Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Olivia-Ana PETCU (căs. FLOREA)

Probleme mixte cu date la limită și inițiale pentru medii continue generalizate

Mixt problems with boundary and initial data for generalized continua

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător științific

Prof. dr. habil. Marin MARIN

BRAȘOV, 2019

Universitatea
Transilvania
din Braşov

COMPONENŢA
Comisiei de doctorat
Numită prin ordinului Rectorului Universităţii Transilvania din Braşov
Nr. 9726 din 16.01.2019

PREŞEDINTE:	**Prof. dr. Radu PĂLTĂNEA** Coordonator centru de cercetare Modelare Matematică şi Produse Software, Universitatea *Transilvania* din Braşov
CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC:	**Prof. dr. Marin MARIN** Universitatea *Transilvania* din Braşov
REFERENŢI:	**Acad. CSI dr. Gabriela MARINOSCHI** Institutul de Statistică Matematică şi Matematică Aplicată *Gheorghe Mihoc-Caius Iacob* al Academiei Române **Prof. dr. Vicenţiu RĂDULESCU** Universitatea Craiova **Prof. dr. Marius-Eduard CRĂCIUN** Universitatea *Ovidius* Constanţa

Data susţinerii publice a tezei de doctorat: 15.02.2019 ora 13.00 sala PP6.

Eventualele aprecieri sau observaţii asupra conţinutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa olivia.florea@unitbv.ro.

Totodată, vă invităm să luaţi parte la şedinţa publică de susţinere a tezei de doctorat.

Vă mulţumim!

Cuprins

		Pag. rez.	Pag. teză
	Prefaţă	5	3
1	**Termoelasticitatea clasică**	9	6
	1.1 Principiile termodinamicii	12	9
	1.2 Ecuaţii constitutive ale teoriei liniare a termoelasticităţii	15	14
2	**Comportamentul temporal al soluţiilor în termoelasticitatea corpurilor poroase micropolare**	17	16
	2.1 Ecuaţiile de bază ale mediilor micropolare	18	17
	2.2 Comportamentul temporal al soluţiilor	23	27
3	**Dislocări seismice în corpuri termoelastice cu microstructură**	27	34
	3.1 Ecuaţii de bază	28	35
	3.2 Rezultate principale	30	37
4	**Comportamentul spaţial în termoelasto-dinamica corpurilor cu porozitate dublă**	37	45
	4.1 Ecuaţii de bază	38	47
	4.2 Imposibilitatea localizării în timp	40	52
	4.3 Alternativa Phragmen-Lindelof	43	54
	4.4 Limita superioară a lui E_ω în ceea ce privește condițiile la limită	46	57
	4.5 Ecuaţii de bază pentru materiale cu dublă porozitate şi microtemperaturi	48	61
	4.6 Rezultate principale pentru medii dublu poroase cu microtemperaturi	51	63
	4.7 Estimarea spaţială a mediilor cu dublă porozitate şi microtemperaturi	52	66

5 Vibrații armonice în dinamica termoelastică cu dublă porozitate 55 70
5.1 Ecuaţii de bază 56 71
5.2 Identităţi auxiliare şi estimări apriori 59 73
5.3 Estimarea amplitudinii 62 79

6 Aplicaţii ale mediilor poroase în medicină 67 86
6.1 Modelarea matematică a unui disc intervertebral . . . 67 86
6.1.1 Ecuaţii de bază 68 88
6.1.2 Modelul matematic al comportării dinamice a discului intervertebral 69 91
6.1.3 Rezultate numerice 70 93
6.2 Microdeplasări în fractura de femur 72 95
6.2.1 Modelări ale microrotaţiilor şi microdeplasărilor în fractură 73 95

7 Concluzii finale 77 102
Bibliografie 79 104
Anexe 86 110
Anexa 1. Scurt rezumat al tezei 87 111
Anexa2. Curriculum Vitae 90 115

Contents

		Abs. page.	Thesis page
	Preface	5	3
1	**Classical thermoelasticity**	9	6
	1.1 Principles of thermodynamics	12	9
	1.2 Constitutive equations of the linear thermoelasticity	16	14
2	**Temporal behavior of the solutions in thermoelasticity of porous micropolar bodies**	19	16
	2.1 Basic equations for the miropolar bodies	20	17
	2.2 Temporal behavior of the solutions	26	27
3	**Seismic dislocations in microstretch thermoelastic bodies**	31	34
	3.1 Basic equations	32	35
	3.2 Main results	35	37
4	**Spatial behavior in thermoelasticity with double porosity structure**	41	45
	4.1 Basic equations	42	47
	4.2 Imposibility of localization in time	45	52
	4.3 Alternative Phragmen-Lindelof	47	54
	4.4 Upper limit of E_ω regarding the boundary conditions	50	57
	4.5 Basic equations for materials with double porosity and microtemperatures	52	61
	4.6 Main results for bodies with double porosity and microtemperatures	55	63
	4.7 Spatial decay of the double porosity materials with microtemperatures	56	66

5 Harmonic vibrations in thermoelastic dynamics with double porosity structure 59 70
5.1 Basic equations 60 71
5.2 Auxiliary identities and apriiori estimations 63 73
5.3 Estimation of amplitude 66 79

6 Applications of porous bodies in medicine 71 86
6.1 Mathematical modeling of an inter-vertebral disc 71 86
6.1.1 Basic equations 72 88
6.1.2 Mathematical model of dynamical behavior of the inter-vertebral disc 73 91
6.1.3 Numerical results 74 93
6.2 Microdisplacements in femoral fracture 76 95
6.2.1 Modeling of microdisplacements and microrotations in femoral fracture 77 95

7 Final conclusions 81 102
Bibliography 83 104
Apendices 89 110

Prefaţă

În ultimii ani au fost intens studiate noi modele continue de medii deformabile. Este bine cunoscut faptul că răspunsul materialului la stimulii externi depinde în mare măsură de mişcările structurii sale interne. Bazele teoriei continuumului orientat au fost introduse de fraţii Cosserat în 1909, [13]. Truesdell şi Noll au evidenţiat importanţa acestei teorii în 1965, [69]. Modelul Cosserat a fost folosit pentru studiul comportării unor materiale de interes în tehnică şi în special în biomecanică. Eringen a introdus teoria termoelasticităţii neclasice pentru materialele micropolare. Teoria materialelor elastice solide cu microstructură a fost introdusă tot de Eringen în 1990. Teoria elasticităţii materialelor elastice solide care conţin pori sau goluri a început să devină foarte interesantă datorită aplicaţiilor ei în diferite domenii. Astfel, Goodman şi Cowin au dezvoltat o teorie pentru materialele granulare, iar Cowin împreună cu Nunziato au introdus teoria neliniară a materialelor cu găuri. Ecuaţiile de bază pentru materialele termoelastice cu goluri, au fost obţinute de Ieşan folosind metoda lui Green şi Rivlin. Teoria liniară a difuziei termoealstice în medii poroase pe baza noţiunii de fracţiune de volum a fost obţinută de Aouadi.

Marin a dezvoltat câteva teoreme de bază în elastostatica materialelor micropolare cu goluri. Utilizând rezultatele lui Cowin şi Nunziato, precum şi teoria lui Eringen pentru termoelasticitatea micropolară, Pasarella a obţinut câteva rezultate remarcabile cu privire la termoelasticitatea micropolară, obţinând ecuaţiile fundamentale pentru medii micropolare termoleastice cu goluri omogene şi izotrope.

Bazele studiilor privind materialele poroase sunt stabilite de Goodman și teoria granulară a lui Cowin, [33]. Modelul mecanic ce stă la baza acestei teorii este un mediu continuu a cărui densitate de masă se reprezintă ca produsul a două funcții: densitatea materialului și funcția porozitate. Cu ajutorul acestei reprezentări,

Nunziato și Cowin, [61] au stabilit o teorie neliniară a mediilor elastice poroase, considerând funcția porozitate ca fiind o nouă variabilă cinematică. Investigațiile continuă studiile lui Cowin și Nunziato, [14], [16] care au îmbunătățit modelele de medii continue existente prin introducerea de pori mici atribuind un grad suplimentar de libertate fiecărei particule. Răspunsurile mecanice elastoplastice ale materialelor poroase sunt investigate pe baza principiilor micromecanicii de către Huang et al., [37].

În cazul porozității duble a unui material, mediul poros poate fi prezentat ca suprapunerea a două medii: un mediu care susține proprietățile de transport ale corpului solid, în timp ce cel de-al doilea mediu furnizează volumul în care este stocat lichidul. Interesul față de materiale cu porozitate dublă datează cu mai mult de cincizeci de ani în urmă. Barenblatt și colaboratorii, [5], [4] au propus un model matematic pentru corpurile cu structură dublă de porozitate. Aceste tipuri de solide sunt frecvente în geofizica rocilor și ceramică, [6] și foarte întâlnite în mecanica osului, [15]. Această teorie a solidelor cu structură dublă poroasă se întemeiază pe legea lui Darcy. Zhao, [70], Svanadze, [68] și Straughan, [**?**] au stabilit ecuațiile de bază pentru materialele elastice cu structură dublă poroasă legată de câmpul vectorului de deplasare, presiunea asociată porilor și presiunile asociate fisurilor.

Lucrarea de faţă este structurată în 7 capitole, un capitol introductiv, 5 capitole care conţin rezultate originale şi un capitol cu concluzii şi direcţii viitoare de cercetare.

În primul capitol sunt prezentate noţiuni introductive din termoelasticitatea clasică.

În capitolul 2 este prezentat un studiu cu privire la comportamentul temporal al soluţiilor în cazul corpurilor poroase micropolare. Acest studiu realizat împreună cu domnul profesor Marin Marin a fost publicat în Analele Universităţii din Constanţa, seria Matematică. A fost considerat un corp poros termoelastic cu date iniţiale şi pe frontieră, pentru care s-a analizat comportamentul temporal al soluţiilor. Au fost utilizate mediile Caesaro pentru componentele energiei şi a fost demonstrată echipartiţia asimptotică a energiilor cinetică şi de deformare.

În capitolul 3 este obținută o relaţie de tip De Hoop - Knopoff pentru câmpul deplasărilor, în contextul termoelasticităţii corpurilor cu microstructură. Acest studiu realizat împreună cu domnul profesor Marin Marin şi Sammy R. Mahmoud a fost publicat în jurnalul Mathematical Problems in Engineering şi are aplicaţii în studiul dislocărilor seismice.

Capitolul 4 prezintă studiul comportamentului spaţial al soluţiilor în cazul termoelasticităţii corpurilor cu porozitate dublă. Acest studiu a fost publicat

în International Journal of Applied Mechanics. Au fost abordate două situaţii: pentru domeniile mărginite a fost obţinută imposibilitatea localizării în timp a soluţiilor, prin demonstrarea unicităţii soluţiilor pentru problema înapoi în timp, iar cel de-al doilea studiu a constat în obţinerea alternativei Phragmen–Lindelof în cazul cilindrilor semi-infiniţi şi aflarea limitei superioare a amplitudinii. Capitolul este continuat cu un studiu al problemei înapoi în timp privind materialele dublu poroase cu microtemperaturi. Acest studiu este trimis spre publicare şi se ocupă cu imposibilitatea localizării în timp a soluţiilor şi determinarea alternativei Phragmen–Lindelof pentru mediile cu dublă porozitate şi microtemperaturi.

Studiul vibraţiilor armonice în dinamica termoelastică a corpurilor cu structură dublă poroasă a fost publicat în jurnalul Mathematics and Mechanics of Solids şi este prezentat în capitolul 5. A fost studiată amplitudinea vibraţiilor pentru problema înapoi în timp obţinând legile de conservare.

Capitolul 6 prezintă două aplicaţii ale mediilor poroase în medicină. Primul studiu realizat împreună cu Ileana Constanţa Roşca a fost publicat în Acta Tehnica Napocensis, Seria Matematică Aplicată, Mecanică şi Inginerie. În această lucrare a fost dezvoltat un studiu asupra dinamicii discurilor intervertebrale. Principalele trei proprietăți ale osului, precum rezistența materialului, anizotropia si neomogenitatea au fost luate în considerare. A fost abordată vibrația torsională a unui inel intervertebral sub acțiunea unui moment. Utilizând metoda transformatei Laplace s-a obținut soluția generală a componentelor deplasărilor elastice de-a lungul direcțiilor radiale, transversale și axiale. Utilizând mediul Simulink din cadrul pachetului de simulare numerică Matlab au fost reprezentate grafic soluțiile sistemului. Cel de-al doilea studiu realizat împreună cu Ileana Costanţa Roşca şi dr. ortoped Radu-Dan Necula este trimis spre publicare. Această lucrare se ocupă de studiul unei fracturi femurale din punctul de vedere al modelării matematice. Scopul principal al autorilor este de a găsi o expresie analitică pentru microdeplasările şi microrotațiile în fractura diafizală femurală. Considerăm problema cu date pe frontieră pentru un material microporant elastic izotrop pentru cazul unu dimensional. Soluțiile pentru microdeplasare și microrotație sunt obținute folosind transformarea Laplace.

Ultimul capitol conţine concluziile finale fiind prezentate contribuțiile originale şi direcțiile viitoare de cercetare.

* * *

Aduc mulţumiri domnului Profesor Dr. Habil. Marin Marin, coordonatorul acestei teze de doctorat, pentru încrederea pe care a avut-o în mine, pentru răbdarea şi înţelegerea de care a dat dovada de-a lungul anilor de pregătire a studiilor mele doctorale şi pentru faptul că a fost mereu alături de mine şi m-a stimulat să public rezultatele mele în reviste bine cotate.

Aduc mulţumiri domnului Profesor Dr. Ramon Quintanilla de la Universidad de Catalunia, care a avut bunăvoinţa de a mă primi într-un stagiu de cercetare de 2 săptămâni în noiembrie 2016 şi care m-a iniţiat în studiul mediilor cu dublă porozitate.

Capitolul 1

Termoelasticitatea clasică

Se numeşte configuraţie de referinţă a unui corp continuu C, un domeniu Ω din spaţiul euclidian tridimensional E_3 cu proprietatea că între punctele lui C şi punctete lui Ω există o corespondenţă biunivocă.

Fie D un domeniu ocupat de un corp la momentul t_0, a cărui frontieră este notată ∂D. Definim o mişcare a corpului, aplicaţia $\mathbb{X} : D \times I \to E_3$, unde I este intervalul de timp $[t_0, t_1)$, cu $t_1 > t_0$. Acest interval poate fi infinit, iar E_3 este spaţiul Euclidian tridimensional. Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$x = \mathbb{X}(X, t), X \in D, t \in I \tag{1.1}$$

cu proprietatea că pentru $(\forall)t \in I$, t fixat, $\mathbb{X}(\cdot, t)$ este injectivă şi bicontinuă.

Domeniul, $\mathbb{D} = \mathbb{X}(D, t)$ ocupat de corpul considerat la momentul t se numeţe configuraţie actuală. Considerăm sistemul de coordonate carteziene rectangulare $OX_K(K = 1, 2, 3)$, unde $X_K(K = 1, 2, 3)$ sunt coordonatele punctului $X \in D$. Pentru punctul X vom considera vectorul de poziţie $\vec{R}$. Raportăm corpul în configuraţia actuală $\mathbb{D}$ la un alt sistem de coordonate carteziene rectangulare $ox_1x_2x_3$ în care $x_i(i = 1, 2, 3)$ sunt coordonatele punctului $x \in \mathbb{D}$, $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului x, X_K se numesc coordonate materiale, iar x_i se numesc coordonate spaţiale, [38]. Mişcarea (1.1) se scrie:

$$x_i = x_i(X_K, t), X_K \in D, t \in I \tag{1.2}$$

Pentru orice $t \in I$ fixat avem:

$$X_K = X_K(x_i, t), x_i \in \mathbb{X}(D, t), t \in I \tag{1.3}$$

Presupunem că funcţiile care descriu mişcarea sunt de clasă $C^p, p \geq 2$ în raport cu variabilele de care depind. Determinantul funcţional va fi:

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\right) \neq 0, \text{ pe } D \times I$$

Dacă t este fixat, atunci funcţiile (1.2) descriu trasformarea geometrică care duce domeniul D în $\mathbb{D}$. Versorii axelor OX_k se notează cu $\vec{E}_k$, iar versorii axelor ox_i se notează cu $\vec{e}_i$, astfel încât produsul scalar al vectorilor în cele două configuraţii va fi egal cu simbolul lui Knonecker:

$$\vec{E}_K \cdot \vec{E}_M = \delta_{KM}; \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Ţinând cont de notaţiile de mai sus putem scrie:

$$\vec{R} = X_K \vec{E_K}, \vec{r} = x_i \vec{e_i}$$

Dacă luăm pentru t constant diferenţialele $d\vec{R}$ şi $\vec{r}$, avem:

$$d\vec{R} = \vec{E}_K dX_K = X_{K,i} \vec{E}_K dx_i; \qquad d\vec{r} = \vec{e}_i dx_i = x_{i,K} \vec{e}_i dX_K$$

unde $X_{K,i} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i}$; $x_{i,K} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}$. Matricea $F = (x_{i,K})$ se numeşte gradientul deformaţiei. Astfel au loc relaţiile:

$$x_{i,K} X_{K,j} = \delta_{ij}; \qquad X_{K,i} x_{i,L} = \delta_{KL}$$

Se poate observa că inversa lui F este $F^{-1} = (X_{K,i})$.

Vom nota în continuare: $\vec{C}_K = \vec{r}_{,K} = x_{i,K} \vec{e}_i$; $\vec{c}_i = \vec{R}_{,i} = X_{K,i} \vec{E}_k$, atunci avem: $d\vec{R} = \vec{c}_i dx_i$, $d\vec{r} = \vec{C}_K dX_K$. Mărimea vectorului $d\vec{R}$ se notează cu dS, iar mărimea vectorului $d\vec{r}$ se notează cu ds şi au următoarele expresii:

$$dS^2 = c_{ij} dx_i dx_j; \qquad ds^2 = C_{KL} dX_K dX_L$$

unde $c_{ij} = \vec{c}_i \vec{c}_j = X_{K,i} X_{K,j}$, $C_{KL} = \vec{C}_K \vec{C}_L = x_{i,K} x_{i,L}$.

Funcţiile c_{ij} şi C_{KL} se numesc *tensorul de deformaţie al lui Cauchy*, respectiv *tensorul de deformaţie al lui Green*. Aceşti doi tensori sunt de ordinul al doilea, simetrici şi pozitiv definiţi.

Funcţiile $E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL})$ şi $e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij})$ sunt componentele unor tensori simetrici numiţi tensorul de deformaţie lagrangean, respectiv tensorul de deformaţie eulerian, ceea ce conduce la:

$$ds^2 - dS^2 = 2e_{ij}dx_i dx_j = 2E_{KL}dX_K dX_L$$

Fie vectorul deplasare

$$\vec{u} = U_K \vec{E}_K = u_i \vec{e}_i$$

Ţinând cont că:

$$\vec{C}_K = \vec{r}_{,K} = \vec{R}_{,K} + \vec{u}_{,K} = \vec{E}_K + U_{M,K}\vec{E}_M$$

$$\vec{c}_i = \vec{R}_{,i} = \vec{r}_{,i} - \vec{u}_{,i} = \vec{e}_i - u_{s,i}\vec{e}_s$$

Se obţin relaţiile dintre deformaţii şi deplasări, cunoscute şi sub numele de relaţii geometrice:

$$\begin{aligned} C_{KL} &= \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} \cdot U_{M,L} \\ c_{ij} &= \delta_{ij} - u_{j,i} - u_{i,j} + u_{s,i} \cdot u_{s,j} \\ 2e_{ij} &= u_{j,i} + u_{i,j} - u_{s,i} \cdot u_{s,j} \\ 2E_{KL} &= U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} \cdot U_{M,L} \end{aligned} \tag{1.4}$$

În cazul micilor deformaţii, ecuaţiile (1.4) se liniarizează pentru tensorii E_{KL} şi e_{ij}, astfel că se obţin relaţiile:

$$E_{KL} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_K}{\partial X_L} + \frac{\partial U_L}{\partial X_K}\right), \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

În teoria micilor deformaţii, tensorul de deformaţie lagrangian şi tensorul de deformaţie eulerian coincid. Vom nota componentele acestui tensor cu ε_{ij}:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.6}$$

Teorema 1.1. *Tensorul deformaţie $\varepsilon_{ij} \in C^2(D)$ satisface relaţiile:*

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \tag{1.7}$$

Dacă domeniul D este simplu conex, iar tensorul ε_{ij} este simetric de clasă $C^2(D)$ care satisface (1.7) *atunci există funcţiile $u_i \in C^3)D)$ care satisfac* (1.6)*.*

Condiţiile de compatibilitate (1.7) se numesc *relaţiile lui Saint-Venant.*

1.1 Principiile termodinamicii

Fie f_i componentele unui vector $\vec{f}$ numit forţă masică la momentul t. Scalarul $f_i v_i$ reprezintă puterea pe unitatea de masă, oricare ar fi vectorul viteză de componente v_i. Dacă t_i sunt componentele unui vector $\vec{t}$ numit forţă superficială sau tensiune, atunci scalarul $t_i v_i$ reprezintă puterea pe unitatea de arie asupra $\partial\mathbb{P}$, frontiera domeniului $\mathbb{P}$.

Presupunem că f_i sunt funcţii continue, t_i sunt funcţii continuu diferenţiabile. Puterea forţelor poate fi scrisă:

$$W(\mathbb{P}) = \int\limits_{\mathbb{P}} \rho f_i v_i dv + \int\limits_{\partial\mathbb{P}} t_i v_i da \tag{1.8}$$

Considerăm ∂P frontiera domeniului $P \subset D$, $\vec{N}$ versorul normalei exterioare la ∂P, dA elementul de arie al acestei suprafeţe, atunci vom putea scrie vectorul tensiune fub forma:

$$\vec{T}dA = \vec{t}da$$

În acest caz, puterea forţelor aplicate porţiunii P va fi:

$$W(P) = \int\limits_{P} \rho_0 f_i v_i dv + \int\limits_{\partial P} T_i v_i dA \tag{1.9}$$

unde $T_i = \vec{T} \cdot \vec{e}_i$.

Un sistem de surse termice asociat corpului este caracterizat prin debitul surselor de căldură pe unitatea de masă, care este o funcţie continuă $s(x,t), x \in \mathbb{D}$, respectiv prin flux de căldură care este de fapt cantitatea de căldură pe unitatea de arie, reprezentat prin funcţia $h(x,t), x \in \mathbb{D}$.

Cantitatea totală de căldură este formată din cantitatea de căldură transmisă în domeniul $\mathbb{P}$ prin radiaţie, respectiv cantitatea de căldură ce intră prin frontiera $\mathbb{P}$ prin conductă:

$$Q(\mathbb{P}) = \int\limits_{\mathbb{P}} \rho s dv + \int\limits_{\partial\mathbb{P}} h da \tag{1.10}$$

Funcţia H cu proprietatea $HdA = hda$ reprezintă fluxul de căldură ce acţionează pe suprafaţa $\partial\mathbb{P}$ şi este raportată la unitatea de arie a suprafeţei ∂P. Cantitatea totală

de căldură poate fi scrisă:

$$Q(P) = \int_P \rho s dV + \int_{\partial P} H dA \tag{1.11}$$

Energia cinetică a mediului continuu ce ocupă domeniul $\mathbb{P}$ la momentul t este:

$$K(\mathbb{P}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}} \rho \vec{v}^2 dv \tag{1.12}$$

Funcţia $e(x,t)$ reprezintă energia internă pe unitatea de masă, ea fiind o funcţie continuu diferenţiabilă. Energia internă a porţiunii $\mathbb{P}$ la momentul t este:

$$E(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}} \rho e dv \tag{1.13}$$

Funcţia $\eta(x,t)$ reprezintă entropia pe unitatea de masă, ea fiind o funcţie continuu diferenţiabilă. Entropia porţiunii $\mathbb{P}$ la momentul t este:

$$\Gamma(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}} \rho \eta dv \tag{1.14}$$

Primul principiu al termodinamicii este principiul energiei: pentru orice porţiune $\mathbb{P}$ din $\mathbb{D}$ şi orice moment t, are loc egalitatea:

$$\dot{K}(\mathbb{P}) + \dot{E}(\mathbb{P}) = W(\mathbb{P}) + Q(\mathbb{P}) \tag{1.15}$$

Folosind formulele de mai sus, ecuaţia (1.15) devine:

$$\int_{\mathbb{P}} \rho v_i \dot{v}_i dv + \int_{\mathbb{P}} \rho \dot{e} dv = \int_{\mathbb{P}} \rho f_i v_i dv + \int_{\partial \mathbb{P}} t_i v_i da + \int_{\mathbb{P}} \rho s dv + \int_{\partial \mathbb{P}} h da \tag{1.16}$$

Din (**??**) şi (1.16) se obţine principiul impulsului: pentru orice porţiune $\mathbb{P}$ din $\mathbb{D}$ şi orice moment t are loc egalitatea:

$$\int_{\mathbb{P}} \rho \dot{v}_i dv = \int_{\mathbb{P}} \rho f_i dv + \int_{\partial \mathbb{P}} t_i da \tag{1.17}$$

Dacă $\vec{t}$ este tensiunea ce acţionează la momentul t în punctul x al unei suprafeţe orientate $\partial\mathbb{P}$ a cărei normală exterioară în x este $\vec{n} = n_i\vec{e}_i$, atunci relaţia (1.17) conduce la:

$$\vec{t} = \vec{t}_i n_i \tag{1.18}$$

unde $\vec{t}_i$ este tensiunea ce acţionează în punctul x pe planul de normală exterioară $\vec{e}_i$. Relaţia (1.18) se numeşte *formula lui Cauchy*, iar tensorul Cauchy al tensiunii este:

$$t_{ij} = \vec{t}_i\vec{e}_j \tag{1.19}$$

Fie S_0 o suprafaţă orientată din configuraţia de referinţă care prin deformare devine suprafaţa S din $\mathbb{D}$ cu normala exterioară la S_0: $\vec{N} = N_k\vec{E}_k$. $\vec{T}$ este tensiunea ce acţionează în $x \in S$:

$$\vec{T} = \vec{T}_k N_k \tag{1.20}$$

unde $\vec{T}_k$ este tensiunea ce acţionează la suprafaţa din $\mathbb{D}$. Primul tensor Piola-Kirchhoff al tensiunii are forma:

$$T_{ki} = \vec{T}_k\vec{e}_i \tag{1.21}$$

Formulele (1.19) şi (1.21) pot fi scrise astfel:

$$t_i = t_{ji}n_j \qquad T_i = T_{ki}N_k. \tag{1.22}$$

Deoarece $\mathbb{D}$ este un domeniu arbitrar, iar funcţiile de sub integrală sunt continue putem scrie *ecuaţiile de mişcare ale mediului continuu*:

$$t_{ji,j} + \rho f_i = \rho\dot{v}_i \tag{1.23}$$

Deoarece $\mathbb{P}$ este un domeniu arbitrar, iar integrandul este o funcţie continuă se obţine ecuaţia energiei:

$$\rho\dot{e} = t_{ji}v_{i,j} + \rho s + q_{i,i} \tag{1.24}$$

Principiul entropiei (a doua lege a termodinamicii)spune că: orice proces termodinamic trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$\int_{\mathbb{P}} \rho\dot{\eta}dv - \int_{\mathbb{P}} \frac{1}{T}\rho s dv - \int_{\partial\mathbb{P}} \frac{1}{T}hda \geq 0, \tag{1.25}$$

oricare ar fi porţiunea $\mathbb{P}$ la un moment dat. Inegalitatea (1.25) se numeţe *inegalitatea Clausius-Duhem*. Deoarece domeniul $\mathbb{P}$ este arbitrar, putem scrie *forma locală a inegalităţii Clausius-Duhem:*,

$$\rho\dot{\eta} - \frac{1}{T}\rho s - \left(\frac{1}{T}q_i\right)_{,i} \geq 0 \tag{1.26}$$

1.2 Ecuaţii constitutive ale teoriei liniare a termoelasticităţii

Notăm cu T_0 temperatura absolută pe care o are mediul în configuraţia de referinţă şi presupunem că T_0 este o constantă pozitivă. Se consideră că în stare naturală, mediul este liber de tensiuni şi are entropia zero. Variaţia de temperatură este dată de, [32]:

$$\theta = T - T_0 \tag{1.27}$$

Fiecare din funcţiile $u_i, \theta, t_{ij}, q_i, \eta$ sunt presupuse de forma $\varepsilon\phi$ unde ε este un parametru ale cărui puteri mai mari sau egale cu 2 vor fi neglijate, iar ϕ nu depinde de ε. Atunci au loc relaţiile:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Considerăm energia liberă de forma:

$$\sigma = c_0 - c_1\theta + c_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 \tag{1.28}$$

unde $c_0, c_1, c_{ij}, C_{ijkl}, \beta_{ij}$ sunt coeficienţi caracteristici ai materialului, cu proprietăţile de simetrie:

$$c_{ij} = c_{ji}; \qquad C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}; \qquad \beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

Cantitatea $c_\varepsilon = \frac{1}{\rho_0}T_0 a$ este căldura specifică pe unitatea de masă corespunzătoare stării naturale ($\varepsilon_{ij} = 0, \theta = 0$) în timp ce $c = T_0 a$ este căldura specifică pe unitatea de volum.

Coeficienţii din (1.28) sunt funcţii ce depind de x_i. Dacă mediul considerat este omogen atunci aceştia sunt constanţi. Deoarece tensorii tensiunii Piola-Kirchhoff şi

tensorul Cauchy coincid avem:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta + c_{ij} \\ \rho_0\eta &= \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + a\theta + c_1 \end{aligned} \tag{1.29}$$

În teoria clasică a termoelasticităţii se fac următoarele presupuneri: dacă $\varepsilon_{ij} = 0$ şi $\theta = 0$ atunci $t_{ij} = 0$, iar T_0 este constant. Fără a restrânge generalitatea vom presupune:

- dacă $\varepsilon_{ij} = 0, \theta = 0$ atunci $\sigma = 0, \eta = 0$.
- dacă $\varepsilon_{ij} = 0, \theta = 0$ atunci $t_{ij} = 0, \sigma = 0, \eta = 0, \theta_{,i} = 0$ iar configuraţia de referinţă se numeşte stare naturală.

Deoarece am presupus că starea naturală a corpului este liberă de tensiuni şi are entropia zero, avem $c_{ij} = c_0 = c_1 = 0$ astfel încât energia liberă devine:

$$\sigma = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 \tag{1.30}$$

Relaţiile (1.29) se scriu sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta \\ \rho_0\eta &= \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + a\theta \end{aligned} \tag{1.31}$$

Teorema 1.2. *Dacă gradientul temperaturii este nul, atunci vectorul flux de căldură este nul.*

În teoria liniară pe baza teoremei de mai sus avem:

$$q_i = \kappa_{ij}\theta_{,j} \tag{1.32}$$

unde κ_{ij} sunt componentele tensorului de conductivitate termică.
Teorema 1.3. *Un proces termodinamic admisibil satisface inegalitatea Clausius -Duhem dacă şi numai dacă:*

$$\kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} \geq 0 \tag{1.33}$$

Ecuaţiile (1.31) şi (1.32) se numesc *ecuaţiile constitutive ale teoriei liniare a termoelasticităţii*.

Capitolul 2

Comportamentul temporal al soluţiilor în termoelasticitatea corpurilor poroase micropolare

Temperaturile ridicate care acționează asupra materialelor induc asupra acestora, la un moment dat, un flux de căldură. Tensiunea termică este determinată de distribuţia de temperatură indusă de fluxul de căldură.

Amplitudinea tensiunii termice poate fi influenţată de proprietăţile materialului, precum şi de celelalte variabile care apar la schimbarea proprietăţilor materialelor.

Aceste noţiuni au un caracter aplicativ în diferite domenii de activitate, care tratează materialele poroase, cum ar fi materialele geologice, în special rocile şi solul, precum materialele fabricate, în special granulele solide ambalate, ceramica şi pulberea presată. Primii cercetători care au făcut investigaţii asupra materialelor poroase au fost Goodman şi Cowin [33], care au prezentat teoria granulară. Acelaşi studiu a fost studiat de Cowin şi Nunziato, [14], al cărui scop a fost acela de a descoperi comportamentul mecanic al solidelor poroase atunci când materialul este elastic şi interstiţiile sunt goluri de materal. Pentru a respecta această idee, ei au introdus un

grad suplimentar de libertate.

Teoria lui Cowin și a lui Nunziato [61] poate fi aplicată materialelor termice fără conductibilitate. În acest studiu sunt considerate materiale în care densitatea poate fi scrisă ca produsul a două câmpuri: câmpul de densitate a materialului și câmpul fracțiunii de volum, studii întâlnite de altfel şi în [40], [42], [12]. Ieşan a studiat teoria materialelor termoelastice cu goluri [40], făcând o generalizare directă a corpului elastic liniar, neglijând modificările fracției volumice datorită disipării interne în material.

Chiriță și Ciarletta au folosit metoda pentru funcția de suprafață ponderată în timp. În [55] a fost studiat comportamentul asimptotic al soluțiilor pentru sistemele periodice de difuzie. Funcțiile clasice ale lui Liapunov sunt modificate prin câteva funcții continue pe porţiuni, obținând condiții suficiente pentru stabilitatea asimptotică a soluțiilor [56].

Un studiu elegant al comportamentului temporal al soluțiilor pentru corpurile termoelastice cu microstructură a fost realizat în lucrarea [56], iar în lucrarea [57] s-a demonstrat disiparea uniformă a energiei pentru corpurile termoelastice cu microstructură.

În studiul publicat în [50] am extins teoria lui Cowin și Nunziato pentru materiale micropolare termoelastice prin adăugarea în setul variabilelor constitutive a derivatei golului de material în raport cu timpul pentru a include efectele inelastice.

2.1 Ecuaţiile de bază ale mediilor micropolare

Considerăm că la momentul $t = 0$ un corp ocupă o anumită regiune din spaţiul Euclidian tridimensional R^3, notată cu *B*. Deoarece se doreşte aplicarea teoremei divergenţei, vom considera că frontiera regiunii considerate, notată ∂B, este o suprafaţă suficient de netedă. Închiderea lui *B* este notată cu $\bar{B}$. Vom studia mişcarea mediului continuu generalizat într-un sistem de axe rectangular Cartezian $Ox_i, (i = 1, 2, 3)$ şi vom folosi notaţia tensorială cartezianã.
Indicii italici vor avea mereu valorile $1, 2, 3$, în timp ce indicii greceşti vor lua valorile 1 şi 2.
Derivata în raport cu timpul este notată cu punct, iar derivatele parţiale în raport cu coordonatele spaţiale sunt reprezentate cu virgulă.

Densitatea ϱ poate fi scrisă ca un produs de două câmpuri: câmpul de densitate a matricei materialului γ şi fracţiunea de volum ν:

$$\varrho = \gamma\nu,$$

unde γ_0 şi ν_0 sunt constante spaţiale. Mişcarea corpului micropolar termoelastic este descrisă de următoarele variabile independente:
- $u_i(x,t),\ \varphi_i(x,t)$ - câmpurile de deplasare şi microrotaţie;
- θ - schimbul de temperatură de la temperatura absolută din configuraţia de referinţă T_0, astfel încât $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$;
- σ - schimbul din fracţiunea de volum măsurată de la valoarea fracţiunii de volum din configuraţia de referinţă ν_0, astfel încât $\sigma(x,t) = \nu(x,t) - \nu_0$.

În contextul teoriei liniare, vom considera că mediul este lipsit de tensiuni, nu există forţe care să acţioneze asupra lui, iar fluxul este nul. În această situaţie, energia liberă se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{2}A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + \\ +B_{ij}\sigma\varepsilon_{ij} + C_{ij}\sigma\gamma_{ij} + D_{ijk}\phi_k\varepsilon_{ij} + E_{ijk}\phi_k\gamma_{ij} - \\ -\alpha_{ij}\theta\varepsilon_{ij} - \beta_{ij}\theta\gamma_{ij} - m\theta\sigma + d_i\sigma\phi_i + \gamma_i\theta\phi_i - \\ -\frac{1}{2}a\theta^2 + \frac{1}{2}\xi\sigma^2 + \frac{1}{2}A_{ij}\phi_i\phi_j - \frac{1}{2}\omega\dot{\sigma}^2.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Conform [14], $f = -\omega\dot{\sigma}$ este disiparea care ţine cont de comportamentul inelastic al golurilor. De altfel, ω este o constantă pozitivă.
Ţinând cont de expresia energiei libere, s-au obţinut următoarele ecuaţii constitutive:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + B_{ij}\sigma + D_{ijk}\phi_k - \beta_{ij}\theta, \\ m_{ij} &= B_{mnij}\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} + C_{ij}\sigma + E_{ijk}\phi_k - \alpha_{ij}\theta, \\ h_i &= D_{mni}\varepsilon_{mn} + E_{mni}\gamma_{mn} + d_i\sigma + A_{ij}\phi_j - \gamma_i\theta, \\ g &= -B_{ij}\varepsilon_{ij} - C_{ij}\gamma_{ij} - \xi\sigma - d_i\phi_i + m\theta, \\ \varrho\eta &= \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta_{ij}\gamma_{ij} + m\sigma + \gamma_i\phi_i + a\theta, \\ q_i &= k_{ij}\theta_{,j}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

unde ε_{ij}, γ_{ij} şi ϕ_i sunt carcateristicile cinematice ale tensiunii şi sunt definite prin următoarele relaţii geometrice:

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,\,i} + \varepsilon_{jik}\varphi_k,\ \gamma_{ij} = \varphi_{j,\,i},\ \phi_i = \sigma_{,\,i},\ \theta = T - T_0,\ \sigma = \nu - \nu_0. \tag{2.3}$$

Ţinând cont de metoda utilizată de Nunziato and Cowin în [61], se obţin următoarele ecuaţii fundamentale (similar în [57])
- ecuaţiile de mişcare:

$$\begin{aligned} t_{ij,j} + \varrho F_i &= \varrho \ddot{u}_i, \\ m_{ij,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + \varrho M_i &= I_{ij} \ddot{\varphi}_j; \end{aligned} \tag{2.4}$$

- ecuaţiile de echilibru ale forţelor aflate în echilibru:

$$h_{i,i} + g + \varrho L = \varrho \kappa \ddot{\sigma}; \tag{2.5}$$

- ecuaţia energiei:

$$\varrho T_0 \dot{\eta} = q_{i,i} + \varrho S. \tag{2.6}$$

Inegalitatea entropiei presupune că:

$$k_{ij} \theta_{,\,i} \theta_{,\,j} \geq 0. \tag{2.7}$$

Vom considera că, coeficienţii funcţiilor ϱ, κ, a şi coeficienţii constitutivi de mai sus sunt funcţii continue diferenţiabile pe închiderea $\bar{B}$ lui B. Mai mult, vom presupune că ϱ, κ şi a sunt funcţii strict pozitive pe $\bar{B}$, şi anume:

$$\begin{aligned} \varrho(x) \geq \varrho_0 > 0, \quad \varrho_0 = const \\ \kappa(x) \geq \kappa_0 > 0, \quad \kappa_0 = const \\ a(x) \geq a_0 > 0, \quad a_0 = const \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tensorul de conductibilitate k_{ij} se presupune că este simetric, pozitiv definit şi satisface inegalităţile:

$$k_m \theta_{,\,i} \theta_{,\,j} \leq k_{ij} \theta_{,\,i} \theta_{,\,j} \leq k_M \theta_{,\,i} \theta_{,\,j}. \tag{2.9}$$

Vom nota cu k_m şi k_M minimul, respectiv maximul tensorului de conductibilitate. Presupunem că funcţia de energie liberă Ψ definită în (2.1) este o formă pătratică pozitiv definită, atunci există constantele pozitive μ_m şi μ_M astfel încât

$$\mu_m \left(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \Phi_i \Phi_i + \sigma^2 \right) \leq 2\Psi \leq \mu_M \left(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \Phi_i \Phi_i + \sigma^2 \right) \tag{2.10}$$

Alături de sistemul de ecuaţii (2.4)-(2.6) luăm în considerare următoarele condiţii iniţiale:

$$\begin{aligned} &u_i(x,0)=u_i^0(x),\ \dot{u}_i(x,0)=u_i^1(x),\ x\in\bar{B},\\ &\varphi_i(x,0)=\varphi_i^0(x),\ \dot{\varphi}_i(x,0)=\varphi_i^1(x),\ x\in\bar{B},\\ &\theta(x,0)=\theta^0(x),\ \sigma(x,0)=\sigma^0(x),\ \dot{\sigma}(x,0)=\sigma^1(x),\ x\in\bar{B}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

şi următoarele condiţii la limită:

$$\begin{aligned} &u_i=\bar{u}_i\ on\ \partial B_1\times[0,\infty),\ t_i\equiv t_{ij}n_j=\bar{t}_i\ on\ \partial B_1^c\times[0,\infty),\\ &\varphi_i=\bar{\varphi}_i\ on\ \partial B_2\times[0,\infty),\ m_i\equiv m_{ij}n_j=\bar{m}_i\ on\ \partial B_2^c\times[0,\infty),\\ &\sigma=\bar{\sigma}\ on\ \partial B_3\times[0,\infty),\ h\equiv h_in_i=\bar{h}\ on\ \partial B_3^c\times[0,\infty),\\ &\theta=\bar{\theta}\ on\ \partial B_4\times[0,\infty),\ q\equiv q_in_i=\bar{q}\ on\ \partial B_4^c\times[0,\infty), \end{aligned} \tag{2.12}$$

unde $\partial B_1,\partial B_2,\partial B_3$ şi ∂B_4 cu complementele $\partial B_1^c,\partial B_2^c,\partial B_3^c$ şi ∂B_4^c sunt submulţimi ale lui ∂B, iar n_i sunt componentele normalei exterioare la ∂B.

Notăm cu $\mathcal{P}$ problema cu date iniţiale şi la limită ce constă în sistemul de ecuaţii (2.4)-(2.6), cu condiţiile iniţiale (2.11) şi condiţiile le limită (2.12).

Vom demonstra unele identităţi integrale care sunt importante pentru a dovedi rezultatele privind comportamentul temporal al soluţiilor problemei $\mathcal{P}$.

Teorema 2.1. *Pentru orice soluţie* $(u_i,\ \varphi_i,\ \sigma,\ \theta)$ *a problemei* $\mathcal{P}$ *are loc următoarea lege de conservare a energiei totale*

$$\begin{aligned} &\int_B e^{-\lambda t}\left\{\frac{1}{2}\left[\varrho\dot{u}_i(t)\dot{u}_i(t)+I_{ij}\dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_j(t)+\varrho\kappa\dot{\sigma}^2(t)\right]+\Psi(\mathbf{E}(t))+\frac{1}{2}a\theta^2(t)\right\}dV+\\ &+\int_0^t\int_B e^{-\lambda s}\frac{\lambda}{2}\left[\varrho\dot{u}_i(s)\dot{u}_i(s)+I_{ij}\dot{\varphi}_i(s)\dot{\varphi}_j(s)+\varrho\kappa\dot{\sigma}^2(s)\right]dVds+\\ &+\int_0^t\int_B e^{-\lambda s}\left[\lambda\Psi(\mathbf{E}(s))+\frac{\lambda}{2}a\theta^2(s)+\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,\,i}(s)\theta_{,\,j}(s)\right]dVds= \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} =&\int_B\left\{\frac{1}{2}\left[\varrho\dot{u}_i(0)\dot{u}_i(0)+I_{ij}\dot{\varphi}_i(0)\dot{\varphi}_j(0)+\varrho\kappa\dot{\sigma}^2(0)\right]+\Psi(\mathbf{E}(0))+\frac{1}{2}a\theta^2(0)\right\}dV+\\ &+\int_0^t\int_B e^{-\lambda s}\varrho\left[\dot{u}_i(s)F_i(s)+\dot{\varphi}_i(s)M_i(s)+\dot{\sigma}(s)L(s)+\frac{1}{T_0}\theta(s)S(s)\right]dVds+\\ &+\int_0^t\int_{\partial B} e^{-\lambda s}\left[t_i(s)\dot{u}_i(s)+m_i(s)\dot{\varphi}_i(s)+h(s)\dot{\sigma}(s)+\frac{1}{T_0}q(s)\theta(s)\right]dAds, \end{aligned}$$

pentru $t\in[0,\ \infty)$. *Aici* λ *este un parametru pozitiv dat.*

Teorema 2.2. *Fie* $(u_i,\ \varphi_i,\ \sigma,\ \theta)$ *o soluţie a problemei cu date mixte iniţiale şi pe frontieră ce constă în ecuaţiile* (2.4)-(2.6)*, condiţiile la limită* (2.12) *şi condiţiile iniţiale* (2.11)*. Atunci avem următoarea identitate:*

$$
\begin{aligned}
&2\int_B\left[\varrho u_i(t)\dot{u}_i(t)+I_{ij}\varphi_i(t)\dot{\varphi}_j(t)+\varrho\kappa\sigma(t)\dot{\sigma}(t)+\frac{1}{T_0}k_{ij}\left(\int_0^t\theta_{,\,i}(s)ds\right)\left(\int_0^t\theta_{,\,j}(s)ds\right)\right]dV=\\
&\quad=2\int_0^t\int_B\left[\varrho\dot{u}_i(s)\dot{u}_i(s)+I_{ij}\dot{\varphi}_i(s)\dot{\varphi}_j(s)+\varrho\kappa\dot{\sigma}^2(s)-2\Psi(\mathbf{E}(s))-a\theta^2(s)\right]dVds+\\
&\qquad+2\int_0^t\int_B\varrho\eta(0)\theta(s)dVds+2\int_B\left[\varrho u_i(0)\dot{u}_i(0)+I_{ij}\varphi_i(0)\dot{\varphi}_j(0)+\varrho\kappa\sigma(0)\dot{\sigma}(0)\right]dV+\\
&\qquad+2\int_0^t\int_B\varrho\left[F_i(s)u_i(s)+M_i(s)\varphi_i(s)+L(s)\sigma(s)+\frac{1}{T_0}\theta(s)\int_0^s S(z)dz\right]dVds+\\
&\qquad\quad2\int_0^t\int_B\varrho\eta(0)\theta(s)dVds+2\int_B\left[\varrho u_i(0)\dot{u}_i(0)+I_{ij}\varphi_i(0)\dot{\varphi}_j(0)+\varrho\kappa\sigma(0)\dot{\sigma}(0)\right]dV+\\
&\qquad\quad+2\int_0^t\int_{\partial B}\left[t_i(s)u_i(s)+m_i(s)\varphi_i(s)+h(s)\sigma(s)+\frac{1}{T_0}\theta(s)\int_0^s q(z)dz\right]dAds
\end{aligned}
$$

Teorema 2.3. *Fie* $(u_i,\ \varphi_i,\ \sigma,\ \theta)$ *o soluţie a problemei mixte cu date iniţiale şi pe frontieră* $\mathcal{P}$*. Următoarea identitate are loc:*

$$
\begin{aligned}
&2\int_B\left[\varrho u_i(t)\dot{u}_i(t)+I_{ij}\varphi_i(t)\dot{\varphi}_j(t)+\varrho\kappa\sigma(t)\dot{\sigma}(t)+\frac{1}{T_0}k_{ij}\left(\int_0^t\theta_{,\,i}(s)ds\right)\left(\int_0^t\theta_{,\,j}(s)ds\right)\right]dV=\\
&\quad=\int_B\Big\{\,\varrho\left[u_i(0)\dot{u}_i(2t)+\dot{u}_i(0)u_i(2t)\right]+I_{ij}\left[\varphi_i(0)\dot{\varphi}_j(2t)+\dot{\varphi}_j(0)\varphi_i(2t)\right]\Big\}dV+\\
&\qquad+\int_B\varrho\kappa\left[\sigma(0)\dot{\sigma}(2t)+\dot{\sigma}(0)\sigma(2t)\right]dV+\int_0^t\int_B\varrho\eta(0)\left[\theta(t-s)-\theta(t+s)\right]dVds+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t\int_B \varrho\left[u_i(t+s)F_i(t-s)-u_i(t-s)F_i(t+s)\right]dVds+\\
&\quad+\int_0^t\int_B I_{ij}\left[\varphi_i(t+s)M_i(t-s)-\varphi_i(t-s)M_i(t+s)\right]dVds+\\
&\quad\quad+\int_0^t\int_B\left[\sigma(t+s)L(t-s)-\sigma(t-s)L(t+s)\right]dVds+\\
&\quad+\int_0^t\int_B\frac{1}{T_0}\left[\theta(t-s)\int_0^{t+s}S(z)dz-\theta(t+s)\int_0^{t-s}S(z)dz\right]dVds+\\
&\quad\quad+\int_0^t\int_{\partial B}\left[u_i(t+s)t_i(t-s)-u_i(t-s)t_i(t+s)\right]dAds+\\
&\quad\quad\quad+\int_0^t\int_{\partial B}\left[\varphi_i(t+s)m_i(t-s)-\varphi_i(t-s)m_i(t+s)\right]dAds+\\
&\quad\quad\quad\quad+\int_0^t\int_{\partial B}\left[\sigma(t+s)h(t-s)-\sigma(t-s)h(t+s)\right]dAds+\\
&\quad+\int_0^t\int_{\partial B}\frac{1}{T_0}\left[\theta(t-s)\int_0^{t+s}q(z)dz-\theta(t+s)\int_0^{t-s}q(z)dz\right]dAds
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

2.2 Comportamentul temporal al soluţiilor

Pentru a demonstra rezultatele importante ale acestui studiu, şi anume comportamentul temporal al soluţiilor problemei $\mathcal{P}$, definită în secţiunea anterioară, sunt necesare câteva rezultate suplimentare.

Considerăm problema $\mathcal{P}_0$ definită de ecuaţiile constitutive (2.2), ecuaţiile geometrice (2.3) şi ecuaţiile de mişcare (2.4):

$$
\begin{aligned}
t_{ij,j} &= \varrho\ddot{u}_i,\\
m_{ij,j}+\varepsilon_{ijk}t_{jk} &= I_{ij}\ddot{\varphi}_j;\\
h_{i,i}+g &= \varrho\kappa\ddot{\sigma};\\
\varrho T_0\dot{\eta} &= q_{i,i}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

condiţiile pe frontieră:

$$\begin{aligned} &u_i = 0 \text{ on } \partial B_1 \times [0,\infty),\ t_i \equiv t_{ij}n_j = 0 \text{ on } \partial B_1^c \times [0,\infty),\\ &\varphi_i = 0 \text{ on } \partial B_2 \times [0,\infty),\ m_i \equiv m_{ij}n_j = 0 \text{ on } \partial B_2^c \times [0,\infty),\\ &\sigma = 0 \text{ on } \partial B_3 \times [0,\infty),\ h \equiv h_i n_i = 0 \text{ on } \partial B_3^c \times [0,\infty),\\ &\theta = 0 \text{ on } \partial B_4 \times [0,\infty),\ q \equiv q_i n_i = 0 \text{ on } \partial B_4^c \times [0,\infty), \end{aligned} \tag{2.16}$$

şi condiţiile iniţiale din (2.11).

Considerăm $(u_i,\ \varphi_i,\ \sigma,\ \theta)$ o soluţie a problemei $\mathcal{P}_0$ şi introducem media Cesaro pentru toate componentele energiei:

1. Media Cesaro pentru energia cinetică este:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2t}\int_0^t \int_B \left[\varrho \dot{u}_i(s)\dot{u}_i(s) + I_{ij}\dot{\varphi}_i(s)\dot{\varphi}_i(s) + \varrho\kappa\dot{\sigma}^2(s)\right] dVds \tag{2.17}$$

2. Media Cesaro pentru energia de deformaţie este:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \frac{1}{2t}\int_0^t \int_B [&A_{ijmn}\varepsilon_{ij}(s)\varepsilon_{mn}(s) + 2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}(s)\gamma_{mn}(s) + C_{ijmn}\gamma_{ij}(s)\gamma_{mn}(s) +\\ &+2B_{ij}\sigma(s)\varepsilon_{ij}(s) + 2C_{ij}\sigma(s)\gamma_{ij}(s) + 2D_{ijk}\phi_k(s)\varepsilon_{ij}(s) + 2E_{ijk}\phi_k(s)\gamma_{ij}(s) +\\ &+2d_i\sigma(s)\phi_i(s) + 2\xi\sigma^2(s) + A_{ij}\phi_i(s)\phi_j(s) - \omega\dot{\sigma}^2(s)\big] dVds \end{aligned} \tag{2.18}$$

3. Media Cesaro a energiei termice este:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2t}\int_0^t \int_B a\theta^2(s)dVds \tag{2.19}$$

4. Media Cesaro a energiei de difuzie este:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s \int_B \frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,\,i}(z)\theta_{,\,j}(z)dVdzds \tag{2.20}$$

În cazul în care $meas(\partial B_1) = 0$ atunci există o familie de deplasări rigide, microrotaţii rigide, temperatură nulă şi schimb nul în volumul fracţionar care satisfac ecuaţiile (2.2), (2.3), (2.15) şi condiţiile pe frontieră (2.16). Astfel putem descompune condiţiile iniţiale după cum urmează:

$$\begin{aligned} u_i^0 &= u_i^* + U_i^0,\ u_i^1 = \dot{u}_i^* + \dot{U}_i^0\\ \varphi_i^0 &= \varphi_i^* + \Phi_i^0,\ \varphi_i^1 = \dot{\varphi}_i^* + \dot{\Phi}_i^0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

unde deplasările rigide u_i^* and $\dot{u}_i^*$ şi microrotaţiile rigide φ_i^* and $\dot{\varphi}_i^*$ sunt determinate astfel încât:

$$\int_B \varrho U_i^0 dV = 0,\ \int_B \varrho \varepsilon_{ijk} x_j U_k^0 dV = 0,\ \int_B \varrho \dot{U}_i^0 dV = 0,\ \int_B \varrho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{U}_k^0 dV = 0,$$
$$\int_B I_{ij} \Phi_j^0 dV = 0,\ \int_B I_{ij} \dot{\Phi}_j^0 dV = 0, \tag{2.22}$$

unde, ca de obicei, ε_{ijk} este simbolul lui Ricci.

Pe baza ipotezei (2.10) obţinem următoarea inegalitate de tip Korn, [34].

$$\frac{1}{2}\int_B \left[A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}\right] dV \geq m_1 \int_B \left[u_i u_i + \varphi_i \varphi_i\right] dV, \tag{2.23}$$

pentru orice $\mathbf{v} \in \hat{\mathbf{W}}^1(B)$. Aici, m_1 este o constantă pozitivă.

De asemenea, luând în considerare ipoteza (2.17), deducem că există o constantă pozitivă astfel încât următoarea inegalitate de tip Poincare să aibă loc:

$$\frac{1}{2}\int_B k_{ij}\theta_{,\,i}\theta_{,\,j} dV \geq m_2 \int_B \theta^2 dV, \tag{2.24}$$

pentru orice $\theta \in \hat{W}^1(B)$.
în cazul în care $meas(\partial B_1) = 0$ şi $meas(\partial B_2) = 0$ descompunem soluţia $(u_i,\ \varphi_i,\ \sigma,\ \theta)$ după cum urmează

$$u_i = u_i^* + t\dot{u}_i^* + v_i,\ \varphi_i = \varphi_i^* + t\dot{\varphi}_i^* + \chi_i,\ \sigma = \zeta,\ \theta = \gamma \tag{2.25}$$

unde $(v_i,\ \chi_i,\ \zeta,\ \gamma) \in \hat{\mathbf{W}}^1(B) \times \hat{W}^1(B) \times \tilde{W}^1(B)$ este soluţia problemei $\mathcal{P}_0$ care corespunde următoarelor condiţii iniţiale:

$$v_i = U_i^0,\ \dot{v}_i = \dot{U}_i^0,\ \chi_i = \Phi_i^0,\ \dot{\chi}_i = \dot{\Phi}_i^0,\ \zeta = \sigma^0,\ \gamma = \theta^0, \text{ at } t = 0 \tag{2.26}$$

în cele ce urmează vom folosi energia totală definită astfel:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_B \Big[\ \varrho \dot{u}_i(t)\dot{u}_i(t) + I_{ij}\dot{\varphi}_i(t)\varphi_j(t) + \varrho\kappa\dot{\sigma}^2(t) + 2\Psi(\mathbf{E}(t)) + a\theta^2(t)\Big] dV +$$
$$+ \int_0^t \int_B \frac{1}{T_0} k_{ij}\theta_{,\,i}(z)\theta_{,\,j}(z) dV dz. \tag{2.27}$$

Pe baza rezultatelor preliminare, vom demonstra în cele ce urmează partiţia asimptotică a energiei totale, utilizând media Cesaro. Acest lucru va fi făcut cu ajutoul următoarei teoreme:

Teorema 2.4. *Considerăm o soluţie* $(u_i,\ \varphi_i,\ \sigma,\ \theta)$ *a problemei cu date iniţiale şi pe frontieră* $\mathcal{P}_0$*. Dacă presupunem că:*

$$\left(u_i^0,\ \varphi_i^0\right) \in \mathbf{W}_1(B),\ \left(u_i^1,\ \varphi_i^1\right) \in \mathbf{W}_0(B),$$
$$\left(\sigma^0,\ \theta^0\right) \in W_1(B) \times W_1(B),\ \sigma^1 \in W_0(B),$$

atunci are loc următoarea relaţie

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{T}(t) = 0. \tag{2.28}$$

De asemenea, avem următoarele:

i. Dacă $meas(\partial B_1) \neq 0$ *şi* $meas(\partial B_2) \neq 0$*, atunci:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{T}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{S}(t) \tag{2.29}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{D}(t) = \mathcal{E}(0) - 2\lim_{t\to\infty} \mathcal{K}(t) = \mathcal{E}(0) - 2\lim_{t\to\infty} \mathcal{S}(t) \tag{2.30}$$

ii. Dacă $meas(\partial B_1) = 0$ *şi* $meas(\partial B_2) = 0$*, atunci*

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{K}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{S}(t) + \frac{1}{2}\int_B \left[\ \varrho \dot{u}_i^* \dot{u}_i^* + I_{ij}\dot{\varphi}_i^*\varphi_j^*\right] dV \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathcal{D}(t) &= \mathcal{E}(0) - 2\lim_{t\to\infty} \mathcal{K}(t) + \frac{1}{2}\int_B \left[\ \varrho \dot{u}_i^* \dot{u}_i^* + I_{ij}\dot{\varphi}_i^*\varphi_j^*\right] dV = \\ &= \mathcal{E}(0) - 2\lim_{t\to\infty} \mathcal{S}(t) + \frac{1}{2}\int_B \left[\ \varrho \dot{u}_i^* \dot{u}_i^* + I_{ij}\dot{\varphi}_i^*\varphi_j^*\right] dV\end{aligned} \tag{2.32}$$

Concluzie. Remarcăm că relaţiile (2.29) si (2.31), restricţionate la clasa de date iniţiale pentru care $u_i^* = \varphi_i^* = 0$, demonstrează echipartiţia asimptotică pentru energiile cinetică şi de deformaţie.

Capitolul 3

Dislocări seismice în corpuri termoelastice cu microstructură

Teoria corpurilor solide termoelastice cu microstructură a fost elaborată pentru prima oară de către Eringen [18].

Această teorie include rotaţii intrinseci şi extinderi şi contracţii microstructurale. Scopul acestei teorii este de a elimina discrepanţele dintre elasticiatatea clasică şi experimente, deoarece elasticitatea clasică nu a reuşit să prezinte rezultate acceptabile atunci când efectele materialelor cu microstructură s-au dovedit a contribui semnificativ la deformările generale ale corpului, de exemplu, în cazul corpurilor granulare cu molecule mari (de exemplu, polimeri), grafit sau oase umane.

Aceste cazuri devin din ce în ce mai importante în proiectarea și fabricarea materialelor moderne, întrucât efectele acestei tehnologii devin esențiale în predicția comportamentului mecanic general al acestor materiale. Alte aplicații ale acestei teorii sunt materialele compozite și diverse materiale poroase.

Această teorie poate fi utilă în aplicațiile care se ocupă cu materialele poroase precum materiale geologice, materiale granulate solide și multe altele.

Acest capitol reprezintă un prim pas către o mai bună înțelegere a noţiunii de microstructură şi tensiune termică în studiul materialelor enumerate mai sus.

Relaţiile de reciprocitate care apar în acest studiu constituie un instrument teoretic puternic în studiile legate de propagarea undelor seismice. De asemeena, această abordare a mediilor cu microstructură este foarte utilă în înţelegerea problemelor cutremurelor.

Scopul acestui studiu este de a obţine o relaţie de tip Hoop-Knopoff pentru câmpul deplasărilor în contextul mediilor termoelastice cu microstructură. Apoi, ca o consecinţă este obţinută o expresie a încărcărilor mediului, echivalentă cu dislocarea seismică.

3.1 Ecuaţii de bază

Considerăm u_i componenetele vectorului deplasare şi φ_i componentele vectorului micrototaţie. Vom nota cu ω funcţia microstructură şi cu θ temperatura măsurată de la temperatura absolută din configuraţia de referinţă T_0 : $\theta = T - T_0$.

Vom nota cu t_{ij} componentele tensorului tensiune şi cu m_{ij} componentele tensorului cuplu tensiune care acţionează asupra regiunii B a spaţiului Euclidian tridimensional. De asemenea, cu λ_i vom nota componentele vectorului microtensiune.

Ecuaţiile de bază din teoria dinamică a corpurilor termoelastice cu microstructură, [18], [19], [50], sunt:

- ecuaţiile de mişcare:

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + \varrho F_i &= \varrho \ddot{u}_i, \\ m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + \varrho G_i &= I_{ij} \ddot{\varphi}_j; \end{aligned} \tag{3.1}$$

- ecuaţiile de echilibru ale forţelor care acţionează asupra corpului

$$\lambda_{i,i} - s + \varrho L = J\ddot{\omega}. \tag{3.2}$$

Ecuaţia energiei este dată de:

$$\varrho T_0 \dot{\eta} = q_{i,i} + \varrho r. \tag{3.3}$$

Pentru un material termoelastic cu microstructură anizotropc şi omogen, ecuaţiile constitutive au următoarea formă:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijrs}\,\varepsilon_{rs} + B_{ijrs}\mu_{rs} + D_{ijr}\gamma_r + a_{ij}\omega - E_{ij}\theta, \\ m_{ij} &= B_{rsij}\,\varepsilon_{rs} + C_{ijrs}\mu_{rs} + E_{ijr}\gamma_r + b_{ij}\omega - D_{ij}\theta, \\ \lambda_i &= D_{rsi}\,\varepsilon_{rs} + E_{rsi}\mu_{rs} + C_{ij}\gamma_j + d_i\omega - L_i\theta, \\ s &= a_{ij}\,\varepsilon_{ij} + b_{ij}\mu_{ij} + d_i\gamma_i + m\omega - \alpha\theta, \\ \eta &= \eta_0 + E_{ij}\,\varepsilon_{ij} + D_{ij}\mu_{ij} + L_i\gamma_i + \alpha\omega + \frac{a}{T_0}\theta, \\ q_i &= k_{ij}\theta_{,j}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

unde A_{ijrs}, B_{ijrs}, C_{ijrs}, D_{ijr}, E_{ijr}, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_i, E_{ij}, D_{ij}, L_i, m, α, a şi k_{ij} sunt coeficienţii constitutivi caracteristici.

Componentele tensorului deformaţie ε_{ij}, μ_{ij} şi γ_i sunt definiţi de ecuaţiile geometrice:

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{ijk}\varphi_k,\ \mu_{ij=}\varphi_{j,i},\ \gamma_i = \omega_{,i}, \tag{3.5}$$

unde ε_{ijk} este simbolul alternant.

Coeficienţii constitutivi respectă următoarele relaţii de simetrie:

$$A_{ijrs} = A_{rsij},\ C_{ijrs} = C_{rsij},\ C_{ij} = C_{ji},\ k_{ij} = k_{ji}. \tag{3.6}$$

Se poate considera o constantă pozitivă λ_0 care există astfel încât:

$$I_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda_0\xi_i\xi_i,\ \forall\xi_i.$$

De asemenea, legea a doua a termodinamicii implică că:

$$k_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0,\ \forall\xi_i. \tag{3.7}$$

Vom nota în continuare cu t_i componentele tracţiunii de suprafaţă, m_i componentele cuplului de suprafaţă, p tracţiunea de microsuprafaţă şi q fluxul termic. Aceste cantităţi sunt definite de:

$$t_i = t_{ji}n_j,\ m_i = m_{ji}n_j,\ p = \lambda_i n_i,\ q = q_i n_i,$$

în punctele regulate ale suprafeţei ∂B.
Aici, n_i sunt componentele normalei exterioare la suprafaţa ∂B.

Împreună cu sistemul de ecuaţii (3.1)-(3.5) vom considera următoarele condiţii iniţiale:

$$\begin{aligned} u_i(x,0) = u_i^0(x), \;\; \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x), \\ \varphi_i(x,0) = \varphi_i^0(x), \;\; \dot{\varphi}_i(x,0) = \varphi_i^1(x), \; x \in \bar{B} \\ \omega(x,0) = \omega^0(x), \;\; \dot{\omega}(x,0) = \omega^1(x) \\ \theta(x,0) = \theta^0(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

şi următoarele condiţii pe frontieră:

$$\begin{aligned} u_i = \bar{u}_i \;\text{ pe }\; \partial B_1 \times [0,t_0), \; t_i = \bar{t}_i \;\text{ pe }\; \partial B_1^c \times [0,t_0), \\ \varphi_i = \bar{\varphi}_i \;\text{ pe }\; \partial B_2 \times [0,t_0), \; m_i = \bar{m}_i \;\text{ pe }\; \partial B_2^c \times [0,t_0), \\ \omega = \bar{\omega} \;\text{ pe }\; \partial B_3 \times [0,t_0), \; p = \bar{p} \;\text{ pe }\; \partial B_3^c \times [0,t_0), \\ \theta = \bar{\theta} \; on \; \partial B_4 \times [0,t_0), \; q = \bar{q} \;\text{ pe }\; \partial B_4^c \times [0,t_0), \end{aligned} \tag{3.9}$$

unde t_0 este un moment de timp care poate fi infinit.

Prin soluţie a problemei mixte cu date iniţiale şi pe frontieră pentru corpurile dipolare termoelastice cu goluri într-un cilindru $\Omega_0 = B \times [0,t_0)$ se înţelege mulţimea ordonată $(u_i,\ \varphi_i,\ \omega,\ \theta)$ care satisface ecuaţiile (3.1), (3.2) şi (3.3) pentru orice $(x,t) \in \Omega_0$, condiţiile pe frontieră (3.9) şi condiţiile iniţiale (3.8).

3.2 Rezultate principale

Fie u şi v funcţii definite pe $\bar{B} \times [0,\infty)$ şi continue pe $[0,\infty)$ în raport cu variabila timp t, pentru fiecare variabilă spaţială $x \in \bar{B}$.
Notăm cu $u * v$ **produsul de convoluţie** al lui u cu v, care este dat de relaţia de mai jos:

$$(u * v)(x,t) = \int_0^t u(x,t-\tau)v(x,\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Introducem în continuare notaţiile:

$$\begin{aligned} g(t) = t,\ h(t) = 1,& \\ f_i = \varrho g * F_i + \varrho \left[t u_i^1(x) + u_i^0(x) \right],& \\ g_i = \varrho g * G_i + I_{ij} \left[t \varphi_j^1(x) + \varphi_j^0(x) \right],& \\ l = \varrho g * L + J \left[t \omega^1(x) + \omega^0(x) \right],& \\ w = \varrho h * r + \varrho T_0 \eta_0& \end{aligned} \tag{3.11}$$

Urmând aceeaşi procedură folosită de Ieşan în [41], este uşor să se demonstreze următorul rezultat, care ne permite să oferim o formulare alternativă a problemei iniţiale şi cu date pe frontieră în care datele iniţiale sunt încorporate în câmpul de ecuaţii. Teorema următoare are ca scop eliminarea factorilor de inerţie.

Teorema 3.1. *Funcţiile* $u_i,\ \varphi_{jk},\ \sigma,\ \theta,\ \tau_{ij},\ \eta_{ij},\ \mu_{ijk}$ *şi* q_i *satisfac ecuaţiile* (3.1)*,* (3.2)*,* (3.3) *şi condiţiile iniţiale* (3.8) *dacă şi numai dacă satisfac următorul sistem de ecuaţii:*

$$\begin{aligned} g * t_{ji,j} + f_i = \varrho u_i& \\ g * (m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk}) + g_i = I_{ij} \varphi_j& \\ g * (\lambda_{i,i} - s) + l = J\omega& \\ h * q_{i,i} + w = \varrho T_0 \eta& \end{aligned} \tag{3.12}$$

În următoarele estimări, vom folosi formularea (3.12) a problemei mixte. Dorim să găsim comportamentul mediului considerat atunci când este inclus în B şi există o suprafaţă discontinuă Σ pentru vectorii deplasări şi microrotaţie, pentru funcţia microstructură şi temperatură. Părţile lui Σ sunt notate cu Σ^- şi Σ^+.

Fie ν_i componentele versorului normală la suprafaţa Σ, având sensul de parcurgere de la $(-)$ către $(+)$.
În această situaţie, pe suprafaţa Σ avem condiţiile

$$\begin{aligned} u_i^+ - u_i^- = U_i,\ t_{ji}^+ n_j = t_{ji}^- n_j& \\ \varphi_i^+ - \varphi_i^- = \Phi_i,\ m_{ij}^+ n_j = m_{ij}^- n_j& \\ \omega^+ - \omega^- = \Psi,\ \lambda_j^+ n_j = \lambda_j^- n_j& \\ \theta^+ - \theta^- = \Theta,\ q_j^+ n_j = q_j^- n_j& \end{aligned} \tag{3.13}$$

unde f^+ şi f^- sunt limitele funcţiei $f(x)$ când x atinge un punct al părţii $(+)$ sau $(-)$ al suprafeţei Σ şi U_i, Φ_i, Ψ şi Θ sunt funcţii predefinite. În acest mod putem

considera ecuaţiile (3.12) în domeniul $B \setminus \Sigma$.
Considerăm în continuare două sisteme diferite de încărcări ale corpului:

$$\mathcal{G}^{(\alpha)} = \Big\{ F_i^{(\alpha)},\ G_i^{(\alpha)},\ L^{(\alpha)},\ r^{(\alpha)},\ \bar{u}_i^{(\alpha)},\ \bar{\varphi}_i^{(\alpha)},\ \bar{\omega}_i^{(\alpha)},\ \bar{\theta}^{(\alpha)},$$
$$\bar{t}_i^{(\alpha)},\ \bar{m}_i^{(\alpha)},\ \bar{h}^{(\alpha)},\ \bar{q}^{(\alpha)},\ U_i,\ \Phi_i,\ \Psi,\ \Theta \Big\},\ \alpha = 1, 2$$

şi două soluţii corespunzătoare:

$$\mathcal{S}^{(\alpha)} = \Big\{ u_i^{(\alpha)},\ \varphi_i^{(\alpha)},\ \omega^{(\alpha)},\ \theta^{(\alpha)},\ \varepsilon_{ij}^{(\alpha)},\ \mu_{ij}^{(\alpha)},\ t_{ij}^{(\alpha)},\ m_{ij}^{(\alpha)},\ \lambda_i^{(\alpha)},\ s^{(\alpha)},\ q_i^{(\alpha)} \Big\}, \alpha = 1, 2$$

Pentru uşurarea calculelor, introducem notaţiile:

$$\begin{aligned} &t_i = t_{ij} n_j,\ T_i = t_{ij}^{+} n_j \\ &m_i = m_{ij} n_j,\ M_i = m_{ij}^{+} n_j \\ &\lambda = \lambda_i n_i,\ \Lambda = \lambda_i^{+} n_i \\ &q = q_i n_i,\ Q = q_i^{+} n_i \end{aligned} \tag{3.14}$$

În teorema următoare demonstrăm o relaţie de reciprocitate de tip Betti care constituie un rezultat teoretic puternic în evaluarea teoriei producerii cutremurelor şi în studiile legate de propagarea undelor seismice. Acest rezultat poate fi interpretat astfel: un efect asupra unui mediu poate fi stabilit pe baza unui efect cunoscut deja.

Teorema 3.2. *Dacă un corp termoelastic cu microstructură este supus la două sisteme de încărcări $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ atunci între soluţiile corespunzătoare $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ există*

următoarea relaţie de reciprocitate:

$$\int_B \left(f_i^{(1)} * u_i^{(2)} + g_i^{(1)} * \varphi_i^{(2)} + l^{(1)} * \omega^{(2)} - \frac{1}{T_0} g * w^{(1)} * \theta^{(2)} \right) dV +$$
$$+ \int_{\partial B} g * \left(t_i^{(1)} * u_i^{(2)} + m_i^{(1)} * \varphi_i^{(2)} + \lambda^{(1)} * \omega^{(2)} - \frac{1}{T_0} h * q^{(1)} * \theta^{(2)} \right) dA -$$
$$- \int_\Sigma g * \left(T_i^{(1)} * U_i^{(2)} + M_i^{(1)} * \Phi_i^{(2)} + \Lambda^{(1)} * \Psi^{(2)} - \frac{1}{T_0} h * Q^{(1)} * \Theta^{(2)} \right) dA = \quad (3.15)$$
$$= \int_B \left(f_i^{(2)} * u_i^{(1)} + g_i^{(2)} * \varphi_i^{(1)} + l^{(2)} * \omega^{(1)} - \frac{1}{T_0} g * w^{(2)} * \theta^{(1)} \right) dV +$$
$$+ \int_{\partial B} g * \left(t_i^{(2)} * u_i^{(1)} + m_i^{(2)} * \varphi_i^{(1)} + \lambda^{(2)} * \omega^{(1)} - \frac{1}{T_0} h * q^{(2)} * \theta^{(1)} \right) dA -$$
$$- \int_\Sigma g * \left(T_i^{(2)} * U_i^{(1)} + M_i^{(2)} * \Phi_i^{(1)} + \Lambda^{(2)} * \Psi^{(1)} - \frac{1}{T_0} h * Q^{(2)} * \Theta^{(1)} \right) dA$$

Pentru a ilustra rezultatele teoretice obţinute în secţiunile anterioare, prezentăm câteva rezultate numerice luând în considerare condiţiile iniţiale date în relaţiile (3.8).

Fig. 3.1 arată variaţia 3D a deplasării în raport cu timpul şi spaţiul. Deoarece noi suntem interesaţi doar de valorile pozitive ale timpului, se observă că deplasarea creşte rapid.

Variaţia 3D a funcţiei microstructură în raport cu timpul şi spaţiul este prezentată în figura 3.2. Se observă că pentru o creştere a timpului funcţia microstructură tinde să devină constantă şi suprafaţa microstructură devine paralelă cu planul xOt.

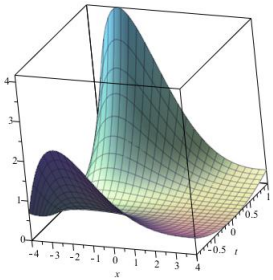

Figura 3.1: Variaţia deplasării $u(x,t)$

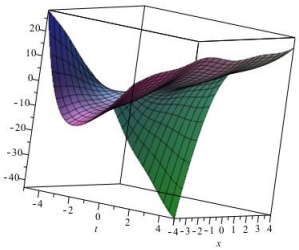

Figura 3.2: Variaţia lui $\omega(x,t)$

În figura 3.3 este reprezentată variaţia funcţiei microrotaţie, iar în figura 3.4 este reprezentată variaţia temperaturii cu creşterea lui x.

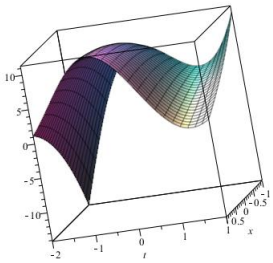

Figura 3.3: Variaţia lui $\phi(x,t)$

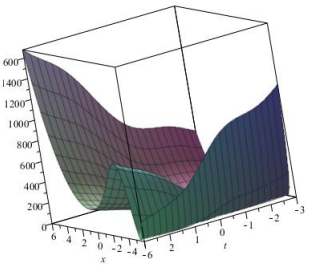

Figura 3.4: Variaţia lui $\theta(x,t)$

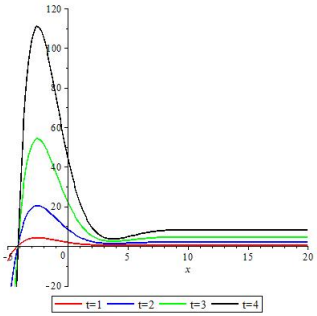

Figura 3.5: Comportamentul deplasării $u(x,t)$ la diferite valori de timp

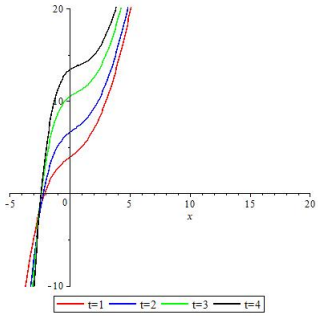

Figura 3.6: Comportamentul funcţiei microstructură $\omega(x,t)$ la diferite valori de timp

Fig. 3.5 prezintă profilul deplasărilor $u(x,t)$ pentru x la diferite valori de timp. Deplasarea atinge un maxim pentru toţi timpii aleşi pentru $x \in (-2.5; -2.35)$. Deplasarea este o funcţie crescătoare în raport cu spaţiul pentru $x \in [-5; -2.5] \cup [3.4; 6.3]$, şi este o funcţie descrescătoare pentru $x \in (-2.5; 3.4)$ şi tinde la o stare stabilă.

Fig. 3.6 prezintă profilul microstructurii $\omega(x,t)$ în raport cu x la diferite momente de timp. Microstructura este o funcţie crescătoare în raport cu timpul.

Profilul funcţiei microrotaţie $\phi(x,t)$ este prezentat în figura 3.7 pentru patru momente de timp. Funcţia microrotaţie este o funcţie descrescătoare în raport cu timpul, aşa cum se poate observa în figura 3.7.

Fig. 3.8 prezintă profilul temperaturilor $\theta(x,t)$ pentru x la diferite momente de timp. Temperatura corpului este o funcţie crescătoare în raport cu timpul pentru $x > 0$.

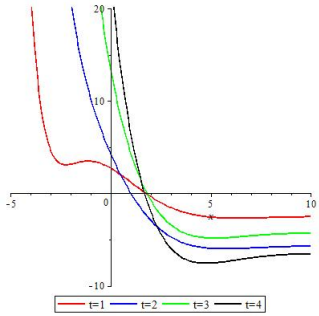

Figura 3.7: Profilul microrotaţiei $\phi(x,t)$ la diferite valori de timp

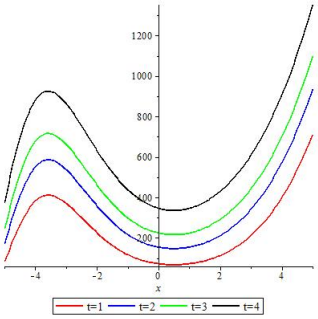

Figura 3.8: Profilul temperaturilor $\theta(x,t)$ la diferite valori de timp

Se observă că pentru valori mai mari decât $x = 3.2$ vectorul deplasare devine constant pentru un anumit timp considerat. Funcția microstructură crește asimptotic pentru $x = 5$. Vectorul microrotație se stabilizează pentru orice moment de timp când x este în intervalul $(3.6,\ 3.85)$. Temperatura crește pentru $x \in (-5,\ -3.5)$, descrește pentru $x \in (-3.5,\ 0)$ și crește asimptotic pentru $x = 5$.

În absența discontinuităților obținem generalizarea în contextul termoelasticității corpurilor termoelastice cu microstructură, a rezultatelor anterioare stabilite în termoelastodinamica clasică.

Deducem că efectul discontinuităților de-a lungul suprafeţei Σ poate fi reprezentat de sarcini suplimentare externe ale corpului și de alimentarea cu căldură.

Deși aceste discoontinuităţi ar trebui să acționeze într-un mediu ideal și este evident că nu pot reprezenta forțe reale care acționează în mediul real, ele pot furniza totuși, așa cum s-a arătat în lucrările [35], [36] şi [44], un instrument teoretic util deoarece dacă două dislocări au aceeași forță echivalentă, ele emit aceeași radiație.

Capitolul 4

Comportamentul spaţial în termoelasto-dinamica corpurilor cu dublă porozitate

Mediile elastice poroase sunt un caz special de solide cu microstructură. Bazele studiilor privind materialele poroase sunt stabilite de Goodman și teoria granulară a lui Cowin, [33]. În această teorie, densitatea de masă este scrisă ca produsul dintre două funcții: densitatea materialului matrită și funcția porozitate (fracția volumetrică).

În cazul porozității duble a unui material, cele două tipuri de porozitate sunt date de: o macroporozitate legată de porii corpului și o microporozitate dată de golurile existente în corpul solid. Interesul față de materiale cu porozitate dublă datează cu mai mult de cincizeci de ani în urmă. Barenblatt și colaboratorii, [5], [4] au propus un model matematic pentru corpurile cu structură dublă de porozitate.

Imposibilitatea localizării în timp a soluțiilor este demonstrată de Quintanilla, [65] în cazul termoelasticității liniare cu goluri, însă, nu a fost încă tratată în cazul materialelor cu dublă porozitate.

Problema înapoi în timp a fost considerată prima dată de Serrin, [66], care a stabilit rezultate de unicitate pentru ecuaţiile Navier-Stokes înapoi în timp. Criterii

de unicitate și stabilitate pentru ecuațiile Navier-Stokes înapoi în timp au fost demonstrate mai târziu de Knops și Payne, [45] și Galdi și Straughan, [31].

În contextul teoriei liniare a dinamicii termoelasticității, problema înapoi în timp pentru medii poroase este considerată a fi o problemă cu date pe frontieră, astfel încât datele finale sunt atribuite la momentul $t = 0$. Criterii de unicitate pentru soluția problemei înapoi în timp pentru medii poroase au fost obținute de Pasarella& co, [62].

Acest capitol este structurat astfel: secțiunea 2 descrie ecuațiile de bază pentru problema înapoi în timp în cazul materialelor cu structură dublă de porozitate și enumeră condițiile impuse parametrilor. Secțiunea 3 se referă la imposibilitatea localizării în timp a soluțiilor pentru problema înapoi în timp. În secțiunea 4 este obţinută o alternativă Phragmen-Lindelof pentru cazul cilindrilor semi-infiniţi. În finalul studiului se obține o limită superioară pentru amplitudine atunci când soluția descrește în timp. În secțiunile 5-7 este tratată problema înapoi în timp în cazul materialelor cu structură dublă de porozitate și micropemperaturi.

4.1 Ecuaţii de bază

Ecuațiile de evoluție care guvernează problema termoelasticității cu structura de porozitate dublă sunt:

$$\begin{aligned} t_{ji,j} &= \rho_0 \ddot{u}_i \\ \sigma_{j,j} + \xi &= k_1 \ddot{\phi} \\ \tau_{j,j} + \zeta &= k_2 \ddot{\psi} \end{aligned} \tag{4.1}$$

unde: ρ_0 este densitatea de masă, k_1, k_2 sunt coeficienții de inerție echilibrată, σ_j, τ_j sunt vectorii tensiune echilibraţi, ξ, ζ sunt forţele intrinseci echilibrate ale corpului, t_{ij} sunt tensorii tensiune, u_i este deplasarea şi ϕ, ψ sunt câmpurile de volum fracţional din configuraţia de referinţă.

Ecuaţia energiei are forma:

$$\rho_0 T_0 \dot{\eta} = Q_{j,j} \tag{4.2}$$

unde T_0 este temperatura constantă absolută a corpului din configuraţia de referinţă, η este entropia, Q_j este fluxul de căldură.

Considerăm următoarele ecuaţii constitutive ale teoriei liniare pentru materile centrosimetrice:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl}u_{k,l} + B_{ij}\phi + D_{ij}\psi - \beta_{ij}\theta \\ \sigma_i &= \alpha_{ij}\phi_{,j} + b_{ij}\psi_{,j} \\ \tau_i &= b_{ji}\phi_{,j} + \gamma_{ij}\psi_{,j} \\ \xi &= -B_{ij}u_{i,j} - \alpha_1\phi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta \\ \zeta &= -D_{ij}u_{i,j} - \alpha_3\phi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta \\ \rho_0\eta &= \beta_{ij}u_{i,j} + \gamma_1\phi + \gamma_2\psi + a\theta \\ Q_i &= \kappa_{ij}\theta_{,j} \end{aligned} \tag{4.3}$$

unde κ_{ij} este tensorul de conductivitate termică, β_{ij} este tensorul dilatării termice, C_{ijkl} este tensorul de elasticitate, $B_{ij}, D_{ij}, \alpha_{ij}, b_{ij}, \gamma_{ij}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, a$ sunt funcţii care sunt tipice în această teorie.

Introducem ecuațiile constitutive în ecuațiile de evoluție. Obținem sistemul de ecuații pentru termoelasticitatea cu porozitate dublă:

$$\rho_0\ddot{u}_i = \left(C_{jikl}u_{k,l} + B_{ji}\phi + D_{ji}\psi - \beta_{ji}\theta\right)_{,j} \tag{4.4a}$$

$$k_1\ddot{\phi} = \left(\alpha_{ij}\phi_{,i} + b_{ij}\psi_{,i}\right)_{,j} - B_{ij}u_{i,j} - \alpha_1\phi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta \tag{4.4b}$$

$$k_2\ddot{\psi} = \left(b_{ij}\phi_{,i} + \gamma_{ij}\psi_{,i}\right)_{,j} - D_{ij}u_{i,j} - \alpha_3\phi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta \tag{4.4c}$$

$$a\dot{\theta} = \frac{\left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\right)_{,j}}{T_0} - \beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \gamma_1\dot{\phi} - \gamma_2\dot{\psi} \tag{4d*}$$

Imposibilitatea localizării soluţiilor sistemului de mai sus constă demosntrarea unicităţii soluţiilor problemei înapoi în timp. Sistemul de ecuații care guvernează problema întoarcerii înapoi în timp este descris de același set de ecuații (4.4a)-(4.4c) în timp ce (4d*) devine

$$a\dot{\theta} = -\frac{\left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\right)_{,j}}{T_0} - \beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \gamma_1\dot{\phi} - \gamma_2\dot{\psi} \tag{4d}$$

deoarece problema cu datele finale s-a transformat într-o problemă cu date inițiale. Coeficienții constitutivi sunt simetrici:

$$C_{ijkl} = C_{klij}; \qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}; \qquad b_{ij} = b_{ji}; \gamma_{ij} = \gamma_{ji}; \qquad \kappa_{ik} = \kappa_{ji}$$

În cele ce urmează trebuie să impunem pozitivitatea tensorului de conductivitate termică κ_{ij}:

$$\kappa_{ij}\eta_i\eta_j \geq k_0\eta_i\eta_i \tag{a.1}$$

pentru fiecare vector η_i, unde $k_0 > 0$.

Vom lua în considerare următoarele ipoteze privind densitatea de masă ρ, coeficienții de inerție k_1 şi k_2 și capacitatea termică a:

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0; \qquad k_1(x) \geq k_0^1 > 0; \qquad k_2(x) \geq k_0^2 > 0; \qquad a(x) \geq a_0 > 0 \tag{a.2}$$

Vom considera $a > 0$ deoarece energia trebuie să fie pozitivă. Astfel, avem următoarea inegalitate

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j} + 2B_{ij}u_{i,j}\phi + \\ +2D_{ij}u_{i,j}\psi + \alpha_1\phi^2 + \alpha_2\psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi > \\ > C^*(u_{i,j}u_{i,j} + \phi_{,i}\phi_{,i} + \psi_{,i}\psi_{,i} + \phi^2 + \psi^2) \end{aligned} \tag{a.3}$$

Ipoteza (a.1) este legată de inegalitatea produsului de entropie care se ia în considerare la efectul termic. Presupunerea (a.2) este legată de pozitivitatea funcţiilor specifice, iar presupunerea (a.3) ne dă informația că energia internă este pozitiv dfinită.

4.2 Imposibilitatea localizării în timp

În această secțiune demonstrăm, pentru un domeniu mărginit B cu frontiera ∂B, imposibilitatea localizării în timp a soluției care constă în demosntrarea unicităţii soluției pentru problema întoarcerii temporale. Presupunem că frontiera ∂B a domeniului B este suficient de netedă pentru a aplica teorema divergenței. Propunem condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{X},0) = \dot{u}_i(\boldsymbol{X},0) = \phi(\boldsymbol{X},0) = \dot{\phi}(\boldsymbol{X},0) = 0 \\ \psi(\boldsymbol{X},0) = \dot{\psi}(\boldsymbol{X},0) = \theta(\boldsymbol{X},0) = 0, \qquad \boldsymbol{X} \in B \end{aligned} \tag{4.5}$$

şi condiţiile pe frontieră:

$$u_i(\boldsymbol{X},t) = \phi(\boldsymbol{X},t) = \psi(\boldsymbol{X},t) = \theta(\boldsymbol{X},t) = 0, \qquad \boldsymbol{X} \in \partial B, t \geq 0 \tag{4.6}$$

În următoarele calcule vrem să obținem expresia energiei interne. Folosind principiul conservării energiei, avem următoarea egalitate:

$$\begin{aligned} E_1(t) =& \frac{1}{2}\int\limits_B \left(\rho_0 \dot{u}_i\dot{u}_i + k_1\dot{\phi}^2 + k_2\dot{\psi}^2 + a\theta^2 + C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}\right) dV + \\ &+ \int\limits_B (\gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j} + 2B_{ij}u_{i,j}\phi + 2D_{ij}u_{i,j}\psi + \\ &+ \alpha_1\phi^2 + \alpha_2 + \psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi\big)\, dV = \int\limits_0^t \int\limits_B \kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} dV ds \end{aligned} \tag{4.7}$$

respectiv:

$$\begin{aligned} E_2(t) =& \frac{1}{2}\int\limits_B \left(\rho_0 \dot{u}_i\dot{u}_i + k_1\dot{\phi}^2 + k_2\dot{\psi}^2 - a\theta^2 + C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}\right) dV + \\ &+ \int\limits_B (\gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j} + 2B_{ij}u_{i,j}\phi + 2D_{ij}u_{i,j}\psi + \\ &+ \alpha_1\phi^2 + \alpha_2 + \psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi\big)\, dV = \\ &= -\int\limits_0^t \int\limits_B \left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} - 2\gamma_1\theta\dot{\phi} - 2\gamma_2\theta\dot{\psi} - 2\dot{u}_i(\beta_{ij}\theta)_{,j}\right) dV ds \end{aligned} \tag{4.8}$$

Luând în considerare ecuațiile de bază (4.4a)-(4d), condiţiile iniţiale (4.5) şi condiţiile pe frontieră (4.6)obţinem egalitatea:

$$\begin{aligned} &\int\limits_B \left(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + k_1\dot{\phi}^2 + k_2\dot{\psi}^2 - a\theta^2\right) dV = \int\limits_B (C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \\ &+ \gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j} + 2B_{ij}u_{i,j}\phi + 2D_{ij}u_{i,j}\psi + \\ &+ \alpha_1\phi^2 + \alpha_2\psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi\big)\, dV \end{aligned} \tag{4.9}$$

În următoarele calcule vrem să demonstrăm imposibilitatea localizării soluțiilor în teoria cu dublă porozitate.

Din (4.8) şi (4.9) avem următoarea expresie pentru $E_2(t)$:

$$E_2(t) = \int\limits_B (C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j} + 2B_{ij}u_{i,j}\phi + \\ + 2D_{ij}u_{i,j}\psi + \alpha_1\phi^2 + \alpha_2\psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi)\, DV = \\ = -\int\limits_0^t \int\limits_B \left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} - 2\gamma_1\theta\dot{\phi} - 2\gamma_2\theta\dot{\psi} - 2\dot{u}_i\left(\beta_{ij}\theta\right)_{,j}\right) dVds$$

Dacă considerăm ε o constantă pozitivă destul de mică, putem scrie expresia energiei sub forma:

$$E(t) = E_2(t) + \varepsilon E_1(t), \qquad \varepsilon \in (0,1)$$

Pentru $\varepsilon \in (0,1)$ avem următoarea relaţie:

$$E(t) = -(1-\varepsilon)\int\limits_0^t \int\limits_B \kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}dVds + 2\int\limits_0^t \int\limits_B \gamma_1\theta\dot{\phi}dVds +$$

$$+2\int\limits_0^t \int\limits_B \gamma_2\theta\dot{\psi}dVds + 2\int\limits_0^t \int\limits_B \dot{u}_i\left(\beta_{ij}\theta\right)_{,j} dVds$$

de unde:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -(1-\varepsilon)\int\limits_B \kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}dVds + 2\int\limits_B \gamma_1\theta\dot{\phi}dVds + 2\int\limits_B \gamma_2\theta\dot{\psi}dVds + 2\int\limits_B \dot{u}_i\left(\beta_{ij}\theta\right)_{,j} dVds$$

Folosind inegalitatea mediilor aritmetică şi geometrică pentru integralele de mai sus, există o constantă pozitivă C astfel încât:

$$\frac{dE}{dt} \leq C\int\limits_B \left(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + k_1\dot{\phi}^2 + k_2\dot{\psi}^2 + a\theta^2\right) dV$$

care este echivalentă cu estimarea: $E(t) \leq \mathcal{C}e^{C^*t}$. Pentru $t = 0$ vom avea estimarea: $E(t) \leq E(0)e^{C^*t}$. Dar, condiţiile iniţiale conduc la $E(t) = 0$ pentru fiecare $t \geq 0$ care este echivalent cu:

$$\dot{u}_i = 0; \dot{\phi} = 0; \dot{\psi} = 0; \theta = 0 \Leftrightarrow u_i = C_1; \phi = C_2; \psi = C_3; \theta = 0$$

Ţinând cont de condiţiile iniţiale (4.5) obţinem că soluția pentru problema noastră este soluția nulă:

$$u_i = 0; \phi = 0; \psi = 0; \theta = 0$$

Acum, putem trage concluzia că dacă $(u_i, \phi, \psi, \theta)$ este o soluție a problemei înapoi în timp (4.4a)-(4d) cu condiţiile iniţiale (4.5) şi condiţiile pe frontieră (4.6), atunci singura soluție a problemei reduse la o problemă cu date iniţiale este soluția nulă $u_i = \phi = \psi = \theta = 0$.

4.3 Alternativa Phragmen-Lindelof

Considerăm că solidul ocupă un cilindru prismatic semi-infinit $B = D \times [0, \infty)$ unde am notat cu D o secțiune transversală în acest cilindru. Presupunem că frontiera acestei secţiuni este o curbă continuu diferenţiabilă pe porţiuni notată cu ∂D suficient de netedă pentru a aplica teorema divergenţei. Notăm cu Π suprafaţa laterală a cilindrului: $\Pi = \partial D \times (0, \infty)$.

Cilindrul este considerat a fi liber de sarcini pe suprafața laterală a frontierei. Condițiile pe frontiera laterală sunt:

$$u_i(\mathbf{X}, t) = 0; \phi(\mathbf{X}, t) = 0; \psi(\mathbf{X}, t) = 0; \theta(\mathbf{X}, t) = 0, (\mathbf{X}, t) \in \Pi \times (0, \infty) \quad (4.10)$$

Pe baza cilindrului sunt considerate următoarele condiții la limită:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, 0, t) = \tilde{u}_i; \phi(x_1, x_2, 0, t) = \tilde{\phi}; \\ \psi(x_1, x_2, 0, t) = \tilde{\psi}; \theta(x_1, x_2, 0, t) = \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (4.11)$$

În această secţiune vom obţine o alternativă Phragmén-Lindelöf, (5.15), pentru soluția dintr-o anumită clasă a problemei determinată de sistemul (4.4a)-(4d) cu condiţiile pe frontieră (4.11) şi cu condiţiile iniţiale nule (4.10). Propunem să estimăm valoarea absolută a unei funcții considerate, $H_\omega(z.t)$ prin intermediul derivatelor sale spațiale.

Definim funcţia:

$$H_\omega(z,t) = \int_0^t \int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[C_{i3kl}u_{k,l} + B_{i3}\phi + D_{i3}\psi - \beta_{3i}\theta\right]\dot{u}_i dads + \\ + \int_0^t \int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[\alpha_{i3}\phi_{,i} + b_{i3}\psi_{,i}\right]\dot{\phi} dads + \\ + \int_0^t \int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[b_{3i}\phi_{,i} + \gamma_{i3}\psi_{,i}\right]\dot{\psi} dads + \\ + \int_0^t \int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[K_{i3}\theta_{,i}\right]\dot{\theta} dads \tag{4.12}$$

unde $K_{ij} = \frac{\kappa_{ij}}{T_0}$.

Aici, notăm cu $D(z)$ secțiunea transversală a cilindrului la o distanță z de bază, care este:

$$D(z) = \{\mathbf{X} \in B | x_3 = z\}$$

Mai mult, vrem să estimăm valoarea absolută a lui H_ω în funcţie de derivata sa spaţială, pentru a obține o inegalitate diferențială, astfel încât:

$$|H_\omega| \leq C_\omega \frac{\partial H_\omega}{\partial z} \tag{4.13}$$

Această inegalitate este cunoscută în studiul estimării spațiale și reprezintă o alternativă Phragmén-Lindelöf.

Pentru următoarele calcule este necesar să se ia în considerare ipoteza (a.3), în această situație, energia internă ne conduce la următoarea inegalitate:

$$\Phi \geq \rho\dot{u}_i\dot{u}_i + k_1\dot{\phi}^2 + k_2\dot{\psi}^2 + a\theta^2 + C^*\left(u_{i,j}u_{i,i} + \phi_{,i}\phi_{,i} + \psi_{,i}\psi_{,i} + \phi^2 + \psi^2\right)$$

Din inegalitatea (4.13) obținem dubla inegalitate:

$$-C_\omega \frac{\partial H_\omega}{\partial z} \leq H_\omega \leq C_\omega \frac{\partial H_\omega}{\partial z}$$

care este echivalentă cu următoarele inegalităţi:

$$-\frac{\partial H_\omega}{\partial z} \leq \frac{1}{C_\omega} H_\omega \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial H_\omega}{\partial z} \geq \frac{1}{C_\omega} H_\omega \tag{4.15}$$

Daca exista $z_0 \geq 0$ astfel încât $H_\omega(z_0, t) > 0$ atunci $H_\omega(z, t) > 0$ pentru $z \geq z_0$. Cu ajutorul lui Flavin, [22], din (4.15) obţinem:

$$H_\omega(z, t) \geq H_\omega(z_0, t) e^{\frac{z - z_0}{C_\omega}} \tag{4.16}$$

Această estimare oferă informaţii în ceea ce priveşte măsura definită în cilindru. Pe baza acestei considerente, observăm că termenul de mai jos:

$$\frac{e^{-2\omega t}}{2} \int\limits_{R(0,z))} \Phi(t) dz + \int\limits_0^t \int\limits_{R(0,z)} e^{-2\omega s} \left[\omega \Phi(s) + K_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j}\right] dads$$

cu $R(0, z) = \{\mathbf{X} \in B | x_3 < z\}$ tinde exponenţial spre infinit. În caz contrar, $H_\omega(z, t) \leq 0$ pentru orice $z \geq 0$.

Conform cu Flavin, [22], o cuadratură pe (4.14) conduce la inegalitatea:

$$-H_\omega(z, t) \leq H_\omega(0, t) e^{-\frac{z}{C_\omega}} \tag{4.17}$$

Ultima inegalitate implică că $H_\omega(z, t) \to 0$ pentru $z \to \infty$. Pe baza acestei estimări observăm că:

$$E_\omega(z, t) \leq E_\omega(0, t) e^{-\frac{z}{C_\omega}}, z \geq 0 \tag{4.18}$$

unde

$$E_\omega(z, t) = \frac{e^{-2\omega t}}{2} \int\limits_{R(z))} \Phi(t) dz + \int\limits_0^t \int\limits_{R(z)} e^{-2\omega s} \left[\omega \Phi(s) + K_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j}\right] dads$$

şi $R(z) = \{\mathbf{X} \in B | z < x_3\}$.

4.4 Limita superioară a lui E_ω în ceea ce privește condițiile la limită

Pentru a avea o descriere completă a estimării (4.17) trebuie să obținem o limită superioară pentru $E_\omega(0,t)$ în ceea ce privește condițiile la limită(4.10). Considerăm în cele ce urmează funcțiile $v_i(x,t), \mu(x,t), \nu(x,t), \xi(x,t)$ astfel încât acestea să îndeplinească condițiile la limită și să tindă către zero atunci când x_3 tinde către ∞:

$$\begin{aligned}
-H_\omega(z,t) = &- \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s} \left[C_{i3kl}u_{k,l} + B_{i3}\phi + D_{i3}\psi - \beta_{3i}\theta\right] \dot{v}_i dads + \\
&+ \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s} \left[\alpha_{i3}\phi_{,i} + b_{i3}\psi_{,i}\right] \dot{\mu} dads + \\
&+ \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s} \left[b_{3i}\phi_{,i} + \gamma_{i3}\psi_{,i}\right] \dot{\nu} dads + \\
&+ \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s} K_{i3}\theta_{,i}\xi dads
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Aplicând teorema divergenței și luând în considerare sistemul de ecuații (4.4a)-(4d), ecuația (4.19) va avea următoarea formă:

$$\begin{aligned}
-H_\omega(z,t) = &\int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \left[\rho_0 \ddot{u}_i \dot{v}_i + \left(k_1 \ddot{\phi} + B_{ij}u_{i,j} + \alpha_1\phi + \alpha_3\psi - \gamma_1\theta\right)\dot{\nu} + \right. \\
&+ \left(k_2\ddot{\psi} + D_{ij}u_{i,j} + \alpha_3\phi + \alpha_2\psi - \gamma_2\theta\right)\dot{\mu} + \\
&\left. + \left(a\dot{\theta} + \beta_{ij}\dot{u}_{i,j} + \gamma_1\dot{\phi} + \gamma_2\dot{\psi}\right)\xi\right] dads + \\
&+ \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \left[C_{ijkl}u_{k,l}\dot{v}_{i,j} + B_{ij}\phi\dot{v}_{i,j} + D_{ij}\psi\dot{v}_{i,j} - \right. \\
&- \beta_{ij}\theta\dot{v}_{i,j} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\dot{\nu}_{,j} + b_{ij}\psi_{,i}\dot{\nu}_{,j} + b_{ij}\phi_{,i}\dot{\nu}_{,j} + \\
&\left. + \gamma_{ij}\psi_{,i}\dot{\nu}_{,j} + K_{ij}\theta_{,i}\xi_{,j}\right] dads
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Luând în considerare inegalitățile mediilor aritmetice şi geometrice, noua formă pentru $-H_\omega(0,t)$ va fi:

$$-H_\omega(0,t) \leq -\varepsilon^* - H_\omega(0,t) + \varepsilon_1^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{v}_i \dot{v}_i dads + \varepsilon_2^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \ddot{v}_i \ddot{v}_i dads +$$
$$+ \varepsilon_3^* e^{-2\omega t} \int_R \dot{v}_i \dot{v} ida + \varepsilon_4^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{\nu}^2 dads + \varepsilon_5^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \ddot{\nu}^2 dads +$$
$$+ \varepsilon_6^* e^{-2\omega t} \int_R \dot{\nu}^2 da + \varepsilon_7^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{\mu}^2 dads + \varepsilon_8^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \ddot{\nu}^2 dads +$$
$$+ \varepsilon_9^* e^{-2\omega t} \int_R \dot{\nu}^2 da + \varepsilon_{10}^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \xi^2 dads + \varepsilon_{11}^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{\xi}^2 dads +$$
$$+ \varepsilon_{12}^* e^{-2\omega t} \int_R \xi^2 da + \varepsilon_{13}^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{v}_{i,j} \dot{v}_{i,j} dads + \varepsilon_{14}^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{\mu}_{,i} \dot{\mu}_{,i} dads +$$
$$+ \varepsilon_{15}^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{\nu}_{,i} \dot{\nu}_{,i} dads + \varepsilon_{14}^* \int_0^t \int_R e^{-2\omega s} \dot{\xi}_{,i} \dot{\xi}_{,i} dads$$

unde ε^* depinde de coeficienții descriși mai sus. În continuare trebuie să luăm în considerare condițiile pe frontieră:

$$v_i = \tilde{u}_i(x_1, x_2, t) e^{-mx_3}; \mu = \tilde{\phi}(x_1, x_2, t) e^{-mx_3}; \tag{4.21}$$
$$\nu = \tilde{\psi}(x_1, x_2, t) e^{-mx_3}; \xi = \tilde{\theta}(x_1, x_2, t) e^{-mx_3}; m > 0$$

Vom considera ε^* suficient de mic. Alegem $\tilde{\varepsilon}_i$ suficient de mic, în mod particular

considerăm $\varepsilon^* = \frac{1}{2}$. Astfel vom obţine estimarea:

$$-H_\omega(0,t) \leq \frac{1}{m}\{\varepsilon_1^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\dot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)\dot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)dads + \varepsilon_{12}^* e^{-2\omega t}\int_{D(0)} \tilde{\theta}^2(x_1,x_2,t)dads +$$

$$+ \varepsilon_2^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\ddot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)\ddot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)dads + \varepsilon_3^* e^{-2\omega t}\int_{D(0)} \dot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)\dot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)dads +$$

$$+ \varepsilon_4^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\dot{\tilde{\phi}}^2(x_1,x_2,t)dads + \varepsilon_5^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\ddot{\tilde{\phi}}^2(x_1,x_2,t)dads +$$

$$+ \varepsilon_6^* e^{-2\omega t}\int_{D(0)} \dot{\tilde{\phi}}^2(x_1,x_2,t)dads + \varepsilon_7^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\dot{\tilde{\psi}}^2(x_1,x_2,t)dads +$$

$$+ \varepsilon_8^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\ddot{\tilde{\psi}}^2(x_1,x_2,t)dads + \varepsilon_9^* e^{-2\omega t}\int_{D(0)} \dot{\tilde{\psi}}^2(x_1,x_2,t)dads +$$

$$+ \varepsilon_{10}^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\tilde{\theta}^2(x_1,x_2,t)dads + \varepsilon_{11}^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}\dot{\tilde{\theta}}^2(x_1,x_2,t)dads +$$

$$+ \varepsilon_{13}^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}[\dot{\tilde{u}}_{i,\alpha}(x_1,x_2,t)\dot{\tilde{u}}_{i,\alpha}(x_1,x_2,t) + m^2\dot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)\dot{\tilde{u}}_i(x_1,x_2,t)]dads +$$

$$+ \varepsilon_{14}^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}[\dot{\tilde{\phi}}_{,\alpha}(x_1,x_2,t)\dot{\tilde{\phi}}_{,\alpha}(x_1,x_2,t) + m^2\dot{\tilde{\phi}}^2(x_1,x_2,t)]dads +$$

$$+ \varepsilon_{15}^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}[\dot{\tilde{\psi}}_{,\alpha}(x_1,x_2,t)\dot{\tilde{\psi}}_{,\alpha}(x_1,x_2,t) + m^2\dot{\tilde{\psi}}^2(x_1,x_2,t)]dads +$$

$$+ \varepsilon_{16}^* \int_0^t \int_{D(0)} e^{-2\omega s}[\dot{\tilde{\theta}}_{,\alpha}(x_1,x_2,t)\tilde{\theta}_{,\alpha}(x_1,x_2,t) + m^2\tilde{\theta}^2(x_1,x_2,t)]dads\}$$

Prin urmare, am obținut o estimare pentru $-H_\omega(0,t)$ care va conduce la estimarea $E_\omega(z,t)$ pentru (4.17).

4.5 Ecuaţii de bază pentru materiale cu dublă porozitate şi microtemperaturi

Scopul acestui studiu este de a arăta că în cazul termoelasticității cu structură dublă de porozitate și microtemperaturi singura soluție care descreşte după un

timp finit este soluția nulă. În rezultatele anterioare, [7], [8], [47], [48], autorii au demonstrat că după o mică perioadă de timp deformările termomecanice sunt foarte mici și pot fi neglijate. Prezentul studiu reprezintă o continuare a cercetării privind imposibilitatea localizării în elasticitatea termoporoasă cu microtemperaturi realizată de Quintanilla [64].

Ecuațiile de evoluție care guvernează problema termoelasticității cu structura dublă de porozitate pentru materialele cu microtemperatură în absența termenilor de alimentare sunt, [7], [8]:

$$t_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i; \qquad \sigma_{,j} + \xi = k_1 \ddot{\phi}; \qquad \tau_{j,j} + \zeta = k_2 \ddot{\psi}; \tag{4.22}$$

unde: ρ este densitatea de masă, k_1, k_2 sunt coeficienții de inerție echilibrată, σ_j, τ_j sunt vectorii de tensiune echilibrați, ξ, ζ sunt forțele echilibrate intrinseci ale corpului , t_{ji} sunt tensorii de tensiune, u_i este deplasarea, ϕ, ψ sunt câmpurile fracțiunii de volum din configurația de referință.

Ecuația energiei are următoarea formă:

$$\rho T_0 \dot{\eta} = Q_{j,j} \tag{4.23}$$

unde T_0 este temperatura absolută a corpului din configurația de referință considerată constantă, η este entropia, Q_j este fluxul de căldură.

Ecuația energiei poate fi exprimată ca:

$$\rho \dot{\varepsilon}_i = Q_{ji,j} + Q_i - q_i \tag{4.24}$$

unde ε_i reprezintă componentele gradientului de temperatură și q_i este media fluxului de micro-căldură, Q_{ji} este primul tensor al momentului fluxului de căldură.

Introducând ecuațiile constitutive în ecuațiile de evoluție, se obține sistemul de ecuații pentru termoelasticitatea cu porozitate dublă și microtemperaturi:

$$\rho \ddot{u}_i = \left(C_{jikl} u_{k,l} + B_{ji}\phi + D_{ij}\psi - \beta_{ij}\theta\right)_{,j} \tag{4.56.a}$$

$$k_1 \ddot{\phi} = \left(\alpha_{ij}\phi_{,i} + b_{ij}\psi_{,i} - N_{ij}T_j\right)_{,j} - B_{ij}u_{i,j} - \alpha_1\phi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta \tag{4.56.b}$$

$$k_2 \ddot{\psi} = \left(b_{ij}\phi_{,i} + \gamma_{ij}\psi_{,i} - M_{ij}T_j\right)_{,j} - D_{ij}u_{i,j} - \alpha_3\phi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta \tag{4.56.c}$$

$$a\dot{\theta} = -\beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \gamma_1\dot{\phi} - \gamma_2\dot{\psi} + \frac{1}{T_0}\left(\kappa_{ij}\theta_{,j} + L_{ij}T_j\right)_{,j} \tag{4.56.d*}$$

$$P_{ij}\dot{T}_j = \left(A_{ijrs}T_{s,r}\right)_{,j} - R_{ij}T_j - \lambda_{ij}\theta_{,j} - N_{ij}\dot{\phi}_{,j} - M_{ij}\dot{\psi}_{,j} \tag{4.56.e*}$$

Imposibilitatea localizării în timp a soluţiilor sistemului de mai sus constă în demonstrarea unicităţii soluţiei problemei înapoi în timp. Sistemul de ecuaţii care descrie problema înapoi în timp este dat de acelaşi set de ecuaţii ca (4.56.a)-(4.56.c) în timp ce (4.56.d*) şi (4.56.e*) se transformă în:

$$a\dot{\theta} = -\beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \gamma_1\dot{\phi} - \gamma_2\dot{\psi} - \frac{1}{T_0}\left(\kappa_{ij}\theta_{,j} + L_{ij}T_j\right)_{,j} \tag{4.5.d}$$

$$P_{ij}\dot{T}_j = -\left(A_{ijrs}T_{s,r}\right)_{,j} + R_{ij}T_j + \lambda_{ij}\theta_{,j} - N_{ij}\dot{\phi}_{,j} - M_{ij}\dot{\psi}_{,j} \tag{4.5.e}$$

Deoarece coeficienţii constitutivi sunt simetrici, au loc relaţiile:

$$C_{ijkl} = C_{klij}; \alpha_{ij} = \alpha_{ji}; b_{ij} = b_{ji}; B_{ij} = B_{ji}, D_{ij} = D_{ji}.$$

Pentru cazul materialelor anizotrope şi omogene putem face presupunerea că tensorii $A_{ijrs}, P_{ij}, N_{ij}, M_{ij}, L_{ij}, R_{ij}, \lambda_{ij}$ sunt de asemenea simetrici:

$$A_{ijkl} = A_{lkij}, P_{ij} = P_{ji}, M_{ij} = M_{ji}, L_{ij} = L_{ji}, N_{ij} = N_{ji}, R_{ij} = R_{ji}, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

În contextul teoriilor cu microtemperatură ca o consecinţă a inegalităţii lui Clausius-Duhem, avem următoarea presupunere, [7]:

$$\kappa_{ij}\theta_{,i} + \left(L_{ij} + T_0\lambda_{ij}\right)\theta_{,j}T_i + T_0R_{ij}T_iT_j + T_0A_{jirs}T_{i,j}T_{s,r} \geq 0 \tag{4.25}$$

În cele ce urmează este necesară impunerea unor condiţii pentru unele funcţii şi tensori:

$$\rho(X) \geq \rho_0 > 0; \quad k_1(X) \geq k_0^1 > 0; \quad k_2(x) \geq k_0^2 > 0; \quad a(x) \geq a_0 > 0; \quad P_{ij}\xi_i\xi_j \geq p_0\xi_i\xi_i, p_0 > 0 \tag{a.1}$$

$$\kappa_{ij}\xi_i\xi_j + (L_{ij} + T_0\lambda ij)\xi_j\zeta_i + T_0R_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq C_0(\xi_i\xi_i + \zeta_i\zeta_i), C_0 > 0, \quad (\forall)\xi_i\zeta_i \tag{a.2}$$

$$C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j} + 2B_{ij}u_{i,j}\phi + 2D_{ij}u_{i,j}\psi + \alpha_1\phi^2 + \alpha_2\psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi \geq$$
$$\geq C^*\left(u_{i,j}u_{i,j} + \phi_{,i}\phi_{,i} + \psi_{,i} + \psi_{,i} + \phi^2 + \psi^2\right), \quad \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0; \quad b_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0, \quad (\forall)\xi_i \tag{a.3}$$

$$A_{jirs}\xi_{ij}\xi_{sr} \geq C_1\xi_{ij}\xi_{ij}, C_1 > 0, (\forall)\xi_{ij} \tag{a.4}$$

Presupunerea (a.1) este legată de caracteristicile termomecanice, (a.2) şi (a.4) sunt consecinţe ale inegalităţii Clausius-Duhem, iar (a.3) dă informaţia că energia internă este pozitiv definită.

4.6 Rezultate principale pentru medii dublu poroase cu microtemperaturi

Să considerăm un domeniu mărginit B cu frontiera ∂B. Studiul imposibilității localizării în timp a soluțiilor problemei întoarcerii în timp este echivalent cu studiul unicității soluțiilor pentru problema menționată dată de sistemul de ecuații (4.56.a) - (4.56.e). Pentru a dovedi unicitatea soluțiilor pentru problema înapoi în timp, este suficient să arătăm că numai soluția nulă satisface problema noastră cu condiții inițiale și la limită nule. În următoarele calcule presupunem că domeniul B este suficient de neted pentru a aplica teorema divergenţei.

Condiţiile iniţiale sunt:

$$u_i(\boldsymbol{X},0)=\dot{u}_i(\boldsymbol{X},0)=\phi(\boldsymbol{X},0)=\dot{\phi}(\boldsymbol{X},0)=0 \qquad (4.26)$$
$$\psi(\boldsymbol{X},0)=\dot{\psi}(\boldsymbol{X},0)=\theta(\boldsymbol{X},0)=0, \qquad T_i(\boldsymbol{X},0)=0 \qquad \boldsymbol{X}\in B$$

şi condiţiile pe frontieră:

$$u_i(\boldsymbol{X},t)=\phi(\boldsymbol{X},t)=\psi(\boldsymbol{X},t)=\theta(\boldsymbol{X},t)=T_i(\boldsymbol{X},0)=0, \qquad \boldsymbol{X}\in\partial B, t\geq 0 \qquad (4.27)$$

Folosind teorema divergenței și ținând seama de condițiile la limită, pe baza principiului conservării energiei, avem:

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\int\limits_B \Big(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i+k_1\dot{\phi}^2+k_2\dot{\psi}^2+a\theta^2+P_{ij}T_jT_j+C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l}+2B_{ij}\phi u_{i,j}+$$
$$+\ 2D_{ij}\psi u_{i,j}+\alpha_{ij}\phi_{,j}\phi_{,j}+\gamma_{ij}\psi_{,j}\psi_{,j}+2b_{ij}\psi_{,j}\phi_{,j}+\alpha_1\phi^2+2\alpha_3\phi\psi+\alpha_2\psi^2\Big)\,dV= \qquad (4.28)$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_B\left[\frac{1}{T_0}\left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}+L_{ij}T_i\theta_{,j}\right)+A_{ijrs}T_{s,r}T_{i,j}+R_{ij}T_iT_j+\lambda_{ij}\theta_{,j}T_i\right]dVds$$

$$E_2(t)=\frac{1}{2}\int\limits_B \left(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i+k_1\phi^2+k_2\psi^2-a\theta^2-P_{ij}T_jT_j+C_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j}+2B_{ij}\phi u_{i,j}+2D_{ij}\psi u_{i,j}+\right.$$
$$\left.+\alpha_{ij}\phi_{,j}\phi_{,j}+2b_{ij}\psi_{,j}\phi_{,j}+\alpha_1\phi^2 2\alpha_3\phi\psi+\gamma_{ij}\psi_{,j}\psi_{,j}+\alpha_2\psi^2\right)dV= \tag{4.29}$$
$$=-\int\limits_0^t\left[\frac{1}{T_0}\int\limits_B\left(\kappa_{ij}\theta_{,j}\theta_{,j}+L_{ij}T_j\theta_{,j}+A_{ijrs}T_{s,r}T_{j,i}+R_{ij}T_jT_j+\lambda_{ij}\theta_{,j}T_j\right)dV\right]ds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_B\left[\left(\beta_{ij}\theta\right)_{,j}\dot{u}_i-\left(M_{ij}T_j\right)\dot{\psi}-\left(N_{ij}T_j\right)\dot{\phi}+\gamma_1\theta\dot{\phi}+\gamma_2\theta\dot{\psi}\right]dVds$$

În următoarea teoremă dorim să demonstrăm imposibilitatea localizării soluțiilor în teoria cu dublă porozitate și microtemperaturi.

Teorema 4.1. *Fie* $(u_i,\phi,\psi,\theta,T_i)$ *o soluție a problemei înapoi în timp (4.56.a) - (4.56.e) redusă la o problemă cu date inițiale, cu condițiile inițiale* (4.26) *şi condițiile pe frontieră* (4.27)*. Singura soluţie a problemei considerate este soluţia nulă* $u_i=\phi=\psi=\theta=T_i=0$*.*

4.7 Estimarea spaţială a mediilor cu dublă porozitate şi microtemperaturi

Considerăm un cilindru prismatic semi-infinit $B=D\times[0,\infty)$ care este ocupat de un corp cu structură de porozitate dublă şi cu microtemperaturi. Cu Dnotăm secţiunea transversală în cilindru. Frontiera secţiunii este o curbă continuu diferenţiabilă pe porţiuni notată cu ∂D pentru a permite aplicarea teoremei divergenţei. Suprafaţa laterală a cilindrului este $\Pi=\partial D\times(0,\infty)$. Cilindrul este considerat a fi liber de sarcini pe suprafața laterală a frontierei.
Condițiile inițiale sunt:

$$u_i(\mathbf{X},t)=0;\phi(\mathbf{X},t)=0;\psi(\mathbf{X},t)=0;\theta(\mathbf{X},t)=0;T_i(\mathbf{X},T)=0;\qquad(\mathbf{X},t)\in\Pi\times(0,\infty) \tag{4.30}$$

Pe baza cilindrului se presupun următoarele condiţii pe frontieră:

$$u_i(x_1,x_2,0,t)=\tilde{u}_i;\phi(x_1,x_2,0,t)=\tilde{\phi};$$
$$\psi(x_1,x_2,0,t)=\tilde{\psi};\theta(x_1,x_2,0,t)=\tilde{\theta};T_i(x_1,x_2,0,t)=\tilde{T}_i \tag{4.31}$$

Pentru problema determinată de sistemul (4.5.a) - (4.5.e) cu condiţiile iniţiale (4.30) şi condiţiile pe frontieră (4.31) vom obţine o alternativă Phragmen-Lindelof necesară pentru interpretarea comportamentului soluţiei problemei cu date pe frontieră. Scopul nostru în această secţiune este de a estima valoarea absolută a funcţiei definite H_ω din (4.32) prin intermediul derivatelor spaţiale.

Definim funcţia:

$$\begin{aligned}H_\omega(z,t)=&\int_0^t\int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[C_{i3kl}u_{k,l}+B_{i3}\phi+D_{i3}\psi-\beta_{3i}\theta\right]\dot{u}_i dads+\\&+\int_0^t\int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[\alpha_{i3}\phi_{,i}+b_{i3}\psi_{,i}-N_{i3}T_i\right]\dot{\phi}dads+\\&\int_0^t\int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left[b_{3i}\phi_{,i}+\gamma_{i3}\psi_{,i}-M_{i3}T_i\right]\dot{\psi}dads+\\&+\int_0^t\int_{D(z)} e^{-2\omega s}\frac{1}{T_0}\left[\kappa_{i3}\theta_{,i}+L_{i3}T_i\right]\theta dads+\\&\int_0^t\int_{D(z)} e^{-2\omega s}\left(A_{3irs}T_{s,r}+R_{i3}T_i+\lambda_{ij}\theta_{,i}\right)T_i dads\end{aligned} \tag{4.32}$$

unde $D(z)=\{\mathbf{X}\in B|x_3=z\}$ reprezintă secţiunea transversală a cilindrului la o distanţă z de la bază. Prin intermediul teoremei divergenţiei şi prin utilizarea ecuaţiilor de câmp, a condiţiilor iniţiale şi pe frontieră, obţinem:

$$H_\omega(z+h,t)-H_\omega(z,t)=\frac{1}{2}\int_{R(z+h,z)}\chi_\omega(t)dV,(\forall)h>0 \tag{4.33}$$

unde $R(z+h,z)=\{\mathbf{X}\in B|z<x_3<z+h\}$.

Energia internă este:

$$\Phi = \rho\dot{u}_i\dot{u}_i + k_1\dot{\phi}^2 + k_2\dot{\psi}^2 + a\theta^2 + P_{ij}T_jT_j + C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} + +2B_{ij}u_{i,j}\phi + 2D_{ij}u_{i,j}\psi + \\ + \alpha_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \gamma_{ij}\psi_{,i}\psi_{,j} + 2b_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \alpha_1\phi^2 + \alpha_2\psi^2 + 2\alpha_3\phi\psi \tag{4.34}$$

astfel încât

$$\chi_\omega(t) = e^{-2\omega t}\Phi(t) + \int_0^t e^{-2\omega s}\left[2\omega\Phi(s) + 2\frac{\kappa_{ij}}{T_0}\theta_{,i}(s)\theta_{,j}(s) + 2\frac{L_{ij}}{T_0}\theta_{,i}T_j(s)\right. \\ \left. + 2A_{ijrs}T_{s,r}(s)T_{i,j}(s) + 2R_{ij}T_i(s)T_j(s) + 2\lambda_{ij}\theta_{,i}T_j(s)\right]ds \tag{4.35}$$

În continuare vom introduce următoarea estimare:

$$E_\omega(z,t) = \frac{e^{-2\omega t}}{2}\int\limits_{R(z))}\Phi(t)dz + \int_0^t\int\limits_{R(z)} e^{-2\omega s}\left[\omega\Phi(s) + \frac{1}{T_0}\left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} + L_{ij}T_i\theta_{,j}\right)\right. \\ \left. + A_{ijrs}T_{i,j}T_{r,s} + R_{ij}T_iT_j + \lambda_{ij}T_i\theta_{,j}\right]dads \tag{4.36}$$

unde $R(z) = \{\mathbf{X} \in B | z < x_3\}$. Observăm că:

$$E_\omega(z,t) \leq E_\omega(0,t)e^{-\frac{z}{C_\omega}}, z \geq 0 \tag{4.37}$$

Acum, putem trage următoarele concluzii: dacă $(u_i, \phi, \psi, \theta, T_i)$ este o soluţie a problemei înapoi în timp definită de sistemul (4.56.a)-(4.56.e) cu condiţii iniţiale nule (4.26) şi condiţiile pe frontieră (4.27) atunci există două situaţii: soluţia satisface condiţia asimptotică $\lim\limits_{z\to\infty} e^{-\frac{z}{C_\omega}}\int\limits_{R(z)}\chi_\omega(t)dv > 0$ sau satisface estimarea descreşterii.

Capitolul 5

Vibrații armonice în dinamica termoelastică cu dublă porozitate

Comportamentul spațial al vibrațiilor armonice în timp în termoelasticitatea liniară clasică a fost studiat de Chirita în [9], evoluția spațială a vibrațiilor în contextul termoelasticității fără disiparea energiei pentru corpurile dipolare a fost studiată de Marin în [52], evoluția amplitudinii în cazul vibrațiilor armonice ale corpurilor micropolare a fost studiată de Marin în [53]. Comportarea în spaţiu a soluţiilor problemei cu structură dublă de porozitate din punctul de vedere al imposibilității de localizare în timp a soluțiilor și al unei alternative Phragmen-Lindelof pentru un cilindru semi-infinit a fost studiat în [26].

În aceast capitol vom considera un material termoelastic cu structură dublă de porozitate care este supus unei vibrații armonice în timp. Rezultatul principal constă în obținerea unei relații între amplitudine şi distanţa axială de la capătul stimulat al cilindrului. Deducem estimări apriori pentru amplitudinea unei vibrații armonice prin intermediul unor identități auxiliare, [10], [11]. Aceste estimări prezic o anumită descreştere în timp sau proprietăți de creștere pentru amplitudinea vibrațiilor armonice. Există clase de vibrații armonice pentru care descreşterea spaţială în timp sau proprietățile de creștere sunt de tip exponențial.

Acest capitol este structurat după cum urmează. În secțiunea 2 sunt reamintite ecuațiile de bază și stabilim sistemul general pe care vrem să îl analizăm. În secțiunea 3 este considerat un cilindru prismatic format dintr-un material termo-elastic dublu poros care este supus unei vibrații armonice în timp. Sunt obținute unele identități auxiliare necesare pentru a dovedi rezultatul principal. În secțiunea 4 sunt demonstrate două legi de conservare care vor conduce la ultima teoremă privind estimarea amplitudinii vibrațiilor în starea de echilibru.

5.1 Ecuaţii de bază

Considerăm un corp care ocupă la un moment dat de timp o regiune regulată B a spaţiului Euclidian tridimensional şi care este delimitat de suprafaţa ∂B. Sistemul de axe cartezian este $Ox_i, (i = 1, 2, 3)$. Indicii latini urmaţi de virgulă reprezintă derivarea parţială în raport cu coordonatele carteziene şi punctul deasupra literei reprezintă derivarea parţială în raport cu timpul.

În absenţa termenilor de alimentare, ecuaţia de evoluţie care guvernează problema termoelasticităţii cu structură de porozitate dublă, este [54]:

$$\begin{aligned} t_{ji,j} &= \rho_0 \ddot{u}_i \\ \sigma_{j,j} + \xi &= k_1 \ddot{\phi} \\ \tau_{j,j} + \zeta &= k_2 \ddot{\psi} \end{aligned} \tag{5.1}$$

unde: ρ_0 este densitatea de masă, k_1, k_2 sunt coeficienţii inerţiei echilibrate, σ_j, τ_j sunt vectorii tensiune de echilibru, ξ, ζ sunt forţele intrinseci de echilibru care acţionează asupra corpului, t_{ij} sunt tensorii tensiune, u_i este deplasarea şi ϕ, ψ sunt câmpurile de volum fracţionar din configuraţia de referinţă.

Ecuaţia energiei are forma, [54]:

$$\rho_0 T_0 \dot{\eta} = Q_{j,j} \tag{5.2}$$

unde T_0 este temperatura absolută constantă a corpului din configuraţia de referinţă, η este entropia, Q_j este fluxul de căldură.

Considerăm ecuaţiile constitutive ale teoriei liniare a materialelor centro-simetrice,

[54]:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl}u_{k,l} + B_{ij}\phi + D_{ij}\psi - \beta_{ij}\theta \\ \sigma_i &= \alpha_{ij}\phi_{,j} + b_{ij}\psi_{,j} \\ \tau_i &= b_{ji}\phi_{,j} + \gamma_{ij}\psi_{,j} \\ \xi &= -B_{ij}u_{i,j} - \alpha_1\phi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta \\ \zeta &= -D_{ij}u_{i,j} - \alpha_3\phi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta \\ \rho_0\eta &= \beta_{ij}u_{i,j} + \gamma_1\phi + \gamma_2\psi + a\theta \\ Q_i &= \kappa_{ij}\theta_{,j} \end{aligned} \tag{5.3}$$

unde θ este diferenţa de temperatură în raport cu configuraţia de referinţă, κ_{ij} este tensorul de conductivitate termică, β_{ij} este tensorul de dilateţie termică, C_{ijkl} este tensorul de elasticitate, $B_{ij}, D_{ij}, \alpha_{ij}, b_{ij}, \gamma_{ij}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, a$ sunt coeficienţii constitutivi care sunt funcţii caracteristice pentru materialul considerat.

Ecuațiile constitutive sunt introduse în ecuațiile de evoluție. Sistemul de ecuații pentru termoelasticitatea cu porozitate dublă se obține prin introducerea ecuațiilor constitutive (5.3) în ecuaţiile de evoluţie (5.1):

$$\rho_0\ddot{u}_i = \left(C_{jikl}u_{k,l} + B_{ji}\phi + D_{ji}\psi - \beta_{ji}\theta\right)_{,j} \tag{5.4.a}$$

$$k_1\ddot{\phi} = \left(\alpha_{ij}\phi_{,i} + b_{ij}\psi_{,i}\right)_{,j} - B_{ij}u_{i,j} - \alpha_1\phi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta \tag{5.4.b}$$

$$k_2\ddot{\psi} = \left(b_{ij}\phi_{,i} + \gamma_{ij}\psi_{,i}\right)_{,j} - D_{ij}u_{i,j} - \alpha_3\phi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta \tag{5.4.c}$$

$$a\dot{\theta} = \frac{\left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\right)_{,j}}{T_0} - \beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \gamma_1\dot{\phi} - \gamma_2\dot{\psi} \tag{5.4.d*}$$

Considerăm o secţiune transversală B a unui cilindru prismatic şi frontiera secţiunii ∂B presupusă a fi continuu deferenţiabilă pe porţiuni. Centrul sistemului de coordonate este ales astfel încât să fie în centrul bazei cilindrului şi vom considera că axa pozitivă x_3 este de-a lungul cilindrului. Vom nota cu l lungimea cilindrului, în acest caz frontiera laterală a cilindrului este $S = \partial B \times [0, l]$. În interiorul cilindrului prismatic se află un mediu termoelastic care are o structură de porozitate dublă, omogenă şi anizotropă. Forţele externe care acţionează pe frontiera laterală a cilindrului sunt neglijate. Problema cu date pe frontieră care guvernează problema înapoi în timp, în cazul termoelasticităţii cu dublă porozitate este formată din sistemul de ecuaţii (5.4.a)-(5.4.d), unde ecuaţia (5.4.d*) devine:

$$a\dot{\theta} = -\frac{\left(\kappa_{ij}\theta_{,i}\right)_{,j}}{T_0} - \beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \gamma_1\dot{\phi} - \gamma_2\dot{\psi} \tag{5.4.d}$$

Completăm problema cu date pe frontieră pentru cilindrul considerat cu următoarele condiţii pe frontieră $\forall (x,t) \in S \times (0,\infty)$

$$u_i(x,t) = 0; \quad \phi(x,t) = 0; \quad \psi(x,t) = 0; \quad \theta(x,t) = 0 \tag{5.5}$$

Condiţiile pe baza cilindrului sunt considerate a fi armonice în timp $\forall (x_1,x_2) \in B(0), t > 0$:

$$\begin{aligned} u_i(x_1,x_2,0,t) = \tilde{u}_i(x_1,x_2)e^{i\omega t}; \quad \phi(x_1,x_2,0,t) = \tilde{\phi}(x_1,x_2)e^{i\omega t}; \\ \psi(x_1,x_2,0,t) = \tilde{\psi}(x_1,x_2)e^{i\omega t}; \quad \theta(x_1,x_2,0,t) = \tilde{\theta}(x_1,x_2)e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{5.6}$$

unde $\tilde{u}_i, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}$ sunt funcţii neede, i este unitatea complexă şi ω este o constantă pozitivă.

Se presupune că încărcările din (5.6) produc în interiorul cilindrului vibraţii armonice în timp având forma:

$$\begin{aligned} u_i(x_1,x_2,x_3,t) = U_i(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}; \quad \phi(x_1,x_2,x_3,t) = \Phi(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}; \\ \psi(x_1,x_2,x_3,t) = \Psi(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}; \quad \theta(x_1,x_2,x_3,t) = T(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}; \end{aligned} \tag{5.7}$$

unde $(x_1,x_2,x_3,t) \in B \times (0,\infty)$.

Amplitudinea vibraţiilor (U_i, Φ, Ψ, T) satisface următorul sistem de ecuaţii diferenţiale corespunzător problemei întoarcerii în timp, (5.4.q)-(5.4.d):

$$\left(C_{jikl}U_{k,l} + B_{ji}\Phi + D_{ji}\Psi - \beta_{ji}T\right)_{,j} + \rho_0 U_i \omega^2 = 0 \tag{5.8.a}$$

$$\left(\alpha_{ij}\Phi_{,i} + b_{ij}\Psi_{,i}\right)_{,j} - B_{ij}U_{i,j} - \alpha_1\Phi - \alpha_3\Psi + \gamma_1 T + k_1\Phi\omega^2 = 0 \tag{5.8.b}$$

$$\left(b_{ij}\Phi_{,i} + \gamma_{ij}\Psi_{,i}\right)_{,j} - D_{ij}U_{i,j} - \alpha_3\Phi - \alpha_2\Psi + \gamma_2 T + k_2\Psi\omega^2 = 0 \tag{5.8.c}$$

$$\frac{\left(\kappa_{ij}T_{,i}\right)_{,j}}{T_0} + \left[\beta_{ij}U_{i,j} + \gamma_1\Phi + \gamma_2\Psi + aT\right] i\omega = 0 \tag{5.8.d}$$

Condiţiile frontierei lateale pentru $x \in S$ devin:

$$U_i(x) = \Phi(x) = \Psi(x) = T(x) = 0 \tag{5.9}$$

şi condiţiile pe baza cilindrului când $x_3 = 0$ şi $(x_1,x_2) \in B(0)$ devin:

$$\begin{aligned} U_i(x_1,x_2,0) = \tilde{U}_i(x_1,x_2); \Phi(x_1,x_2,0) = \tilde{\Phi}(x_1,x_2); \\ \Psi(x_1,x_2,0) = \tilde{\Psi}(x_1,x_2); T(x_1,x_2,0) = \tilde{T}(x_1,x_2); \end{aligned} \tag{5.10}$$

În continuare vom demonstra câteva estimări asupra soluţiei sistemului de ecuaţii (5.8.a)-(5.8.d) cu condiţiile pe frontiera laterală (5.9) şi condiţiile pe baza cilindrului (5.10).

Complex conjugatele funcţiilor U_i, Φ, Ψ, T se notează cu $\overline{U_i}, \overline{\Phi}, \overline{\Psi}, \overline{T}$.

5.2 Identităţi auxiliare şi estimări apriori

În această secţiune vom deduce câteva rezultate necesare obţinerii a două identităţi auxiliare care vor conduce la rezultatul principal al acestui capitol şi anume estimarea amplitudinii vibraţiilor.

Teorema 5.1. *Fie* (U_i, Φ, Ψ, T) *o soluţie a problemei cu date pe frontieră determinată de sistemul de ecuaţii (5.8) cu condiţiile pe frontieră* (5.9)*. Atunci sunt îndeplinite relaţiile :*

$$
\begin{aligned}
2 \int\limits_{D(x_3)} \Big[& C_{ijkl} U_{k,l} \overline{U}_{i,j} + B_{ji} \left(\Phi \overline{U}_{i,j} + \overline{\Phi} U_{i,j} \right) + D_{ji} \left(\Psi \overline{U}_{i,j} + \overline{\Psi} U_{i,j} \right) - \rho_0 \omega^2 U_i \overline{U}_i \\
& + \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} k_1 \omega^2 \right) \Phi \overline{\Phi} + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} k_2 \omega^2 \right) \Psi \overline{\Psi} + \alpha_{ij} \Phi_{,i} \overline{\Phi}_{,j} + b_{ij} \Psi_{,i} \overline{\Phi}_{,j} + \\
& + b_{ij} \overline{\Psi}_{,i} \Phi_{,j} + \gamma_{ij} \Psi_{,i} \overline{\Psi}_{,j} - \frac{1}{2} \beta_{ij} \left(T \overline{U}_{i,j} + \overline{T} U_{i,j} \right) + \alpha_3 (\Phi \overline{\Psi} + \overline{\Phi} \Psi) \\
& - \frac{1}{2} \gamma_1 (T \overline{\Phi} + \overline{T} \Phi) - \frac{1}{2} \gamma_2 (T \overline{\Psi} + \overline{T} \Psi) \Big] \, dA
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

$$= \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(C_{j3kl} U_{k,l} + B_{j3} \Phi + D_{j3} \Psi - \beta_{j3} T \right) \overline{U}_j \right] dA$$

$$+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(C_{j3kl} \overline{U}_{k,l} + B_{j3} \overline{\Phi} + D_{j3} \overline{\Psi} - \beta_{j3} \overline{T} \right) U_j \right] dA$$

$$+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(\alpha_{3j} \Phi_{,j} + b_{3j} \Psi_{,j} \right) \overline{\Phi} \right] dA + \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(\alpha_{3j} \overline{\Phi}_{,j} + b_{3j} \overline{\Psi}_{,j} \right) \Phi \right] dA$$

$$+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(b_{3j} \Phi_{,j} + \gamma_{3j} \Psi_{,j} \right) \overline{\Psi} \right] dA + \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(b_{3j} \overline{\Phi}_{,j} + \gamma_{3j} \overline{\Psi}_{,j} \right) \Psi \right] dA$$

$$\int\limits_{D(x_3)} \left[\beta_{ji} (\overline{T} U_{i,j} - T \overline{U}_{i,j}) + \gamma_1 (T \overline{\Phi} - \overline{T} \Phi) + \gamma_2 (T \overline{\Psi} - \overline{T} \Psi) \right] dA$$

$$= \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(C_{j3kl} U_{k,l} + B_{j3} \Phi + D_{j3} \Psi - \beta_{j3} T \right) \overline{U}_j \right] dA \qquad (5.12)$$

$$- \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(C_{j3kl} \overline{U}_{k,l} + B_{j3} \overline{\Phi} + D_{j3} \overline{\Psi} - \beta_{j3} \overline{T} \right) U_j \right] dA$$

$$+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(\alpha_{3j} \Phi_{,j} + b_{3j} \Psi_{,j} \right) \overline{\Phi} \right] dA - \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(\alpha_{3j} \overline{\Phi}_{,j} + b_{3j} \overline{\Psi}_{,j} \right) \Phi \right] dA$$

$$+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(b_{3j} \Phi_{,j} + \gamma_{3j} \Psi_{,j} \right) \overline{\Psi} \right] dA - \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\left(b_{3j} \overline{\Phi}_{,j} + \gamma_{3j} \overline{\Psi}_{,j} \right) \Psi \right] dA$$

$$\int\limits_{D(x_3)} \left[2 \frac{\kappa_{ij}}{T_0} T_{,i} \overline{T}_{,j} + i\omega \beta_{ij} (T \overline{U}_{i,j} - \overline{T} U_{i,j}) + i\omega \gamma_1 (T \overline{\Phi} - \Phi \overline{T}) + i\omega \gamma_2 (T \overline{\Psi} - \Psi \overline{T}) \right] dA$$

$$= \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \frac{\kappa_{3j}}{T_0} (T_{,j} \overline{T} + \overline{T}_{,j} T) dA$$

(5.13)

$$\int\limits_{D(x_3)} \left[i\omega\beta_{ij}(T\overline{U}_{i,j}+\overline{T}U_{i,j})+i\omega\gamma_1(T\overline{\Phi}+\Phi\overline{T})+i\omega\gamma_2(T\overline{\Psi}+\Psi\overline{T})+2ai\omega T\overline{T}\right]dA$$
$$=\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{\kappa_{3j}}{T_0}(\overline{T}_{,j}T-T_{,j}\overline{T})dA \tag{5.14}$$

Teorema 5.2. *Fie* (U_i,Φ,Ψ,T) *o soluţie a problemei cu date pe frontieră determinată de sistemul de ecuaţii (5.8),* (5.9)*,* (5.10)*. Atunci sunt satisfăcute identităţile auxiliare* (5.15) *şi* (5.16)*.*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{T_0}\kappa_{ij}T_{,i}\overline{T}_{,j}+i\omega x_m[\beta_{ij}(U_{i,j}\overline{T}_{,m}+\overline{U}_{i,j}T_{,m})+\gamma_1(\Phi\overline{T}_{,m}+\overline{\Phi}T_{,m})]+\\
&+i\omega x_m[\gamma_2(\Psi\overline{T}_{,m}+\overline{\Psi}T_{,m})+a(T\overline{T}_{,m}+\overline{T}T_{,m})]dA= \qquad (5.15)\\
&=-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{T_0}\left[x_m\kappa_{3j}(T_{,j}\overline{T}_{,m}+\overline{T}_{,j}t_{,m})-\kappa_{ij}x_3T_{,i}\overline{T}_{,j}\right]dA+\\
&+\int\limits_{\partial D(x_3)}\kappa_{\delta\lambda}x_m\frac{1}{T_0}\frac{\partial T}{\partial n}\frac{\partial\overline{T}}{\partial n}n_\delta n_\lambda ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D(x_3)}(C_{jikl}U_{k,l}+B_{ij}\Phi+D_{ij}\Psi-\beta_{ji}T)\overline{U}_{i,j}+(\alpha_{ij}\Phi_{,i}+b_{ij}\Psi_{,i})\overline{\Phi}_{,j}\\
&+(B_{ij}U_{i,j}+\alpha_1\Phi+\alpha_3\Psi+\gamma_1T-k_2\omega^2\Phi)\overline{\Phi}+(b_{ij}\Phi_{,i}+\gamma_{ij}\Psi_{,i})\overline{\Psi}_{,j}\\
&+(D_{ij}U_{i,j}+\alpha_3\Phi+\alpha_2\Psi-\gamma_2T-k_2\omega^2\Psi)\overline{\Psi}+\beta_{ji}\overline{T}U_{i,j}]dA\\
&+\int\limits_{D(x_3)}x_m[\beta_{ji}(\overline{T}_{,m}U_{i,j}-T_{,m}\overline{U}_{i,j})+\gamma_1(T_{,m}\overline{\Phi}+\overline{T}\Phi_{,m})\\
&+\gamma_2(\overline{T}\Psi_{,m}-T_{,m}\overline{\Psi})-\rho_0\omega^2(U_{i,m}\overline{U}_i+\overline{U}_{i,m}U_i)]dA\\
&=-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}[(C_{j3kl}U_{k,l}+B_{j3}\Phi+D_{j3}\Psi-\beta_{j3}T)x_m\overline{U}_{j,m}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (C_{j3kl}\overline{U}_{k,l} + B_{j3}\overline{\Phi} + D_{j3}\overline{\Psi} - \beta_{j3}T)x_m U_{j,m}]dA \\
&- \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(\alpha_{3j}\Phi_{,j} + b_{3j}\Psi_{,j})x_m\overline{\Phi}_{,m} + (\alpha_{3j}\overline{\Phi}_{,j} + b_{3j}\overline{\Psi}_{,j})x_m\Phi_{,m}]dA \\
&- \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(b_{3j}\Phi_{,j} + \gamma_{3j}\Psi_{,j})x_m\overline{\Psi}_{,m} + (b_{3j}\overline{\Phi}_{,j} + \gamma_{3j}\overline{\Psi}_{,j})x_m\Psi_{,m}]dA \\
&+ \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} x_3[(C_{jikl}U_{k,l} + B_{ij}\Phi + D_{ij}\Psi - \beta_{ji}T)\overline{U}_{i,j} - 2\rho_0\omega^2 U_i\overline{U}_i \\
&\qquad + (B_{ij}U_{i,j} + \alpha_1\Phi + \alpha_3\Psi + \gamma_1 T + k_1\omega^2\Phi)\overline{\Phi} \\
&\qquad + (D_{ij}U_{i,j} + \alpha_3\Phi + \alpha_2\Psi - \gamma_2 T - k_2\omega^2\Psi)\overline{\Psi} \\
&\qquad + (\alpha_{ij}\Phi_{,i} + b_{ij}\Psi_{,i})\overline{\Phi}_{,j} + (b_{ij}\Phi_{,i} + \gamma_{ij}\Psi_{,i})\overline{\Psi}_{,j} + \beta_{ji}\overline{T}U_{i,j}]dA \\
&+ \int\limits_{\partial D(x_3)} x_m n_m \left[C_{\delta i\lambda l}\frac{\partial U_k}{\partial n}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial n} + \alpha_{\delta\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial n} + b_{\delta\lambda}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial n} + \frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \gamma_{\delta\lambda}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}\right] n_\delta n_\lambda ds
\end{aligned}
$$

5.3 Estimarea amplitudinii

În această secțiune sunt demonstrate două legi de conservare necesare ultimelor rezultate ale acestui capitol privind estimarea amplitudinii vibrațiilor în starea de echilibru.

Teorema 5.3. *Fie* (U_i, Φ, Ψ, T) *o soluţie a problemei cu date pe frontieră (5.8.a)-(5.8.d),* (5.9)*,* (5.10)*. Următoarele legi de conservare sunt obţinute:*

$$\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}[\rho_0\omega^2U_i\overline{U}_i+(k_1\omega^2-\alpha_1)\Phi\overline{\Phi}+(k_2\omega^2-\alpha_2)\Psi\overline{\Psi}+\alpha_3(\Phi\overline{\Psi}+\overline{\Phi}\Psi)$$
$$+\gamma_2(T\overline{\Psi}+\overline{T}\Psi)-\gamma_1(T\overline{\Phi}+\overline{T}\Phi)+\frac{i}{\omega}\frac{1}{T_0}(\kappa_{33}T_{,3}\overline{T}_{,3}-\kappa_{\alpha\beta}T_{,\alpha}\overline{T}_{,\beta}+i\omega aT\overline{T})$$
$$+C_{i3k3}U_{i,3}\overline{U}_{k,3}-C_{i\delta k\lambda}U_{i,\delta}\overline{U}_{k,\lambda}+\beta_{i\delta}(T\overline{U}_{i,\delta}+\overline{T}U_{i,\delta}-B_{i\delta}(\Phi\overline{U}_{i,\delta}+\overline{\Phi}U_{i,\delta})$$
$$-D_{i\delta}(\Psi\overline{U}_{i,\delta}+\overline{\Psi}U_{i,\delta})+\alpha_{33}\Phi_{,3}\overline{\Phi}_{,3}-\alpha_{a\lambda}\Phi_{,a}\overline{\Phi}_{,\lambda}+\gamma_{33}\Psi_{,3}\overline{\Psi}_{,3}-\gamma_{a\lambda}\Psi_{,a}\overline{\Psi}_{,\lambda}$$
$$-b_{33}(\Psi_{,3}\overline{\Phi}_{,3}+\overline{\Psi}_{,3}\Phi_{,3})-b_{i\delta}(\Psi_{,i}\overline{\Phi}_{,\delta}+\overline{\Psi}_{,i}\Phi_{,\delta})]dA \tag{5.17}$$
$$=-2\int\limits_{D(x_3)}(\beta_{ij}\overline{T}_{,3}U_{i,j}+\gamma_1\overline{T}_{,3}\Phi+\gamma_2\overline{T}_{,3}\Psi)dA-\int\limits_{D(x_3)}b_{ij}(\Psi_{,3}\overline{\Phi}_{,i}+\overline{\Psi}_{,3}\Phi_{,i})dA$$

$$2\int\limits_{D(x_3)}T(\beta_{ij}\overline{U}_{i,j}+\gamma_1\overline{\Phi}+\gamma_2\overline{\Psi}+a\omega\overline{T})dA=$$
$$=\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(C_{j3kl}U_{k,l}+B_{j3}\Phi+D_{j3}\Psi-\beta_{j3}T)\,\overline{U}_j\right]dA$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(\alpha_{3j}\Phi_{,j}+b_{3j}\Psi_{,j})\,\overline{\Phi}\right]dA-$$
$$-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[\left(\alpha_{3j}\overline{\Phi}_{,j}+b_{3j}\overline{\Psi}_{,j}\right)\Phi\right]dA$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(b_{3j}\Phi_{,j}+\gamma_{3j}\Psi_{,j})\,\overline{\Psi}\right]dA-$$
$$-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[\left(b_{3j}\overline{\Phi}_{,j}+\gamma_{3j}\overline{\Psi}_{,j}\right)\Psi\right]dA$$
$$-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[\left(C_{j3kl}\overline{U}_{k,l}+B_{j3}\overline{\Phi}+D_{j3}\overline{\Psi}-\beta_{j3}\overline{T}\right)U_j\right]dA+ \tag{5.18}$$
$$+\frac{1}{i\omega}\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{\kappa_{3j}}{T_0}(\overline{T}_{,j}T-T_{,j}\overline{T})dA$$

Pentru a obține o anumită măsură asociată soluției (U_i,Φ,Ψ,T) a problemei întoarcerii în timp (5.8.a)-(5.8.d) cu condiţiile pe frontiera laterală (5.9) şi condiţiile

pe baza cilindrului (5.10), necesară pentru obţinerea unei estimări adecvate care să descrie evoluţia spaţială a amplitudinii (U_i, Φ, Ψ, T), următoarea teoremă va fi demosntrată.

Teorema 5.4. *Dacă se consideră că soluţia problemei întoarcerii în timp cu date pe frontieră (5.8.a)-(5.8.d),* (5.9) *şi* (5.10) *este* (U_i, Φ, Ψ, T) *atunci următoarea egalitate este îndeplinită:*

$$\int\limits_{D(x_3)} \big[\beta_{ji}(T\overline{U}_{i,j} - \overline{T}U_{i,j}) - \gamma_1 T\overline{\Phi} + \gamma_2 T\overline{\Psi} + k_2\omega^2(\Phi\overline{\Phi} + \Psi\overline{\Psi}) -$$

$$- \omega^2(\rho_0 U_i\overline{U}_i + \frac{k_1}{2}\Phi\overline{\Phi} + \frac{k_2}{2}\Psi\overline{\Psi}) + 2aT\overline{T}\Big] dA$$

$$- \int\limits_{D(x_3)} x_m[\beta_{ji}(\overline{T}_{,m}U_{i,j} - T_{,m}\overline{U}_{i,j}) + \gamma_1(T_{,m}\overline{\Phi} + \overline{T}\Phi_{,m}) + \gamma_2(\overline{T}\Psi_{,m} - T_{,m}\overline{\Psi}) -$$

$$-\rho_0\omega^2(U_{i,m}\overline{U}_i + \overline{U}_{i,m}U_i)]dA$$

$$- \int\limits_{\partial D(x_3)} x_m n_m \left[C_{\delta i\lambda l}\frac{\partial U_l}{\partial n}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial n} + \alpha_{\delta\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial n} + b_{\delta\lambda}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}\right) + \gamma_{\delta\lambda}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}\right] n_\delta n_\lambda ds$$

$$= -\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(C_{j3kl}U_{k,l} + B_{j3}\Phi + D_{j3}\Psi - \beta_{j3}T)x_m\overline{U}_{j,m} + (C_{j3kl}\overline{U}_{k,l} + \tag{5.19}$$

$$+B_{j3}\overline{\Phi} + D_{j3}\overline{\Psi} - \beta_{j3}T)x_m U_{j,m}]dA -$$

$$-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(\alpha_{3j}\Phi_{,j} + b_{3j}\Psi_{,j})x_m\overline{\Phi}_{,m} + (\alpha_{3j}\overline{\Phi}_{,j} + b_{3j}\overline{\Psi}_{,j})x_m\Phi_{,m}]dA$$

$$-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(b_{3j}\Phi_{,j} + \gamma_{3j}\Psi_{,j})x_m\overline{\Psi}_{,m} + (b_{3j}\overline{\Phi}_{,j} + \gamma_{3j}\overline{\Psi}_{,j})x_m\Psi_{,m}]dA$$

$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} x_3[(C_{jikl}U_{k,l} + B_{ij}\Phi + D_{ij}\Psi - \beta_{ji}T)\overline{U}_{i,j} -$$

$$-2\rho_0\omega^2 U_i\overline{U}_i + (B_{ij}U_{i,j} + \alpha_1\Phi + \alpha_3\Psi + \gamma_1 T + k_1\omega^2\Phi)\overline{\Phi}$$

$$+(D_{ij}U_{i,j} + \alpha_3\Phi + \alpha_2\Psi - \gamma_2 T - k_2\omega^2\Psi)\overline{\Psi} + (\alpha_{ij}\Phi_{,i} +$$

$$+b_{ij}\Psi_{,i})\overline{\Phi}_{,j} + (b_{ij}\Phi_{,i} + \gamma_{ij}\Psi_{,i})\overline{\Psi}_{,j} + \beta_{ji}\overline{T}U_{i,j}]dA$$

$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(C_{ijkl}U_{k,l}+B_{j3}\Phi+D_{j3}\Psi-\beta_{j3}T)\overline{U}_j\right]dA+$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(C_{ijkl}\overline{U}_{k,l}+B_{j3}\overline{\Phi}+D_{j3}\overline{\Psi}-\beta_{j3}\overline{T})U_j\right]dA$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(\alpha_{3j}\Phi_{,j}+b_{3j}\Psi_{,j})\overline{\Phi}\right]dA+$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(\alpha_{3j}\overline{\Phi}_{,j}+b_{3j}\overline{\Psi}_{,j})\Phi\right]dA$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(b_{3j}\Phi_{,j}+\gamma_{3j}\Psi_{,j})\overline{\Psi}\right]dA+$$
$$+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(b_{3j}\overline{\Phi}_{,j}+\gamma_{3j}\overline{\Psi}_{,j})\Psi\right]dA-\frac{i}{\omega}\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{\kappa_{3j}}{T_0}\left(\overline{T}_{,j}T-T_{,j}\overline{T}\right)dA$$

Din estimarea obținută în teorema 4, evoluția spațială a problemei mixte poate fi demonstrată. Prin urmare, se poate deduce următoarea inegalitate:

$$0\leq\int\limits_{\partial D(x_3)}x_m n_m\left[C_{\delta i\lambda l}\frac{\partial U_l}{\partial n}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial n}+\alpha_{\delta\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n}+b_{\delta\lambda}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n}+\frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma_{\delta\lambda}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}\right]n_\delta n_\lambda ds$$
$$\leq A\cdot B\int\limits_{\partial D(x_3)}\left(\frac{\partial U_l}{\partial n}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial n}+\frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n}+\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}\right)ds$$

unde $A=\sup\limits_{(x_1,x_2)\in\partial D}\sqrt{x_1^2+x_2^2}$,
$B=\sqrt{C_{\delta i\lambda l}\cdot C_{\delta i\lambda l}+\alpha_{\delta\lambda}\cdot\alpha_{\delta\lambda}+b_{\delta\lambda}\cdot b_{\delta\lambda}+\gamma_{\delta\lambda}\cdot\gamma_{\delta\lambda}}$. Valoarea critică pentru frecvența vibrațiilor este dată de inegalitatea $\omega>\omega^*$, unde

$$\omega^*=\frac{1}{\rho_0}A\cdot B\max_{x_3\in[0,l]}\frac{\int\limits_{\partial D(x_3)}\left(\frac{\partial U_l}{\partial n}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial n}+\frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n}+\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}\right)ds}{\int\limits_{D(x_3)}\left(U_l\overline{U_l}+\Phi\overline{\Phi}+\Psi\overline{\Psi}\right)ds}$$

Capitolul 6

Aplicaţii ale mediilor poroase în medicină

6.1 Comportamentul mecanic şi modelarea matematică a unui disc intervertebral

Considerăm (r, θ, z) coordonatele cilindrice ale unui punct specific din corpul vertebral. Vom nota cu $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}\varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta})$ componentele tensorului deformare şi cu $(\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{zz}, \tau_{\theta z}\tau_{rz}, \tau_{r\theta})$ componentele tensorului tensiune. Dacă corpul vertebral este în echilibru, atunci $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

6.1.1 Ecuaţii de bază

Luând în considerare proprietăţile anizotrope şi materialul de amortizare a ţesutului, ecuaţiile constitutive ale corpului vertebral sunt [60]:

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= C_{11}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial t} + C_{12}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + C_{13}\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \\
\tau_{\theta\theta} &= C_{12}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial t} + C_{11}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + C_{13}\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \\
\tau_{zz} &= C_{13}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial t} + C_{13}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + C_{33}\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \\
\tau_{\theta z} &= C_{55}\frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial t} \\
\tau_{rz} &= C_{55}\frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial t} \\
\tau_{r\theta} &= C_{66}\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial t} = \frac{C_{11} - C_{12}}{6}\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Considerăm că inelul intervertebral se află sub acţiunea unui moment $M = \mathrm{e}^{i\omega t}$. Asfel, componentele deplasărilor elastice vor fi:

$$\begin{aligned}
U_m(r,\theta,t) &= [u_1(r) + u_2(\theta)]\mathrm{e}^{i\omega t} \\
V_m(r,\theta,t) &= [v_1(r) + v_2(\theta)]\mathrm{e}^{i\omega t} \\
W_m(r,\theta,t) &= [w_1(r) + w_2(\theta)]\mathrm{e}^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

unde, U_m este componenta deplasării elastice de-a lungul direcţiei radiale, V_m este componenta deplasării elastice de-a lungul direcţiei transversale şi W_m este componenta deplasării elastice de-a lungul direcţiei axiale.

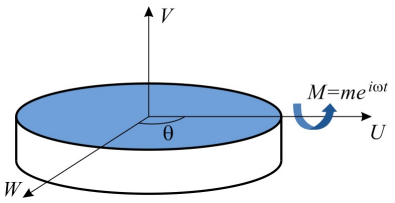

Figura 6.1: Modelul unui discintervertebral acţionat de un moment

Ecuaţiile de mişcare în coordonate polare vor avea acum următoarea formă:

$$\left[C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} - \frac{C_{12}}{r^2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + u_1(r) + u_2(\theta)\right) + \frac{C_{12}}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{C_{12}}{2r^2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_2}{\partial \theta}\right) + \right. \tag{6.3}$$
$$\left. + \frac{C_{12} - C_{11}}{r^2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + u_1(r) + u_2(\theta)\right)\right] i\omega = -\rho\omega^2 \left(u_1(r) + u_2(\theta)\right)$$

$$\left\{\frac{C_{11} - C_{12}}{2}\left[-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - v_1(r) - v_2(\theta)\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2}\right] + \frac{1}{r}\left[C_{11}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta}\right) + \right.\right. \tag{6.4}$$
$$\left.\left. + \left(C_{11} - C_{12}\right)\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - v_1(r) - v_2(\theta)\right) + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right]\right]\right\} i\omega = -\rho\omega^2 \left(v_1(r) + v_2(\theta)\right)$$

$$\left[C_{55}\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(C_{55}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} + C_{55}\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)\right] i\omega = -\rho\omega^2 \left(w_1(r) + w_2(\theta)\right) \tag{6.5}$$

6.1.2 Modelul matematic al comportării dinamice a discului intervertebral

În sistemul format de ecuaţiile (6.3), (6.4), (6.5) vom considera că: $u_1(r) = A \cdot e^{\theta}$, $v_1(r) = B \cdot e^{\theta}; w_1(r) = C \cdot e^{\theta}$ cu A, B, C parametrii reali. Noua formă a sistemului va fi:

$$-\frac{C_{12}}{r^2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + A\mathrm{e}^{\theta} + u_2(\theta)\right) + \frac{C_{11} - C_{12}}{2r^2}$$
$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_2}{\partial \theta}\right) + \frac{C_{12} - C_{11}}{r^2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + A\mathrm{e}^{\theta} + u_2(\theta)\right) - \rho i\omega\left(A\mathrm{e}^{\theta} + u_2(\theta)\right) = 0$$
$$-\frac{C_{11} - C_{12}}{2r^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - B\mathrm{e}^{\theta} - v_2(\theta)\right) + \tag{6.6}$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{C_{11}}{r}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta}\right) + \frac{C_{11} - C_{12}}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - B\mathrm{e}^{\theta} - v_2(\theta)\right)\right] - \rho i\omega\left(B\mathrm{e}^{\theta} + v_2(\theta)\right) = 0$$
$$\frac{C_{55}}{r^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} - \rho i\omega\left[C\mathrm{e}^{\theta} + w_2(\theta)\right] = 0.$$

Componenta deplasării elastice de-a lungul direcţiei axiale este:

$$W_m(r,\theta,t) = \left(C\mathrm{e}^{\theta} - \frac{\beta}{1+\alpha^2}\cos\alpha\theta - \frac{\beta}{\alpha(1+\alpha^2)}\sin\alpha\theta + \sin\alpha\theta + \frac{\beta}{1+\alpha^2}\mathrm{e}^{\theta} \right) e^{i\omega t}. \tag{6.7}$$

Primele două ecuaţii conduc la următorul sistem:

$$\begin{aligned} &\frac{C_{12}-3C_{11}}{2r^2}\frac{\partial v_2}{\partial\theta} + \frac{C_{11}-C_{12}}{2r^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2} + u_2(\theta)\left(\frac{C_{11}-2C_{12}}{r^2} - \rho i\omega\right) + A\mathrm{e}^{\theta}\left(-\frac{C_{11}}{r^2} - \rho i\omega\right) = 0 \\ &-\frac{C_{12}-3C_{11}}{2r^2}\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + \frac{C_{11}}{r^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\theta^2} + v_2(\theta)\left(\frac{-C_{11}+C_{12}}{r^2} - \rho i\omega\right) + B\mathrm{e}^{\theta}\left(\frac{-C_{11}+C_{12}}{2r^2} - \rho i\omega\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Sistemul de mai sus va fi rezolvat utilizând transformata Laplace cu condiţiile iniţiale nule:

$$v_2(0) = v_2'(0) = 0; u_2(0) = u_2'(0) = 0.$$

Folosind inversa transformatei Laplace obţinem soluţia generală a componentei elastice de-a lungul direcţiei radiale şi transversale.

6.1.3 Rezultate numerice

Coeficienţii de rigiditate $C_{\alpha\beta}$ (în GPa) pentru oasele umane au fost obţinuţi de Van Buskirk & Asman, [71] prin măsurarea proprietăţilor elastice ale osului anizotrop, folosind tehnici de propagare a undelor ultrasonice:

$$\begin{aligned} &C_{11} = 20,\ C_{22} = 21.7,\ C_{33} = 30,\ C_{44} = 6.56, C_{55} = 5.85,\ C_{66} = 4.74, \\ &C_{12} = 10.9, C_{13} = 11.5,\ C_{23} = 11.5. \end{aligned}$$

Folosind analiza numerică în Matlab şi a mediului Simulink au fost obţinute profilele deplasării elastice de-a lungul direcţiei axiale, respectiv radiale.

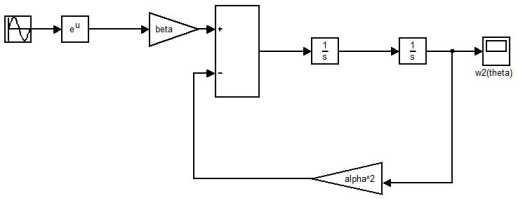

Figura 6.2: Schema Simulink pentru deplasarea elastică de-a lungul direcţiei axiale w_m

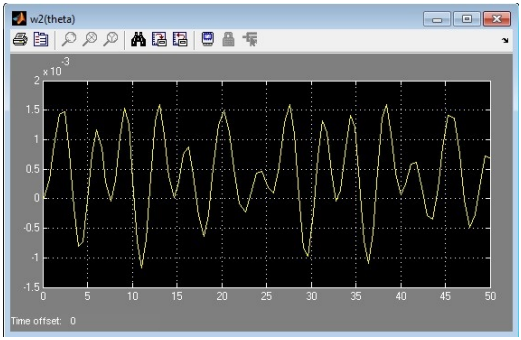

Figura 6.3: Variaţia deplasării elastice de-a lungul direcţiei axiale w_m.

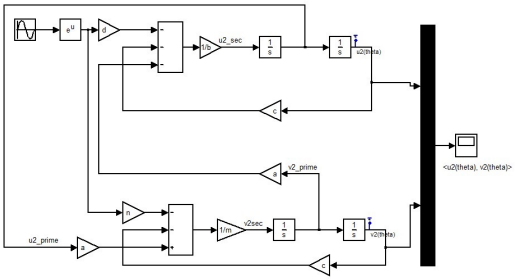

Figura 6.4: Schema Simulink pentru u_m şi w_m

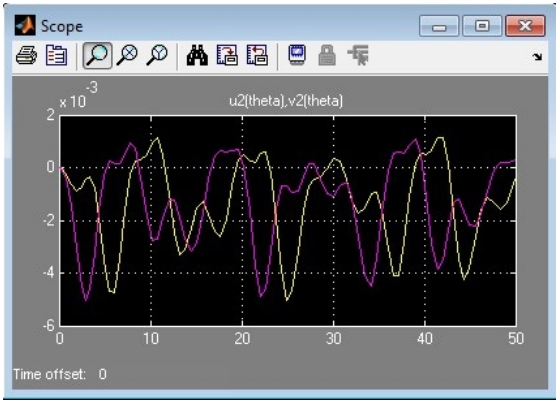

Figura 6.5: Variaţia depplasării elastice de-a lungul direcţiei radiale w_m

În această secţiune a fost dezvoltat un studiu asupra dinamicii discurilor intervertebrale. Principalele trei proprietăți ale osului, precum rezistența materialului, anizotropia si neomogenitatea au fost luate în considerare. A fost abordată vibrația torsională a unui inel intervertebral sub acțiunea unui moment. Utilizând metoda transformatei Laplace s-a obținut soluția generală a componentelor deplasărilor elastice de-a lungul direcțiilor radiale, transversale și axiale. Utilizând mediul Simulink din cadrul pachetului de simulare numerică Matlab au fost reprezentate grafic soluțiile sistemului.

6.2 Modelarea matematică a micro deplasărilor interfragmentare într-o fractură de femur

Încă din 1960, s-a arătat că apariția structurilor osoase de vindecare a fracturilor depinde de sarcina mecanică, [63]. Există studii importante privind direcția micilor mișcări în fracturi care prezintă avantajele direcției axiale. De asemenea, este prezentată influența negativă a microdeplasărilor de torsiune și de forfecare în focalizarea fracturilor, chiar dacă există o corelație cu amplitudinile lor în raport cu cele care favorizează vindecarea, [2], [3], [67] .

6.2.1 Modelări ale microrotaţiilor şi microdeplasărilor în fractură

Pe baza [46] osul poate fi considerat ca un material elastic micropolar. Ecuaţiile constitutive [17] în cazul izotrop sunt:

$$\begin{aligned} t_{kl} &= \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{kl} + (2\mu+\kappa)\varepsilon_{kl} + \kappa\varepsilon_{klm}(r_m - \phi_m) \\ m_{kl} &= \alpha\phi_{r,r}\delta_{kl} + \beta\phi_{k,l} + \gamma\phi_{l,k} \\ \varepsilon_{kl} &= \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \\ r_k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}u_{m,k} \end{aligned} \tag{6.9}$$

unde: t_{kl} este tensorul de tensiune asimetric, m_{kl} este tensiunea de cuplu, ε_{kl} este deformarea mică, u este deplasarea, ϕ este microrotaţia, r este macrorotaţia, ε_{klm} este tensorul Ricci.
Pentru studiul solidelor elastice în trei dimensiuni, sunt necesare câteva constante elastice: $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \kappa$.

Ecuaţiile de mişcare sunt, [17]:

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)u_{l,lk} + (\mu+\kappa)u_{k,ll} + \kappa\varepsilon_{klm}\phi_{m,l} + \rho f_k &= \rho\ddot{u}_k \\ (\alpha+\beta)\phi_{l,lk} + \gamma\phi_{k,ll} + \kappa\varepsilon_{klm}u_{m,l} - 2\kappa\phi_k + \rho l_k &= \rho j\ddot{\phi}_k \end{aligned} \tag{6.10}$$

În teoria liniară ρ şi j sunt considerate constante, iar acceleraţiile $\ddot{u}_k$ şi $\ddot{\phi}_k$ reprezintă derivatele de ordinul al doilea ale deplasării şi microrotaţiei în raport cu timpul, f_k este forţa ce acţionează asupra corpului, iar l_k este momentul.

Vom considera în cele ce urmează un corp omogen izotrop care ocupă regiunea finită $0 \leq x \leq l$ unde l este lungimea părţii superioare a osului fracturat.

Vom studia cazul unu dimensional, în care $u = u(x,t), \phi = \phi(x,t), x = (x_1, 0, 0)$. Ecuaţiile de mişcare (6.10) în cazul unu dimensional vor fi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\lambda+2\mu+\kappa}f_x &= \frac{\rho}{\lambda+2\mu+\kappa}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{2\kappa}{\alpha+\beta+\gamma}\phi + \frac{\rho}{\alpha+\beta+\gamma}l_x &= \frac{\rho j}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Condiţiile iniţiale sunt:

$$u(x,0) = u_0(x); \qquad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \tag{6.12}$$
$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \qquad \dot{\phi}(x,0) = \nu_0(x)$$

unde u_0, v_0, ϕ_0, ν_0 sunt funcţii definite în domeniul considerat la momentul $t = 0$. Condiţiile pe frontieră sunt:

$$u(l,t) = 0; \qquad \phi(l,t) = 0, l \in S \tag{6.13}$$

Utilizând transformata Laplace inversă vom obţine soluţia generală pentru deplasarea osului:

$$u(x,t) = \sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \frac{2}{3\omega}\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{3\omega}{2}t\right) + \frac{4}{25\omega^2}\sin\frac{5x}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{5\omega}{2}t\right)\right] \tag{6.14}$$

Pentru simplificarea calculeleor vom nota cu:

$$A = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\rho j}; B = \frac{2\kappa}{\rho j}; C = \frac{1}{j}$$

Astfel, cea de-a doua ecuaţie din devine:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - B\phi + Cl_x \tag{6.15}$$

Deoarece l_x reprezintă momentul, vom considera că:

$$l_x = x \cdot f_x \sin\phi; \text{ unde } f_x = \sin\frac{5x}{2}$$

Astfel, vom avea următoarea ecuaţie:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - B\phi + C \cdot x \cdot \sin\frac{5x}{2}\sin\phi \tag{6.16}$$

cu condiţiile iniţiale şi pe frontieră:

$$\phi(x,0) = x\sin\frac{x}{2}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = x\sin\frac{3x}{2} \tag{6.17}$$
$$\phi(0,t) = 0; \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}(\pi,t) = 0$$

Funcţia microrotaţie va fi:

$$\phi(x,t) = x \sin\frac{x}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{A+4B}{4}}t\right) + \cos\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{A+4B}}\sin\left(\frac{\sqrt{A+4B}}{2}t\right) + \tag{6.18}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{9A+4B}}x\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\sqrt{\frac{9A+4B}{4}}t\right) +$$
$$+ \frac{3A}{4}\cos\frac{3x}{2}\left[\sqrt{\frac{9A+4B}{4}}\sin\left(\sqrt{\frac{9A+4B}{4}}t\right) - t\frac{9A+4B}{4}\cos\left(\sqrt{\frac{9A+4B}{4}}t\right)\right] +$$
$$+ \frac{4C}{25A+4B-4}\left[\sin t - \frac{2}{\sqrt{25A+4B}}\sin\left(\frac{\sqrt{25A+4B}}{2}t\right)\right]x\sin\frac{5x}{2} +$$
$$+ \frac{20AC}{25A+4B-4}\left[\frac{4}{25A+4B-4}\left(\sin t - \frac{2}{\sqrt{25A+4B}}\sin\left(\frac{\sqrt{25A+4B}}{2}t\right)\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{25A+4B}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{25A+4B}}{2}t\right) - t\frac{25A+4B}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{25A+4B}}{2}t\right)\right)\right]\cos\frac{5x}{2}$$

În figurile de mai jos sunt reprezentate variaţiile deplasărilor şi microrotaţiilor pentru diferite valori de timp în cazul în care lungimea osului fracturat este $l = \pi = 3.14$.

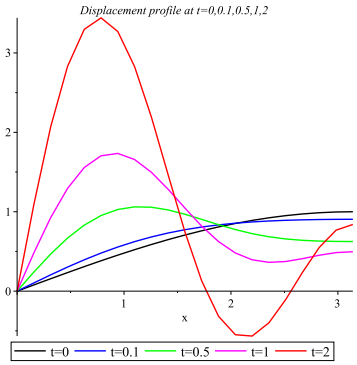

Figura 6.6: Profilul deplasării pentru valori de timp: $t = 0; 0.1; 0.5; 1.0$

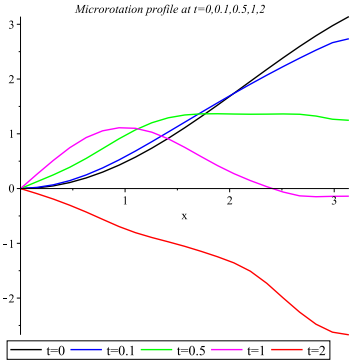

Figura 6.7: Profilul microrotaţiei pentru valori de timp: $t = 0; 0.1; 0.5; 1.0$

Având în vedere parametrii neomogeni cu structură armonică și dependentă de timp și având în vedere și deplasarea pe direcția considerată x, putem observa o variație ca în figurile de mai sus. Luând în considerare condițiile pe frontieră (**??**) impuse pentru deplasare și (6.17) pentru microrotaţie, putem explica variația reprezentată grafic că deplasarea şi rotaţia se condiționează reciproc.

Când deplasarea atinge limita impusă, apare rotația și produce schimbarea direcției sale, ceea ce duce la o variație periodică.

Capitolul 7

Concluzii finale

Prezenta teză de doctorat intitulată *Probleme mixte cu date la limită şi inițiale pentru medii continue generalizate* este structurată în 7 capitole propriu-zise şi conţine o listă bibliografică cu 115 titluri.

Capitolul întâi reprezintă o scurtă introducere în termoelasticitatea clasică, noţiuni generale preluate din cartea domnului academician Dorin Ieşan. Lucrarea de faţă conţine rezultate originale prezentate în capitolele 2, 3, 4, 5 şi 6 care au fost publicate sau care au fost trimise spre recenzie în reviste indexate ISI. În continuare voi enumera rezultatele originale, însoţite şi de jurnalul în care au fost publicate.

Rezultate originale publicate:

1. studiul realizat în capitolul 2 cu privire la comportamentul temporal al soluţiilor în cazul corpurilor poroase micropolare a fost publicat în lucrarea: M. Marin, **O. Florea**, On temporal behavior of solutions in Thermoelasticity of porous micropolar bodies, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Vol. 22(1), 2014, pp. 169-188 - jurnal indexat ISI cu Factor de Impact 0.452 şi SRI: 0.272

2. studiul realizat în capitolul 3 cu privire la dislocările seismice care apar în corpurile termoelastice cu microstructură a fost publicat în lucrarea: M. Marin, **O. Florea**, S.R. Mahmoud, A Result regarding the Seismic Dislocations in Microstretch Thermoelastic Bodies, Mathematical Problems in Engineering,

Volume 2015, Article ID 850261, 8 pages - jurnal indexat ISI cu Factor de Impact: 1.145 şi SRI: 0.784

3. studiul realizat în capitolul 4 cu privire la comportamentul spaţial în cazul termoelasticităţii corpurilor cu porozitate dublă a fost publicat în lucrarea: **O. Florea**, Spatial behavior in thermoelastodynamics with double porosity structure, International Journal of Applied Mechanics, 9(7), 2017 - jurnal indexat ISI cu Factor de Impact 1.954 şi SRI 0.84

4. studiul realizat în capitolul 5 cu privire la vibraţiile armonice în termoleasticitatea corpurilor cu porozitate dublă a fost publicat în lucrarea: **O. Florea**, Harmonic vibrations in thermoelastic dynamics with double porosity structure, Mathematics and Mechanics of Solids 1–15, 2018(online) - jurnal indexat ISI cu Factor de Impact 2.545 şi SRI: 1.324

5. studiul realizat în secţiunea 6.1 cu privire la comportamentul mecanic şi modelarea matematică a unui disc intervertebral a fost publicat în lucrarea: **O. Florea**, I. Rosca, The mechanical behavior and the mathematical modeling of an intervertebral disc, Acta Technica Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics and Engineering Vol. 58, Issue II, June, 2015 - jurnal indexat în WOS însă fără factor de impact

Rezultate originale trimise spre publicare:

1. studiul din capitolul 4, secțiunile 4.5-4.7, privind abordarea problemei înapoi în timp pentru medii dublu poroase cu microtemperatură se regăseşte în lucrarea: O. Florea, Backward in time problem of a double porosity material with microtemperature - lucrare încărcată pe platforma arXiv.org și trimisă spre recenzie

2. studiul din secţiunea 6.2 cu privire la studiul microdeplasărilor într-o fractură de femur se regăseşte în lucrarea: O. Florea, I. Roşca, R. Necula, Mathematical modeling of inter-fragmental microdisplacements in femoral fracture - lucarare trimisă spre recenzie

Alte studii realizate de-a lungul studiilor doctorale sunt:

1. Un studiu al mişcării de rostogolire a unei sfere pe o suprafaţă rugoasă a fost publicat în **O. Florea**, I.C. Rosca, Analytic study of a rolling sphere on a rough surface, AIP Advances, 6(11), 2016 - jurnal indexat cu Factor de Impact 1.653 şi SRI 1.061

2. Studiul curgerii unui fluid nenewtonian între doi cilindrii concentrici a fost publicat în articolul **O. Florea**, A novel approach of the conformal mappings with applications in biotribology, Universitatea Ovidius – Constanța, România, Analele Științifice ale Universității Ovidius Constanța, Seria Matematică, volumul 23, fascicola 1, 2015, pp. 99-114 - jurnal indexat ISI cu Factor de Impact 0.452 şi SRI: 0.272
3. Modelarea matematică a ecuaţiei lui Reynold a unui fluid compresibil a fost publicată în M. Marin, R.P. Agarwal, **O. Florea**, A nonlinear equation for fluids in multiconnected domain, Boundary Value Problems 2015, 2015:198 doi:10.1186/s13661-015-0461-y - jurnal indexat ISI cu factor de impact 1.156 şi SRI 0.541
4. Un studiu cu privire la modelarea curgerii unui fluid micropolar incompresibil cu alunecare utilizând condiţii iniţiale şi pe frontieră atunci când viteza la perete depinde de frecvenţa vibraţiei a fost publicat în articolul **O. Florea**, Rosca IC, Stokes' Second Problem for a Micropolar Fluid with Slip. PLoS ONE 10(7): e0131860, 2015 - jurnal indexat ISI cu Factor de Impact 2.766 şi SRI: 1.819
5. Un studiu cu privire la interpretarea bosonului composit, prin construirea soluţiei generale Dirac - Kahler pentru cazul spaţiului sferic Riemann cu curbură constantă a fost publicat în articolul A. Ishkhanyan, **O. Florea**, E. Ovsiyuk, V. Red'kov, Dirac–Kähler particle in Riemann spherical space: boson interpretation, Canadian Journal Physics, Volume 92, 2015 -jurnal indexat ISI cu factor de impact 0.983 şi SRI 0.56

Direcţiile viitoare de cercetare:

- studiul curgerii sângelui prin arterele elastice
- studiul vibraţiilor armonice în dinamica termoelastică cu structură triplă a porozităţii
- studiul microdeplasărilor şi al microrotaţiilor în fracturile de şold şi umăr.

Bibliografie

[1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] Aro HT, Chao EY. Bone-healing patterns affected by loading, fracture fragment stability, fracture type, and fracture site compression. Clin Orthop Relat Res. 1993 Aug;(293):8-17.

[3] Augat P, Burger J, Schorlemmer S, Henke T, Peraus M, Claes L. Shear movement at the fracture site delays healing in a diaphysal fracture model, J Orthop Res. 2003 Nov;21(6):1011-7.

[4] Barrenblatt, GI, Zheltov, IP, Kockina, IN. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks (Strata), *Prikl.Mat. Mekh.* (English Translation) 1960; 24: 1286-1303.

[5] Barenblatt, GI, Zheltov, IP. On the Basic Equations of Seepage of Homo-geneous Liquids in Fissured Rock, *Akad. Nauk SSSR* (English Translation) 1960; 132: 545-548.

[6] Berryman, JG, Wang, HF. Elastic Wave Propagation and Attenuation in a Double porosity Dual permeability Medium. *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences* 2000; 37: 63-78.

[7] Casas, P.S.; Quintanilla, R. Exponential decay in one-dimensional porous thermoelasticity, *Mech. Res. Commun*, 2005, 32, 625-658

[8] Casas, P.S.; Quintanilla, R. Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures, *Int. J. Eng.*, 2005, 43, 33-47.

[9] Chitita, S. Spatial decay estimates for solutions describing harmonic vibrations in a thermoelastic cylinder. *Journal of Thermal Stresses* 1995; 18(4): 421-436

[10] S. Chirita, M. Ciarletta, and B. Straughan, Structural Stability in Porous Elasticity, *Proc. R. Soc. Lond. A* 2006; 462: 2593–2605.

[11] S. Chirita and M. Ciarletta, On the Structural Stability of Thermoelastic Model of Porous Media, *Math. Methods Appl. Sci.* 2008; 31: 19–34.

[12] S. Chirita and M. Ciarletta, Time-weighted Surface Power Function Method for the Study of Spatial Behaviour in Dynamics of Continua, *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 18(1999), 915-933

[13] E. Cosserat, F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Herman et Fils, Paris, 1909

[14] Cowin, SC. and Nunziato, JW. Linear elastic materials with voids, *Journal of Elasticity* 1983; 13: 125-147.

[15] Cowin, SC. Bone Poroelasticity, *J. Biomech.* 1999; 32: 217-238.

[16] Cowin, S. C., The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids, *Journal of Elasticity*, 15, 185–191, 1985 Solids, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1999

[17] A.C. Eringen, Theory of micropolar elasticity, Princeton University, 1967

[18] A.C. Eringen, Theory of thermo-microstretch elastic solids, *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 28, pp. 1291-1301, 1990

[19] A.C. Eringen, Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1999

[20] Flavin, J.N, Knops, R.J, Payne, L. E, Decay estimates for the constrained elastic cylinder of variable cross-sections, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1989 47(2), 325-350.

[21] Flavin, J.N.; Knops, R.J.; Payne, L.E. Energy bounds in dynamical problem for a semi-infinite elastic beam, *Elasticity: Math Met & Appl*, 1989, 101-111.

[22] Flavin, JN., Knops RJ. and Payne LE. Decay estimates for the constrained elastic cylinder of variable cross section. *Quart. Appl. Marh.* 1989; 47: 325-350.

[23] **O. Florea**, I.C. Rosca, Analytic study of a rolling sphere on a rough surface, AIP Advances, 6(11), 2016

[24] **O. Florea**, A novel approach of the conformal mappings with applications in biotribology, Universitatea Ovidius – Constanța, România, Analele Științifice ale Universității Ovidius Constanța, Seria Matematică, volumul 23, fascicola 1, 2015, pp. 99-114

[25] **O. Florea**, Harmonic vibrations in thermoelastic dynamics with double porosity structure, Mathematics and Mechanics of Solids 1–15, 2018 (online), DOI: 10.1177/1081286518761181

[26] **O. Florea,** Spatial Behavior in Thermoelastodynamics with Double Porosity Structure, *International Journal of Applied Mechanics* 2017; 9(7): 1750097.

[27] **O. Florea**, Backward in time problem of a double porosity material with microtemperature, arXiv:1808.07562v1 [physics.class-ph], Aug 2018

[28] **O. Florea**, Mathematical Modeling of Some Physical Phenomena Through Dynamical Systems, chapter book in C. Flaut et al. (eds.), Models and Theories in Social Systems, Studies in Systems, Decision and Control 179, 77-93, Springer Nature Switzerland AG 2019

[29] **O. Florea**, I.C. Rosca, The mechanical behavior and the mathematical modeling of an intervertebral disc, ACTA TECHNICA NAPOCENSIS, Series: Applied Mathematics, Mechanics and Engineering, Vol. 58, Issue III, 2015

[30] **O. Florea**, Roşca IC, Stokes' Second Problem for a Micropolar Fluid with Slip. PLoS ONE 10(7): e0131860, 2015

[31] G.P. Galdi, B. Straughan, Stability of solutions of the Navier-Stokes equations backward in time, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 101, 107-114, 1988

[32] Ghiba I.D, Linear thermoelastic model in R. Hetnarski (ed.), Encyclopedia of Thermal Stresses, pp. 2785-2794, Springer, 2014

[33] Goodman, MA and Cowin, SC. A continuum theory for granular materials, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1972; **44**: 249-266.

[34] I. Hlavacek and J. Necas, On Inequalities of Korn's Type, *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 36(1970), 305-334

[35] A. T. De Hoop, "A domain of influence in Elasticity", *Appl. Sci. Res.*, vol. 16, pp. 39-45, 1966

[36] A.T. De Hoop, Handbook of Radiation, Academic Press, London, New York, 1995

[37] Huang, Z., Chen, Y. and Bai, S. L. [2013] "An elastoplastic constitutive model for porous materials", *International Journal of applied Mechanics*, **5**(3), 1350035.

[38] Ieşan, D., Mecanica generalizată a solidelor, Universitatea Al. I. Cuza, Iaşi, 1980

[39] Iesan, D. and Quintanilla, R. On a theory of thermoelastic materials with a double porosity structure, *Journal of Thermal Stress* 2014; 37: 1017 - 1036.

[40] D. Iesan, A Theory of Thermoelastic Materials with Voids, *Acta Mechanica*, vol. 60(1986), 67-89

[41] D. Iesan, "Some applications of micropolar mechanics to earthquake problems", *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 19, pp. 855- 864, 1981

[42] D. Iesan, R. Quintanilla, Non-linear deformations of porous elastic solids, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 49(2013), 57-65.

[43] A. Ishkhanyan, **O. Florea**, E. Ovsiyuk, V. Red'kov, Dirac–Kähler particle in Riemann spherical space: boson interpretation, Canadian Journal Physics, Volume 92, 2015

[44] L. Knopoff, A. K. Chatterjee, "Crack breakout dynamics", *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol. 72, pp. 1571-1579, 1990

[45] R.J. Knops, L. E. Payne, On the stability of solutions of the Navier - Stokes equations bacward in time, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 29, 321-335, 1968

[46] Lakes RS, Nakamura S. et al. Fracture mechanics of bone with short cracks. J. of Biomechanics, 1990; 23(10): 967-975

[47] Magana, A.; Quintanilla, R. On the exponential decay of solutions in one-dimensional generalized porous-thermo-elasticity, *Assymptot. Anal*, 2006, 49, 173-187.

[48] Magana, A.; Quintanilla, R. On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials, *Int. J. Solids. Strcture*, 2006, 43, 3414-3427

[49] M. Marin, R.P. Agarwal, **O. Florea**, A nonlinear equation for fluids in multiconnected domain, Boundary Value Problems 2015, 2015:198 doi:10.1186/s13661-015-0461-y

[50] Marin, M, **Florea, O**. On temporal behaviour of solutions in thermoelasticity of porous micropolar bodies, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 2014; 22: 69-188.

[51] Marin, M, **Florea, O**, and Mahmoud, SR. A Result regarding the Seismic Dislocations in Microstretch Thermoelastic Bodies, *Mathematical Problems in Engineering* 2015; 2015: 850261.

[52] Marin, M, and Abbas, I. Evolution of solutions for dipolar bodies in thermoelasticity without energy dissipation, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 2016, 24: 57-82.

[53] Marin, M, and Baleanu, D. On vibrations in thermoelasticity without energy dissipation for micropolar bodies, *Boundary Value Problems* 2016; 2016: 111.

[54] Marin, M., Vlase, S. and Paun, M. Considerations on double porosity structure for micropolar bodies, *AIP Advances* 2015; 5: 037113

[55] M. Marin, A partition of energy in Thermoelasticity of microstretch bodies*Nonlinear Analysis: R. W. A.*, Vol. 11, 4(2010), 2436-2447

[56] M. Marin, Lagrange identity method for microstretch thermoelastic materials,*Journal of Math. Analysis and Appl.*, Vol. 363, 1(2010), 275-286

[57] M. Marin, On harmonic vibrations in thermoelasticity of micropolar bodies*Journal of Vibration and Control*, 5(1998), 507-518.

[58] M. Marin, R.P. Agarwal, S.R. Mahmoud, "Nonsimple material problems addressed by the Lagrange identity", *Boundary Value Problems*, vol. 2013, pp. 1-14, 2013, doi:10.1186/1687-2770-2013-135

[59] M. Marin, G. Stan, "Weak solutions in Elasticity of dipolar bodies with stretch",*Carpathian J. Math.*, vol. 29, no. 1, pp. 33-40, 2013

[60] Misra JC, Samanta S, A Mathematical Model for the Biomechanics of the Body of a Vertebra, Comput. Math. Applic., 5:2, 1988

[61] J. W. Nunziato and S. C. Cowin, A Nonlinear Theory of Elastic Materials with Voids, *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 72(1979), 175-201

[62] F. Passarella, V. Tibullo, V. Zampoli, On the uniqueness in dynamical thermoelasticity backward in time for porous media, J. of Thermal Stresses, vol. 36, 501-515, 2013.

[63] Pauwels F. A new theory of the influence of mechanical stimuli on the differentiation of supporting tissue. The tenth contribution to the functional anatomy and causal morphology of the supporting structure. Z Anat Entwicklungsgesch. 1960;121:478-515.

[64] Quintanilla, R. Impossibility of localization in thermo-porous-elasticity with microtemperatures, *Acta Mecanica*, 2009, 207(145), 145-151.

[65] Quintanilla, R. Imposibility of localization in linear thermoelasticity with voids, *Mechanics Research Communications* 2007; 34: 522–527.

[66] Serrin, J., The initial value problem for Navier-Stokes equations, Proc. Symp. Non-Linear Problems, 69-98, Univ. Wisconsin Press, Madison, 1963

[67] Shefelbine Sandra J. et al. Intact fibula improves fracture healing in a rat tibia osteotomy model, Clim. Orthop. Relat. Res., 2005, 23(2), 489-493

[68] Svanadze, M. Plane waves and boundary value problems in the theory of elasticity for solids with double porosity. *Acta Applicandae Mathematicae* 2012; 122: 461-471.

[69] C. Truesdell, W. Noll, Handbuch der Physik, vol.III/3, Springer, Berlin, 1965

[70] Zhao, Y. and Chen, M. [2006] Fully Coupled Dual-porosity Model for Anisotropic For- mations, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **43**, 1128-1133.

[71] Van Buskirk WC, Ashman RB, The elastic moduli of bone. in: Mechanical Properties of Bone, Joint ASME-ASCE Bioengineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, New York; 1981.

Anexe

Anexa1. Scurt rezumat al tezei

Teza de doctorat intitulată *Probleme mixte cu date la limită şi iniţiale pentru medii continue generalizate*, este structurată în 7 capitole, un capitol introductiv, 5 capitole care conțin rezultate originale și un capitol cu concluzii și direcții viitoare de cercetare. În primul capitol sunt prezentate noțiuni introductive din termoelasticitatea clasică. În capitolul 2 a fost considerat un corp poros termoelastic cu date inițiale și pe frontieră, pentru care s-a analizat comportamentul temporal al soluțiilor. Au fost utilizate mediile Caesaro pentru componentele energiei și a fost demonstrată echipartiția asimptotică a energiilor cinetică și de deformare. În capitolul 3 este obținută o relație de tip De Hoop - Knopoff pentru câmpul deplasărilor, în contextul termoelasticității corpurilor cu microstructură, având aplicații în studiul dislocărilor seismice. Capitolul 4 prezintă studiul comportamentului spațial al soluțiilor în cazul termoelasticității corpurilor cu porozitate dublă. Au fost abordate două situații: pentru domeniile mărginite a fost obținută imposibilitatea localizării în timp a soluțiilor, prin demonstrarea unicității soluțiilor pentru problema inapoi in timp, iar cel de-al doilea studiu a constat in obținerea alternativei Phragmen–Lindelof in cazul cilindrilor semi-infiniți și aflarea limitei superioare a amplitudinii. Capitolul este continuat cu un studiu al problemei înapoi în timp privind materialele dublu poroase cu microtemperaturi. Studiul vibrațiilor armonice in dinamica termoelastică a corpurilor cu structură dublă poroasă este prezentat in capitolul 5. A fost studiată amplitudinea vibrațiilor pentru problema inapoi in timp obținand legile de conservare. Capitolul 6 prezintă două aplicații ale mediilor poroase in medicină. A fost dezvoltat un studiu asupra dinamicii discurilor intervertebrale. Principalele trei proprietăți ale osului, precum rezistența

materialului, anizotropia si neomogenitatea au fost luate în considerare. Cel de-al doilea studiu se ocupă de studiul unei fracturi femurale din punctul de vedere al modelării matematice. Scopul principal al autorilor este de a găsi o expresie analitică pentru microdeplasările și microrotațiile în fractura diafizală femurală. Ultimul capitol conține concluziile finale fiind prezentate contribuțiile originale și direcțiile viitoare de cercetare. Rezultatele cuprinse în această teză pot fi extinse în teoria mediilor poroase cu tripla structură de porozitate. Teoriile prezentate în prezenta teză se pot aplica pentru analiza comportamentului soluțiilor mediilor poroase când sunt luate în considerare microtemperatura și microconcentrațiile.

* *

*

The PhD thesis, entitled, *Mixt problems with boundary and initial data for generalized continua* is structured into 7 chapters: an introductory chapter, 5 chapters that contain original results and a chapter with conclusions and further research. In the first chapter are presented introductory notions regarding the classical thermoelasticity. In the second chapter it was considered a porous material with initial and boundary data, for which it was analyzed the temporal behavior of the solutions. The Caesaro means for the energy components were used and it was proved the asymptotic equipartition of the kinetic and strain energies. In the third chapter it is obtained a De Hoop-Knopoff relation for the displacements field, in the frame of the themoleasticity bodies with microstructure, having applications in the seismic dislocations. Chapter 4 presents the study of the spatial behavior of the solutions in the case of materials with double porosity. There were approached two situations: for the boundary domains it was obtained the impossibility of localisation in time of solutions, using the unicity of solutions for the backward in time problem, and the second study consists in the obtaining of the Phragmen-Lindlof alternative in the case of semi-infinite cylinders and finding the upper limit for the amplitude. The chapter is ended with the study of the backward in time problem for the materials with double porosity and microtemperatures. The study of harmonical vibrations in the frame of the termoleasticity of materials with double porosity is presented in chapter 5. For the backward in time problem there were obtained some conservation laws. Chapter 6 presents two applications for the porous bodies in medicine. It was developed a study on the inter-vertebral discs. The main properties of the bone were taken into consideration: the resistance, anisotropy and non homogeneity of the bone. The second study deals with the femoral fracture form the point of view of mathematical modeling. The main aim is to find an analytic expression for the microdisplacements and microrotations from

the diaphisal femoral fracture. The last chapter contains the final conclusions, being presented the original contributions and further research. The results encountered in the present thesis may be extended into the theory of materials with triple porosity structure. The presented theories can be applied to analyse the behavior of the solutions for porous continua when are taken into consideration the microtemperatures and microconcentrations.

Anexa 2. Curriculum Vitae

Informaţii personale **Olivia - Ana PETCU (căs. FLOREA)**
E-mail: olivia.florea@unitbv.ro

Experienţa profesională

2016-prezent – Prodecan cu activitatea cu studenții în cadrul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov
2016-prezent – Conferențiar universitar în cadrul Departamentului de Matematică şi Informatică al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov
2011-2016 – Lector universitar în cadrul Departamentului de Matematică şi Informatică al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov
2011-prezent – Coordonator program Conversie Profesională domeniul Matematică pentru cadrele didactice din învățământul preuniversitar, Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania*
2007-2011 – Asistent universitar în cadrul Departamentului de Matematică şi Informatică al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov
2004-2007 – Preparator universitar în cadrul Departamentului de Matematică şi Informatică al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov

---

Educaţie

2014-prezent – Doctorand, Domeniul matematică, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea *Transilvania*, Braşov
2004-2010 – Doctor în Științe Inginerești, Facultatea de Inginerie Mecanică, Universitatea Transilvania din Brașov,
Cond. șt. Prof. dr. ing. mat. Adrian POSTELNICU
2001-2002 - Studii Aprofundate în specializarea Metode Matematice și Produse Software Facultatea de Științe, Universitatea *Transilvania*
1997-2001 – Licenţă în matematică, Facultatea de Științe, Universitatea *Transilvania*, Braşov

---

Aptitudini şi competenţe personale

Limbi străine cunoscute/Autoevaluare:
Engleză – înţelegere-avansat, vorbire-mediu, scriere-avansat
Franceză – înţelegere-avansat, vorbire-mediu, scriere-mediu
Competenţe informatice:
Limbajele de programare Python, HTML
Editoarele din pachetul Microsoft Office
Programele Mathematica, Scilab, Matlab, LaTeX

Personal information	**Olivia - Ana PETCU (căs. FLOREA)** E-mail: olivia.florea@unitbv.ro
Work experience	**2016-now** – Vice-dean with students activity, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2016-now** – Associate Profesor, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2011-2016** – Lecturer, Department of Mathematics and Computer Science Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University **2011-now** – Coordinator of Conversion Program for teachers in Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2007-2011** – Assistant professor, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2004-2007** – Teaching assistant, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov
Education	**2014-now** – PhD student in Mathematics Faculty of Mathematics , and Computer Science, *Transilvania* University of Braşov **2004-2010** – PhD in Engineering Sciences, Faculty of Mechanics, Transilvania University of Braşov, Coord. şt. Prof. dr. ing. mat. Adrian POSTELNICU **2001-2002** - Advanced Studies in Mathematical Methods ans Software Products, Faculty of Sciences, Transilvania University of Braşov **1997-2001** – Bachelor degree in Mathematics, Faculty of Sciences, Transilvania University of Braşov
Personal skills	**Foreign languages/Self-evaluation:** English – understanding-advanced, speaking-medium, writing-advanced French – understanding-advanced, speaking-medium, writing-medium **Social skills:** Communicative, serious, organized, responsable, adaptable, perfectionist, dynamic **PC skills:** Programming languages: Python, HTML Microsoft Office package Mathematica, Scilab, Matlab, LaTeX