mixed problem of micropolar bodies with microtemperatures*, **Applications and Applied Mathematics 12** (2017), no. 2, 776-789.

[92] M. Marin, E. M. Crăciun, *Uniqueness results for a boundary value problem in dipolar thermoelasticity to model composite materials*, Compos. Part B-Eng. **126** (2017), 27-37.

[93] M. Marin, R. Ellahi, **A. Chirilă** *On solutions of Saint-Venant's problem for elastic dipolar bodies with voids*, **Carpathian J. Math.**, **33** (2017), no. 2, 199-212.

[94] M. Marin and S. Nicaise, *Existence and stability results for thermoelastic dipolar bodies with double porosity*, *Continuum Mech. Therm.*, **28**, (2016), no. 6, 1645-1657.

[95] M. Marin, S. Vlase, L. Codarcea-Munteanu, **A. Chirilă**, *A generalization of the minimum principle energy for Cosserat porous materials*, **Acta Technica Napocensis, Series : Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering 60** (2017), no. 4, 479-484.

[96] G. A. Maugin, A. V. Metrikine, (eds.) *Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats*, Advances in Mechanics and Mathematics 21. Springer-Verlag, New-York, 2010.

[97] A. Montanaro, S. Pallister, Quantum algorithms and the finite element method, Phys. Rev. A 93, 032324, 2016

[98] W. Nowacki, *Dynamic problems of diffusion in solids*, Eng. Fract. Mech. **8** (1976), no. 1, 261-266.

[99] J. W. Nunziato, S. C. Cowin, *A nonlinear theory of elastic materials with voids*, Arch. Rational Mech. Anal. **72** (1979), 175-201.

[100] P. X. Pamplona, J. M. Rivera, R. Quintanilla, *On uniqueness and analyticity in thermoviscoelastic solids with voids*, J. Appl. Anal. Comput. **1** (2011), no. 2, 251-266.

[101] P. Pazy, *Semigroups of operators of linear operators and applications*, Springer, New York, Berlin, 1983.

[102] R. Quintanilla, *On the spatial decay for the dynamical problem of thermo-microstretch elastic solids*, Int. J. Eng. Sci. **40** (2002), 109-121.

[103] R. Quintanilla, *Uniqueness in thermoelasticity of porous media with microtemperatures*, Arch. Mech., **61** (2009), no. 5, 371-382.

[104] A. Scalia, *On some theorems in the theory of micropolar thermoelasticity*, Int. J. Eng. Sci. **28** (1990), no. 3, 181-189.

[105] A. Scalia, M. Svanadze, *Potential method in the linear theory of thermoelasticity with microtemperatures*, J. Therm. Stresses **32** (2009), 1024-1042.

[106] A. Scalia, M. Svanadze, *Uniqueness theorems in the equilibrium theory of thermoelasticity with microtemperatures for microstretch solids*, J. Mech. Mater. Struct. **6**, (2011), no. 9-10, 1295-1311.

[107] M. Svanadze, *Potential method in the theory of thermoelasticity for materials with triple voids*, Arch. Mech. **71** (2019), no. 2, 113-136.

[108] N. Thurieau, R. K. Njiwa, and M. Taghite. Une modélisation du tissu cardiaque comme milieu á microdilatation : une étude numérique. 21^{eme} *Congrés Francais de Mécanique*, Bordeaux, 2013.

[109] H. F. Tiersten, *On the Nonlinear Equations of Thermoelectroelasticity*, Internat. J. Engrg. Sci. **9** (1971), 587-604.

[110] M. I. Visik, O. A. Ladyzenskaya, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **11** (1956), no. 6, 41–97, English translation in A.M.S. translations, Ser 2, 10, 223–281 (1958).

[111] H. Youssef, *Theory of generalized thermoelasticity with fractional order strain*, J. Vib. Control **22**, (2016), no. 18, 3840-3857.

[112] A. Zervos, *Finite elements for elasticity with microstructure and gradient elasticity*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **73**, (2008), 564-595.

Anexe

Rezumatul tezei

Teza de doctorat *Studiul problemelor mixte pentru medii continue generalizate* cuprinde un studiu amplu al corpurilor elastice cu microstructură. Lucrarea este structurată în șase capitole, exceptând introducerea, primele cinci cuprinzând rezultate originale și ultimul prezentând concluziile finale și direcțiile viitoare de cercetare. În primul capitol sunt studiate proprietăți ale mediilor termoelastice micropolare. Se demonstrează unicitatea soluției în anumite condiții asupra coeficienților elastici și se prezintă o generalizare cu deformație de ordin fracționar, în care conducția căldurii este descrisă de ecuațiile Cattaneo. În al doilea capitol se studiază mediile dipolare cu porozitate simplă și dublă. Se prezintă soluții ale problemei Saint-Venant pentru medii elastice dipolare poroase și se realizează simulări numerice pentru medii termoelastice cu dublă porozitate. În al treilea capitol se studiază medii termoelastice dipolare cu microtemperaturi. Se prezintă o extindere a rezultatelor lui Dafermos pentru corpuri cu structură dipolară. Cu ajutorul corolarului Lumer-Phillips se deduc existența, unicitatea și dependența continuă a soluției de datele inițiale și de încărcări. Se realizează simulări numerice. În al patrulea capitol se studiază mediile elastice microstretch în contextul efectelor termice și de difuzie la nivel de macroelement și de microelement. În cazul corpurilor non-centro-simetrice și anizotrope, se arată uncitatea soluției și se analizează comportarea spațială a soluției. Pentru corpuri cu centru de simetrie se demonstrează dependența continuă a soluției de datele inițiale și de încărcări în cazul anizotrop și în cazul izotrop cu ajutorul corolarului Lumer-Phillips și al inegalității Gronwall, respectiv. În ultima secțiune se studiază propagarea undelor. În al cincilea capitol se analizează procesul de remodelare osoasă în contextul mediilor termo-electro-elastice poroase. Se propun forme integrale și locale ale legilor de echilibru, se impun anumite ipoteze constitutive și restricții și se studiază corpurile cu izotropie transversală. În ultima secțiune se deduce un rezultat de dependență continuă în cazul neliniar cu ajutorul inegalității Gronwall.

The PhD thesis entitled *The study of mixed problems for generalized continua* contains an ample study on elastic bodies with microstructure. The thesis is organized in six chapters, except for the introduction, with the first five chapters containing original results and the last one presenting the final conclusions and future research directions. The first chapter studies properties of micropolar thermoelastic media. Uniqueness of the solution is proven under some conditions on the constitutive coefficients and a generalization with fractional order strain is proposed, with the heat conduction being described by Cattaneo's equations. The second chapter studies dipolar media with simple and double porosity. Solutions of Saint-Venant's problem are derived for dipolar elastic media with voids and numerical simulations are performed for thermoelastic media with double porosity. The third chapter studies dipolar thermoelastic media with microtemperatures. An extension of Dafermos' results is presented for bodies with a dipolar structure. By means of the corollary of Lumer-Phillips, existence, uniqueness and continuous dependence of the solution on initial data and body loads are derived. Numerical simulations are performed. The fourth chapter studies microstretch elastic media in the context of thermal and diffusive effects at the macrolevel and microlevel. In the case of non-centro-symmetric and anisotropic media, uniqueness of the solution is shown and the spatial behaviour of the solution is analysed. For bodies with a center of symmetry, the continuous dependence of the solution on initial data and body loads is proven in the anisotropic and isotropic case by means of the corollary of Lumer-Phillips and the inequality of Gronwall, respectively. In the last section, wave propagation is studied. In the fifth chapter, the bone remodelling process is analysed in the context of porous thermo-electro-elastic media. Integral and local forms are introduced for the equilibrium laws, constitutive hypotheses and restrictions are imposed and transversely isotropic bodies are studied. In the last section a continuous dependence result is derived in the nonlinear case by means of the inequality of Gronwall.

Curriculum Vitae

Informații personale	Adina Chirilă e-mail : adina.chirila@unitbv.ro
Educație	**2016/10-prezent** *Doctorand în Matematică* Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Transilvania din Brașov **2013/10-2015/09** *Master în Matematică* Facultatea de Matematică și Științe ale Naturii Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn, Germania **2010/10-2013/07** *Licență în Matematică* *program de studii : Matematică Informatică* Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Transilvania din Brașov **2006/09-2010/06** *Diplomă de Bacalaureat* Colegiul Național Dr. Ioan Meșotă, Brașov Specializarea Matematică-Informatică intensiv Informatică
Experiență profesională	**2019/10-prezent** *Asistent universitar* Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Transilvania din Brașov **2017/10-2019/09** *Cadru didactic asociat* Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Transilvania din Brașov **2017/02-2017/10** *Stagiu de practică* Siemens Industry Software SRL, Brașov **2012/07-2012/09** *Stagiu de practică* Siemens Program and System Engineering SRL, Brașov
Alte specializări	**2019/07, 2018/07, 2017/07** *Regional Romanian-French Summer School in Applied Mathematics*, Sinaia **2018/04-05** *Mobilitate externă* Departamentul de Matematică Tullio Levi-Civita Universitatea din Padova, Italia **2013/10-2015/09** *Qualifying scholarship* Bonn International Graduate School, Germania **2013/07** *The 5th International School on Image Processing*, Brașov
Competențe	*Competențe informatice* Limbaje de programare : C/C++, Python, Java, ABAP Microsoft Office, Latex, Scilab, Mathematica, FreeFem++ *Limbi străine* Engleză (C1/C2) - Cambridge CPE (Certificate of Proficiency in English) Germană (B2/C1) - TestDaF *Reviewer* pentru zbMATH și Mathematical Reviews

Personal information	Adina Chirilă e-mail : adina.chirila@unitbv.ro
Education	**2016/10-prezent** *PhD candidate in Mathematics* Faculty of Mathematics and Computer Science Transilvania University of Brașov **2013/10-2015/09** *M. Sc. in Mathematics* Faculty of Mathematics and Natural Sciences Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn, Germany **2010/10-2013/07** *B. Sc. in Mathematics* *specialization : Mathematics and Computer Science* Faculty of Mathematics and Computer Science Transilvania University of Brașov **2006/09-2010/06** *Highschool Graduation Diploma* Dr. Ioan Meșotă National College, Brașov Specialization Mathematics and Computer Science
Work experience	**2019/10-prezent** *Assistant Professor* Faculty of Mathematics and Computer Science Transilvania University of Brașov **2017/10-2019/09** *Teaching Assistant* Faculty of Mathematics and Computer Science Transilvania University of Brașov **2017/02-2017/10** *Internship* Siemens Industry Software SRL, Brașov **2012/07-2012/09** *Internship* Siemens Program and System Engineering SRL, Brașov
Other specializations	**2019/07, 2018/07, 2017/07** *Regional Romanian-French Summer School in Applied Mathematics*, Sinaia **2018/04-05** *External mobility* Department of Mathematics Tullio Levi-Civita University of Padua, Italy **2013/10-2015/09** *Qualifying scholarship* Bonn International Graduate School, Germany **2013/07** *The 5th International School on Image Processing*, Brașov
Skills	*PC skills* Programming languages : C/C++, Python, Java, ABAP Microsoft Office, Latex, Scilab, Mathematica, FreeFem++ *Foreign languages* English (C1/C2) - Cambridge CPE (Certificate of Proficiency in English) German (B2/C1) - TestDaF *Reviewer* for zbMATH and Mathematical Reviews