



Universitatea
Transilvania
din Braşov

ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Facultatea de Matematică și Informatică

Camelia Liliana ONIGA (Moldovan)

**STUDIUL UNOR PROCEDEE DE
APROXIMARE A FUNCȚIILOR
THE STUDY OF SOME FUNCTIONS
APPROXIMATION PROCEDURES**

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător științific

Prof. Dr. Radu PĂLTĂNEA

BRAȘOV, 2020

D-lui (D-nei)

COMPONENȚA

Comisiei de doctorat

Numită prin ordinul Rectorului Universității Transilvania din Braşov
Nr. 10674 din 31.08.2020

PREȘEDINTE:	Prof. Dr. DORINA RĂDUCANU Decan Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea Transilvania din Braşov, România
CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:	Prof. Dr. RADU PĂLTĂNEA Universitatea Transilvania din Braşov, România
REFERENȚI:	Prof. Dr. dr. h.c. (RO) HEINER GONSKA University of Duisburg-Essen, Germany Prof. Dr. GANCHO TACHEV University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Sofia, Bulgaria Prof. Dr. DORIAN POPA Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Romania

Data, ora și locul susținerii publice a tezei de doctorat:, ora, sala

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa moldovancamelia.liliana@unitbv.ro

Totodată, vă invităm să luați parte la ședința publică de susținere a tezei de doctorat.

Vă mulțumim.



CUPRINS

	Pagină teză	Pagină rezumat
1 Introducere	3	3
1.1 Noţiuni fundamentale.....	3	3
1.1.1 Notății.....	3	3
1.1.2 Diferențe divizate.....	3	3
1.1.3 Mulțimi interpolatoare. Sisteme Cebîshev.....	6	5
1.1.4 Interpolare Lagrange.....	8	5
1.2 Teoreme de convergență.....	10	7
1.2.1 Teoremele lui Weierstrass. Aproximare prin șiruri de proiectori.....	10	7
1.2.2 Operatori liniari pozitivi.....	12	8
1.2.3 Moduli de continuitate.....	15	9
2 Funcții spline. Operatorii Schoenberg	19	12
2.1 Funcții spline polinomiale. B-splines.....	19	12
2.1.1 Cazul general al funcțiilor spline cu noduri multiple.....	19	12
2.1.2 Funcții spline cu noduri simple.....	21	13
2.2 Operatorii Schoenberg.....	23	14
3 Îmbunătățirea ordinului de aproximare	28	16
3.1 Operatorii Schoenberg de grad doi pe noduri particular alese.....	28	16
3.1.1 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi pe noduri particular alese.....	29	16
3.1.2 Compararea ordinului de aproximare cu cazul nodurilor echidistante	37	19
3.2 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi pe noduri arbitrare.....	40	21
3.2.1 O primă metodă care utilizează o diviziune extinsă auxiliară.....	40	21



	Pagină teză	Pagină rezumat
3.2.2 O a doua metodă cu calcul direct.....	43	21
3.3 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul al doilea cu noduri în rădăcinile polinoamelor Cebîshev.....	45	22
3.3.1 Metoda care foloseşte o diviziune extinsă auxiliară.....	46	23
3.3.2 Metoda de calcul direct.....	47	23
3.3.3 Rezultate de bază.....	52	24
4 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul trei şi aplicaţii.....	57	26
4.1 Cazul nodurilor arbitrare.....	57	26
4.1.1 Metoda cu o diviziune extinsă auxiliară.....	57	26
4.1.2 Metoda bazată pe calcul direct.....	61	28
4.2 Cazul nodurilor echidistante.....	71	30
4.3 Aplicaţii în aproximare.....	72	31
4.4 Operatorii Schoenberg pentru care spaţiul polinoamelor de gradul doi este invariant.....	75	32
4.5 Operatori de tip Schoenberg-King.....	77	33
5 O definiţie a operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg.....	80	33
5.1 Operatori bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri arbitrare.....	80	33
5.2 Operatori bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri echidistante.....	88	37
6 Aplicaţii ale operatorilor spline Schoenberg în practică.....	95	39
6.1 Evaluarea erorilor dintre valorile experimentale ale intensităţii radiaţiei solare directe şi valorile calculate cu modelul Meliss.....	96	40
6.2 Utilizarea operatorilor spline Schoenberg de gradul trei în scopul îmbunătăţirii acurateţii modelului Meliss.....	106	42



	Pagină teză	Pagină rezumat
Concluzii	121	50
Bibliografie	122	51
Rezumat scurt (română / engleză)		61



CONTENT

	Page thesis	Page abstract
1 Introduction	3	3
1.1 Fundamental notions.....	3	3
1.1.1 Notations.....	3	3
1.1.2 Divided differences.....	3	3
1.1.3 Interpolating sets. Chebyshev system.....	6	4
1.1.4 Lagrange Interpolation.....	8	5
1.2 Convergence theorems.....	10	6
1.2.1 Weierstrass's Theorems. Approximation by sequences of projectors.....	10	6
1.2.2 Positive linear operators.....	12	8
1.2.3 Moduli of continuity.....	15	9
2 Spline functions. Schoenberg operators	19	11
2.1 Polynomial spline functions. B-splines.....	19	11
2.1.1 The general case of the splines functions on multiple nodes.....	19	11
2.1.2 Spline functions on simple nodes.....	21	12
2.2 Schoenberg operators.....	23	14
3 Improving the approximation order	28	15
3.1 Second degree Schoenberg operators on articularly chosen knots.....	28	15
3.1.1 The second moment of second degree Schoenberg operators on particularly chosen knots.....	29	16
3.1.2 Comparing the order of approximation with the equidistant case.....	37	18

	Page thesis	Page abstract
3.2 The second moment of second degree Schoenberg operators on arbitrary knots	40	20
3.2.1 A first method which use an auxiliary extended knot sequence.....	40	20
3.2.2 A second method with the direct calculation.....	43	21
3.3 The second moment of second degree Schoenberg operators on knots in the roots of Chebyshev polynomials.....	45	21
3.3.1 The method which use an auxiliary extended knot sequence.....	46	22
3.3.2 The direct calculation method.....	47	22
3.3.3 Basic results.....	52	23
4 The second moment of third degree Schoenberg operators and applications.....	57	25
4.1 The case of arbitrary knots.....	57	25
4.1.1 The method with an auxiliary extended knot sequence.....	57	25
4.1.2 The method based on direct calculation.....	61	27
4.2 The case of equidistant nodes.....	71	30
4.3 Applications in approximation.....	72	31
4.4 Schoenberg operators for which the space of polynomials of degree two is invariant.....	75	32
4.5 Schoenberg-King type operators.....	77	32
5 A definition of two-dimensional Schoenberg type operators.....	80	33
5.1 Two-dimensional Schoenberg type operators on arbitrary knots.....	80	33
5.2 Two-dimensional Schoenberg type operators on equidistant knots.....	88	36
6 Applications of Schoenberg spline operators in practice.....	95	39



	Page thesis	Page abstract
6.1 Evaluation of the errors between the experimental values of the direct solar irradiance and the values calculated with the Meliss model.....	96	39
6.2 The use of third degree Schoenberg spline operators in the purpose improve the accuracy of the Meliss model.....	106	41
Conclusions	121	50
References	122	51
Short abstract (romanian / english)		60

Universitatea *Transilvania* din Braşov

Şcoala Doctorală Interdisciplinară

Facultatea de Matematică şi Informatică

Camelia Liliana ONIGA (Moldovan)

REZUMAT

Conducător Ştiinţific

Prof. Dr. Radu PĂLTĂNEA

BRAŞOV, 2020

Camelia Liliana ONIGA (Moldovan)

REZUMAT

STUDIUL UNOR PROCEDEE DE APROXIMARE A FUNCȚIILOR

Domeniul: MATEMATICĂ

Comisia de analiză a tezei:

Președinte Prof. Dr. DORINA RĂDUCANU
Decan Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea *Transilvania* Brașov, România

Conducător Științific Prof. Dr. RADU PĂLTĂNEA
Universitatea *Transilvania* Brașov, România

Referent Oficial Prof. Dr. dr. h.c. (RO) HEINER GONSKA
University of Duisburg–Essen, Germany

Referent Oficial Prof. Dr. GANCHO TACHEV
University of Architecture, Civil Engineering and
Geodesy, Sofia, Bulgaria

Referent Oficial Prof. Dr. DORIAN POPA
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, România

Cuprins

1	Introducere	3
1.1	Noțiuni fundamentale	3
1.1.1	Notații	3
1.1.2	Diferențe divizate	3
1.1.3	Mulțimi interpolatoare. Sisteme Cebîshev	5
1.1.4	Interpolare Lagrange	5
1.2	Teoreme de convergență	7
1.2.1	Teoremele lui Weierstrass. Aproximare prin șiruri de proiectori	7
1.2.2	Operatori liniari pozitivi	8
1.2.3	Moduli de continuitate	9
2	Funcții spline. Operatorii Schoenberg	12
2.1	Funcții spline polinomiale. B-splines	12
2.1.1	Cazul general al funcțiilor spline cu noduri multiple	12
2.1.2	Funcții spline cu noduri simple	13
2.2	Operatorii Schoenberg	14
3	Îmbunătățirea ordinului de aproximare	16
3.1	Operatorii Schoenberg de grad doi pe noduri particular alese	16
3.1.1	Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi pe noduri particular alese	16
3.1.2	Compararea ordinului de aproximare cu cazul nodurilor echidistante	19
3.2	Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi pe noduri arbitrare	21
3.2.1	O primă metodă care utilizează o diviziune extinsă auxiliară	21
3.2.2	O a doua metodă cu calcul direct	21
3.3	Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul al doilea cu noduri în rădăcinile polinoamelor Cebîshev	22
3.3.1	Metoda care folosește o diviziune extinsă auxiliară	23
3.3.2	Metoda de calcul direct	23
3.3.3	Rezultate de bază	24
4	Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul trei și aplicații	26
4.1	Cazul nodurilor arbitrare	26
4.1.1	Metoda cu o diviziune extinsă auxiliară	26
4.1.2	Metoda bazată pe calcul direct	28
4.2	Cazul nodurilor echidistante	30
4.3	Aplicații în aproximare	31
4.4	Operatorii Schoenberg pentru care spațiul polinoamelor de gradul doi este invariant	32

4.5	Operatori de tip Schoenberg-King	33
5	O definiție a operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg	33
5.1	Operatori bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri arbitrare	33
5.2	Operatori bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri echidistante . . .	37
6	Aplicații ale operatorilor spline Schoenberg în practică	39
6.1	Evaluarea erorilor dintre valorile experimentale ale intensității radiației solare directe și valorile calculate cu modelul Meliss	40
6.2	Utilizarea operatorilor spline Schoenberg de gradul trei în scopul îmbu- nătățirii acurateții modelului Meliss	42
	Concluzii	50
	Bibliografie	51

Prefață

Teoria Aproximării constituie o parte importantă a Analizei Matematice, fiind unul din domeniile de interes ale matematicienilor. Aproximarea funcțiilor reale a constituit o preocupare pentru matematicieni cum ar fi Cebîshev, Weierstrass, Bernstein, Lorentz, De Vore. Acest lucru se poate observa în numeroasele lucrări scrise pe această temă, amintim câteva: Bernstein [10], Lorentz [67], De Vore [29].

În 1950 Tiberiu Popoviciu, în 1952 Harald Bohman și în 1953 Pavel Petrovich Korovkin pun bazele teoriei aproximării prin operatori liniari pozitivi. Există o largă bibliografie centrată pe studiul unor operatori concreți, cum ar fi: operatorii Kantorovich, operatorii Bernstein, operatorii Baskakov, operatorii Mirakjan-Favard-Szász, operatorii Schoenberg, operatorii Landau, operatorii Lupaș, operatorii Stancu, operatorii Meyer-König-Zeller, operatorii Bleimann-Butzer-Hahn, operatorii Gauss-Weierstrass, operatorii Post-Widder, operatorii Picard.

Numeroase rezultate științifice sunt legate de aproximarea prin clase de operatori liniari pozitivi. De exemplu, folosind modulii de continuitate se pot face evaluări ale ordinului de aproximare, și aici menționăm pe Shisha, Mond, Ditzian, Totik, și mai recent Gonska, Păltănea, Tachev.

Cu preocupări în categoria operatorilor Schoenberg și a funcțiilor spline îi menționăm pe Schoenberg [100], [102], [107], Boor [18], [20], Marsden [73], [74], Goodman [42], [43], Greville [45]. Operatorii spline Schoenberg sunt studiați și în prezent, rezultatele recente obținute de Gonska [11], [12], [13], Păltănea [76], [77], Tachev [119], [120], [121] demonstrând că este o zonă de interes și un subiect de actualitate.

Capitolul 1 conține noțiuni cu caracter general din teoria aproximării, noțiuni folosite în teza de doctorat. Capitolul 2 prezintă rezultate specifice despre operatorii Schoenberg, operatori care formează esența cercetărilor efectuate în teza de doctorat.

Capitolele 3, 4, 5 și 6 reprezintă în întregime contribuția originală a autorului tezei de doctorat și rezultate cuprinse în aceste capitole au fost publicate în jurnalele: "Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Serie A. Mathematicas", [76], "Numerical Functional Analysis and Optimization", [77], "Symmetry" [78], "Renewable Energy", [79], "Bulletin of the Transilvania University of Brasov", [82], "The Annals of the West University of Timisoara - Physics", [80], "Annals of Dunărea de Jos University of Galati, Mathematics, Physics, Theoretical Mechanics", [81].

În Capitolul 3 autorul prezintă rezultatele stabilite pentru operatorii Schoenberg de grad doi, în cazul general de alegere a nodurilor cât și un mod particular de alegere a nodurilor. Alături de cazul nodurilor echidistante, care este cel mai comun mod de alegere a nodurilor alte alegeri îmbunătățite ale nodurilor sunt studiate, incluzând nodurile date de rădăcinile polinoamelor Chebîshev. Ordinul de aproximare este estimat folosind moduli de continuitate. Rezultatele din acest capitol au fost parțial publicate

în [76] și [82].

În Capitolul 4 autorul obține forma exactă a momentului de ordinul doi a operatorilor spline Schoenberg de grad trei cu aplicații în obținerea estimărilor cantitative și în construcția operatorilor pentru care spațiul polinoamelor de gradul doi este invariant și în construcția operatorilor de tip Schoenberg-King. Rezultatele din Capitolul 4 au fost parțial publicate în [77].

În Capitolul 5 sunt prezentate o definiție a operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg și proprietățile lor. Definiția a fost obținută generalizând formula operatorilor Schoenberg unidimensionali. Sunt stabilite momentul de ordinul doi ai operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri arbitrare, pe noduri echidistante, alături de o teoremă de tip Voronovskaja. De asemenea, acest capitol mai conține estimări cu moduli de continuitate. Aceste rezultate au fost parțial publicate în [78].

Aplicații ale operatorilor spline Schoenberg în practică compun conținutul Capitolului 6, unde este prezentată o metodă generală de îmbunătățire a acurateții modelelor de cer senin prin înlocuirea factorului de turbiditate constant cu un polinom de interpolare care depinde de timpul solar, pentru estimarea intensității radiației solare. Au fost analizate și utilizate pentru îmbunătățirea modelului Meliss, date măsurate în perioada 2013-2017, în Centrul de Cercetare *Sisteme de Energie Regenerabile și Reciclare* din cadrul Institutului de Cercetare, Dezvoltare al Universității Transilvania din Brașov. Rezultatele prezentate în Capitolul 6 au fost publicate în [79], [80], [81].

Mulțumesc mult domnului Profesor Dr. Radu Păltănea pentru constanta îndrumare, pentru răbdare și pentru sprijinul acordat pe tot parcursul activității mele ca doctorand.

1 Introducere

1.1 Noțiuni fundamentale

1.1.1 Notății

Din notațiile uzuale sunt precizate aici o parte din cele ce apar în lucrare, cum ar fi: mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; mulțimea numerelor reale pe care o notăm cu \mathbb{R} ; spațiul $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Π_n reprezintă spațiul polinoamelor reale cu o variabilă cu gradul cel mult n , iar Π_n^m este spațiul polinoamelor reale în m variabile cu gradul total mai mic sau egal cu n , unde $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cu $[a]$ notăm partea întreagă a numărului real a .

Fie \mathcal{A} un spațiu Banach și $J \subset \mathcal{A}$. Notăm cu $\mathcal{F}(J)$ spațiul tuturor funcțiilor reale definite pe J , cu $B(J)$ spațiul funcțiilor mărginite, iar cu $C(J)$ spațiul funcțiilor continue pe J , cu norma

$$\|f\| := \sup_{\chi \in J} |f(\chi)|. \quad (1.1.1)$$

Notăm cu e_i funcțiile monomiale $e_i(\chi) = \chi^i$ unde $\chi \in J$ și $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Notăția $(\cdot - \chi)_+$ se utilizează pentru

$$(h - \chi)_+ = \begin{cases} h - \chi, & h - \chi > 0 \\ 0, & h - \chi \leq 0 \end{cases}.$$

1.1.2 Diferențe divizate

A. Diferențe divizate pe noduri simple

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și un sistem de puncte distincte (noduri) din intervalul $[a, b]$:

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}, \text{ unde } \chi_i \neq \chi_j \text{ pentru } i \neq j. \quad (1.1.2)$$

Definiția 1.1.1. *Diferența divizată a funcției f pe nodurile (1.1.2) notată cu $[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f$ se definește prin*

$$[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\chi_i)}{\prod_{j=1, n+1, j \neq i} (\chi_i - \chi_j)}. \quad (1.1.3)$$

Diferențele divizate pe noduri simple verifică următoarea relație de recurență:

$$[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f = \frac{[\chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f - [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n]f}{\chi_{n+1} - \chi_1} \quad (1.1.4)$$

unde $[\chi_i]f = f(\chi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$ [90].

B. Diferențe divizate pe noduri multiple

Fie nodurile de interpolare (1.1.2), fiecărui nod χ_i îi atașăm un număr natural a_i , numit ordin de multiplicitate al lui χ_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, derivabilă de un număr suficient de ori pe $[a, b]$.

Definiția 1.1.2. [90] *Diferența divizată de ordinul 1 pe nodul dublu χ_i este*

$$[\chi_i, \chi_i]f = \lim_{\chi \rightarrow \chi_i} \frac{f(\chi) - f(\chi_i)}{\chi - \chi_i} = f'(\chi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (1.1.5)$$

În general,

$$\begin{aligned} & \underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1 \text{ ori}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ ori}}, \dots, \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1} \text{ ori}}]f = \lim_{\chi_i^{(j)} \rightarrow \chi_i} \left[\chi_1, \chi_1^{(1)}, \dots, \right. \\ & \left. \chi_1^{(a_1-1)}, \dots, \chi_i, \chi_i^{(1)}, \dots, \chi_i^{(a_i-1)}, \dots, \chi_{n+1}, \chi_{n+1}^{(1)}, \dots, \chi_{n+1}^{(a_{n+1}-1)} \right] f \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

unde $\chi_i^{(j)} \neq \chi_k^{(l)}$ pentru $i \neq k; l \neq j$ [90].

Dacă f este derivabilă de k ori în χ , are loc egalitatea

$$\underbrace{[\chi_i, \chi_i, \dots, \chi_i]}_{k+1 \text{ ori}}]f = \frac{f^{(k)}(\chi_i)}{k!}. \quad (1.1.7)$$

Formula de recurență a diferențelor divizate pe noduri multiple

Putem extinde formula de recurență a diferențelor divizate pe noduri simple și la diferențele divizate pe noduri multiple.

$$\begin{aligned} & \underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1 \text{ ori}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ ori}}, \dots, \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1} \text{ ori}}]f \\ &= \frac{1}{\chi_{n+1} - \chi_1} \left[\underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1-1 \text{ ori}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ ori}}, \dots, \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1} \text{ ori}} \right] f \\ &- \left[\underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1 \text{ ori}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ ori}}, \dots, \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1}-1 \text{ ori}} \right] f \quad [90]. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Definiția 1.1.3. [95] (Tiberiu Popoviciu)

Fie E o mulțime care are cel puțin $n+1$ puncte distincte. **Funcția** $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **convexă de ordin $k \geq -1$** , dacă $[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k+2}]f \geq 0$ pentru orice puncte distincte $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k+2}$ din E .

Din această definiție rezultă că o funcție este convexă de ordin -1 , dacă este pozitivă, este convexă de ordin 0 dacă ea este monotonă și este convexă de ordin 1, dacă ea este convexă obișnuit.

1.1.3 Mulțimi interpolatoare. Sisteme Cebîshev

Considerăm un sistem de puncte $\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_n$ din intervalul $[a, b]$ numite *noduri de interpolare*, și un sistem de valori reale oarecare $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Problema interpolării constă în a găsi dintr-o mulțime dată $F \subset \mathcal{F}([a, b])$, o funcție $\varphi \in F$ pentru care

$$\varphi(\chi_i) = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.1.9)$$

Definiția 1.1.4. [93] O mulțime $F \subset \mathcal{F}([a, b])$, se numește **mulțime interpolatoare** de ordinul n , pe intervalul $[a, b]$, dacă pentru orice sistem de puncte distincte $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n \in [a, b]$ și orice numere reale $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ există o unică funcție $\varphi \in F$, astfel ca să aibă loc sistemul de ecuații (1.1.9).

În cazul particular în care mulțimea interpolatoare F este un subspațiu liniar de dimensiune n din $C([a, b])$, atunci F se numește **subspațiu Haar** de dimensiune n . În plus, orice bază algebrică a lui F formată din n funcții $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ se numește **sistem Cebîshev** de ordin n pe intervalul $[a, b]$ [93].

Dacă $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ formează un sistem Cebîshev, atunci orice combinație liniară a lor se numește **polinom** la fel ca în cazul celui mai important exemplu de sistem Cebîshev care este sistemul algebric, format din funcțiile e_0, e_1, \dots, e_n . Aceste polinoame generalizate păstrează o parte a proprietăților polinoamelor algebrice.

Definiția 1.1.5. [60] Fie un spațiu normat $(X, \|\cdot\|)$ și Y un subspațiu al lui. Numărul

$$E(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

se numește **cea mai bună aproximație a lui x prin elemente din Y** . Dacă $y \in Y$ verifică proprietatea $\|x - y\| = E(x, Y)$ atunci y este element de cea mai bună aproximație a lui x prin elemente din Y .

Teorema 1.1.1. [60] Fie subspațiul Haar T de ordinul $n + 1, n \geq 0$ pe $[a, b]$. Fie $f \in C([a, b])$ și $\varphi \in T$. Următoarele condiții sunt echivalente:

- i) funcția φ este element de cea mai bună aproximație a lui f , prin elemente din T ,
- ii) există punctele $a \leq \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n+1} \leq b$ și un semn $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ astfel încât $\varphi(\chi_i) - f(\chi_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - \varphi\|$, $0 \leq i \leq n + 1$.

Definiția 1.1.6. Sistemul de puncte $a \leq \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n+1} \leq b$ se numește **alternanță**.

1.1.4 Interpolare Lagrange

Definiția 1.1.7. [90] Fie $f \in \mathcal{F}([a, b])$. Polinomul algebric P_n , de grad cel mult n , care pe nodurile $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$ are valorile $P_n(\chi_i) = f(\chi_i)$, cu $1 \leq i \leq n + 1$ se numește **polinom de interpolare Lagrange** atașat funcției f pe nodurile $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$.

Teorema 1.1.2. [90] Pentru $f_1, f_2 \in \mathcal{F}([a, b])$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} &L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}](\alpha f_1 + \beta f_2)(\chi) \\ &= \alpha L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f_1(\chi) + \beta L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f_2(\chi). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Teorema 1.1.3. [90] *Dacă f este polinom de grad maxim n , atunci*

$$L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) = f(\chi), \forall \chi \in \mathbb{R}. \quad (1.1.11)$$

Definiția 1.1.8. [90] *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. **Diferența divizată de ordin n** a funcției f , pe nodurile (1.1.2) este coeficientul lui χ^n din polinomul de interpolare al lui Lagrange al funcției f pe nodurile specificate.*

Polinomul lui Lagrange se poate reprezenta sub forma

$$L[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(\chi)f(\chi_i), \quad (1.1.12)$$

unde $l_i(\chi)$ sunt polinoame de gradul n care indeplinesc condițiile $P(\chi_i) = f(\chi_i)$, $1 \leq i \leq n+1$ [90], adică

$$l_i(\chi) = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (\chi - \chi_j)}{(\chi - \chi_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (\chi_i - \chi_j)}, \quad 1 \leq i \leq n+1. [90]. \quad (1.1.13)$$

Teorema 1.1.4. [90] *Dacă $f \in \mathcal{F}([a, b])$, iar $\chi_1, \dots, \chi_{n+1}$ sunt puncte distincte din intervalul $[a, b]$, atunci*

$$\begin{aligned} & L[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) \\ = & \frac{(\chi - \chi_1)L[\chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) - (\chi - \chi_{n+1})L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n]f(\chi)}{\chi_{n+1} - \chi_1}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Teorema 1.1.5. [90] *Pentru orice $f \in \mathcal{F}([a, b])$, orice sistem de puncte distincte $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$ din $[a, b]$ și orice $\chi \in [a, b]$ are loc egalitatea*

$$\begin{aligned} & f(\chi) - L[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) \\ = & [\chi, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)\dots(\chi - \chi_{n+1}). \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Teorema 1.1.6. [97] *Pentru orice mulțime de puncte distincte de interpolare $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_n$ din $[a, b]$, pentru orice $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ și orice $\chi \in [a, b]$, eroarea (1.1.17) are valoarea*

$$e(\chi) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (\chi - \chi_j) f^{(n+1)}(\xi), \quad (1.1.16)$$

unde

$$e(\chi) = f(\chi) - P(\chi), \quad a \leq \chi \leq b, \quad (1.1.17)$$

și ξ este un punct din $[a, b]$ care depinde de χ .

1.2 Teoreme de convergență

1.2.1 Teoremele lui Weierstrass. Aproximare prin șiruri de proiectori

Vom spune că o funcție f este *uniform aproximabilă* prin elemente dintr-un spațiu $Y \subset C([a, b])$, dacă există un șir de funcții din Y care converge uniform la f .

Teorema 1.2.1. (Weierstrass)

Orice funcție $f \in C([a, b])$ este uniform aproximabilă prin polinoame algebrice.

Teorema 1.2.2. (Weierstrass)

Fie $C_{2\pi}$ spațiul funcțiilor 2π periodice continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Orice funcție $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ este uniform aproximabilă prin polinoame trigonometrice.

Propoziția 1.2.1. [87] Fie un șir de operatori liniari și mărginiți, $(L_n)_n$, $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$. Dacă sunt îndeplinite condițiile

i) există un subspațiu $B \subset C([a, b])$, dens în $C([a, b])$, astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = 0, \forall f \in B,$$

ii) există $M > 0$ astfel încât $\|L_n\| \leq M, n \in \mathbb{N}$, unde

$$\|L_n\| := \sup_{f \in C([a, b]), \|f\| \leq 1} \|L_n(f)\|,$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = 0, \forall f \in C([a, b]). \quad (1.2.1)$$

Teorema 1.2.3. [87] Fie șirul de operatori liniari mărginiți $(L_n)_n$, $L_n : X \rightarrow Y$, unde X este un spațiu Banach, iar Y este un spațiu normat. Dacă

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n(\chi)\| < \infty, \forall \chi \in X,$$

atunci

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\| < \infty.$$

Corolar 1.2.1. Fie șirul de operatori $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ care aproximează uniform funcțiile dintr-un spațiu dens $B \subset C([a, b])$, din $C[a, b]$. Atunci faptul că șirul $(L_n)_n$ are normele uniform mărginite este echivalent cu faptul că șirul $(L_n)_n$ aproximează uniform toate funcțiile din $C([a, b])$.

Definiția 1.2.1. [89] Fie X un spațiu vectorial și Y un subspațiu liniar al lui. Un operator liniar $U : X \rightarrow Y$ este proiector pe subspațiul Y dacă $U(y) = y, \forall y \in Y$.

Teorema 1.2.4. [97] (Lonzinski-Harshiladze)

Pentru orice șir de proiectori, $(U_n)_n$, $U_n : C([a, b]) \rightarrow \Pi_n$ există o constantă $C > 0$ astfel ca

$$\|U_n\| \geq C \ln n. \quad (1.2.2)$$

În consecință există o funcție $f \in C([a, b])$ pentru care $U_n f$ nu converge uniform la f pe intervalul $[a, b]$.

Teorema 1.2.5. [33] (Faber)

Oricare ar fi o matrice triunghiulară infinită de noduri $(\chi_j^n)_{1 \leq j \leq n}$, unde oricare ar fi n avem $a \leq \chi_1^n < \chi_2^n < \dots < \chi_n^n \leq b$, pentru șirul de operatori $(U_n)_n$, cu $U_n = L[\chi_1^n, \chi_2^n, \dots, \chi_n^n]$, $n \geq 1$, există o funcție $f \in C([a, b])$, pentru care $U_n f$ nu converge uniform pe $[a, b]$ la f .

1.2.2 Operatori liniari pozitivi

Definiția 1.2.2. [5] Fie A și B două spații vectoriale de funcții cu valori reale pe un interval J . Vom numi **operator liniar**, o aplicație $L : A \rightarrow B$ care este aditivă și omogenă, adică:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), \quad \forall f, g \in A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.2.3)$$

Definiția 1.2.3. [5] Operatorul L se numește **pozitiv** dacă $\forall f \in A$ cu $f \geq 0$ avem $L(f) \geq 0$.

Fie (A, d) un spațiu metric compact.

Definiția 1.2.4. [5] O aplicație $F : C(A) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **funcțională liniară pozitivă** pe spațiul $C(A)$ dacă:

$$i) F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g), \quad \forall f, g \in C(A) \text{ și } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$ii) F(f) \geq 0, \quad \forall f \in C(A), f \geq 0.$$

Propoziția 1.2.2. [87] Fie A un subspațiu liniar al lui $\mathcal{F}(J)$ și fie o funcțională liniară pozitivă $F_\chi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Avem

$$F(f) \leq f(g), \quad f, g \in A, f \leq g, \quad (1.2.4)$$

$$|F(f)| \leq F(|f|), \quad f \in A, |f| \in A. \quad (1.2.5)$$

Propoziția 1.2.3. [87] Fie o funcțională liniară pozitivă $F : C(J) \rightarrow \mathbb{R}$, J interval. Fie $\chi \in J$ fixat. Presupunem că este îndeplinită una din următoarele condiții:

- $F(e_j) = e_j(\chi)$, $j = 0, 1, 2$ sau
- $F(e_j) = e_j(\chi)$, $j = 0, 1$ și χ este un capăt al intervalului J .

Atunci

$$F(f) = f(\chi), \quad \forall f \in C(J).$$

Definiția 1.2.5. [87] **Momentele funcționalei liniare pozitive** $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, unde A este un subspațiu liniar al lui $\mathcal{F}(J)$ și $\chi \in J$ sunt numerele $F((e_1 - \chi e_0)^j)$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ care sunt bine definite dacă $\Pi_j \subset A$.

Teorema 1.2.6. [96] (Popoviciu)

Fie operatorii liniari și pozitivi de forma

$$L_n(f, \chi) = \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_{n,i}) \Psi_{n,i}(\chi), \quad f \in C([a, b]), \quad \chi \in [a, b], \quad (1.2.6)$$

unde $\xi_{n,i} \in [a, b]$ și $\Psi_{n,i}$ sunt polinoame pozitive. Presupunem că

$$L_n(e_0) = e_0, \quad (1.2.7)$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n((e_1 - \chi e_0)^2, \chi) = 0, \quad \text{uniform în raport cu } \chi \in [a, b]. \quad (1.2.8)$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f, \quad \text{uniform pe } [a, b] \text{ pentru orice } f \in C([a, b]). \quad (1.2.9)$$

Teorema 1.2.7. [16] (Bohman)

Fie operatorii liniari pozitivi $(L_n)_n$, $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, de forma

$$L_n(f, \chi) = \sum_{i \in I_n} f(\xi_{n,i}) \Psi_{n,i}(\chi), \quad f \in C([a, b]), \quad \chi \in [a, b],$$

unde I_n este o mulțime cel mult numărabilă, $\xi_{n,i} \in [a, b]$, iar $\Psi_{n,i}$ sunt funcții analitice pozitive. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(e_j) = e_j, \text{ uniform pentru } j = 0, 1, 2, \quad (1.2.10)$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f, \text{ uniform pentru orice } f \in C([a, b]). \quad (1.2.11)$$

Teorema 1.2.8. [64], [65] (Korovkin)

Fie șirul de operatori liniari pozitivi (L_n) , $L_n : V \rightarrow \mathcal{F}([a, b])$, unde $V \subset \mathcal{F}([a, b])$ subspațiu liniar care conține funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b])$, funcții care formează un sistem Cebîshev pe intervalul $[a, b]$. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varphi_j) = \varphi_j \text{ uniform pe } [a, b], \text{ cu } j = 0, 1, 2, \quad (1.2.12)$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f \text{ uniform pe } [a, b], \text{ pentru orice } f \in C([a, b]) \cap V. \quad (1.2.13)$$

Observația 1.2.1. Pentru funcțiile test e_0, e_1, e_2 se obține teorema lui Bohman.

Teorema 1.2.9. [41] (Voronovskaja)

Dacă $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ este un șir de operatori liniar pozitivi, astfel încât $L_n(e_j) = e_j$, $j \in \{0, 1\}$, atunci, pentru $f \in C^2([a, b])$ și $\chi \in [a, b]$

$$L_n(f, \chi) - f(\chi) = \frac{1}{2} L_n((e_1 - \chi)^2, \chi) f''(\chi) + o\left(L_n((e_1 - \chi)^2, \chi)\right), \quad (1.2.14)$$

uniform în raport cu $\chi \in [a, b]$.

1.2.3 Moduli de continuitate

Definiția 1.2.6. [87] (Păltănea)

Fie $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(J)$ un subspațiu liniar astfel încât $\Pi_k \subset \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N}$. O funcție $\Omega_k : \mathcal{H} \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ este **modul de continuitate de ordinul k** pe \mathcal{H} dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

$$\Omega_k(f, h_1) \leq \Omega_k(f, h_2), \quad f \in \mathcal{H}, \quad 0 < h_1 < h_2, \quad (1.2.15)$$

$$\Omega_k(f + p, h) = \Omega_k(f, h) \quad f \in \mathcal{H}, \quad p \in \Pi_{k-1}, \quad h > 0, \quad (1.2.16)$$

$$\Omega_k(0, h) = 0, \quad h > 0. \quad (1.2.17)$$

Definim următorii moduli de continuitate:

- *modulul de ordinul întâi uzual*

$$\omega_1(\psi, \lambda) = \sup\{|\psi(u) - \psi(v)|, u, v \in [0, 1], |u - v| \leq \lambda\}, \quad (1.2.18)$$

- *modulul de ordinul doi uzual*

$$\omega_2(\psi, \lambda) = \sup\{|\psi(u - \rho) - 2\psi(u) + \psi(u + \rho)|, u \pm \rho \in [0, 1], |\rho| \leq \lambda\}, \quad (1.2.19)$$

- *modul Ditzian-Totik de ordin doi*

$$\omega_2^\varphi(\psi, \lambda) = \sup\{|\psi(u - \rho) - 2\psi(u) + \psi(u + \rho)|, u \pm \rho \in [0, 1], |\rho| \leq \lambda\varphi(u)\}, \quad (1.2.20)$$

unde $\psi \in C([0, 1])$, $\lambda > 0$ și $\varphi(t) = \sqrt{t(1-t)}$ [87].

Proprietăți principale ale modulilor de continuitate de ordin $k = 1, 2$ sunt prezentate în continuare:

$$1) \quad \omega_k(f, 0) = 0, \quad (1.2.21)$$

$$2) \quad \omega_k(f, \cdot) \text{ este o funcție pozitivă și continuă pe } \mathbb{R}_+, \quad (1.2.22)$$

$$3) \quad \omega_k(f, h_1 + h_2) \leq \omega_k(f, h_1) + \omega_k(f, h_2), \quad h_1, h_2 \geq 0, \quad (1.2.23)$$

$$4) \quad \omega_{k+1}(f, h) \leq 2\omega_k(f, h), \quad \forall h \geq 0, \quad (1.2.24)$$

$$5) \quad \omega_{k+1}(f, h) \leq h\omega_k(f', h), \quad h \geq 0, f \in C^1([0, 1]), \quad (1.2.25)$$

$$6) \quad \omega_k(f, nh) \leq n^k\omega_k(f, h), \quad \forall h > 0 \text{ și } n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.26)$$

Teorema 1.2.10. [114] (*Shisha, Mond*)

Fie operatorul liniar și pozitiv $L : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, $f \in C([a, b])$. Pentru $h > 0$ și $\forall \chi \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |f(\chi)||L(e_0, \chi) - 1| + \left(L(e_0, \chi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h}\sqrt{L(e_0, \chi)(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}\right)\omega_1(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Teorema 1.2.11. [83] (*Mond*)

Fie operatorul liniar și pozitiv $L : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ și $f \in C([a, b])$. Pentru $h > 0$ și $\chi \in [a, b]$ avem:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |f(\chi)||L(e_0, \chi) - 1| + \left(L(e_0, \chi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2}(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)\right)\omega_1(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Următoarele două teoreme se găsesc în lucrările [84], [85] și [87].

Teorema 1.2.12. [87] (*Păltănea*)

Considerăm un interval real I și $L : V \rightarrow \mathcal{F}(I)$ un operator liniar și pozitiv pe subspațiul $V \subset C(I)$, astfel încât $\Pi_2 \subset V$, atunci pentru $\forall f \in V, \chi \in I$ și $0 < h < \frac{1}{2}\text{lung}(I)$ avem:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |f(\chi)||L(e_0, \chi) - 1| + h^{-1}|(L(e_1 - \chi e_0))(\chi)|\omega_1(f, h) \\ &\quad + \left(L(e_0, \chi) + \frac{1}{2h^2}(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)\right)\omega_2(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

Teorema 1.2.13. [87] (Păltănea)

Fie un interval real I și V un subspațiu al lui $\mathcal{F}(I)$ astfel încât $e_i \in V$, $i = 0, 1, 2$. Fie $L : V \rightarrow \mathcal{F}(I)$ un operator liniar, pozitiv. Notăm $m_i(\chi) = L((e_1 - \chi e_0)^i, \chi)$, $i \in \mathbb{N}$. Presupunem că $\forall \chi \in I$ avem $m_0(\chi) > 0$, $m_2(\chi) > 0$. Atunci pentru $\forall f \in V$, f derivabilă și $\forall h \leq \text{lung}(I)$, $\forall \chi \in I$ avem pentru $h \leq 3\sqrt{\frac{m_2(\chi)}{m_0(\chi)}}$

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |m_0(\chi) - 1| \cdot |f(\chi)| + h^{-1} m_1(\chi) \omega_1(f, h) \\ &+ \left(\frac{1}{6} h m_0(\chi) + \frac{1}{2h} m_2(\chi) \right) \omega_1(f', h), \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

și pentru $h \geq 3\sqrt{\frac{m_2(\chi)}{m_0(\chi)}}$ avem

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |m_0(\chi) - 1| \cdot |f(\chi)| + h^{-1} m_1(\chi) \omega_1(f, h) \\ &+ \left(\sqrt{m_0(\chi) m_2(\chi)} - \frac{m_2(\chi)}{h} \right) \omega_1(f', h). \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

Teorema 1.2.14. [87] (Păltănea)

Fie operatorul liniar, pozitiv $L : F([0, 1]) \rightarrow F([0, 1])$. Pentru $\chi \in (0, 1)$, $h \in (0, \frac{1}{2}]$ și $\forall f \in B([0, 1])$ avem:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |L(e_0, \chi) - 1| \cdot \|f\| + h^{-1} \frac{|(L(e_1 - \chi e_0))(\chi)|}{2\varphi(\chi)} \omega_1^\varphi(f, 2h) \\ &+ \left[L(e_0, \chi) + \frac{3}{2} \frac{|(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)|}{(h\varphi(\chi))^2} \right] \omega_2^\varphi(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

O primă variantă a teoremei a fost stabilită în lucrarea [36].

Definiția 1.2.7. [91]

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și $Y \subset X$ un subspațiu înzestrat cu seminorma $|\cdot|_Y$. Fie $f \in X$ și $t > 0$. Se numește **K funcțională**

$$K(f, t, X, Y) = \inf \{ \|f - g\| + t|g|_Y, g \in Y \}. \quad (1.2.33)$$

De exemplu, pentru $X = C([a, b])$, $\|f\| = \max_{\chi \in [a, b]} |f(\chi)|$ norma Cebîșhev, $Y = C^r([a, b])$, $|g|_{C^r([a, b])} = \|g^{(r)}\|$ [91].

$$K_r(f, t, C([a, b]), C^r([a, b])) = \inf \{ \|f - g\| + t^r \|g^{(r)}\|, g \in C^r([a, b]) \}. \quad (1.2.34)$$

Teorema 1.2.15. [56] (Johnen)

Fie $[a, b]$ un interval. Există $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ astfel încât

$$c_1 \cdot \omega_2(f, h) \leq K_2(f, h, C([a, b]), C^2([a, b])) \leq c_2 \cdot \omega_2(f, h), \quad (1.2.35)$$

$\forall f \in C([a, b])$ și $\forall h > 0$.

2 Funcții spline. Operatorii Schoenberg

2.1 Funcții spline polinomiale. B-splines

2.1.1 Cazul general al funcțiilor spline cu noduri multiple

Fie intervalul $[a, b]$ și diviziunea $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ cu

$$a = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = b. \quad (2.1.1)$$

Fie k un întreg pozitiv și $\mathcal{M} = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ un vector format din numere întregi cu proprietatea $1 \leq k_i \leq k+1$, cu $i = 1, 2, \dots, n-1$, vector numit *vector de multiplicitate* [111].

Definiția 2.1.1. [111] *Spațiul funcțiilor spline polinomiale de ordin k pe nodurile χ_1, \dots, χ_k , cu ordinul de multiplicitate k_1, k_2, \dots, k_{n-1} este*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n) : &= \{s \in \mathcal{F}([a, b]) \mid \exists s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \in \Pi_k \text{ astfel încât } s(\chi) = \\ & s_i(\chi) \text{ cu } \chi \in I_i, i = 0, 1, \dots, n-1; D^j s_{i-1}(\chi_i) = D^j s_i(\chi_i) \\ & \text{pentru } j = 0, 1, \dots, k - k_i, i = 1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Teorema 2.1.1. [111] *Fie*

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} k_i. \quad (2.1.3)$$

Atunci $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$ este un spațiu liniar de dimensiune $k + H$.

Construcția unei baze locale

Definiția 2.1.2. [111] *Fie $a < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < b$ și $1 \leq k_i \leq k+1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ date. Presupunem că avem punctele*

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{2(k+1)+H} \quad (2.1.4)$$

astfel încât

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{k+1} \leq a, \quad b \leq y_{k+H+2} \leq \dots \leq y_{2(k+1)+H} \quad (2.1.5)$$

și

$$y_{k+2} \leq \dots \leq y_{k+H+1} = \overbrace{\chi_1, \dots, \chi_1}^{k_1}, \dots, \overbrace{\chi_{n-1}, \dots, \chi_{n-1}}^{k_{n-1}}. \quad (2.1.6)$$

*Atunci vom numi mulțimea $\{y_i\}_1^{2(k+1)+H}$ **diviziune extinsă** asociată cu spațiul $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$.*

Teorema 2.1.2. [111] *Fie $\{y_i\}_1^{2(k+1)+H}$ o diviziune extinsă asociată cu spațiul $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$ și presupunem $b < y_{2(k+1)+H}$. Pentru $i = 1, 2, \dots, k + H + 1$ fie*

$$N_{n,i}(\chi) = (-1)^{k+1} (y_{i+k+1} - y_i) [y_i, \dots, y_{i+k+1}] (\chi - \cdot)_+^k, \quad a \leq \chi \leq b. \quad (2.1.7)$$

*Atunci $\{N_{n,i}\}_1^{k+H+1}$ formează o **bază** pentru $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$ cu*

$$N_{n,i}(\chi) = 0 \text{ pentru } \chi \notin [y_i, y_{i+k+1}], \quad (2.1.8)$$

and

$$N_{n,i}(\chi) > 0 \text{ pentru } \chi \in (y_i, y_{i+k+1}). \quad (2.1.9)$$

Mai mult,

$$\sum_{i=1}^{k+H+1} N_{n,i}(\chi) = 1, \quad (2.1.10)$$

pentru orice $a \leq \chi \leq b$.

Funcțiile $N_{n,1}, N_{n,2}, \dots, N_{n,k+H+1}$ sunt numite **B-splines**.

Observația 2.1.1. Folosind identitatea

$$[y_i, \dots, y_{i+k+1}](\chi - \cdot)_+^k = (-1)^{k+1} [y_i, \dots, y_{i+k+1}](\cdot - \chi)_+^k \quad (2.1.11)$$

funcțiile $N_{n,i}$ au și reprezentarea

$$N_{n,i}(\chi) = (y_{i+k+1} - y_i)[y_i, \dots, y_{i+k+1}](\cdot - \chi)_+^k, \quad 1 \leq i \leq k + H + 1. \quad (2.1.12)$$

2.1.2 Funcții spline cu noduri simple

Definiția 2.1.3. Fie dată o diviziune $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ definită ca în (2.1.1). O **funcție spline cu noduri simple de ordin** $k \geq 1$ pe intervalul $[a, b]$ atașată diviziunii Δ_n , este o funcție de clasă $C^{k-1}([a, b])$, care pe fiecare subinterval determinat de două noduri consecutive ale diviziunii este polinom de grad k . O funcție spline cu noduri simple de ordin k o vom numi simplu și **funcție spline de ordin** k . Mulțimea funcțiilor spline de ordin k atașată diviziunii Δ_n se notează cu $\mathcal{S}_k(\Delta_n)$.

Din definiția de mai sus rezultă deci

$$\mathcal{S}_k(\Delta_n) = \{s \in C^{k-1}([a, b]) \mid s|_{[\chi_{i-1}, \chi_i]} \in \Pi_k, \quad 1 \leq i \leq n\}. \quad (2.1.13)$$

Definiția 2.1.4. Dacă $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $k \geq 1$, atunci se definește **diviziunea extinsă** $\Delta_{n,k} = \{\chi_i\}_{i=-k}^{n+k}$ cu nodurile de forma

$$0 = \chi_{-k} = \chi_{-k+1} = \dots = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \dots = \chi_{n+k} = 1. \quad (2.1.14)$$

Definiția 2.1.5. [11] **Funcțiile B-spline** atașate diviziunii extinse $\Delta_{n,k}$ au expresia

$$N_{j,k}(\chi) = (\chi_{j+k+1} - \chi_j)[\chi_j, \chi_{j+1}, \dots, \chi_{j+k+1}](\cdot - \chi)_+^k, \quad -k \leq j \leq n - 1. \quad (2.1.15)$$

Propoziția 2.1.1. [11], [72], [97] Pentru orice diviziune extinsă $\Delta_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 1$ avem

$$i) \quad N_{j,k}(\chi) = 0 \text{ pentru } \chi < \chi_j \text{ și pentru } \chi > \chi_{j+k+1}, \quad -k \leq j \leq n - 1,$$

$$ii) \quad N_{j,k}(\chi) > 0 \text{ pentru } \chi_j < \chi < \chi_{j+k+1}, \quad -k \leq j \leq n - 1.$$

Teorema 2.1.3. [97] Pentru orice diviziune $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ a intervalului $[a, b]$, și pentru orice întreg $k \geq 1$, spațiul $\mathcal{S}_k(\Delta_n)$ are dimensiunea $n + k$, iar o bază a sa este formată din funcțiile $N_{j,k}$, $-k \leq j \leq n - 1$.

Teorema 2.1.4. [71] Pentru orice diviziune extinsă $\Delta_{n,k}$ a intervalului $[a, b]$, $n \geq 1$, $k \geq 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice $\chi \in [a, b]$ avem

$$(t - \chi)^k = \sum_{j=-k}^{n-1} (t - \chi_{j+1})(t - \chi_{j+2}) \dots (t - \chi_{j+k}) N_{j,k}(\chi). \quad (2.1.16)$$

Corolar 2.1.1. În condițiile Teoremei 2.1.4 pentru orice $0 \leq r \leq k$ avem

$$\sum_{j=-k}^{n-1} \xi_j^{(r)} N_{j,k}(\chi) = \chi^r, \quad \chi \in [a, b], \quad (2.1.17)$$

unde

$$\xi^{(r)} = \binom{k}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k} \chi_{i_1} \chi_{i_2} \dots \chi_{i_r}. \quad (2.1.18)$$

Propoziția 2.1.2. [71] Dacă $\Delta_{n,k}$, $n \geq 1$, $k \geq 1$ este o diviziune extinsă a intervalului $[a, b]$, funcțiile $N_{j,k}$, $-k \leq j \leq n-1$ verifică proprietățile:

$$1) N_{j,k}(\chi) \geq 0; \quad -k \leq j \leq n-1, \quad \chi \in [a, b]; \quad (2.1.19)$$

$$2) \sum_{j=-k}^{n-1} N_{j,k}(\chi) = 1; \quad a \leq \chi \leq b, \quad (2.1.20)$$

$$3) \sum_{j=-k}^{n-1} \xi_j N_{j,k}(\chi) = \chi; \quad a \leq \chi \leq b. \quad (2.1.21)$$

2.2 Operatorii Schoenberg

Definiția 2.2.1. [71] Fie Δ_n o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $k \geq 1$ un întreg. **Operatorul Schoenberg** $S_{\Delta_{n,k}} : \mathcal{F}([a, b]) \rightarrow \mathcal{S}_k(\Delta_n)$, atașat diviziunii extinse $\Delta_{n,k}$ se definește prin

$$(S_{\Delta_{n,k}} f)(\chi) = \sum_{j=-k}^{n-1} f(\xi_{j,k}) N_{j,k}(\chi) \quad (2.2.1)$$

unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi \in [a, b]$ și

$$\xi_{j,k} = \frac{\chi_{j+1} + \chi_{j+2} + \dots + \chi_{j+k}}{k}, \quad -k \leq j \leq n-1, \quad (2.2.2)$$

sunt **abscisele Greville**.

În cazul când $\Delta_{n,k}$ conține noduri echidistante și avem $k \geq 1$, atunci, în loc de $S_{\Delta_{n,k}}$ vom nota $S_{n,k}$.

Teorema 2.2.1. [11], [71], [72], [97]

- i) $S_{\Delta_{n,k}}(f)$ este o funcție spline de grad k pe nodurile $\chi_0 < \dots < \chi_n$, adică este un polinom de grad k pe fiecare interval $[\chi_{\nu-1}, \chi_\nu]$, ($1 \leq \nu \leq n$), și admite derivate continue de ordin $k-1$ pe întregul interval $[0, 1]$;

- ii) $S_{\Delta_{n,k}}$ este un operator liniar pozitiv;
- iii) $(S_{\Delta_{n,k}}f)(\chi)$ este, pentru orice $\chi \in [a, b]$ o combinație convexă a unui număr finit de valori ale funcției f .
- iv) $S_{\Delta_{n,k}}f$ interpolatează funcția f în capetele intervalului, adică $(S_{\Delta_{n,k}}f)(a) = f(a)$ și $(S_{\Delta_{n,k}}f)(b) = f(b)$.
- v) $S_{\Delta_{n,k}}(e_\alpha) = e_\alpha$, pentru $\alpha = 0, 1$.

Teorema 2.2.2. [71] Pentru orice întreg $k \geq 1$, și pentru $n = 1$, operatorul lui Schoenberg atașat diviziunii extinse $\Delta_{1,k}$:

$$\chi_{-k} = \chi_{-k+1} = \dots = \chi_0 = 0 < 1 = \chi_1 = \chi_2 = \dots = \chi_{k+1}$$

a intervalului $[0, 1]$ coincide cu operatorul lui Bernstein B_k .

Teorema 2.2.3. [71] (Schoenberg)

Pentru orice diviziune extinsă $\Delta_{n,k}$ a unui interval $[a, b]$ operatorul $S_{\Delta_{n,k}}$ are proprietatea diminuării variației semnului. Aceasta înseamnă că pentru orice funcție $f \in C([a, b])$ și pentru orice funcție afină $h(\chi) = c\chi + d$, cu proprietatea că $f - h$ are un număr finit de schimbări de semn pe intervalul $[a, b]$ rezultă că funcția $(S_{\Delta_{n,k}}f) - h$ are un număr de schimbări de semn cel mult egal cu numărul de schimbări de semn al funcției $f - h$ pe intervalul $[a, b]$.

Definiția 2.2.2. Momentul de ordinul doi al lui $S_{\Delta_{n,k}}$ este definit de $(S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$, unde $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \dots$, $t \in [0, 1]$.

Teorema 2.2.4. [29] Pentru o diviziune extinsă $\Delta_{n,k}$ a unui interval $[a, b]$ cu $k > 1$ are loc relația

$$0 \leq (S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \sum_{j=-k}^{n-1} \frac{1}{k^2(k-1)} \sum_{1 \leq r < s \leq k} (\chi_{j+r} - \chi_{j+s})^2 N_{j,k}(\chi). \quad (2.2.3)$$

Corolar 2.2.1. [72] În condițiile Teoremei 2.2.4 avem

$$0 \leq S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2(\chi) \leq \min \left\{ \frac{1}{2k}(b-a)^2, \frac{k+1}{12} \|\Delta_{n,k}\|^2 \right\}, \quad (2.2.4)$$

unde $\|\Delta_{n,k}\| = \max_{1 \leq j \leq n} (\chi_j - \chi_{j-1})$.

Teorema 2.2.5. [71] Fie un șir de diviziuni extinse ale intervalului $[a, b]$, de forma Δ_{n_m, k_m} , $m = 1, 2, \dots$, unde $k_m > 1$ pentru orice m . Dacă avem îndeplinită condiția

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\Delta_{n_m, k_m}\|}{k_m} = 0, \quad (2.2.5)$$

atunci are loc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_{\Delta_{n_m, k_m}}f)(\chi) = f(\chi), \text{ uniform în raport cu } \chi \in [a, b], \forall f \in C([a, b]). \quad (2.2.6)$$

Teorema 2.2.6. [11] Pentru $k \geq 1$ și $n \geq 1$ avem

$$(S_{n,k}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{\min \left\{ 2\chi(1-\chi), \frac{k}{n} \right\}}{n+k-1}. \quad (2.2.7)$$

3 Îmbunătățirea ordinului de aproximare

În continuare, în Secțiunea 3, se lucrează pe intervalul $[0, 1]$. Considerăm diviziunea extinsă $\Delta_{n,k}$ dată în (2.1.14), abscisele Greville (2.2.2), funcțiile B-spline (2.1.15), operatorii Schoenberg (2.2.1) și $k = 2$.

3.1 Operatorii Schoenberg de grad doi pe noduri particular alese

În literatură, [11], dacă diviziunea extinsă $\Delta_{n,k}$ formată din noduri echidistante și $k = 2$, următorul rezultat este stabilit:

$$\frac{(S_{n,2}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1 - \chi)} = \frac{\frac{1}{2n} - \frac{\chi}{4}}{1 - \chi} \leq \frac{1}{2n},$$

și aceasta implică

$$(S_{n,2}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{1}{2n} \cdot \chi(1 - \chi), \quad n \geq 1, \quad \chi \in [0, 1], \quad (3.1.1)$$

unde constanta $\frac{1}{2n}$ în fața lui $\chi(1 - \chi)$ este cea mai bună posibilă.

Pentru $n \geq 1$ și $k = 2$ diviziunea extinsă $\Delta_{n,2}$ este:

$$0 = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = 1. \quad (3.1.2)$$

Din formula (1.1.3), pentru patru noduri și o funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, se obține:

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]f = \sum_{p=1}^4 \left(\prod_{1 \leq \nu \leq 4, \nu \neq p} (\chi_p - \chi_\nu)^{-1} \right) f(\chi_p),$$

unde $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3 < \chi_4$ sunt puncte din $[0, 1]$.

Observația 3.1.1.

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]f = 0 \text{ dacă } f \in \Pi_2 \quad (3.1.3)$$

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4](\cdot - \chi)_+^2 = 0, \text{ pentru } \chi \leq \min\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}, \quad (3.1.4)$$

și

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4](\cdot - \chi)_+^2 = 0, \text{ pentru } \chi \geq \max\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}. \quad (3.1.5)$$

3.1.1 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi pe noduri particular alese

Considerăm o diviziune Δ_n formată din nodurile particulare:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 0, \\ \chi_1 &= \frac{\lambda}{n}, \\ \chi_j &= \frac{\lambda}{n} + (j-1) \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}, \text{ pentru } 2 \leq j \leq n-2, \\ \chi_{n-1} &= 1 - \frac{\lambda}{n}, \\ \chi_n &= 1, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

unde $\lambda \in (0, 1]$. Pentru $\lambda = 1$ se obține cazul particular al *nodurilor echidistante*.

Lema 3.1.1. Fie $n \geq 7$, $\lambda \in (0, 1)$ și nodurile alese în (3.1.6) și extra-nodurile date în (3.1.2). Au loc următoarele relații:

Caz 1. $\chi \in [\chi_0, \chi_1]$

$$\begin{aligned} N_{-1,2}(\chi) &= \frac{2n}{\lambda}\chi - \frac{n^2}{\lambda^2} \frac{2n\lambda + n - 6\lambda}{n\lambda + n - 4\lambda} \chi^2, \\ N_{0,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)}{\lambda(n\lambda + n - 4\lambda)} \chi^2, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ pentru } 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Caz 2. $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$

$$\begin{aligned} N_{-1,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{(n\lambda + n - 4\lambda)(n-2\lambda)} \chi^2 - \frac{2n(n-2)}{n-2\lambda} \chi + \frac{n\lambda + n - 4\lambda}{n-2\lambda}, \\ N_{0,2}(\chi) &= -\frac{(n\lambda + 3n - 8\lambda)n^2(n-2)^2}{2(n\lambda + n - 4\lambda)(n-2\lambda)^2} \chi^2 + \frac{(n\lambda + 2n - 6\lambda)n(n-2)}{(n-2\lambda)^2} \chi \\ &\quad - \frac{\lambda(n\lambda + 2n - 6\lambda)(n-2)}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{1,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} \chi^2 - \frac{n\lambda(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} \chi + \frac{\lambda^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ pentru } 2 \leq j \leq n-1 \text{ sau } j = -2. \end{aligned}$$

Caz 3. $\chi \in [\chi_2, \chi_3]$

$$\begin{aligned} N_{0,2}(\chi) &= \chi^2 \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - \chi \frac{n(n-2)(n\lambda + 2n - 6\lambda)}{(n-2\lambda)^2} + \frac{(n\lambda + 2n - 6\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{1,2}(\chi) &= -\chi^2 \frac{n^2(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} + \chi \frac{n(n-2)(2n\lambda + 3n - 10\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\ &\quad - \frac{2\lambda^2(n-2)^2 + 6\lambda(n-2)(n-2\lambda) + 3(n-2\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{2,2}(\chi) &= \chi^2 \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - \chi \frac{n(n-2)(n + n\lambda - 4\lambda)}{(n-2\lambda)^2} + \frac{(n + n\lambda - 4\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ pentru } 3 \leq j \leq n-1 \text{ sau } j \in \{-2, -1\}. \end{aligned}$$

Caz 4. $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ cu $3 \leq q \leq n-4$

$$N_{j,2}(\chi) = \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} \sum_{i=0}^3 d_i \left((i+j-1) \frac{n-2\lambda}{n(n-2)} + \frac{\lambda}{n} - \chi \right)_+^2,$$

pentru $q-2 \leq j \leq q$, unde

$$d_0 = -1, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = -3, \quad d_3 = 1.$$

$$N_{j,2}(\chi) = 0 \text{ pentru } 2 \leq j \leq q-3 \text{ sau } q+1 \leq j \leq n-1.$$

Caz 5. $\chi \in [\chi_{n-3}, \chi_{n-2}]$

$$\begin{aligned}
N_{n-5,2}(\chi) &= (1-\chi)^2 \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - (1-\chi) \frac{n(n-2)(n+n\lambda-4\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\
&\quad + \frac{(n+n\lambda-4\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\
N_{n-4,2}(\chi) &= -(1-\chi)^2 \frac{n^2(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} + (1-\chi) \frac{n(n-2)(2n\lambda+3n-10\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\
&\quad - \frac{2\lambda^2(n-2)^2 + 6\lambda(n-2)(n-2\lambda) + 3(n-2\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\
N_{n-3,2}(\chi) &= \frac{\chi^2 n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - \chi \frac{n(n-2)(n^2-4n-n\lambda+6\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\
&\quad + \frac{(n^2-4n-n\lambda+6\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\
N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ pentru } -2 \leq j \leq n-6 \text{ sau } j \geq n-2.
\end{aligned}$$

Caz 6. $\chi \in [\chi_{n-2}, \chi_{n-1}]$

$$\begin{aligned}
N_{n-4,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} (1-\chi)^2 - \frac{n\lambda(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} (1-\chi) + \frac{\lambda^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\
N_{n-3,2}(\chi) &= -\frac{(n\lambda+3n-8\lambda)n^2(n-2)^2}{2(n\lambda+n-4\lambda)(n-2\lambda)^2} (1-\chi)^2 \\
&\quad + \frac{(n\lambda+2n-6\lambda)n(n-2)}{(n-2\lambda)^2} (1-\chi) - \frac{\lambda(n\lambda+2n-6\lambda)(n-2)}{2(n-2\lambda)^2}, \\
N_{n-2,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{(n\lambda+n-4\lambda)(n-2\lambda)} (1-\chi)^2 - \frac{2n(n-2)}{n-2\lambda} (1-\chi) \\
&\quad + \frac{n\lambda+n-4\lambda}{n-2\lambda}, \\
N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ pentru } -2 \leq j \leq n-5 \text{ sau } j = n-1.
\end{aligned}$$

Caz 7. $\chi \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$

$$\begin{aligned}
N_{n-3,2}(\chi) &= \frac{(1-\chi)^2 n^2(n-2)}{\lambda(n\lambda+n-4\lambda)}, \\
N_{n-2,2}(\chi) &= \frac{2n}{\lambda} (1-\chi) - \frac{n^2}{\lambda^2} \frac{2n\lambda+n-6\lambda}{n\lambda+n-4\lambda} (1-\chi)^2, \\
N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ pentru } -2 \leq j \leq n-4.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.1. *Momentul de ordinul doi al operatorului spline Schoenberg de gradul*

doi pentru nodurile (3.1.6) este: $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$

$$= \begin{cases} \chi^2 \frac{n^2 - n\lambda(n+2) - 2\lambda^2(n-1)(n-4)}{4\lambda(n-2)(n\lambda+n-4\lambda)} + \chi \frac{\lambda}{2n}, & \chi \in \left[0, \frac{\lambda}{n}\right] \\ \chi^2 \frac{n(\lambda-1)}{4(n-2\lambda)} + \chi \frac{(1-\lambda)(n\lambda+n-4\lambda)}{2(n-2)(n-2\lambda)} \\ + \frac{\lambda^3(n^2-6n+4)+n\lambda^2(n+2)-n^2\lambda}{4n^2(n-2)(n-2\lambda)}, & \chi \in \left[\frac{\lambda}{n}, \frac{\lambda}{n} + \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}\right] \\ \frac{1}{4n^2} \frac{(n-2\lambda)^2}{(n-2)^2}, & \chi \in \left[\frac{\lambda}{n} + \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}, 1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}\right] \\ \frac{(1-\chi)^2 n(\lambda-1)}{4(n-2\lambda)} + \frac{(1-\chi)(1-\lambda)(n\lambda+n-4\lambda)}{2(n-2)(n-2\lambda)} \\ + \frac{\lambda^3(n^2-6n+4)+n\lambda^2(n+2)-n^2\lambda}{4n^2(n-2)(n-2\lambda)}, & \chi \in \left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}, 1 - \frac{\lambda}{n}\right] \\ \frac{(1-\chi)^2 [n^2 - n\lambda(n+2) - 2\lambda^2(n-1)(n-4)]}{4\lambda(n-2)(n\lambda+n-4\lambda)} + \frac{(1-\chi)\lambda}{2n}, & \chi \in \left[1 - \frac{\lambda}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Pentru $\lambda = 1$ se obține cazul particular al nodurilor echidistante.

Teorema 3.1.2. *Momentul de ordinul doi al operatorului Schoenberg de gradul al doilea pentru noduri echidistante este:*

$$(S_{n,2}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{\chi^2}{4} + \frac{\chi}{2n}, & \chi \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{4n^2}, & \chi \in \left[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \\ -\frac{(1-\chi)^2}{4} + \frac{1-\chi}{2n}, & \chi \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

3.1.2 Compararea ordinului de aproximare cu cazul nodurilor echidistante

Vom face comparația doar pentru cazul $\lambda = \frac{1}{2}$.

Lema 3.1.2. *Pentru $n \geq 1$ următoarele relații au loc:*

i)

$$\sup_{\chi \in (0,1)} \frac{(S_{n,2}^{\lambda=1}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1-\chi)} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.1.7)$$

uniform în raport cu $\chi \in (0, 1)$.

ii)

$$\sup_{\chi \in (0,1)} \frac{(S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=\frac{1}{2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1-\chi)} = \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.1.8)$$

uniform în raport cu $\chi \in (0, 1)$.

Teorema 3.1.3. [41] *Dacă $L_n : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ este un operator liniar pozitiv astfel*

încât $L_n(e_j) = e_j$, $j \in \{0, 1\}$, și există o constantă $K > 0$ astfel încât

$$\frac{L_n((e_1 - \chi)^2, \chi)}{\chi(1-\chi)} \leq K \cdot \frac{1}{n}, \quad \chi \in (0, 1),$$

atunci, pentru $f \in C^2([0, 1])$:

$$\left| \frac{L_n(f, \chi) - f(\chi)}{\chi(1-\chi)} \right| \leq \frac{K}{2n} |f''(\chi)| + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.1.9)$$

uniform în raport cu $\chi \in (0, 1)$.

Aplicăm Teorema 3.1.3 și Lema 3.1.2 pentru $\lambda = 1$ și $\lambda = \frac{1}{2}$.

Corolar 3.1.1. *Are loc*

$$\left| \frac{(S_{n,2}f)(\chi) - f(\chi)}{\chi(1-\chi)} \right| \leq \frac{1}{4n} |f''(\chi)| + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ uniform în raport cu } \chi, \quad (3.1.10)$$

pentru $f \in C^2([0, 1])$, $\chi \in (0, 1)$; sau

$$\left\| \frac{S_{n,2}(f) - f}{e_1 - e_2} \right\|_{(0,1)} \leq \frac{1}{4n} \|f''\| + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.1.11)$$

Pentru nodurile alese (3.1.6) și pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ o îmbunătățire este obținută în următorul corolar:

Corolar 3.1.2. *Are loc*

$$\left| \frac{(S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=\frac{1}{2}}f)(\chi) - f(\chi)}{\chi(1-\chi)} \right| \leq \frac{1}{8n} |f''(\chi)| + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ uniform în raport cu } \chi, \quad (3.1.12)$$

pentru $f \in C^2([0, 1])$, $\chi \in (0, 1)$; sau

$$\left\| \frac{S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=\frac{1}{2}}(f) - f}{e_1 - e_2} \right\|_{(0,1)} \leq \frac{1}{8n} \|f''\| + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.1.13)$$

Corolar 3.1.3. *Următoarele relații au loc:*

i)

$$\left\| (S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=1}f)(\chi) - f(\chi) \right\|_{(0,1)} \leq \left(\frac{7}{4} + o(1) \right) \omega_2^\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.1.14)$$

ii)

$$\left\| (S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=\frac{1}{2}}f)(\chi) - f(\chi) \right\|_{(0,1)} \leq \left(\frac{11}{8} + o(1) \right) \omega_2^\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.1.15)$$

Așadar, pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ se obține o îmbunătățire a ordinului de aproximare. Această îmbunătățire se observă în teorema Voronovskaja și în evaluarea cu al doilea modul Ditzian–Totik modulus, de asemenea.

3.2 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi pe noduri arbitrare

3.2.1 O primă metodă care utilizează o diviziune extinsă auxiliară

În această Secțiune, o mult mai generală diviziune extinsă, o diviziune auxiliară $\overline{\Delta}_{n,2}$ este utilizată:

$$y_{-2} < y_{-1} < 0 = y_0 < y_1 \dots < y_n = 1 < y_{n+1} < y_{n+2}, \quad n \geq 1. \quad (3.2.1)$$

Relațiile (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) din Observația 3.1.1 sunt adevărate de asemenea și pentru y_j , $-2 \leq j \leq n+2$.

Pentru orice numere reale $t_1 \leq t_2 < t_3 \leq t_4$ și χ , notăm:

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2, t_3, t_4)(\chi) &= \frac{1}{4} \left(\frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_2} - 3 \right) (\chi - t_3)^2 + \frac{1}{2} (t_4 - 2t_3 + t_2)(\chi - t_3) \\ &\quad + \frac{1}{4} (t_3 - t_2)(t_4 - t_3). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Lema 3.2.1. Fie diviziunea extinsă $\overline{\Delta}_{n,2}$ definită în (3.2.1), $n \geq 1$. Fie $\chi \in [y_q, y_{q+1}]$ unde $0 \leq q \leq n-1$. Atunci

$$(S_{\overline{\Delta}_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(y_{q-1}, y_q, y_{q+1}, y_{q+2})(\chi). \quad (3.2.3)$$

Teorema 3.2.1. Fie diviziunea extinsă $\Delta_{n,2}$, $n \geq 1$ dată în (3.1.2) și operatorul corespunzător $S_{\Delta_{n,2}}$. Fie $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ unde $0 \leq q \leq n-1$. Au loc următoarele relații:

- i) $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2})(\chi)$, for $1 \leq q \leq n-2$;
- ii) $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(0, 0, \chi_1, \chi_2)(\chi)$, for $q = 0$;
- iii) $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{n-2}, \chi_{n-1}, 1, 1)(\chi)$, for $q = n-1$.

3.2.2 O a doua metodă cu calcul direct

În continuare, folosind diferențele divizate pe noduri multiple pentru momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul al doilea, sunt obținute rezultatele de mai sus. Poate fi verificat prin comparație că rezultatele obținute prin cele două metode sunt aceleași. Considerăm diviziunea extinsă $\Delta_{n,2}$ dată în (3.1.2).

Teorema 3.2.2. Fie $\chi \in [0, 1]$, și $q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ un număr natural astfel încât $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$. În aceste condiții, momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul al doilea pe noduri arbitrare are următoarea formă.

i) Dacă $q = 0$,

$$(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} - 3 \right) + \frac{\chi}{2} \chi_1. \quad (3.2.4)$$

ii) Dacă $q = 1$,

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - 3 \right) - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_1 - \chi_2 \right) \\ &\quad + \frac{\chi_1}{4} \left(\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

iii) Dacă $2 \leq q \leq n - 3$,

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{\chi_{q+2} - \chi_{q-1}}{\chi_{q+1} - \chi_q} - 3 \right) \\ &+ \frac{\chi}{2} \left(\chi_q + \chi_{q+1} + \frac{\chi_{q-1}\chi_{q+1} - \chi_q\chi_{q+2}}{\chi_{q+1} - \chi_q} \right) \\ &+ \frac{\chi_q^2(\chi_{q+1} + \chi_{q+2}) - \chi_{q+1}^2(\chi_{q-1} + \chi_q)}{4(\chi_{q+1} - \chi_q)}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

iv) Dacă $q = n - 2$,

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{(1 - \chi)^2}{4} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - 3 \right) \\ &- \frac{1 - \chi}{2} \left(\frac{\chi_1\chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_1 - \chi_2 \right) \\ &+ \frac{\chi_1}{4} \left(\frac{\chi_1\chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

v) Dacă $q = n - 1$,

$$(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{(1 - \chi)^2}{4} \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} - 3 \right) + \frac{1 - \chi}{2} \chi_1. \quad (3.2.8)$$

3.3 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul al doilea cu noduri în rădăcinile polinoamelor Cebîshev

Teorema 3.3.1. [118] Pentru $\Delta_{n,1}$, diviziune extinsă de forma (2.1.14), cu

$$\chi_k = \sin^2 \frac{(2k - 1)\pi}{4(n - 1)},$$

$1 \leq k \leq n - 1$, $n \geq 2$, $\chi_0 = 0$, $\chi_n = 1$ are loc

$$(S_{\Delta_{n,1}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \pi^2 \cdot \frac{\chi(1 - \chi)}{n^2}, \quad n \geq 2, \chi \in [0, 1]. \quad (3.3.1)$$

Rădăcinile polinoamelor Cebîshev $T_n(\mu) = \cos(n \arccos \mu)$, $\mu \in [-1, 1]$ sunt

$$\mu_k = \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (3.3.2)$$

Folosind transformarea intervalului $[-1, 1]$ în intervalul $[0, 1]$ prin funcția $v(\xi) = \frac{\xi+1}{2}$, se obțin următoarele noduri:

$$\chi_k^* = v(\mu_{n-k}), \quad 1 \leq k \leq n,$$

sau, mai explicit,

$$\chi_k^* = \sin^2 \frac{(2k - 1)\pi}{4n}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.3.3)$$

Definim de asemenea, $\chi_0^* = 0$ și $\chi_{n+1}^* = 1$.

Considerăm diviziunea extinsă $\Delta_{n+1,2}^*$:

$$0 = \chi_{-2}^* = \chi_{-1}^* = \chi_0^* < \chi_1^* < \dots < \chi_n^* < \chi_{n+1}^* = \chi_{n+2}^* = \chi_{n+3}^* = 1. \quad (3.3.4)$$

3.3.1 Metoda care folosește o diviziune extinsă auxiliară

Din Teorema 3.2.1 obținem prin particularizare următorul Corolar. Înlocuim n cu $n+1$, și alegem o diviziune auxiliară extinsă de forma (3.2.1) cu $y_j = \chi_j^*$, ($0 \leq j \leq n+1$), $y_{-2} < y_{-1} < 0$, și $y_{n+3} > y_{n+2} > 1$.

Corolar 3.3.1. *Fie diviziunea extinsă $\Delta_{n+1,2}^*$, $n \geq 1$ dată în (3.3.4) și operatorul corespunzător $S_{\Delta_{n+1,2}^*}$. Fie $\chi \in [\chi_q^*, \chi_{q+1}^*]$, $0 \leq q \leq n$. Următoarele relații au loc:*

i) Pentru $1 \leq q \leq n-1$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-1}^*, \chi_q^*, \chi_{q+1}^*, \chi_{q+2}^*)(\chi). \quad (3.3.5)$$

ii) Pentru $q = 0$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(0, 0, \chi_1^*, \chi_2^*)(\chi). \quad (3.3.6)$$

iii) Pentru $q = n$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{n-1}^*, \chi_n^*, 1, 1)(\chi). \quad (3.3.7)$$

O explicație a acestor formule va fi făcută în secțiunea următoare folosind o metodă de calcul direct.

3.3.2 Metoda de calcul direct

În continuare, folosind diferențele divizate pe noduri multiple, se ajunge la rezultatele de mai sus. Se utilizează diviziunea extinsă $\Delta_{n+1,2}^*$ definită în (3.3.4).

Teorema 3.3.2. *Fie $n \geq 2$, $\Delta_{n+1,2}^*$ și $\chi \in [0, 1]$. Există un unic $q \in \{0, 1, \dots, n\}$ astfel încât $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ dacă $0 \leq q \leq n-1$, respectiv $\chi \in [\chi_n, \chi_{n+1}]$ dacă $q = n$. Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul al doilea cu noduri în rădăcinile polinoamelor Cebîshev are forma de mai jos.*

i) Dacă $q = 0$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^2}{2} \left(3 - 12 \sin^2 \frac{\pi}{4n} + 8 \sin^4 \frac{\pi}{4n} \right) + \frac{\chi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4n}. \quad (3.3.8)$$

ii) Dacă $q = 1$,

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{(\chi - \sin^2 \frac{\pi}{4n})^2}{32 \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right)} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{4n} - 1 \right) \chi^2 \\ & - \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{7}{2} \right) \chi + \sin^4 \frac{\pi}{4n} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

iii) Dacă $2 \leq q \leq n-2$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \sin^2 \frac{\pi}{2n} \chi(1 - \chi) - \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2n}. \quad (3.3.10)$$

iv) Dacă $q = n - 1$,

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{(1 - \chi - \sin^2 \frac{\pi}{4n})^2}{32 \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4n}\right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4n}\right)} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{4n} - 1\right) (1 - \chi)^2 \\ &- \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{7}{2}\right) (1 - \chi) + \sin^4 \frac{\pi}{4n} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

v) Dacă $q = n$,

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{(1 - \chi)^2}{2} \left(3 - 12 \sin^2 \frac{\pi}{4n} + 8 \sin^4 \frac{\pi}{4n}\right) + \frac{1 - \chi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4n}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Rezultatele din Corolarul 3.3.1 coincid cu rezultatele din Teorema 3.3.2.

3.3.3 Rezultate de bază

Teorema 3.3.3. Dacă $n \geq 1$ și $\chi \in [0, 1]$ atunci

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\chi(1 - \chi)}{n^2}. \quad (3.3.13)$$

Mai mult, constanta $\frac{\pi^2}{4}$ este cea mai bună posibilă în această inegalitate.

Observația 3.3.1. Deoarece diviziunea $\Delta_{n,2}^e$ împarte intervalul $[0, 1]$ în n subintervale și diviziunea $\Delta_{n+1,2}^*$ divide intervalul $[0, 1]$ în $n + 1$ subintervale, este necesar să luăm $n - 1$, $n \geq 2$ în (3.3.13), pentru a compara relația (3.1.1) cu relația (3.3.13). Se observă că

$$\frac{\chi(1 - \chi)}{4(n - 1)^2} = \left(\frac{n}{n - 1}\right)^2 \frac{\chi(1 - \chi)}{4n^2} \leq \frac{\chi(1 - \chi)}{n^2},$$

pentru $n \geq 2$.

Corolar 3.3.2. Dacă $f \in C([0, 1])$, $\chi \in [0, 1]$, $n \geq 1$, atunci

$$|S_{\Delta_{n+1,2}^*}(f, \chi) - f(\chi)| \leq \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \omega_1 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1 - \chi)}}{n}\right). \quad (3.3.14)$$

Observăm că în cazul nodurilor echidistante, pentru $k = 2$, Teorema 2.2.6 aproximează mai slab

$$|S_{n,2}(f, \chi) - f(\chi)| \leq C \omega_1 \left(f, \sqrt{\frac{\chi(1 - \chi)}{n}}\right), \quad (3.3.15)$$

unde constanta C este independentă de n , f și χ .

Corolar 3.3.3. Pentru orice $f \in C([0, 1])$ și orice $n \geq 2$, există o funcție spline s de gradul 2, atașată nodurilor $\{0 = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_n = 1\}$, astfel încât

$$|f(\chi) - s(\chi)| \leq C \omega_1 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1 - \chi)}}{n}\right), \quad \chi \in [0, 1], \quad (3.3.16)$$

cu o constantă independentă de f , n și χ .

Observăm că relația (3.3.16) este formal analoagă cu estimarea punctuală a lui Teliakovsky, [124] a celei mai bune aproximări polinomiale pe intervalul $[0, 1]$, unde n are o altă semnificație:

Teorema 3.3.4. *Există o constantă $C > 0$, astfel încât pentru orice funcție $f \in C([0, 1])$ și orice $n \in \mathbb{N}$ există un polinom P de grad cel mult n , astfel încât*

$$|f(\chi) - P(\chi)| \leq C\omega_1 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n} \right), \quad \chi \in [0, 1]. \quad (3.3.17)$$

Corolar 3.3.4. *Pentru $n \geq 1$, $\chi \in [0, 1]$ avem*

$$\left| S_{\Delta_{n+1,2}^*}(f, \chi) - f(\chi) \right| \leq \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) \omega_2 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n} \right). \quad (3.3.18)$$

Din nou, o îmbunătățire este obținută prin compararea cu cazul nodurilor echidistante, din Teorema 2.2.6 se obține

$$|f(\chi) - S_{n,2}(f, \chi)| \leq C\omega_2 \left(f, \sqrt{\frac{\chi(1-\chi)}{n}} \right), \quad (3.3.19)$$

cu o constantă C independentă de n , f și χ .

Formal, estimarea (3.3.18) poate fi comparată cu rezultatul lui Gavrea [34] referitor la aproximarea polinomială, care îmbunătățește rezultatul lui Teliakovsky.

Teorema 3.3.5. *Există o secvență de operatori liniari pozitivi $(L_n)_n$, $L_n : C([0, 1]) \rightarrow \Pi_n$ și o constantă $C > 0$, astfel încât pentru orice funcție $f \in C([0, 1])$ și orice $n \in \mathbb{N}$*

$$|f(\chi) - (L_n f)(\chi)| \leq C\omega_2 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n} \right), \quad \chi \in [0, 1]. \quad (3.3.20)$$

Folosind al doilea modul Ditzian-Totik se obține următorul rezultat.

Corolar 3.3.5. *Pentru $f \in C([0, 1])$ și $n \geq 1$ avem*

$$\|S_{\Delta_{n+1,2}^*}(f) - f\| \leq \left(1 + \frac{3\pi^2}{8} \right) \omega_2^\varphi \left(f, \frac{1}{n} \right). \quad (3.3.21)$$

În cazul nodurilor echidistante în [11], a fost obținută următoarea relație:

$$\|S_{n,2}(f) - f\| \leq \frac{15}{8} \omega_2^\varphi \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad (3.3.22)$$

unde $f \in C([0, 1])$, $n \geq 1$.

4 Momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul trei și aplicații

4.1 Cazul nodurilor arbitrare

4.1.1 Metoda cu o diviziune extinsă auxiliară

Considerăm diviziunea extinsă de tipul (2.1.14) cu noduri arbitrare și $k = 3$ pe care o notăm $\Delta_{n,3}$

$$0 = \chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1. \quad (4.1.1)$$

Vom aplica identitatea lui Marsden (2.1.16) pentru $k = 3$. Pentru aceasta considerăm o diviziune adițională $\bar{\Delta}_{n,3}$ cu nodurile:

$$y_{-3} < y_{-2} < y_{-1} < 0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1 < y_{n+1} < y_{n+2} < y_{n+3}, \quad (4.1.2)$$

unde nodurile $y_{-3} < y_{-2} < y_{-1} < 0$ și $1 < y_{n+1} < y_{n+2} < y_{n+3}$ sunt variabile și $y_i = \chi_i$, pentru $0 \leq i \leq n$. Ținând cont că $(S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$, ($\chi \in [0, 1]$) este construit folosind diferențele divizate cu noduri multiple, se obține, pentru $\chi \in [0, 1]$

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \lim_{\substack{y_{-3}, y_{-2}, y_{-1} \rightarrow 0 \\ y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3} \rightarrow 1}} (S_{\bar{\Delta}_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi). \quad (4.1.3)$$

În această limită ordinea punctelor $y_{-3} < y_{-2} < y_{-1} < 0$ și $1 < y_{n+1} < y_{n+2} < y_{n+3}$ este menținută.

Pentru orice $\chi \in [0, 1]$ există un întreg $0 \leq q \leq n - 1$, astfel încât $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}] = [y_q, y_{q+1}]$.

Pentru diviziunea (4.1.2) și pentru $0 \leq q \leq n - 1$ și $\chi \in [y_q, y_{q+1}]$ definim

$$\begin{aligned} & \Gamma(y_{q-2}, y_{q-1}, y_q, y_{q+1}, y_{q+2}, y_{q+3})(\chi) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ \frac{y_{q+3} - y_{q-1}}{y_{q+2} - y_q} \cdot \frac{(\chi - y_q)^3}{y_{q+1} - y_q} - \frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q+1} - y_{q-1}} \cdot \frac{(\chi - y_{q+1})^3}{y_{q+1} - y_q} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{q-1 \leq i < j \leq q+2} (\chi - y_i)(\chi - y_j) \right\}, \quad (4.1.4) \end{aligned}$$

mai explicit,

$$\begin{aligned} & \Gamma(y_{q-2}, y_{q-1}, y_q, y_{q+1}, y_{q+2}, y_{q+3})(\chi) \\ &= \frac{\chi^3}{9(y_{q+1} - y_q)} \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} + \frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} \right) - \frac{\chi^2}{3(y_{q+1} - y_q)} \left[y_{q+1} \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} \right. \right. \\ & + 2) + y_q \left(\frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} - 2 \right) \left. \right] + \frac{\chi}{3} \left\{ y_{q+2} + y_{q-1} + \frac{1}{y_{q+1} - y_q} \left[y_{q+1}^2 \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} \right. \right. \right. \\ & + 1) + y_q^2 \left(\frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} - 1 \right) \left. \right] \left. \right\} - \frac{1}{9} \left\{ (y_{q+2} + y_{q-1})(y_q + y_{q+1}) + y_q y_{q+1} \right. \\ & + y_{q-1} y_{q+2} + \frac{1}{y_{q+1} - y_q} \left[y_{q+1}^3 \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} \right) + y_q^3 \left(\frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} \right) \right] \left. \right\}. \quad (4.1.5) \end{aligned}$$

Observația 4.1.1. Deoarece $y_i \neq y_j, \forall i \neq j, q-2 \leq i, j \leq q+2$, forma lui Γ are sens.

Teorema 4.1.1. Fie diviziunea $\Delta_{n,3}$ dată în (4.1.1). Dacă $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, cu $0 \leq q \leq n-1$, atunci

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi). \quad (4.1.6)$$

Observația 4.1.2. Cu toate că în calculul lui $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ se folosesc toate nodurile $y_{q-3} < \dots < y_{q+4}$ rezultatul final depinde doar de nodurile $y_{q-2} < \dots < y_{q+3}$.

Forma momentului de ordinul doi va fi stabilită separat în câteva cazuri, din teorema de mai sus și din relația (4.1.3) în următoarele corolarii. Vom considera doar cazurile în care χ este în partea stângă a intervalului $[0, 1]$, fiindcă în partea dreaptă, rezultatul poate fi obținut prin simetrie, înlocuind χ cu $1 - \chi$ și y_i cu y_{n-i} , ($-3 \leq i \leq n+3$).

Corolar 4.1.1. Dacă $n = 1$ și $\chi \in [0, 1]$, atunci

$$(S_{\Delta_{1,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = -\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{3}. \quad (4.1.7)$$

Corolar 4.1.2. Fie $n = 2$. Pentru $\chi \in [0, \chi_1]$ avem

$$(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(1 - \frac{1}{\chi_1}\right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{1}{\chi_1}\right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.8)$$

Pentru $\chi \in [\chi_1, 1]$ expresia $(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ poate fi obținută prin simetrie.

Corolar 4.1.3. Fie $n = 3$.

i) Pentru $\chi \in [0, \chi_1]$, obținem

$$(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{1}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.9)$$

ii) Pentru $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$, avem

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{\chi^3}{9(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1}{1 - \chi_1} - \frac{1}{\chi_2}\right) + \frac{\chi^2}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1 - 2\chi_1^2}{1 - \chi_1} - 2\chi_2\right) + \frac{\chi}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\chi_2^2 \right. \\ & \left. - \chi_1 + \frac{\chi_1^3}{1 - \chi_1}\right) + \frac{\chi_1}{9} \left[\frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} - \frac{\chi_1^2}{(\chi_2 - \chi_1)(1 - \chi_1)} - \chi_2\right]. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

iii) Pentru $\chi \in [\chi_2, 1]$, expresia $(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ poate fi obținută din cazul i) prin simetrie.

Corolar 4.1.4. i) Pentru $n \geq 4$ și $\chi \in [0, \chi_1]$ avem:

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.11)$$

ii) Pentru $n \geq 4$ și $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ avem:

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^3}{9(\chi_1 - \chi_2)} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} + \frac{\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left[\frac{2\chi_1 - \chi_3}{\chi_1 - \chi_3} \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_3(\chi_2 - \chi_3) + \chi_1\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right] + \frac{\chi}{3} \left[\chi_1 + \chi_2 + \frac{\chi_1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\chi_3 + \frac{\chi_1\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) \right] \\ &- \frac{\chi_1}{9} \left[\chi_2 + \frac{\chi_1\chi_3}{\chi_1 - \chi_2} + \frac{\chi_1^2\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

iii) Pentru $n \geq 5$ și $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, cu $2 \leq q \leq n - 3$ avem:

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi). \quad (4.1.13)$$

iv) Pentru $n \geq 4$ și $\chi \in [\chi_{n-2}, \chi_{n-1}]$ expresia $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ poate fi obținută prin simetrie din cazul ii).

v) Pentru $n \geq 4$ și $\chi \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$ expresia $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ poate fi obținută prin simetrie din cazul i).

4.1.2 Metoda bazată pe calcul direct

Forma explicită a funcțiilor B-spline și a momentului de ordin doi al operatorilor Schoenberg de gradul trei, pentru noduri arbitrare, respectiv pentru noduri echidistante, pe intervale de tipul $[0, \chi_1]$, $[\chi_1, \chi_2]$, $[\chi_2, \chi_3]$ sunt prezentate în continuare.

Propoziția 4.1.1. Pentru $\chi \in [0, \chi_1]$ și $n \geq 4$ avem:

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.14)$$

Propoziția 4.1.2. Pentru $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ și $n \geq 4$, momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul trei are următoarea formă:

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^3}{9(\chi_1 - \chi_2)} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} + \frac{\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left[\frac{2\chi_1 - \chi_3}{\chi_1 - \chi_3} \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_3(\chi_2 - \chi_3) + \chi_1\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right] + \frac{\chi}{3} \left[\chi_1 + \chi_2 + \frac{\chi_1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\chi_3 + \frac{\chi_1\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) \right] \\ &- \frac{\chi_1}{9} \left[\chi_2 + \frac{\chi_1\chi_3}{\chi_1 - \chi_2} + \frac{\chi_1^2\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Propoziția 4.1.3. Pentru $\chi \in [\chi_2, \chi_3]$ și $n \geq 5$, avem:

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^3}{9(\chi_3 - \chi_2)} \left(\frac{\chi_1 - \chi_5}{\chi_2 - \chi_4} + \frac{\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) \\ &- \frac{\chi^2}{3} \left[1 + \frac{\chi_3}{\chi_3 - \chi_2} + \frac{\chi_2(\chi_1 - \chi_2 - \chi_5)}{(\chi_3 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_4)} + \frac{\chi_4(\chi_1\chi_2 - \chi_3\chi_4)}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_4)} \right] \\ &+ \frac{\chi}{3} \left[\chi_2 + \chi_3 + \frac{1}{\chi_3 - \chi_2} \left(\chi_1\chi_3 - \chi_2\chi_4 - \frac{\chi_2^2\chi_5}{\chi_2 - \chi_4} - \frac{\chi_1\chi_4(\chi_3\chi_4 - \chi_1\chi_2)}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)} \right) \right] \\ &- \frac{1}{9(\chi_2 - \chi_4)} \left[\chi_2^2(\chi_3 + \chi_4) + \frac{\chi_2(\chi_1\chi_3^2 - \chi_2^2\chi_5)}{\chi_3 - \chi_2} + \frac{\chi_2\chi_3\chi_4(\chi_3^2 - \chi_2\chi_4)}{(\chi_3 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_1\chi_4(\chi_3^2 - \chi_1\chi_4 - \chi_2\chi_4 - \chi_1\chi_3)}{\chi_1 - \chi_3} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Cazuri particulare

Propoziția 4.1.4. Pentru $n = 1$ avem:

$$(S_{\Delta_{1,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = -\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{3}. \quad (4.1.17)$$

Propoziția 4.1.5. Fie $n = 2$. Pentru $\chi \in [0, \chi_1]$, obținem:

$$(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(1 - \frac{1}{\chi_1}\right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{1}{\chi_1}\right) + \frac{\chi}{3}\chi_1, \quad (4.1.18)$$

și pentru $\chi \in [\chi_1, 1]$, avem $(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) =$

$$\frac{\chi^3\chi_1}{9(1-\chi_1)^2} - \frac{\chi^2}{3} \left[1 + \frac{\chi_1^2}{(1-\chi_1)^2}\right] + \frac{\chi}{3} \left[1 + \frac{\chi_1^3}{(1-\chi_1)^2}\right] - \frac{\chi_1}{9} \left[1 - \frac{\chi_1(1-2\chi_1)}{(1-\chi_1)^2}\right]. \quad (4.1.19)$$

Propoziția 4.1.6. Fie $n = 3$. Pentru $\chi \in [0, \chi_1]$, obținem:

$$(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{1}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) + \frac{\chi}{3}\chi_1. \quad (4.1.20)$$

Pentru $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$, avem $(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\chi^3}{9(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1}{1 - \chi_1} - \frac{1}{\chi_2}\right) + \frac{\chi^2}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1 - 2\chi_1^2}{1 - \chi_1} - 2\chi_2\right) + \frac{\chi}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\chi_2^2 \right. \\ &\left. - \chi_1 + \frac{\chi_1^3}{1 - \chi_1}\right) + \frac{\chi_1}{9} \left[\frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} - \frac{\chi_1^2}{(\chi_2 - \chi_1)(1 - \chi_1)} - \chi_2\right]. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Pentru $\chi \in [\chi_2, 1]$ avem $(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\chi^3}{9(1 - \chi_2)} \left[\frac{1 - \chi_1}{1 - \chi_2} - \frac{1}{1 - \chi_1}\right] - \frac{\chi^2}{3} \left[1 + \frac{\chi_2^2}{(1 - \chi_2)^2} - \frac{\chi_1(1 - \chi_1\chi_2)}{(1 - \chi_1)(1 - \chi_2)^2}\right] \\ &+ \frac{\chi}{3} \left[3 + \chi_2 - \frac{2\chi_1^2 - 4\chi_1 + 3}{(1 - \chi_1)(1 - \chi_2)} + \frac{1 - \chi_1}{(1 - \chi_2)^2}\right] + \frac{1}{9} \left[\frac{3\chi_1^2 - 6\chi_1 + 4}{(1 - \chi_1)(1 - \chi_2)} \right. \\ &\left. - \frac{1 - \chi_1}{(1 - \chi_2)^2} - 3\chi_2 - 3\right]. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Propoziția 4.1.7. Fie $n = 4$. Pentru $\chi \in [0, \chi_1]$ avem:

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) + \frac{\chi}{3}\chi_1. \quad (4.1.23)$$

Pentru $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ obținem:

$$\begin{aligned} &(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{\chi^3}{9} \left[\frac{1}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} + \frac{\chi_3}{\chi_2(\chi_1 - \chi_2)}\right] + \frac{\chi^2}{3} \left[-2 + \frac{\chi_3^2 - \chi_1(\chi_3 + 1)}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)}\right] \\ &+ \frac{\chi}{3} \left[\frac{\chi_1^2(1 + \chi_1) - \chi_1(\chi_2^2 + \chi_3^2) + \chi_2^2\chi_3}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)}\right] + \frac{\chi_1}{9} \left[-\chi_2 - \frac{\chi_1(\chi_1 + \chi_1\chi_3 - \chi_3^2)}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)}\right]. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Pentru $\chi \in [\chi_2, \chi_3]$ avem $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\chi^3}{9(\chi_2 - \chi_3)} \left[\frac{1}{\chi_1 - \chi_3} + \frac{1 - \chi_1}{1 - \chi_2} \right] + \frac{\chi^2}{3} \left[\frac{-\chi_1 \chi_2}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} \right. \\
&+ \frac{\chi_2(\chi_1 - 2\chi_3)}{(1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} + \frac{2\chi_3}{(1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)} - \left. \frac{\chi_1^2 \chi_2 - \chi_3}{(1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} \right] \\
&- \frac{\chi}{3} \left[-\frac{\chi_3^3}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} - \frac{\chi_2}{\chi_2 - \chi_3} - \frac{\chi_1^2}{(\chi_1 - \chi_3)(1 - \chi_2)} \right. \\
&+ \frac{\chi_2^3}{(\chi_2 - \chi_3)(1 - \chi_2)} + \left. \frac{\chi_1 \chi_3(1 - \chi_1 \chi_2)}{(1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} \right] + \frac{1}{9} \left[-\chi_1 \chi_2 \right. \\
&+ \left. \frac{\chi_1^3}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_3 - \chi_1)} + \frac{\chi_2^3(1 + \chi_1 - \chi_1^2 - 2\chi_2 + \chi_1 \chi_2)}{(\chi_1 - \chi_2)(1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)} - \chi_3(\chi_1 + \chi_2) \right].
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Pentru $\chi \in [\chi_3, 1]$ avem $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\chi^3}{9(1 - \chi_3)} \left[\frac{\chi_1}{1 - \chi_2} - \frac{\chi_2}{1 - \chi_3} - \frac{\chi_2 - \chi_3}{(1 - \chi_2)(1 - \chi_3)} \right] - \frac{\chi^2}{3(1 - \chi_3)} \left[1 - \chi_3 \right. \\
&+ \left. \frac{\chi_1 - \chi_2}{1 - \chi_2} - \frac{\chi_3(\chi_2 - \chi_3)}{1 - \chi_3} \right] + \frac{\chi}{3} \left[3 + \frac{1 - \chi_2}{(1 - \chi_3)^2} + \frac{\chi_1 + 4\chi_2 - 2\chi_2^2 - 3}{(1 - \chi_2)(1 - \chi_3)} + \chi_3 \right] \\
&+ \frac{\chi_3(\chi_2 + \chi_3 - \chi_3^2)}{3(1 - \chi_3)^2} - \frac{\chi_2 + \chi_3 - 2\chi_2^2}{9(1 - \chi_2)(1 - \chi_3)^2} - \frac{\chi_1}{9(1 - \chi_2)(1 - \chi_3)}.
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

4.2 Cazul nodurilor echidistante

Considerăm nodurile echidistante $\chi_j = \frac{j}{n}$ cu $0 \leq j \leq n$ și extra-nodurile $\chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = 0$ respectiv $\chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1$.

Teorema 4.2.1. *i) Pentru $n = 1$ avem:*

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = -\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{3}.$$

ii) Pentru $n = 2$ avem:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{2\chi^3}{9} + \frac{\chi}{6}, & \chi \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{2\chi^3}{9} - \frac{2\chi^2}{3} + \frac{\chi}{2} - \frac{1}{18}, & \chi \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

iii) Pentru $n = 3$ avem:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{\chi^3}{6} + \frac{\chi}{9}, & \chi \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{\chi^2}{6} + \frac{\chi}{6} - \frac{1}{162}, & \chi \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{\chi^3}{6} - \frac{\chi^2}{2} + \frac{7\chi}{18} - \frac{1}{18}, & \chi \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

iv) Pentru $n = 4$ avem:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{2\chi^3}{9} + \frac{\chi}{12}, & \chi \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{2\chi^3}{9} - \frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{6} - \frac{1}{144}, & \chi \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -\frac{2\chi^3}{9} + \frac{\chi^2}{3} - \frac{\chi}{6} + \frac{7}{144}, & \chi \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{2\chi^3}{9} - \frac{2\chi^2}{3} + \frac{7\chi}{12} - \frac{5}{36}, & \chi \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

v) Pentru $n \geq 5$ avem:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{\chi^3 n}{18} + \frac{\chi}{3n}, & \chi \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{\chi^3 n}{18} - \frac{\chi^2}{3} + \frac{2\chi}{3n} - \frac{1}{9n^2}, & \chi \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ \frac{1}{3n^2}, & \chi \in [\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}] \\ \frac{(1-\chi)^3 n}{18} - \frac{(1-\chi)^2}{3} + \frac{2(1-\chi)}{3n} - \frac{1}{9n^2}, & \chi \in [\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}] \\ -\frac{(1-\chi)^3 n}{18} + \frac{1-\chi}{3n}, & \chi \in [\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Observația 4.2.1.

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{1}{3n^2}. \quad (4.2.1)$$

4.3 Aplicații în aproximare

Teorema 4.3.1. Fie $\Delta_{n,3}$ definită în (4.1.1), $n \geq 5$. Fie $f \in C([0, 1])$. Dacă $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, $0 \leq q \leq n-1$, $0 < h \leq \frac{1}{2}$, atunci

$$|(S_{\Delta_{n,3}} f)(\chi) - f(\chi)| \leq \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi)}{h^2}\right) \omega_2(f, h), \quad (4.3.1)$$

$$|(S_{\Delta_{n,3}} f)(\chi) - f(\chi)| \leq \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi)}{h^2 \chi(1-\chi)}\right) \omega_2^\varphi(f, h), \quad (4.3.2)$$

unde în ultima inegalitate avem condiția adițională $\chi \in (0, 1)$.

În cazul nodurilor echidistante, folosind estimarea

$$\frac{(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1-\chi)} \leq \frac{1}{3(n-1)}, \quad n \geq 2, \quad \chi \in (0, 1) \quad (4.3.3)$$

dată în [11] avem din (4.3.2), pentru $h = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$:

$$\|S_{n,3} f - f\| \leq \frac{3}{2} \omega_2^\varphi \left(f, \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right),$$

unde constanta $\frac{3}{2}$ îmbunătățește constanta $\frac{19}{12}$ dată în [11].

Teorema 4.3.2. Fie $\Delta_{n,3}$ dată în (4.1.1), cu $n \geq 5$. Fie $f \in C^2([0, 1])$. Dacă $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, $0 \leq q \leq n-1$, atunci

$$\begin{aligned} & \left| (S_{\Delta_{n,3}}f)(\chi) - f(\chi) - \frac{1}{2}f''(\chi)\Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi) \right| \\ & \leq \frac{5}{6}\Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi)\omega_1(f'', \|\Delta_{k,3}\|). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Lema 4.3.1. Pentru $\chi \in \left[\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right]$, $n \geq 5$ avem:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^4)(\chi) \leq \frac{1}{3n^4}. \quad (4.3.5)$$

Observația 4.3.1. Lema 4.3.1 îmbunătățește estimarea $(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^4)(\chi) \leq \frac{4}{3n^4}$, $\chi \in [0, 1]$, obținută în [120].

Corolar 4.3.1. Pentru operatorii Schoenberg cu noduri echidistante, $S_{n,3}$, pentru $f \in C^2([0, 1])$, $\chi \in (0, 1)$ și $n \geq \max\left\{\frac{2}{\chi}, \frac{2}{1-\chi}, 5\right\}$ avem

$$\left| n^2[(S_{n,3}f)(\chi) - f(\chi)] - \frac{1}{6}f''(\chi) \right| \leq \frac{7}{36}\omega\left(f'', \frac{1}{n}\right). \quad (4.3.6)$$

De asemenea, există limita:

Corolar 4.3.2. Pentru operatorii Schoenberg cu noduri echidistante, $S_{n,3}$, pentru $f \in C^2([0, 1])$ și orice interval compact $[a, b] \subset (0, 1)$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2[(S_{n,3}f)(\chi) - f(\chi)] = \frac{1}{6}f''(\chi), \text{ uniform pentru } \chi \in [a, b]. \quad (4.3.7)$$

4.4 Operatorii Schoenberg pentru care spațiul polinoamelor de gradul doi este invariant

Operatorii Bernstein de ordin k au proprietatea de a păstra gradul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu k . Operatorii Bernstein de ordin k pot fi priviți ca operatori Schoenberg de ordin k cu $n = 1$, conform [71]. În cazul operatorilor Schoenberg este cunoscut faptul că spațiul polinoamelor de gradul întâi este invariant. Dar invarianța spațiului polinoamelor de gradul doi nu este o proprietate generală a operatorilor Schoenberg cubici. În teorema următoare construim operatori speciali Schoenberg care au această proprietate.

Teorema 4.4.1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, n impar. Există o diviziune extinsă $\Delta_{n,3}$:

$$0 = \chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1,$$

astfel încât

$$S_{\Delta_{n,3}}(\Pi_2) \subset \Pi_2.$$

4.5 Operatori de tip Schoenberg-King

Dacă $(L_n)_n$, $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ este o secvență de operatori liniari pozitivi care conservă funcțiile constante, prin modificare de tip King a lor înțelegem șirul de operatori $(L_n^K)_n$, $L_n^K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, definit de

$$L_n^K(f, \chi) := L_n(f, r_n(\chi)), \quad f \in C([a, b]), \quad \chi \in [a, b],$$

unde $r_n \in C([a, b])$, este o funcție astfel încât $r_n([a, b]) \subset [a, b]$ și $L_n^K(e_2) = e_2$.

Acest tip de modificare este descoperit de King, [62] care l-a aplicat operatorilor Bernstein $B_n : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$. Operatorii rezultați, care sunt notați aici B_n^K , mențin proprietatea aproximării uniforme a funcțiilor din $C([0, 1])$. Din acest motiv, această idee a fost generalizată în mai multe direcții. Una dintre ele este aplicabilitatea la mai multe tipuri de operatori de aproximare [40]. Oricum, acest tip de modificare nu este posibil să fie aplicat oricărei secvențe de operatori pozitivi. Vom arăta că modificarea King poate fi aplicată operatorilor Schoenberg.

Teorema 4.5.1. *Pentru orice sistem de noduri $\Delta_{n,3}$*

$$0 = \chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1,$$

există o funcție unică $r_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, astfel încât $S_{\Delta_{n,3}}^K(e_2) = e_2$. Mai mult, r_n este continuă și

$$\|S_{\Delta_{n,3}}^K f - f\| \leq \frac{5}{3} \omega_1(f, \|\Delta_{n,3}\|). \quad (4.5.1)$$

Corolar 4.5.1. *În condițiile Teoremei 4.5.1, dacă $\|\Delta_{n,3}\| \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$), atunci*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{\Delta_{n,3}}^K f - f\| = 0. \quad (4.5.2)$$

5 O definiție a operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg

5.1 Operatori bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri arbitrare

Fie $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n > 0$, $h > 0$, $m > 0$, $k > 0$ și diviziunea $\Delta_{n,h}$:

$$0 = \chi_{-h} = \chi_{-h+1} = \dots = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \dots = \chi_{n+h} = 1, \quad (5.1.1)$$

respectiv $\Delta_{m,k}$:

$$0 = \mu_{-k} = \mu_{-k+1} = \dots = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+k} = 1. \quad (5.1.2)$$

Abscisele Greville asociate diviziunii $\Delta_{n,h}$ sunt

$$\xi_{i,h} := \frac{\chi_{i+1} + \chi_{i+2} + \dots + \chi_{i+h}}{h}, \quad \text{cu } -h \leq i \leq n-1, \quad (5.1.3)$$

iar abscisele Greville asociate diviziunii $\Delta_{m,k}$ sunt

$$\zeta_{j,k} := \frac{\mu_{j+1} + \mu_{j+2} + \dots + \mu_{j+k}}{k}, \quad \text{cu } -k \leq j \leq m-1. \quad (5.1.4)$$

Funcțiile B-spline $N_{i,h}(\chi)$ depind de $\Delta_{n,h}$ și sunt definite prin:

$$N_{i,h}(\chi) = (\chi_{i+h+1} - \chi_i)[\chi_i, \chi_{i+1}, \dots, \chi_{i+h+1}](\cdot - \chi)_+^h, \quad -h \leq i \leq n-1, \quad (5.1.5)$$

iar funcțiile B-spline $N_{j,k}(\mu)$ depind de $\Delta_{m,k}$ și sunt definite prin:

$$N_{j,k}(\mu) = (\mu_{j+k+1} - \mu_j)[\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+k+1}](\cdot - \mu)_+^k, \quad -k \leq j \leq m-1. \quad (5.1.6)$$

Observația 5.1.1. Dacă $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ și $\mu \in [\mu_r, \mu_{r+1}]$ cu $0 \leq q \leq n-1$, $0 \leq r \leq m-1$, atunci

$$N_{i,h}(\chi) = 0 \text{ pentru } i < q - h \text{ sau } i \geq q + 1; \text{ și } N_{i,h}(\chi) \geq 0 \text{ pentru } q - h \leq i \leq q,$$

și

$$N_{j,k}(\mu) = 0 \text{ pentru } j < r - k \text{ sau } j \geq r + 1; \text{ și } N_{j,k}(\mu) \geq 0 \text{ pentru } r - k \leq j \leq r.$$

Observația 5.1.2. Pentru $\chi \in [0, 1]$:

$$i) \sum_{i=-h}^{n-1} N_{i,h}(\chi) = 1, \quad \sum_{i=-h}^{n-1} N_{i,h}(\chi) \geq 0,$$

Pentru $\mu \in [0, 1]$:

$$ii) \sum_{j=-k}^{m-1} N_{j,k}(\mu) = 1, \quad \sum_{j=-k}^{m-1} N_{j,k}(\mu) \geq 0.$$

Definiția 5.1.1. Punctele de coordonate (χ_i, μ_j) unde $\chi_i \in \Delta_{n,h}$ și $\mu_j \in \Delta_{m,k}$ formează o rețea de puncte asociată diviziunilor $\Delta_{n,h}$ și $\Delta_{m,k}$.

Utilizăm următoarele notații

$$\Delta_1 = \{\chi_i\}_{-h \leq i \leq n+h}, \quad \Delta_2 = \{\mu_j\}_{-k \leq j \leq m+k}, \quad (5.1.7)$$

$$\tilde{\Delta} := \Delta_1 \times \Delta_2. \quad (5.1.8)$$

$$\tilde{\Delta} := \tilde{\Delta}_{n,m}^{h,k} = \{(\chi_i, \mu_j), -h \leq i \leq n+h, -k \leq j \leq m+k\}. \quad (5.1.9)$$

Definiția 5.1.2. Operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg asociați cu $\tilde{\Delta}$ au forma

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-h}^{n-1} \sum_{j=-k}^{m-1} N_{i,h}(\chi) N_{j,k}(\mu) f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k}), \quad (5.1.10)$$

unde $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Observația 5.1.3. Ținând cont de Observația 5.1.1 rezultă că $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, cu $0 \leq q \leq n-1$ și $\mu \in [\mu_r, \mu_{r+1}]$ cu $0 \leq r \leq m-1$, și în aceste condiții

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=q-h}^q \sum_{j=r-k}^r N_{i,h}(\chi) N_{j,k}(\mu) f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k}). \quad (5.1.11)$$

Definiția 5.1.3. *Suprafața generată de operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg definiți în (5.1.10), se numește suprafață de tip Schoenberg.*

Propoziția 5.1.1. *Fie $f, g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci*

$$S_{\bar{\Delta}}(af + bg) = a(S_{\bar{\Delta}}f) + b(S_{\bar{\Delta}}g), \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.1.12)$$

Propoziția 5.1.2. *Fie $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Atunci*

$$(S_{\bar{\Delta}}f) \geq 0. \quad (5.1.13)$$

Propoziția 5.1.3. *Operatorul bidimensional de tip Schoenberg $S_{\bar{\Delta}}$ este un polinom de grad cel mult h în variabila χ și de grad cel mult k în variabila μ , pe orice dreptunghi $[\chi_{i-1}, \chi_i] \times [\mu_{j-1}, \mu_j]$ cu $0 \leq i \leq n-1$ și $0 \leq j \leq m-1$. Mai mult, $S_{\bar{\Delta}}$ este o funcție B-spline în fiecare variabilă.*

Propoziția 5.1.4. *Operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg admit derivate parțiale continue pe $[0, 1] \times [0, 1]$.*

În continuare, sunt considerate funcțiile $e_0, \pi_1, \pi_2 \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$, definite de $e_0(\chi, \mu) = 1$, $\pi_1(\chi, \mu) = \chi$, $\pi_2(\chi, \mu) = \mu$ cu $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Propoziția 5.1.5. *Pentru operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg și orice $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ avem:*

- i) $(S_{\bar{\Delta}}e_0)(\chi, \mu) = 1$,
- ii) $(S_{\bar{\Delta}}\pi_1)(\chi, \mu) = \chi$,
- iii) $(S_{\bar{\Delta}}\pi_2)(\chi, \mu) = \mu$,
- iv) $S_{\bar{\Delta}}(\pi_1\pi_2)(\chi, \mu) = \chi\mu$.

Propoziția 5.1.6. *Fie $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție afină. Atunci*

$$(S_{\bar{\Delta}}\varphi) = \varphi. \quad (5.1.14)$$

În propoziția următoare, este folosită notația $e_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$, și prin e_0 se notează funcția constantă egală cu 1, pe ambele mulțimi $[0, 1]$ și $[0, 1] \times [0, 1]$.

Propoziția 5.1.7. *Pentru operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg și orice $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ avem:*

- i) $(S_{\bar{\Delta}}(\pi_1 - \chi e_0))(\chi, \mu) = 0$,
- ii) $(S_{\bar{\Delta}}(\pi_2 - \mu e_0))(\chi, \mu) = 0$,
- iii) $(S_{\bar{\Delta}}(\pi_1 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu) = (S_{\Delta_1}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$,
- iv) $(S_{\bar{\Delta}}(\pi_2 - \mu e_0)^2)(\chi, \mu) = (S_{\Delta_2}(e_1 - \mu e_0)^2)(\mu)$.

Condiția suficientă pentru ca operatorii liniari pozitivi unidimensionali $L_n(f_1)$ să convergă uniform la funcția continuă f_1 , [16], se păstrează și pentru operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg după cum este demonstrat în următoarea teoremă.

Teorema 5.1.1. *Pentru ca operatorii spline bidimensionali de tip Schoenberg*

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-h}^{n-1} \sum_{j=-k}^{m-1} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu)f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k})$$

să convergă uniform pe $[0, 1] \times [0, 1]$ la funcția continuă f este suficient ca pentru orice $\eta_\varepsilon > 0$

$$\sum \sum_{\|(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k}) - (\chi, \mu)\| < \eta_\varepsilon} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu) \rightarrow 1, \quad (5.1.15)$$

uniform pentru $0 \leq \chi \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ unde $n \rightarrow \infty$ și $m \rightarrow \infty$.

Definiția 5.1.4. *Considerăm diviziunile (5.1.7). Normele corespunzătoare fiecărei diviziuni sunt*

$$\|\Delta_1\| = \max_i(\chi_{i+1} - \chi_i), \text{ respectiv } \|\Delta_2\| = \max_i(\mu_{i+1} - \mu_i). \quad (5.1.16)$$

În aceste condiții, definim norma

$$\|\tilde{\Delta}\| := \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\|, \quad (5.1.17)$$

prin urmare, $\|\tilde{\Delta}\|^2 = \max_i((\chi_{i+1} - \chi_i)^2 + (\mu_{i+1} - \mu_i)^2)$.

O versiune cantitativ a gradului de aproximare poate fi dat folosind *primul modul de continuitate*, definit prin:

$$\omega_1(f, \rho) = \sup\{|f(\chi_1, \mu_1) - f(\chi_2, \mu_2)|, (\chi_1, \mu_1), (\chi_2, \mu_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \|\chi_1, \mu_1 - \chi_2, \mu_2\| \leq \rho\}, \quad (5.1.18)$$

unde $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$ și $\rho > 0$.

Teorema 5.1.2. *Pentru orice $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$ operatorii bidimensionali de tip Schoenberg $S_{\tilde{\Delta}}$ verifică inegalitatea*

$$\|(S_{\tilde{\Delta}}f) - f\| \leq \mathcal{V}\omega_1(f, \|\tilde{\Delta}\|), \quad (5.1.19)$$

unde $\mathcal{V} = \frac{1}{2} \max\{h + 1, k + 1\}$.

Corolar 5.1.1. *Dacă*

$$\|\tilde{\Delta}\| \rightarrow 0,$$

atunci operatorii bidimensionali de tip Schoenberg

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-h}^{n-1} \sum_{j=-k}^{m-1} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu)f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k})$$

converg uniform pe $[0, 1] \times [0, 1]$ la f , pentru orice funcție continuă f .

Teorema 5.1.3. *Momentul de ordinul doi al operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg $S_{\hat{\Delta}}$ pentru $h = k = 3$, este*

$$\begin{aligned}
& (S_{\hat{\Delta}}((\pi_1 - \chi e_0)^2 + (\pi_2 - \mu e_0)^2))(\chi, \mu) \\
&= \frac{1}{9} \left[\frac{\chi_{q+3} - \chi_{q-1}}{\chi_{q+2} - \chi_q} \cdot \frac{(\chi - \chi_q)^3}{\chi_{q+1} - \chi_q} - \frac{\chi_{q+2} - \chi_{q-2}}{\chi_{q+1} - \chi_{q-1}} \cdot \frac{(\chi - \chi_{q+1})^3}{\chi_{q+1} - \chi_q} \right. \\
&- \sum_{q-1 \leq i < j \leq q+2} (\chi - \chi_i)(\chi - \chi_j) + \frac{\mu_{r+3} - \mu_{r-1}}{\mu_{r+2} - \mu_r} \cdot \frac{(\mu - \mu_r)^3}{\mu_{r+1} - \mu_r} \\
&- \left. \frac{\mu_{r+2} - \mu_{r-2}}{\mu_{r+1} - \mu_{r-1}} \cdot \frac{(\mu - \mu_{r+1})^3}{\mu_{r+1} - \mu_r} - \sum_{r-1 \leq i < j \leq r+2} (\mu - \mu_i)(\mu - \mu_j) \right] \quad (5.1.20)
\end{aligned}$$

unde $(\chi, \mu) \in [\chi_q, \chi_{q+1}] \times [\mu_r, \mu_{r+1}]$ cu $0 \leq q \leq n-1$ și $0 \leq r \leq m-1$.

5.2 Operatori bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri echidistante

În continuare se analizează cazul $h = k = 3$, $m = n$ și noduri echidistante.

Mai precis, nodurile echidistante sunt $\chi_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$, iar extra-nodurile sunt $\chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = 0$ și $\chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1$, respectiv $\mu_j = \frac{j}{n}$, $0 \leq j \leq n$, cu extra-nodurile $\mu_{-3} = \mu_{-2} = \mu_{-1} = 0$ și $\mu_{m+1} = \mu_{m+2} = \mu_{m+3} = 1$.

Abscisele Greville sunt în acest caz

$$\xi_{i,3} = \frac{\chi_i + \chi_{i+1} + \chi_{i+2}}{3} := \begin{cases} \chi_{i+2}, & i \in \{-3, \dots, n-1\} \setminus \{-2, n-2\} \\ \frac{1}{3n}, & i = -2, \\ \frac{3n-1}{3n}, & i = n-2 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

respectiv,

$$\zeta_{j,3} = \frac{\mu_j + \mu_{j+1} + \mu_{j+2}}{3} := \begin{cases} \mu_{j+2}, & j \in \{-3, \dots, n-1\} \setminus \{-2, n-2\} \\ \frac{1}{3n}, & j = -2, \\ \frac{3n-1}{3n}, & j = n-2. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Funcțiile B-spline sunt

$$N_{i,3}(\chi) = (\chi_{i+4} - \chi_i)[\chi_i, \chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \chi_{i+3}, \chi_{i+4}](\cdot - \chi)_+^3, \quad (5.2.3)$$

respectiv,

$$N_{j,3}(\mu) = (\mu_{j+4} - \mu_j)[\mu_j, \mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \mu_{j+3}, \mu_{j+4}](\cdot - \mu)_+^3. \quad (5.2.4)$$

Notăm cu $\tilde{S}_{n,3}$ operatorii bidimensionali de tip Schoenberg pe noduri echidistante cu $h = k = 3$, $m = n$, iar cu $S_{n,3}$ operatorii unidimensionali Schoenberg de grad trei pe noduri echidistante.

Definiția 5.2.1. *Operatorii $\tilde{S}_{n,3}$ bidimensionali de tip Schoenberg, de grad total cel mult 6, sunt*

$$(\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-3}^{n-1} \sum_{j=-3}^{n-1} N_{i,3}(\chi)N_{j,3}(\mu)f(\xi_{i,3}, \zeta_{j,3}). \quad (5.2.5)$$

Lema 5.2.1. *Momentul de ordinul doi al operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg $\tilde{S}_{n,3}$, cu $n \geq 5$, $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ verifică relația*

$$(\tilde{S}_{n,3}(\pi_1 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu) \leq \frac{1}{3n^2}. \quad (5.2.6)$$

Mai mult, avem

$$(\tilde{S}_{n,3}(\pi_1 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu) = \frac{1}{3n^2}, \quad (5.2.7)$$

pentru $\chi \in [\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}]$ și $\mu \in [0, 1]$.

Relații similare se stabilesc pentru $(\tilde{S}_{n,3}(\pi_2 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu)$.

Lema 5.2.2. *Pentru $n \geq 5$, momentul de ordinul patru al operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg $\tilde{S}_{n,3}$ verifică*

$$(\tilde{S}_{n,3}((\pi_1 - \chi e_0)^4 + (\pi_2 - \mu e_0)^4))(\chi, \mu) \leq \frac{8}{3n^4}. \quad (5.2.8)$$

Teorema 5.2.1. *Avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 ((\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) - f(\chi, \mu)) = \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}(\chi, \mu) + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(\chi, \mu) \right], \quad (5.2.9)$$

pentru orice $f \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$ și $(\chi, \mu) \in (0, 1) \times (0, 1)$.

Pentru evaluarea ordinului de aproximare prin operatorii $\tilde{S}_{n,3}$ utilizăm evaluări generale, exprimate cu moduli de continuitate de ordinul al doilea, demonstrate în lucrarea [87]. Acestea dau o evaluare mai fină decât evaluările cu modulul de ordinul 1. Pentru aceasta introducem următoarele notații. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu normat și $D \subset X$ o mulțime compactă și convexă. Fie $e_0 \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, $e_0(t) = 1$, $t \in D$ și $id : X \rightarrow X$ funcția identică. Fie o familie de măsuri Borel pozitive $\{\tilde{\mu}_x\}_{x \in D}$ pe D , $\sigma_x \neq 0$. Pentru orice spațiu Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ putem considera operatorul liniar $L_Y : C(D, Y) \rightarrow \mathcal{F}(D, Y)$ definit prin relația

$$(L_Y f)(x) = \int_D f d\sigma_x, \quad f \in C(D, Y), \quad x \in D, \quad (5.2.10)$$

unde integrala se ia în sens Bochner.

Notăm cu X^* spațiul funcționalelor liniare și continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $f \in C(D, Y)$ și $h > 0$ atunci *modulul de ordinul doi uzual* se definește prin

$$\tilde{\omega}_2(f, h) := \sup \left\{ \left\| f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) \right\|_Y, u, v \in D, \|u-v\|_X \leq 2h \right\}. \quad (5.2.11)$$

Cu aceste elemente se demonstrează următoarea teoremă.

Teorema 5.2.2. *În condițiile de mai sus, dacă în plus presupunem că X este are dimensiune finită p și sunt îndeplinite condițiile:*

i) $L_{\mathbb{R}}(e_0) = e_0$

ii) $L_{\mathbb{R}}(\varphi) = \varphi$, pentru orice $\varphi \in X^*$,

atunci

$$\|(L_Y)(f)(x) - f(x)\|_Y \leq \left(pL_{\mathbb{R}}(e_0, x) + \frac{1}{2h^2} L_{\mathbb{R}}(\|\cdot - x\|_X^2, \chi) \right) \tilde{\omega}_2(f, h), \quad (5.2.12)$$

pentru $f \in C(D, Y)$, $h > 0$, $x \in D$ [86], [87].

Prin particularizare, în cazul operatorilor $\tilde{S}_{n,3}$ obținem:

Teorema 5.2.3. *Avem*

$$|(\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) - f(\chi, \mu)| \leq \left(2 + \frac{1}{3h^2n^2}\right)\tilde{\omega}_2(f, h), \quad (5.2.13)$$

unde $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$, $h > 0$, $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

În consecință:

$$\|(\tilde{S}_{n,3}f) - f\| \leq \frac{7}{3}\tilde{\omega}_2\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad f \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2.14)$$

În [87] se definește și următorul *modul de continuitate global de ordinul doi*:

Definiția 5.2.2.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^*(f, h) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\chi_i) - f(\chi) \right\|_Y, \chi \in D, \chi_i \in D, \|\chi_i - \chi\|_X \leq h, \right. \\ \left. \lambda_i \in (0, 1), 0 \leq i \leq n, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

unde $f \in C(D, Y)$, $D \subset X$ este o mulțime compactă și convexă din spațiul normat X , Y este un alt spațiu normat, și $h > 0$.

Pentru aceiași operatori definiți anterior, se demonstrează o evaluare care nu depinde de dimensiunea spațiului X :

Teorema 5.2.4. *Presupunem că au loc condițiile i) și ii) din Teorema 5.2.2. Atunci, pentru orice spațiu Banach Y operatorul L_Y definit în (5.2.10) verifică inegalitatea*

$$\|(L_Y f)(x) - f(x)\|_Y \leq \left((L_{\mathbb{R}}(e_0))(x) + \frac{1}{h^2}(L_{\mathbb{R}}(\|\cdot - x\|_X^2))(x) \right) \tilde{\omega}_2^*(f, h), \quad (5.2.16)$$

pentru $f \in C(D, Y)$, $h > 0$ [87], [88].

Aplicând această teoremă operatorilor $\tilde{S}_{n,3}$ obținem

Teorema 5.2.5. *Pentru o funcție f continuă pe $[0, 1] \times [0, 1]$ și $h > 0$ avem*

$$|(\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) - f(\chi, \mu)| \leq \left(1 + \frac{2}{3n^2h^2}\right)\tilde{\omega}_2^*(f, h).$$

În consecință,

$$\|(\tilde{S}_{n,3}f) - f\| \leq \frac{5}{3}\tilde{\omega}_2^*\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad f \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2.17)$$

6 Aplicații ale operatorilor spline Schoenberg în practică

Principalul parametru în proiectarea sistemelor de conversie a energiei solare este intensitatea radiației solare. O precizie redusă a modelelor teoretice de estimare a intensității radiației solare duce la o estimare inexactă a energiei ce va fi obținută și de asemenea, afectează durabilitatea sistemelor de conversie a energiei solare. Valorile intensității radiației solare directe au fost măsurate în Centrul de Cercetare *Sisteme de Energie Regenerabile și Reciclare* din cadrul Institutului de Cercetare, Dezvoltare al Universității Transilvania din Brașov.

6.1 Evaluarea erorilor dintre valorile experimentale ale intensității radiației solare directe și valorile calculate cu modelul Meliss

În acest studiu, valoarea maximă a intensității radiației solare directe dintr-un minut ” i ”, este notată cu B_{exp} . Timpul local standard este transformat în timp solar aparent folosind ecuația timpului

$$ET = 9.87 \sin 2B - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B, \quad (6.1.1)$$

cu

$$B = (N - 81) \frac{360}{364}, \quad (6.1.2)$$

și corecția longitudinii

$$AST = LST + ET \pm 4(SL - LL) - DS, \quad (6.1.3)$$

unde LST este timpul local standard, ET este ecuația timpului, SL este longitudinea standard, LL este longitudinea locală și DS este un factor care ține seama dacă în perioada analizată se utilizează ora de vară sau ora de iarnă (este 0 sau 60 minute) [57].

Studiul utilizează valorile măsurate B_{exp} în perioada 2013-2016, pentru îmbunătățirea modelului teoretic, și cele din 2017 pentru validarea noilor formulări ale modelului. Se calculează media aritmetică a valorilor intensității radiației solare directe în zilele senine din perioada monitorizată, pentru fiecare minut ” i ”, medie aritmetică notată cu $B_{exp,m}$.

Energia solară experimentală pentru o perioadă $[t_1, t_2]$ este notată E_{Bexp} și se calculează cu formula

$$E_{Bexp} = \frac{1}{60} \sum_{i=t_1}^{t_2} B_{exp} \cdot \tau, [Wh/m^2] \quad (6.1.4)$$

considerând B_{exp} constantă pe un interval de timp τ de un minut între două măsurători. Analog se procedează pentru energia solară experimentală medie, notată $E_{Bexp,m}$, folosind în (6.1.4) media aritmetică a valorilor B_{exp} .

Intervalul $[t_1, t_2]$ a fost prima dată considerat 04:00–20:00 pentru clasificarea zilelor, apoi a fost redus la 08:00–16:00, deoarece între aceste ore apar diferențe mari între valorile experimentale B_{exp} și intensitatea radiației solare directe B obținută din modelul teoretic Meliss.

Pentru a estima în fiecare minut ” i ” intensitatea radiației solare directe la nivelul solului, B , pentru Brașov, $45.67N$ latitudine și $25.55E$ longitudine, folosim modelul teoretic Meliss pentru cer senin [75]:

$$B = B_0 \cdot e^{\frac{-T_R}{0.9+9.4 \sin \alpha}}, [W/m^2] \quad (6.1.5)$$

Radiația solară la limita superioară a atmosferei Pământului, B_0 , ia valori între $1413 W/m^2$ în 3 ianuarie, corespunzând celei mai mici distanțe Pământ-Soare și $1321 W/m^2$ în 3 iulie corespunzând celei mai mari distanțe Pământ-Soare. B_0 este calculată conform [57] în funcție de numărul zilei din an (N) și folosind constanta solară $B_{SC} = 1367 W/m^2$ cu formula

$$B_0 = B_{SC}(1 + 0.0334 \cdot \cos(0.9856N - 2.72)) [W/m^2]. \quad (6.1.6)$$

Factorul de turbiditate T_R reprezintă transparența atmosferei la radiația solară, și este dat în [75] ca având valori constante lunare, cuprinse între 1.8 și 2.7 pentru zone montane, respectiv între 2.1 și 3.5 pentru zone de câmpie. Pentru orașe valorile factorului de turbiditate sunt cuprinse între 3.1 și 4.3. Factorul de turbiditate T_R depinde de condițiile locale ale atmosferei, având valori lunare cuprinse între 2.8 și 3.2 pentru Brașov [126].

Unghiul solar de elevație, α , ia valori zilnice între zero (la răsărit și la apus) și o valoare maximă la amiază; cele mai mari valori sunt înregistrate la solstițiul de vară, iar cele mai mici la solstițiul de iarnă [130]. Acest unghi depinde de timp și de locație [31] și este calculat cu

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega \quad (6.1.7)$$

unde δ este unghiul de declinație solară, ω este unghiul orar iar φ este latitudinea.

Eroarea absolută, ε_a , este calculată ca diferență între o valoare experimentală V_{exp} și cea teoretică V , corespunzătoare minutului "i". Din acest motiv ea poate lua și valori pozitive și valori negative pe parcursul unei zile.

$$\varepsilon_a = V_{exp,i} - V_i. \quad (6.1.8)$$

Eroarea absolută medie, $\varepsilon_{a,m}$, se calculează considerând media valorilor experimentale și media valorilor teoretice corespunzătoare minutului "i" în (6.1.8).

Eroarea relativă, ε_r exprimată în procente, este calculată cu

$$\varepsilon_r = \frac{V_{exp,i} - V_i}{V} \cdot 100, [\%]. \quad (6.1.9)$$

Eroarea pătratică medie absolută dintre o valoare experimentală $V_{exp,i}$ și cea teoretică V_i , pentru n valori în intervalul de timp considerat, este

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{exp,i} - V_i)^2}{n}}. \quad (6.1.10)$$

Eroarea pătratică medie relativă dintre o valoare experimentală $V_{exp,i}$ și cea teoretică V_i , pentru n valori în intervalul de timp considerat, este

$$rRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{r,i})^2}{n}}, [\%]. \quad (6.1.11)$$

Un prim pas în analiza propusă a fost studierea lunilor iulie din perioada aleasă 2013–2016. Pentru luna iulie 2016, energia solară directă disponibilă este evaluată pe baza relației (6.1.4). Analizând variabilitatea intensității radiației solare directe, au fost identificate patru tipuri de zile și anume: zile senine, zile parțial senine, zile parțial noroase și zile noroase. Astfel, numai patru zile senine au fost găsite în iulie 2016. Procedura de identificare a zilelor senine a fost repetată pentru lunile iulie din anii 2013, 2014 și 2015. Au fost selectate 13 zile senine.

În 11 din cele 13 zile senine, modelul supraestimează intensitatea radiației solare directe în partea centrală a zilei, mai exact în intervalul orar 8:00–16:00. A fost realizată o analiză pentru acest interval orar utilizând eroarea absolută, relativă și respectiv eroarea pătratică medie dintre valorile experimentale și cele calculate cu modelul Meliss.

Similar, a fost realizată o analiză corespunzătoare intervalului orar 4:00–20:00 pentru aceleași 13 zile senine. Rezultatele obținute au dus la concluzia că diferențe mari

între valorile experimentale și cele calculate cu modelul Meliss apar în partea centrală a zilei, în intervalul orar 08:00–16:00. Exceptând două zile din cele 13 zile senine, modelul supraestimează intensitatea radiației solare directe, eroarea absolută medie este de -140.86 W/m^2 corespunzând unei erori relative medii de -20.35% , în intervalul orar 08:00–16:00.

O analiză similară a fost realizată pentru luni de iarnă, noiembrie, pe aceeași perioadă 2013–2016. Concluziile studiului lunilor noiembrie din perioada 2013–2016 ne indică faptul că, exceptând două zile din cele 11 zile senine identificate în perioada menționată anterior, modelul subestimează intensitatea radiației solare directe, eroarea absolută medie este 135.14 W/m^2 corespunzând unei erori relative medii de 29.54% în intervalul orar 08:00–16:00. Eroarea absolută medie între energia solară directă măsurată și cea calculată în același interval de mai sus, este 0.56 kWh/m^2 , iar eroarea relativă medie este 9.49% . Pentru intervalul orar 07:00–17:00, eroarea absolută medie crește la 0.65 kWh/m^2 , arătând importanța acurateții estimării energiei solare directe în partea centrală a zilei.

Se poate concluziona, în urma analizei de mai sus, că modelul Meliss subestimează valorile experimentale în lunile de iarnă, în contrast cu lunile de vară când modelul supraestimează intensitatea radiației solare directe în zilele senine.

Prin urmare, acuratețea modelului Meliss trebuie îmbunătățită, în principal în partea centrală a zilei, respectiv în intervalul orar 08:00–16:00. Folosind operatorii spline Schoenberg, a fost îmbunătățit modelul Meliss, studiul fiind extins la toate lunile din perioada 2013–2016. Valorile experimentale măsurate în 2017 au fost folosite pentru validarea noilor formulări ale modelului Meliss.

6.2 Utilizarea operatorilor spline Schoenberg de gradul trei în scopul îmbunătățirii acurateții modelului Meliss

Pentru a îmbunătăți modelele teoretice utilizate pentru estimarea intensității radiației solare, factorul de turbiditate considerat constant în timpul unei luni a fost înlocuit cu polinoame de gradul patru care depind de timpul solar. Valorile intensității radiației solare directe experimentale au fost folosite pentru a crea funcții spline cubice, folosind operatorii Schoenberg într-un program construit în Wolfram Mathematica 10.1. Aceste funcții spline sunt folosite pentru a obține două polinoame de interpolare pentru factorul de turbiditate, unul pentru sezonul cald și unul pentru sezonul rece. Forma nouă a modelului a fost validată folosind măsurătorile din 2017, acuratețea a fost îmbunătățită, reducând eroarea relativă de la 8.12% to 4% în sezonul cald și de la 5.02% la 4.15% în sezonul rece. Aceste îmbunătățiri influențează atât evaluarea mai corectă a energiei solare ce urmează a fi captată cât și procesul de proiectare a sistemelor.

A fost dezvoltat un algoritm general pentru îmbunătățirea modelelor pentru cer senin. Acest algoritm a fost aplicat modelului Meliss, care estimează în fiecare minut "i" intensitatea radiației solare directe cu formula (6.1.5). Algoritmul constă în pașii prezentați în continuare.

1. Achiziția de date și prelucrarea lor

Pe baza valorilor experimentale ale intensității radiației solare directe sunt identificate și selectate zilele senine.

Pentru zilele senine identificate, în vederea evaluării acurateții modelului pentru cer senin, sunt calculate pentru fiecare minut "i", erorile absolute și relative dintre valorile experimentale B_{exp} ale intensității radiației solare directe și valorile calculate B cu modelul teoretic.

2. Crearea funcțiilor spline zilnice corespunzătoare valorilor experimentale, utilizând operatorii Schoenberg

Pentru zilele senine, în cazul bazelor de date cu valori măsurate cu o frecvență de un minut, se consideră în continuare valorile măsurate din 10 în 10 minute de-a lungul intervalului dintre răsăritul și apusul Soarelui. Aceste valori sunt stocate într-o bază de date și utilizate la crearea funcțiilor spline cubice.

Intervalul orar $[t_r, t_a]$ este normalizat la $[0,1]$ folosind

$$x = \frac{t_s - t_r}{t_a - t_r} \quad (6.2.1)$$

unde: x este timpul solar normalizat, t_s este timpul solar exprimat în minute, t_r reprezintă timpul exprimat în minute corespunzător răsăritului, iar t_a reprezintă timpul exprimat în minute corespunzător apusului. În continuare, cele $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$ valori normalizate ale timpului solar sunt considerate noduri în procedura de creare a funcțiilor spline zilnice.

Crearea funcțiilor spline folosind operatorii Schoenberg a fost posibilă prin construirea unui program în Wolfram Mathematica 10.1. Noduri echidistante au fost folosite pentru a construi funcțiile spline cu ajutorul operatorilor Schoenberg, aceste noduri echidistante sunt cele $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$ valori ale timpului solar normalizat.

Programul construit în Wolfram Mathematica 10.1, lucrează cu numărul de noduri $n = \left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$, gradul funcțiilor spline $k = 3$ și cu $x \in [0,1]$, obținându-se în final expresiile analitice ale funcțiilor spline cubice $s(x)$.

Ținând cont de faptul că unghiul solar de elevație α depinde de timpul solar, intensitatea radiației solare directe poate fi calculată ca o funcție cu variabila timp solar normalizat $x \in [0,1]$, utilizând modelul Meliss (6.1.5), cu factor de turbiditate constant prezentat în [75]. Energia solară directă măsurată este obținută din valorile experimentale ale intensității radiației solare directe din (6.1.4).

Energia solară directă E_{Bf} calculată considerând o funcție f , corespunzătoare unei perioade de timp $[t_1, t_2]$, este

$$E_{Bf} = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \quad [Wh/m^2]. \quad (6.2.2)$$

Valorile energiei solare obținute din (6.1.4) și din (6.2.2) sunt folosite pentru determinarea erorii absolute și erorii relative. Prin aceste erori se evaluează cât de bine sunt approximate valorile măsurate de către funcțiile spline create.

Utilizarea funcțiilor spline are avantajul că aceste funcții mediază valorile măsurate ale intensității radiației solare directe, eliminând deviațiile accidentale datorate variabilității intensității radiației solare.

3. Determinarea unui polinom de interpolare zilnic pentru intensitatea radiației solare directe folosind funcția spline creată

Pentru a simplifica expresia analitică a funcției spline $s(x)$, care conține $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$ polinoame de gradul trei, este obținut în Wolfram Mathematica 10.1 un polinom de interpolare de grad scăzut $B_{pol}(x)$.

Este recomandat un polinom de gradul patru deoarece un polinom de grad trei sau mai mic decât trei nu aproximează destul de bine, iar un polinom de gradul cinci sau mai mare decât cinci nu aduce îmbunătățiri semnificative față de cel de gradul

patru. Această concluzie este bazată pe analiza unui mare număr de date experimentale înregistrate în zilele cu cer senin, date pentru care s-au obținut erori relative mai mici de 1%.

Acest polinom de interpolare zilnic este obținut folosind funcția spline. Dacă se aplică direct interpolarea pentru $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$ de valori măsurate ale intensității radiației solare directe, se obține în Wolfram Mathematica 10.1 un polinom de interpolare de gradul $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$, ceea ce nu este convenabil. Acesta este un alt motiv care demonstrează necesitatea creării funcțiilor spline, pentru că astfel este obținut un polinom de interpolare de grad mic.

4. Determinarea factorului de turbiditate ca un polinom de interpolare zilnic

Pentru a reduce eroarea dintre datele experimentale și valorile calculate, polinomul de interpolare $B_{pol}(x)$ este folosit în continuare pentru determinarea variației zilnice a turbidității

$$T_R(x) = f(B_{pol}(x)). \quad (6.2.3)$$

Pentru simplificarea expresiei analitice a turbidității calculată cu (6.2.3), un polinom de interpolare $T_{Rpol}(x)$ este obținut în Wolfram Mathematica 10.1 aproximând variația zilnică a turbidității.

Similar cu modul de stabilire al gradului polinomului de interpolare $B_{pol}(x)$, un polinom de gradul patru este recomandat. Erorile relative dintre $T_R(x)$ și $T_{Rpol}(x)$ sunt foarte mici, mai mici decât 0.1%.

5. Determinarea polinomului de interpolare corespunzător factorului de turbiditate pentru sezonul cald, respectiv pentru sezonul rece

Pentru fiecare lună din intervalul monitorizat, este obținut un polinom de interpolare lunar care aproximează turbiditatea, polinom notat $T_{RM}(x)$. Acest polinom se obține mediind coeficienții omologi ai polinoamelor de interpolare zilnice $T_{Rpol}(x)$ dintr-o lună.

Din polinoamele de interpolare $T_{RM}(x)$ stabilite pentru lunile din sezonul cald, mediind coeficienții termenilor omologi, este obținut polinomul de interpolare pentru sezonul cald, notat $T_{RWS}(x)$. În mod similar, pentru lunile din sezonul rece, este obținut un polinom de interpolare $T_{RCS}(x)$.

6. Noi formulări ale modelului pentru zile senine

Utilizând $T_{RWS}(x)$ este obținută o nouă formulare a modelului pentru intensitatea radiației solare directe din sezonul cald, și anume

$$B_{TRWS}(x) = f(T_{RWS}(x)), [W/m^2], \quad (6.2.4)$$

respectiv pentru sezonul rece

$$B_{TRCS}(x) = f(T_{RCS}(x)), [W/m^2]. \quad (6.2.5)$$

Energia solară directă pentru sezonul cald, notată E_{BWS} , obținută cu ajutorul modelului îmbunătățit, este calculată cu (6.2.2) considerând funcția T_{RWS} . Similar se calculează, folosind T_{RCS} , energia solară directă zilnică pentru sezonul rece, notată E_{BCS} .

Algoritmul de mai sus a fost aplicat pentru îmbunătățirea modelului Meliss (6.1.5), folosind datele măsurate în zilele senine identificate între anii 2013 și 2017.

1. Achiziția de date și prelucrarea lor

Pentru acest studiu s-au prelucrat datele experimentale înregistrate în fiecare minut, pentru fiecare zi din perioada 2013–2016. Din întreaga perioadă monitorizată, au fost identificate 121 zile senine.

2. Crearea funcțiilor spline zilnice corespunzătoare valorilor experimentale, utilizând operatorii Schoenberg

Pentru zilele senine, din valorile măsurate la fiecare minut, se consideră în continuare valorile măsurate ale intensității radiației solare directe din 10 în 10 minute de-a lungul intervalului orar [4:00, 20:00], ceea ce înseamnă 16 ore cu 6 valori măsurate considerate într-o oră, deci 96 de valori măsurate selectate pentru o zi. Aceste valori sunt stocate într-o bază de date și utilizate la crearea funcțiilor spline de gradul trei. Intervalul orar [4:00, 20:00] corespunzând timpului solar $t_a - t_r$ este normalizat la [0,1] folosind relația (6.2.1).

Crearea funcțiilor spline folosind operatorii Schoenberg a fost posibilă prin construirea unui program în Wolfram Mathematica 10.1. Noduri echidistante au fost utilizate pentru a crea funcțiile spline cu operatorii Schoenberg, mai precis aceste noduri echidistante sunt cele 96 de valori ale timpului solar normalizat. Programul construit în Wolfram Mathematica 10.1, lucrează cu $n = 96, k = 3$ și $x \in [0, 1]$ timpul solar normalizat, rezultând câte o funcție spline de gradul trei pentru fiecare zi senină. Expresia fiecărei funcții spline conține 96 de polinoame de gradul trei.

În Tabelul 6.1, este prezentată expresia funcției spline (fragment) corespunzătoare valorilor măsurate în 28 August 2015.

Tabela 6.1: Expresia funcției spline creată pe baza valorilor măsurate ale intensității radiației solare directe din 28.08.2015 (fragment)

Expresia funcției spline	Timp solar normalizat	Timp solar
$s = 1.474x^3$	[0, 1/96]	[4:00, 4:10]
$s = -0.165 + 47.71x - 4580.17x^2 + 146567x^3$	[1/96, 2/96]	[4:10, 4:20]
$s = 3.81 - 524.822x + 22901.4x^2 - 293138x^3$	[2/96, 3/96]	[4:20, 4:30]
$s = -9.608 + 763.384x - 18321.2x^2 + 146570x^3$	[3/96, 4/96]	[4:30, 4:40]
$s = 2.06 - 76.8x + 1843.2x^2 - 14745.6x^3$	[4/96, 5/96]	[4:40, 4:50]
$s = -4.189 + 283.2x - 5068.8x^2 + 29491.2x^3$	[5/96, 6/96]	[4:50, 5:00]
...
$s = 137612 - 893649x + 1.943 \cdot 10^6x^2 - 1.407 \cdot 10^6x^3$	[45/96, 46/96]	[11:30, 11:40]
$s = -539555 + 3.346 \cdot 10^6x - 6.904 \cdot 10^6x^2 + 4.747 \cdot 10^6x^3$	[46/96, 47/96]	[11:40, 11:50]
$s = 411395 - 2.481 \cdot 10^6x + 4.997 \cdot 10^6x^2 - 3.355 \cdot 10^6x^3$	[47/96, 48/96]	[11:50, 12:00]
$s = -308449 + 1.837 \cdot 10^6x - 3.64 \cdot 10^6x^2 + 2.403 \cdot 10^6x^3$	[48/96, 49/96]	[12:00, 12:10]
$s = 57870.9 - 315095x + 577894x^2 - 351683x^3$	[49/96, 50/96]	[12:10, 12:20]
$s = 641683 - 3.677 \cdot 10^6x + 7.034 \cdot 10^6x^2 - 4.483 \cdot 10^6x^3$	[50/96, 51/96]	[12:20, 12:30]
...
$s = -4.263 \cdot 10^6 + 1.39 \cdot 10^7x - 1.51 \cdot 10^7x^2 + 5.465 \cdot 10^6x^3$	[89/96, 90/96]	[18:50, 19:00]
$s = 7.339 \cdot 10^6 - 2.322 \cdot 10^7x + 2.45 \cdot 10^7x^2 - 8.615 \cdot 10^6x^3$	[90/96, 91/96]	[19:00, 19:10]
$s = -11460.9 + 37187.5x - 40172.5x^2 + 14450.7x^3$	[91/96, 92/96]	[19:10, 19:20]
$s = 91585.5 - 285392x + 296433x^2 - 102629x^3$	[92/96, 93/96]	[19:20, 19:30]
$s = -81753.4 + 251399x - 257675x^2 + 88031.2x^3$	[93/96, 94/96]	[19:30, 19:40]
$s = 28437.4 - 86206.8x + 87114.2x^2 - 29343.7x^3$	[94/96, 95/96]	[19:40, 19:50]
$s = 1.093 - 1.164 \cdot 10^{-10}x^3$	[95/96, 96/96]	[19:50, 20:00]

```

For[k = 0, k < n+1, k++,
  If[k < 1, c[-3, x_] := n^4 (1/n-x)^3;
    c[-2, x_] := (n^4)/8 (2/n-x)^3 - n^4 (1/n-x)^3;
    c[-1, x_] := (n^4)/18 (3/n-x)^3 - (n^4)/4 (2/n-x)^3 + (n^4)/2 (1/n-x)^3;
    c[0, x_] := (n^4)/24 (4/n-x)^3 - (n^4)/6 (3/n-x)^3 + (n^4)/4 (2/n-x)^3
    - (n^4)/6 (1/n-x)^3;
    For[i = 1, i < n, i++,
      c[i_, x_] := (n^4)/24 ((i+4)/n-x)^3 - (n^4)/6 ((i+3)/n-x)^3
      + (n^4)/4 ((i+2)/n-x)^3 - (n^4)/6 ((i+1)/n-x)^3 + (n^4)/24 (i/n-x)^3];
    For[j = -3, j < n, j++, N3[j_, x_] := 4/n c[j, x]];
  Sf1[x_] = Sum[f[j, 3] N3[j, x], {j, -3, n-1}];
  Print["k=", k];
  Print[CoefficientList[Sf1[x], x]];
  w = CoefficientList[Sf1[x], x];
  Tl1[x_] = w.{1, x, x^2, x^3};
  Print["Tl(0,1/96)=", Tl1[x]],
  If[k < 2, c[-3, x_] := 0;
    c[-2, x_] := (n^4)/8 (2/n-x)^3;
    c[-1, x_] := (n^4)/18 (3/n-x)^3 - (n^4)/4 (2/n-x)^3;
    c[0, x_] := (n^4)/24 (4/n-x)^3 - (n^4)/6 (3/n-x)^3 + (n^4)/4 (2/n-x)^3;
    c[1, x_] := (n^4)/24 ((1+4)/n-x)^3 - (n^4)/6 ((1+3)/n-x)^3
    + (n^4)/4 ((1+2)/n-x)^3 - (n^4)/6 ((1+1)/n-x)^3;
    For[i = 2, i < n, i++,
      c[i_, x_] := (n^4)/24 ((i+4)/n-x)^3 - (n^4)/6 ((i+3)/n-x)^3
      + (n^4)/4 ((i+2)/n-x)^3 - (n^4)/6 ((i+1)/n-x)^3 + (n^4)/24 (i/n-x)^3];
    For[j = -3, j < n, j++, N3[j_, x_] := 4/n c[j, x]];
  Sf2[x_] = Sum[f[j, 3] N3[j, x], {j, -3, n-1}];
  Print["k=", k];
  Print[CoefficientList[Sf2[x], x]];
  w = CoefficientList[Sf2[x], x];
  Tl2[x_] = w.{1, x, x^2, x^3};
  Print["Tl(1/96,2/96)=", Tl2[x]],
  If[k < 3, c[-3, x] := 0;

```

Figura 6.1: Program construit pentru crearea funcțiilor spline zilnice (fragment)

În Figura 6.2 sunt reprezentate pentru 28.08.2015 și $x \in [0, 1]$: intensitatea radiației solare directe B calculată cu modelul Meliss; valorile experimentale ale intensității radiației solare directe B_{exp} și funcția spline s . Analizând aceste date, diferențele cele mai mari sunt în intervalul orar [8:00, 16:00] corespunzând timpului solar normalizat [0.25, 0.75].

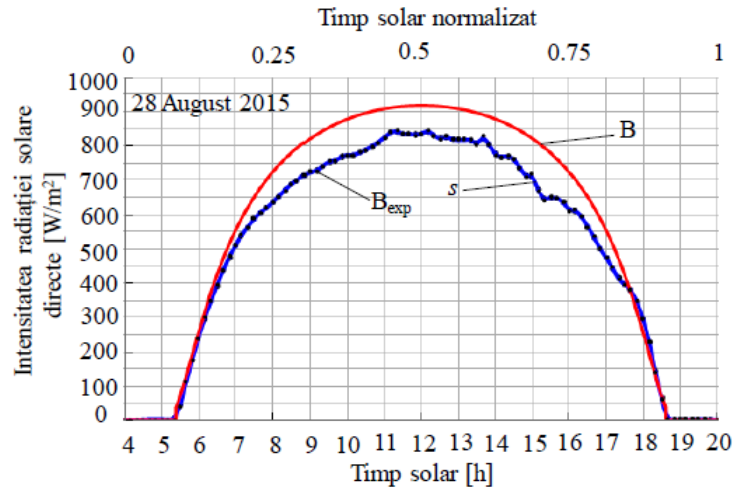


Figura 6.2: Intensitatea radiației solare B calculată cu modelul Meliss, valorile experimentale B_{exp} și funcția spline s în 28.08.2015

În Figura 6.3 este un detaliu al Figurii 6.2 corespunzător intervalului orar [10, 14].

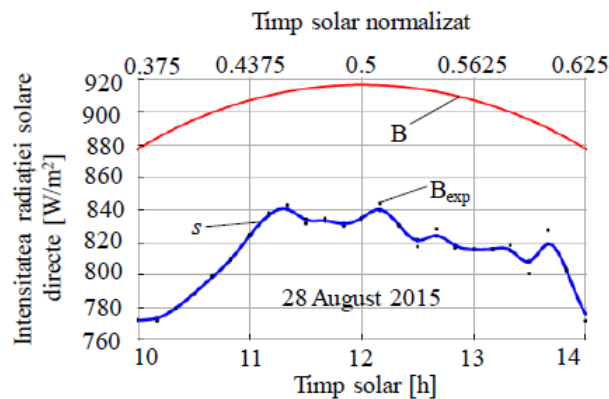


Figura 6.3: Detaliu pentru intensitatea radiației solare directe B calculată cu modelul Meliss, valorile experimentale B_{exp} și funcția spline s

Energia solară directă din 28.08.2015 pe timp solar normalizat $[0, 1]$, corespunzătoare datelor experimentale este $E_{B_{exp}} = 8184.26 \text{ Wh/m}^2$, iar cea corespunzătoare funcției spline este $E_{B_s} = 8187.23 \text{ Wh/m}^2$. Eroarea relativă dintre aceste valori este $\varepsilon_{r,E} = 0.03\%$, ceea ce evidențiază o excelentă aproximare făcută de funcția spline valorilor experimentale.

Deoarece funcțiile spline aproximează foarte bine evoluția intensității radiației solare directe, în pașii următori ai algoritmului vom folosi funcția spline în locul valorilor măsurate.

3. Determinarea unui polinom de interpolare zilnic pentru intensitatea radiației solare directe folosind funcția spline creată

Pentru a simplifica expresia analitică a funcției spline $s(x)$, care conține 96 de polinoame de gradul trei, este obținut în Wolfram Mathematica 10.1 un polinom de interpolare $B_{pol}(x)$. Acest polinom are gradul patru și este obținut folosind funcția spline.

În continuare, studiul este centrat pe intervalul orar [8:00, 16:00] corespunzând timpului solar normalizat [0.25, 0.75].

Polinomul de interpolare $B_{pol}(x)$ care aproximează funcția spline pentru 28.08.2015, este corespunzător lui $x \in [0.25, 0.75]$ și are expresia

$$B_{pol}(x) = -558.707 + 7282.269x - 13630.299x^2 + 11786.011x^3 - 4941.108x^4. \quad (6.2.6)$$

Acest polinom de interpolare $B_{pol}(x)$ aproximează foarte bine funcția spline $s(x)$ în partea centrală a zilei, după cum se poate observa în Figura 6.4 pentru 28.08.2015, spre deosebire de modelul Meliss cu factor de turbiditate constant. Maximul erorii absolute dintre $s(x)$ și $B_{pol}(x)$ este -32.28 W/m^2 și maximul erorii relative este -0.58% obținute la 0.72 timp solar normalizat.

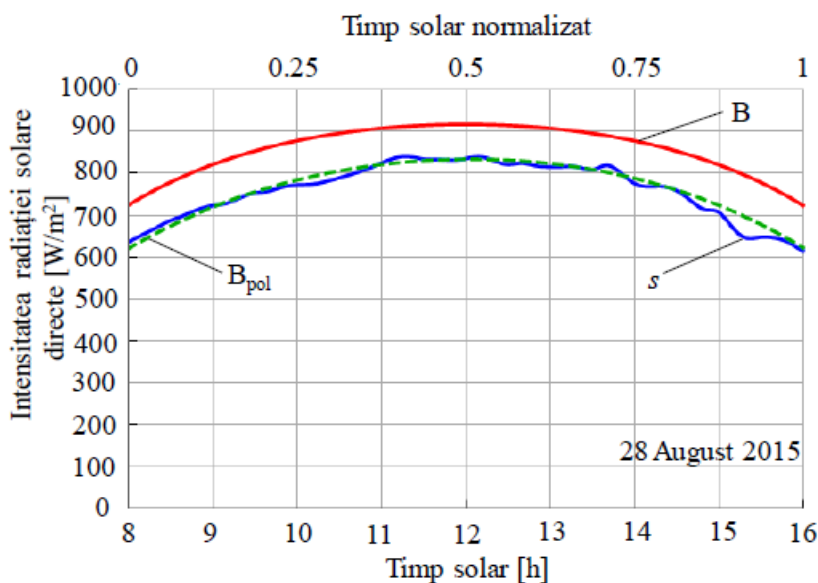


Figura 6.4: Intensitatea radiației solare B calculată cu modelul Meliss, funcția spline s și polinomul de interpolare B_{pol} în 28.08.2015

4. Determinarea factorului de turbiditate ca un polinom de interpolare zilnic

Polinomul de interpolare $B_{pol}(x)$ este folosit pentru a calcula variația zilnică a turbidității, pe baza modelului Meliss (6.1.5)

$$T_R(x) = -(0.9 + 9.4 \sin \alpha) \cdot \ln \frac{B_{pol}(x)}{B_0}. \quad (6.2.7)$$

Utilizând în relația (6.2.7) polinomul de interpolare B_{pol} din relația (6.2.6) pentru ziua senină 28.08.2015 și B_0 al acestei zile calculat cu (6.1.6), turbiditatea rezultă ca o funcție cu variabila x (timpul solar normalizat).

$$T_R(x) = -(0.9 + 9.4 \sin \alpha) \cdot \ln \frac{-558.707 + 7282.269x - 13630.299x^2 + 11786.011x^3 - 4941.108x^4}{1340.05} \quad (6.2.8)$$

Pentru a reduce complexitatea relației (6.2.8) este obținut în Wolfram Mathematica 10.1 un polinom de interpolare $T_{Rpol}(x)$ pentru turbiditate

$$T_{Rpol}(x) = 2.654 + 22.39x - 94.585x^2 + 151.806x^3 - 83.791x^4. \quad (6.2.9)$$

5. Determinarea polinomului de interpolare corespunzător factorului de turbiditate pentru sezonul cald, respectiv pentru sezonul rece

Pașii anteriori ai algoritmului au fost aplicați tuturor zilelor senine din perioada 2013-2016, obținându-se câte un polinom de interpolare $T_{Rpol}(x)$ pentru fiecare zi. Pentru lunile august 2013-2016, mediile aritmetice ale coeficienților acestor polinoame sunt calculate pentru fiecare termen în parte și este obținut un polinom de interpolare mediu lunar $T_{RMAug}(x)$.

$$T_{RMAug}(x) = 8.336 - 41.648x + 143.437x^2 - 200.09x^3 + 95.903x^4. \quad (6.2.10)$$

Utilizând $T_{RMAug}(x)$ în (6.1.5) se obține $B_{TRAug}(x)$.

Energia solară directă calculată folosind funcția spline s este $E_{B_s} = 6087 Wh/m^2$, folosind modelul Meliss este $E_B = 6871 Wh/m^2$ iar folosind polinomul de interpolare mediu lunar este $E_{BTRAug} = 6025 Wh/m^2$. Astfel, eroarea relativă descrește de la 12.9% (între E_{B_s} și E_B) la 1% (între E_{B_s} și E_{BTRAug}).

Toți pașii anteriori ai algoritmului sunt aplicați pentru fiecare zi senină din fiecare lună din perioada 2013–2016.

Un polinom de interpolare $T_{RWS}(x)$ a fost obținut pentru turbiditate în sezonul cald, calculând media aritmetică a coeficienților omologi ai polinoamelor de interpolare lunare din lunile aprilie, mai, iunie, iulie, august. Similar, a fost obținut $T_{RCS}(x)$ pentru sezonul rece (septembrie, octombrie, noiembrie, decembrie, ianuarie, februarie, martie).

$$T_{RWS}(x) = 7.03 - 32.08x + 110.94x^2 - 157.28x^3 + 77.69x^4, \quad (6.2.11)$$

$$T_{RCS}(x) = 23.96 - 170.04x + 507.45x^2 - 656.42x^3 + 308.62x^4. \quad (6.2.12)$$

6. Noi formulări ale modelului Meliss

Utilizând $T_{RWS}(x)$ în (6.1.5) este obținută o nouă formulare a modelului pentru intensitatea radiației solare directe din sezonul cald, și anume

$$B_{TRWS}(x) = B_0 \cdot e^{\frac{-(7.03-32.08x+110.94x^2-157.28x^3+77.69x^4)}{0.9+9.4 \sin \alpha}}, \quad (6.2.13)$$

respectiv înlocuind T_{RCS} în (6.1.5), obținem o nouă formulare a modelului pentru intensitatea radiației solare directe pentru sezonul rece

$$B_{TRCS}(x) = B_0 \cdot e^{\frac{-(23.96-170.04x+507.45x^2-656.42x^3+308.62x^4)}{0.9+9.4 \sin \alpha}}. \quad (6.2.14)$$

Energia solară directă, corespunzătoare intervalului [0.25, 0.75] timp solar normalizat, este $E_{B_s} = 6087 Wh/m^2$, energia solară determinată cu ajutorul modelului Meliss este $E_B = 6871 Wh/m^2$, iar energia solară $E_{BWS} = 6323.76 Wh/m^2$. Eroarea relativă descrește de la -12.9% (între E_{B_s} și E_B) la -3.85% (între E_{B_s} și E_{BWS}).

Validarea noilor formulări folosind măsurătorile din 2017

Pentru validare, au fost analizate zilele din 2017 și identificate cele senine. Au fost selectate astfel 31 de zile senine și pentru fiecare s-au aplicat pașii 1–6 din algoritmul de mai sus.

Pentru fiecare zi senină din sezonul cald 2017 a fost realizată o analiză a erorilor, comparându-se energia solară directă măsurată E_{B_s} , cu energia solară E_B obținută cu

modelul Meliss considerând factorul de turbiditate constant T_R . Energia solară E_{Bs} a fost de asemenea comparată și cu energia solară zilnică E_{BWS} calculată cu (6.2.2) unde funcția este intensitatea radiației solare determinată cu relația (6.2.13).

Prin urmare, pentru fiecare zi senină din sezonul cald 2017 au fost calculate erorile relative $\varepsilon_{r,E}$ (între E_{Bs} și E_B), iar din valorile absolute ale acestora s-a obținut eroarea relativă medie $\varepsilon_{r,E,m} = 8.12\%$.

Pentru aceleași zile, au fost calculate erorile relative $\varepsilon_{r,EWS}$ (între E_{Bs} și E_{BWS}). Valorile absolute ale acestor erori relative au fost utilizate pentru calculul erorii relative medii $\varepsilon_{r,EWS,m} = 4\%$. Aceasta a fost utilizată pentru estimarea acurateții noilor formulări ale modelului Meliss.

Astfel, pentru sezonul cald 2017, folosind noile formulări se obține o îmbunătățire a acurateții de 4.12%. Acest rezultat, obținut pentru o scara temporală de 10 minute bazată numai pe valorile măsurate ale intensității radiației solare directe, este comparabil cu cele mai bune îmbunătățiri ale acurateții obținute în alte studii, cum ar fi 4.3% în [58] unde mai multe variabile sunt considerate ca intrări (temperatura aerului, umiditatea relativă, presiunea barometrică și durata zilei) sau 4.33% în [63] unde această îmbunătățire este obținută în estimarea intensității radiației solare zilnice medii lunare. Mai mult îmbunătățirea obținută de 4.12% este semnificativ mai mare decât 0.22% și 0.37% obținute în [48] pentru estimarea intensității radiației solare orare.

În cazul platformelor fotovoltaice cu o putere instalată de 50 MW, care într-o regiune cu climat temperat continental (Brașov, România) produce de-a lungul sezonului cald aproximativ 40000 MWh, îmbunătățirea acurateții cu 4.12% reprezintă o diferență în estimarea producției de energie de 1648 MWh/an, ceea ce corespunde unei sume de 412000 euro având în vedere actualul Sistem de Promovare a Producerii Energiei din Surse Regenerabile în România, bazat pe Certificate Verzi.

A fost făcută o analiză similară și pentru sezonul rece, obținându-se o scădere a erorii relative de la 5.02% la 4.15%. În cazul platformei fotovoltaice considerate (cu puterea instalată de 50 MW), care produce în sezonul rece aproximativ 28500 MWh, acuratețea se îmbunătățește cu 0.87% ceea ce reprezintă o diferență în estimarea energiei de 248 MWh, corespunzând unei sume de 62000 euro. Prin urmare, deoarece diferențe mari sunt înregistrate în sezonul cald, trebuie să ținem cont că energia solară în zona analizată este semnificativ mai mare în lunile din sezonul cald (6 kWh/zi) decât în lunile din sezonul rece (1 kWh/zi).

Ca o recomandare, noile formulări pot fi anual înnoite folosind noile măsurători și lărgind astfel numărul de ani monitorizați. O mai bună estimare a intensității radiației solare directe conduce la importante beneficii financiare, ceea ce este esențial pentru un bun management al platformelor fotovoltaice.

Un mare avantaj al acestui algoritm este că el poate fi aplicat în orice locație.

Algoritmul prezentat are caracter general și a fost dezvoltat în vederea îmbunătățirii acurateții modelelor pentru zile senine care estimează intensitatea radiației solare directe bazându-se pe factorul de turbiditate considerat variabil în timpul unei zile.

Concluzii

Studiul operatorilor Schoenberg este important și din punct de vedere teoretic și din punct de vedere al aplicabilității lor practice.

Operatorii Schoenberg constituie o metodă specifică a aproximării spline, și, pentru practică, este de preferat să fie utilizate funcțiile spline deoarece ele au un foarte bun ordin de aproximare și de asemenea, aceste funcții sunt suficient de netede. Teza de doctorat are un caracter unitar, fiind în special concentrată pe studiul teoretic al operatorilor Schoenberg.

Operatorii Schoenberg continuă să fie o zonă de mare interes în cercetare, un domeniu în care intenționăm să focalizăm munca noastră în viitor.

Bibliografie

- [1] Abel, U., Ivan, M., (1999). *Some identities for the operator of Bleimann, Butzer and Hahn involving divided differences*, *Calcolo*, 36 (3), 143-160.
- [2] Agathokleous R.A., Kalogirou S.A., (2016). *Double skin facades (DSF) and building integrated photovoltaics (BIPV): A review of configurations and heat transfer characteristics*, *Renewable Energy*, 89, 743-756.
- [3] Agathokleous R.A., Kalogirou S.A., Karellas S., (2018). *Energy analysis of a naturally ventilated Building Integrated Photovoltaic/Thermal (BIPV/T) system*, *Renewable Energy*, 128, 541-552.
- [4] Agratini, O., (2000). *Approximation by Linear Operators* (in Romanian), Cluj Univ. Press.
- [5] Altomare, F., Campiti, M., (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin.
- [6] Altomare, F., Cappelletti Montano, M., Leonessa, V., Raşa, I., (2014). *Markov operators, positive semigroups and approximation processes*, *De Gruyter Studies in Mathematics* 61.
- [7] Anastassiou, G.A., Gal, S., (2000). *Approximation theory, moduli of continuity and global smoothness preservation*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.
- [8] Bason F., (2007). *Solar irradiance measurements from the Danish Galathea 3 Expedition*, Proceedings of ISES Solar World Congress 2007; Solar Energy and Human Settlement, 26672670.
- [9] Bauer, H., (1978). *Approximation and abstract boundaries*, *Amer. Math. Monthly*, 85, 632-647.
- [10] Bernstein, S. N., (1952). *Collected Works: Constructive Theory of Functions*, Academy of Sciences USSR Press.
- [11] Beutel, L., Gonska, H., Kacso, D. and Tachev, G., (2002). *On variation-diminishing Schoenberg operators: new quantitative statements*, *Monogr. Academia Ciencias de Zaragoza* 20, 9-58.
- [12] Beutel, L., Gonska, H., Kacso, D., Tachev, G., (2002). *Variation-diminishing splines revisited*, Proceedings of the International Symposium, Cluj-Napoca, 54-75.
- [13] Beutel, L., Gonska, H., Kacsó, D., Tachev, G. (2002). *Variational-diminishing splines revisited* in: Proceedings of the international symposium on numerical analysis and approximation theory, Cluj-Napoca, Romania, May 9-11, 2002, [Trîmbițaș, Radu T. (ed.)], Cluj Napoca University Press, 54-75.
- [14] Beutel, L., Gonska, H., Kacso, D. and Tachev, G., (2004). *On the second moments of variation-diminishing splines*, *J. Concrete and Applicable Analysis*, 2, no. 1, 91-117.

- [15] Bird R., Hulstrom R., (1981). *A Simplified Clear Sky Model for Direct and Diffuse Insolation on Horizontal Surfaces* Tech. rep., Solar Energy Research Institute.
- [16] Bohman, H., (1951). *On approximation of continuous and of analytic functions*, Arkiv for Matematik band 2 nr 3, 43-56.
- [17] Buonomano, A., Forzano, C., Kalogirou, S.A., Palombo, A., (2019). *Building-faade integrated solar thermal collectors: Energy-economic performance and indoor comfort simulation model of a water based prototype for heating, cooling, and DHW production*, Renew. Energy 137, 2036.
- [18] Boor, C., (1972). *On Calculating with B Splines*, Journal of Approximation Theory, 6, 50-62.
- [19] Boor, C., Hollig, K., (1982). *B-splines from parallelepipeds*, University of Wisconsin-Madison, Mathematics Research Center, 1-20.
- [20] Boor, C., (1990). *The Exact Condition of the B-Spline Basis May Be Hard to Determine*, Journal of Approximation Theory, 60, 344-359.
- [21] Boor, C.,(2003). *A divided difference expansion of a divided difference*, Journal of Approximation Theory, 122, 10-12.
- [22] Chang K., Zhang Q., (2019). *Improvement of the hourly global solar model and solar radiation for air-conditioning design in China*, Renewable Energy, 138, 1232-1238.
- [23] Cheney, W., Light, W., (2000). *A Course in Approximation Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [24] Chui, K.C., (1988). *Multivariate splines*, Texas A&M University.
- [25] Conti, C., Morandi, R., (2001). *The bidimensional interproximation problem and mixed splines*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 130, 116.
- [26] Curry, H.B., Schoenberg, I.J., (1966). *On Polya frequency functions IV: the fundamental spline functions and their limits*, Journal dAnalyse Mathmatique, 17, 71-107.
- [27] Demidovitch, B., Maron, I., (1973). *Éléments de calcul numerique*, traduit du Russe, Éditions Mir, Moscou.
- [28] De Vore, R.A., Lorentz, G.G. (1993) *Constructive Approximation*, Springer, Berlin, New York.
- [29] De Vore, R.A., (1972). *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin.
- [30] Ditzian, Z., Totik, V., (1987). *Moduli of Smoothness*, Springer, New York.
- [31] Duffie J.A., Beckman W.A., (2013). *Solar engineering of thermal processes*, 4th ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.
- [32] Engerer, N. A., Mills, F.P., (2015). *Validating Nine Clear Sky Radiation Models in Australia*, Solar Energy, 120, 9-24.

- [33] Faber, G., (1914). *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Deutsche Math. Jahr. 23, 192210.
- [34] Gavrea, I., (1996). *The approximation of the continuous functions by means of some linear positive operators*. Result. Math. 30 (1-2), 55-66.
- [35] Gavrea, I., (2001). *Aproximarea funcțiilor prin operatori liniari*, Ed. Mediamira, Cluj Napoca.
- [36] Gavrea, I., Gonska, H., Păltănea, R., Tachev, G., (2003). *General Estimates for the Ditzian-Totik Modulus*. East Journal of Approximations, 9: Number 2, 175-194.
- [37] Gonska, H., (1979). *Quantitative Aussagen zur Approximation durch positive lineare Operatoren*, Dissertation, Universität Duisburg.
- [38] Gonska, H., Pițul, P., Rașa, I. (2006). *On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators*, in: Numerical Analysis and Approximation Theory, Proceedings of the Int. Conf. 2006 in Cluj-Napoca, 55-80.
- [39] Gonska, H., (2007). *On the degree of approximation in Voronovskaja's Theorem*, Studia Univ. "Babeș-Bolyai", Mathematica, Volume LII, Number 3, 103-115.
- [40] Gonska, H., Pițul, P., Rașa, I. (2009). *General King-type operators*, Results in Math., 53 No.3-4: 279-286.
- [41] Gonska, H., Păltănea, R., (2010). *General Voronovskaja and Asymptotic Theorems in Simultaneous Approximation*, Birkhauser/Springer Basel AG, Mediterr. J. of Math., 7, 37-49.
- [42] Goodman, T.N.T, Lee, S.L., (1981). *Spline Approximation Operators of Bernstein-Schoenberg Type in One and Two Variables*, Journal of Approximation Theory, 33, 248-263.
- [43] Goodman, T.N.T, (1985). *Asymptotic Formulas for Multivariate Bernstein-Schoenberg Operators*, Constr. Approx., 11, 439-453.
- [44] Goodman, T.N.T, (1987). *Some Properties of Bivariate Bernstein-Schoenberg Operators*, Constr. Approx., 3, 123-130.
- [45] Greville, T.N.E., Schoenberg, I.J., Sharma, A., (1976). *The Spline Interpolation of Sequences Satisfying a Linear Recurrence Relation*, Journal of Approximation Theory 17, 200-221.
- [46] Groselj, J., Knez, M., (2018). *A B-spline basis for C^1 quadratic splines on triangulations with a 10-split*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 343, 413427.
- [47] Gupta, V., Tachev, G., (2017). *Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations*, Springer, Developments in Mathematics, vol. 50.
- [48] Hocaoglu F. O., Serttas F., (2017). *A novel hybrid (Mycielski-Markov) model for hourly solar radiation forecasting*, Renewable Energy, 108, 635-643.

- [49] Ineichen P., (1983). *Quatre Annees de Mesures Densoleiement a Geneve*, Ph.D. thesis, University of Geneva.
- [50] Ineichen P., Perez R., (2002). *A new airmass independent formulation for the Linke turbidity coefficient*, Solar Energy, 73 (3), 151-157.
- [51] Ineichen, P., (2006). *Comparison of eight clear sky broadband models against 16 independent data banks*, Solar Energy, 80, 468-478.
- [52] Ionescu, V.D., (1978). *Diferențe divizate*, Editura Academiei R. S. România, București.
- [53] Isvoranu, D., Badescu, V., (2013). *Comparison between majorements and WRF numerical simulation of global solar irradiation in Romania*, The Annals of the West University of Timisoara Physics Series, LVII 24-33.
- [54] Ivan, M., (1982). *Interpolation methods and their applications*, (in Romanian), Ph. D. Thesis, Babeș-Bolyai University, Cluj-Napoca.
- [55] Ivan, M., (2006). *On the Leibniz formula for divided differences*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 35 no. 1, 59-63.
- [56] Johnen, H., (1972). *Inequalities connected with moduli of smoothness*, Mat. Vesnik, 3, 389-303.
- [57] Kalogirou S., (2014). *Solar energy engineering processes and systems*, Elsevier, Amsterdam.
- [58] Kambezidis H.D., Psiloglou B.E., Karagianis D., Dumka U.C., Kaskaoutis D.G., (2016). *Recent improvements of the Meteorological Radiation Model for solar irradiance estimates under all-sky conditions*, Renewable Energy, 93, 142-158.
- [59] Kaplani E., Kaplanis S., Mondal S., (2018). *A spatiotemporal universal model for the prediction of the global solar radiation based on Fourier series and the site altitude*, Renewable Energy, 126, 933-942.
- [60] Karlin, S., Studden, W.J., (1966). *Tchebycheff Systems with Applications in Analysis and Statistics*, Interscience, New York.
- [61] Karlin, S., Micchelli, C.A., Rinott, Y., (1986). *Multivariate Splines: A Probabilistic Perspective*, Journal of Multivariate Analysis, 20, 69-90.
- [62] King, J. O. (2003). *Positive linear operators which preserve x^2* , Acta. Math. Hung, 99, 203-208.
- [63] Koo C., Li W., Cha S.H., Zhang S., (2019). *A novel estimation approach for the solar radiation potential with its complex spatial pattern via machine-learning techniques*, Renewable Energy, 133, 575-592.
- [64] Korovkin, P.P., (1953). *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 90, 961-964.
- [65] Korovkin, P.P., (1959). *Operatori liniari și teoria aproximării* (rusă), Fizmatgiz, Moscova.

- [66] Kreuzer, W., (2019). *Using B-spline frames to represent solutions of acoustics scattering problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 351, 331-343.
- [67] Lorentz, G.C., (1986). *Bernstein Polynomials*, Chelsea Publishing Company, New York.
- [68] Lupaș, A., (1972). *Die Folge der Betaoperatoren, Dissertation*, Universität Stuttgart.
- [69] Lupaș, A., (1976) *Contribuții la teoria aproximării prin operatori liniari*, teză de doctorat, Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca.
- [70] Mamedov, R.G., (1962). *On the asymptotic value of the approximation of repeatedly differentiable functions by linear positive operators* (Russian), Doklady SSSR, 146, 1013-1016.
- [71] Marsden, M.J., (1970). *An identity for spline functions with applications to variation diminishing spline approximation*, J. Approx. Theory, 3, 7-49. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90058-4.
- [72] Marsden, M.J., (1972). *On Uniform Spline Approximation*, University of Pittsburgh, Pennsylvania, J. Approx. Theory, 6, 249-253.
- [73] Marsden, M.J., (1974). *Cubic Spline Interpolation of Continuous Functions*, J. Approx. Theory, 10, 103-111.
- [74] Marsden, M.J., (1983). *Linear and Quadratic Spline Interpolation at Knot Averages*, J. Approx. Theory, 38, 201-208.
- [75] Meliss M., (1997). *Regenerative Energiequellen*, Springer, Berlin.
- [76] **Moldovan, C. L.**, Păltănea, R. (2019). *Second degree Schoenberg operators with knots at the roots of Chebyshev polynomials*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 113(3), 2793-2804. DOI: 10.1007/s13398-019-00644-1
- [77] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., (2020), *The Exact Form of the Second Moment of Third Degree Schoenberg Spline Operators*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Taylor-Francis Online, 41:11, 1308-1325, DOI: 10.1080/01630563.2020.1764031
- [78] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., (2020), *A Definition of Two-Dimensional Schoenberg Type Operators*, Symmetry 2020, 12(8), 1364–1376, <https://doi.org/10.3390/sym12081364>
- [79] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., Visa I., (2020). *Improvement of clear sky models for direct solar irradiance considering turbidity factor variable during the day*, Renewable Energy, 161, 559–569. doi.org/10.1016/j.renene.2020.07.086
- [80] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., Visa I., (2018). *Experimental assessment of the Meliss simulation model accuracy of the direct solar irradiance in Brasov, Romania*, The Annals of the West University of Timisoara - Physics Series Vol. 60, DOI: 10.2478/awutp-2018-0003

- [81] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., Visa I., (2018). *Comparison between measurements and Mellin simulations of the direct solar irradiance for a winter month in Brasov*, Annals of Dunarea de Jos University of Galati, Mathematics, Physics, Theoretical Mechanics, Fascicle II, Year X (XLI) No. 1, 94-103.
- [82] **Moldovan C. L.**, (2017). *A choice of the knots in Schoenberg spline operator with an improvement of the order of approximation*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Vol 10(59), No. 2, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 77-90.
- [83] Mond, B. (1976). *Note: On the degree of approximation by linear positive operators*, J. Approx. Theory, 18, 304-306. DOI: 10.1016/0021-9045(76)90022-8.
- [84] Păltănea, R. (1997). *Optimal constants in estimates with second order moduli*, Results Math., 32, 318-331. DOI: 10.1007/BF03322143.
- [85] Păltănea, R. (1995). *Best constants in estimates with second order moduli*, Approximation Theory, Proceedings of the International Dortmund Meeting, IDoMAT 95 held in Witten, Germany, 251-275.
- [86] Păltănea, R. (2002). *Estimates of approximation by linear operators in the multidimensional case*, Mathematical Analysis and Approximation Theory, Burg Verlag, 207-220.
- [87] Păltănea, R., (2004). *Approximation Theory Using Positive Linear Operators*, Birkhäuser, Boston.
- [88] Păltănea, R. (2004). *Approximation of Functions in Banach Spaces Using Positive Linear Operators*, Proceedings of RoGer Seminar 2004.
- [89] Păltănea, R., Păltănea, E., (2009). *Elemente de Analiză matematică și Teoria aproximării*, Editura Universității Transilvania din Brașov, Brașov.
- [90] Păvăloiu, I., Pop, N., (2005). *Interpolarea și aplicațiile ei*, Risoprint, Cluj Napoca.
- [91] Peetre, J., (1969). *On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory*, Proc. Conf. Const. Theory of Functions, Eds. G. Alexits and S.B. Stechkin, Akademiai Kiado, Budapest, 351-363.
- [92] Popa, D., Rașu, I., (2016). *Steklov Averages as Positive Linear Operators*, Filomat 30(5), 1195-1201, DOI 10.2298/FIL1605195P.
- [93] Popoviciu, E., (1972). *Teoreme de medie în analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, Cluj.
- [94] Popoviciu, T., (1933). *Première Thèse: Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Thèse numérisée dans le cadre du programme: Numérisation de documents anciens mathématiques, 1-85.
- [95] Popoviciu, T., (1945). *Les fonctions convexes*, Herman & Cie, Paris.
- [96] Popoviciu, T., (1950). *Asupra demonstrării teoremei lui Weierstrass utilizând polinoamele de interpolare* Lucrările Sesiunii Generale Științifice ale Academiei Române din 1950 No. 1-4, (1950), (tradusă în engleză de D. Kaszó, East J. Approx. 4, no. 1, (1998), 107-110.)

- [97] Powell, M.J.D., (1981). *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [98] Rice, I.R., (1969). *The Approximation of Functions: Nonlinear and multivariate theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Mass. US.
- [99] Rigollier, C., Bauer, O., Wald, L., (2000). *On the clear sky model of the ESRA - European Solar Radiation Atlas - with respect to Heliosat method*, Solar Energy 68, 3348.
- [100] Schoenberg, I.J., (1959). *On variation diminishing approximation methods*, On Numerical Approximation, MRC Symposium (R.E.Langer, ed.), Univ.of Wisconsin Press, Madison, 249-274.
- [101] Schoenberg, I.J., (1964). *On best approximations of linear operators*, I. J. Schoenberg Selected Papers, Proceedings, Series A, 67, No.2 and Indag. Math., 26, No.2, 155-163.
- [102] Schoenberg, I.J., (1964). *Spline interpolation and best quadrature formulae*, Bull. Amer. Math. Soc., Volume 70, Number 1, 143-148.
- [103] Schoenberg, I.J., (1966). *On Hermite-Birkhoff Interpolation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 16, 538-543.
- [104] Schoenberg, I.J., (1968). *On the Ahlberg-Nilson Extension of Spline Interpolation: The g -Splines and Their Optimal Properties*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 21, 207-231.
- [105] Schoenberg, I.J., (1969). *Cardinal Interpolation and Spline Functions*, J. Approx. Theory, 2, 167-206.
- [106] Schoenberg, I.J., (1970). *A Second Look at Approximate Quadrature Formulae and Spline Interpolation*, Advances in Mathematics, 4, 277-300.
- [107] Schoenberg, I.J., (1972). *Cardinal Interpolation and Spline Functions: II Interpolation of Data of Power Growth*, J. Approx. Theory, 6, 404-420.
- [108] Schoenberg, I.J., (1979). *On cardinal spline smoothing*, Approximation Theory and Functional Analysis, 383-407.
- [109] Schoenberg, I.J., (1982). *Two Applications of Approximate Differentiation Formulae: An Extremum Problem for Multiply Monotone Functions and the Differentiation of Asymptotic Expansions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 89, 251-261.
- [110] Schoenberg, I.J., (1983). *A New Approach to Euler Splines*, J. Approx. Theory, 39, 324-337.
- [111] Schumaker, L.L., (2007). *Spline functions: basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [112] Sendov, B., Popov, V., (1988). *The averaged moduli of smoothness*, John Wiley & Sons, New York.

- [113] Shashkin, Yu.A., (1967). *Frontiera Mil'man-Choquet și teoria aproximării*, Functional Anal. i Priložen., 1, no.2, 95-96.
- [114] Shisha, O., Mond, B., (1968). *The degree of convergence of linear positive operators*, IEEE, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 60, 1196-1200.
- [115] Sikkema, P.C., (1961). *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen*, Numerische Math. 3, 107-116.
- [116] Stancu, D.D., (1968). *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 13, no. 8, 1173-1194.
- [117] Stancu, D.D., Coman, G., Agratini, O., Trîmbițaș, R., Blaga, P., Chiorean, I., (2001-2002). *Analiză numerică și Teoria aproximării*, 3 volume, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.
- [118] Tachev, G.T. (2000). *Piecewise linear interpolation with nonequidistant knots*, Numer. Funct. Anal. and Optim, 21(7,8): 945-953. DOI: 10.1080/01630560008816996
- [119] Tachev, G. (2008). *A lower bound for the second moment of Schoenberg operator*, General Mathematics Vol. 16, No. 4, 165-170.
- [120] Tachev, G. (2012). *Voronovskaja's theorem for Schoenberg operator*, Math. Ineq. Appl. 15 No.1: 49-59.
- [121] Tachev, G., Zapryanova T., (2012). *Generalized Inverse Theorem for Schoenberg Operator*, Journal of Modern Mathematics Frontier, Vol.1, 11-16.
- [122] Tachev, G. (2012). *New estimates in Voronovskajas theorem*, Numer Algor, 59, 119-129.
- [123] Tachev, G., (2012) *The complete asymptotic expansion for Bernstein operators*, J. Math. Anal. Appl.385, 11791193
- [124] Teliakovsky, S.A., (1966). *Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials*, (Russian). Mat. Sb. (N.S.) 70(112) (2), 252-265.
- [125] Ugarte, M.D., Adin, A., Goicoa, T., (2017). *One-dimensional, two-dimensional, and three dimensional B-splines to specify space-time interactions in Bayesian disease mapping: Model fitting and model identifiability*, Spatial Statistics, 22, 451-468.
- [126] Visa, I., Diaconescu, D.V., Dinicu M.V., Burduhos, B.G., (2009). *Quantitative estimation of the solar radiation loss in Brasov area*, Environmental Engineering and Management Journal 8-4, 843-847.
- [127] Visa I., Duta A., Moldovan M., (2019). *Outdoor performance of a trapeze solar thermal collector for facades integration*, Renewable Energy, 137, 37-44.
- [128] Volkov, V.I., (1957). *Asupra convergenței șirurilor de operatori liniari și pozitivi în spațiul funcțiilor continue de două variabile* (rusă), Dokl. Akad. Nauk SSSR 115, 17-19.

- [129] Voronovskaja, E., (1932). *Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les pôlynomes de S. N. Bernstein*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. A, 79-85.
- [130] Voyant, C., Notton, G., Kalogirou, S.A., Nivet, M.L., Paoli, C., Motte, F., Fouilloy, A., (2017). *Machine learning methods for solar radiation forecasting: A review*, Renew. Energy 105, 569-582.

Short abstract (english / romanian)

Chapter 1 contains general notions from the theory of approximation, notions used in the Doctoral Thesis. Chapter 2 presents specific results about the Schoenberg operators, operators that form the essence of the research done in the Doctoral Thesis. Chapters 3, 4, 5 and 6 represent entirely the original contribution of the author of the Doctoral Thesis. In Chapter 3 the author presents the results established in the field of second degree Schoenberg operators, namely the improvement of the approximation order, using another way of choice of nodes for Schoenberg operators, equidistant nodes being usually used; Voronovskaja type theorems; the second moment of second degree Schoenberg operators with arbitrary nodes, respectively with nodes in the roots of Chebyshev polynomials. In Chapter 4 the author presents the exact form of the second moment of third degree Schoenberg operators on arbitrary knots, respectively equidistant knots, the applications in approximation, Schoenberg operators for which the space of second degree polynomials is invariable and Schoenberg–King type operators. In Chapter 5, a definition of two-dimensional Schoenberg type operators and their properties are presented. The definition was obtained by generalizing the one-dimensional Schoenberg operators' formula. The second moment of two-dimensional Schoenberg type operators on arbitrary knots, and on equidistant knots, respectively, alongside a Voronovskaja type theorem and estimates with moduli of continuity are given. Applications of Schoenberg spline operators in practice are presented in Chapter 6, where a general method to improve the accuracy of clear sky models through replacement the constant turbidity factor with an interpolation polynomial which depends of solar time, for estimating the direct solar irradiance is presented. Data measured between 2013 and 2016 in *Renewable Energy Systems and Recycling* Research Center of R&D Institute of Transilvania University of Brasov were analyzed and used to improve the clear sky model Meliss. The improved model was validated based on the data measured in 2017. Daily spline functions were built corresponding for each clear sky day from 2013 to 2017. The analytical expressions of these spline functions were created using the Schoenberg operators.

Capitolul 1 conține noțiuni cu caracter general din teoria aproximării, noțiuni folosite în teza de doctorat. Capitolul 2 prezintă rezultate specifice despre operatorii Schoenberg, operatori care formează esența cercetărilor efectuate în teza de doctorat. Capitolele 3, 4, 5 și 6 reprezintă în întregime contribuția originală a autorului tezei de doctorat. În Capitolul 3 autorul prezintă rezultatele stabilite în domeniul operatorilor Schoenberg de gradul doi, și anume îmbunătățirea ordinului de aproximare, folosind un alt mod de alegere a nodurilor pentru operatorii Schoenberg, uzual fiind folosite nodurile echidistante; teoreme de tip Voronovskaja; momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi cu noduri arbitrare, respectiv cu noduri în rădăcinile polinoamelor Cebîshev. În Capitolul 4 autorul prezintă forma exactă a momentului de ordinul doi al operatorilor spline Schoenberg de gradul trei pe noduri arbitrare, respectiv echidistante, aplicații în aproximare, operatorii Schoenberg pentru care spațiul polinoamelor de gradul doi este invariabil și operatori de tip Schoenberg–King. În Capitolul 5 este prezentată o definiție a operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg construiți considerând noduri arbitrare, respectiv echidistante. Sunt studiate momentul de ordinul doi ai operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg, teorema de tip Voronovskaja și evaluări folosind moduli de continuitate. Aplicații ale operatorilor spline Schoenberg în practică compun conținutul Capitolului 6, unde este prezentată o metodă generală de îmbunătățire a acurateții modelelor de cer senin prin înlocuirea factorului de turbiditate constant cu un polinom de interpolare care depinde de timpul solar, pentru estimarea intensității radiației solare. Au fost analizate și utilizate pentru îmbunătățirea modelului Meliss, date măsurate în perioada 2013-2016, în cadrul Centrului de Cercetare *Sisteme de Energie Regenerabile și Reciclare* din Institutul de Cercetare Dezvoltare al Universității Transilvania din Brașov. Modelul îmbunătățit a fost validat pe baza datelor măsurate în 2017. Au fost construite funcțiile spline zilnice corespunzătoare fiecărei zi senină din perioada 2013-2017. Expresiile analitice ale acestor funcții spline au fost create folosind operatorii Schoenberg.

Transilvania University of Brasov

Interdisciplinary Doctoral School

Faculty of Mathematics and Computer Science

Camelia Liliana ONIGA (Moldovan)

ABSTRACT

Scientific Supervisor

Prof. Dr. Radu PĂLTĂNEA

BRAȘOV, 2020

Camelia Liliana ONIGA (Moldovan)

ABSTRACT

THE STUDY OF SOME FUNCTIONS APPROXIMATION PROCEDURES

Doctoral Area: MATHEMATICS

Thesis Analysis Commission:

President Prof. Dr. DORINA RĂDUCANU
Dean Faculty of Mathematics and Computer Science
Transilvania University of Braşov, Romania

Scientific Prof. Dr. RADU PĂLTĂNEA
Supervisor *Transilvania* University of Braşov, Romania

Official Prof. Dr. dr. h.c. (RO) HEINER GONSKA
Reviewer University of Duisburg–Essen, Germany

Official Prof. Dr. GANCHO TACHEV
Reviewer University of Architecture, Civil Engineering and
Geodesy, Sofia, Bulgaria

Official Prof. Dr. DORIAN POPA
Reviewer Technical University of Cluj-Napoca, Romania

Contents

1	Introduction	3
1.1	Fundamental notions	3
1.1.1	Notations	3
1.1.2	Divided differences	3
1.1.3	Interpolating sets. Chebyshev system	4
1.1.4	Lagrange Interpolation	5
1.2	Convergence theorems	6
1.2.1	Weierstrass's Theorems. Approximation by sequences of projectors	6
1.2.2	Positive linear operators	8
1.2.3	Moduli of continuity	9
2	Spline functions. Schoenberg operators	11
2.1	Polynomial spline functions. B-splines	11
2.1.1	The general case of the splines functions on multiple knots . . .	11
2.1.2	Spline functions on simple knots	12
2.2	Schoenberg operators	14
3	Improving the approximation order	15
3.1	Second degree Schoenberg operators on particularly chosen knots . . .	15
3.1.1	The second moment of second degree Schoenberg operators on particularly chosen knots	16
3.1.2	Comparing the order of approximation with the equidistant case	18
3.2	The second moment of second degree Schoenberg operators on arbitrary knots	20
3.2.1	A first method which use an auxiliary extended knot sequence .	20
3.2.2	A second method with the direct calculation	21
3.3	The second moment of second degree Schoenberg operators on knots in the roots of Chebyshev polynomials	21
3.3.1	The method which use an auxiliary extended knot sequence . .	22
3.3.2	The direct calculation method	22
3.3.3	Basic results	23
4	The second moment of third degree Schoenberg operators and applications	25
4.1	The case of arbitrary knots	25
4.1.1	The method with an auxiliary extended knot sequence	25
4.1.2	The method based on direct calculation	27
4.2	The case of equidistant knots	30
4.3	Applications in approximation	31
4.4	Schoenberg operators for which the space of polynomials of degree two is invariant	32
4.5	Schoenberg-King type operators	32

5	A definition of two–dimensional Schoenberg type operators	33
5.1	Two–dimensional Schoenberg type operators on arbitrary knots	33
5.2	Two–dimensional Schoenberg type operators on equidistant knots . . .	36
6	Applications of Schoenberg spline operators in practice	39
6.1	Evaluation of the errors between the experimental values of the direct solar irradiance and the values calculated with the Meliss model	39
6.2	The use of third degree Schoenberg spline operators in the purpose improve the accuracy of the Meliss model	41
	Conclusions	50
	References	51

Preface

The Approximation Theory is an important part of Mathematical Analysis, being of interest in the actual mathematics. The approximation of real functions has been a concern for mathematicians such as Chebyshev, Weierstrass, Bernstein, Lorentz, De Vore. This can be seen in the many papers written on this topic, among which, we mention some: Bernstein [10], Lorentz [67], De Vore [29].

In 1950 Tiberiu Popoviciu, in 1952 Harald Bohman and in 1953 Pavel Petrovich Korovkin, laid the bases of the approximation theory by positive linear operators. There is an ample bibliography focused on the study of specific operators, such as: Kantorovich operators, Bernstein operators, Schoenberg operators, Baskakov operators, Mirakjan–Favard–Szász operators, Stancu operators, Lupaş operators, Meyer–Konig–Zeller operators, Bleimann–Butzer–Hahn operators, Gauss–Weierstrass operators, Post–Widder operators, Landau operators, Picard operators.

Numerous scientific results are related to the approximation by classes of positive linear operators. For example, using moduli of continuity, evaluations of the order of approximation can be made, and here we also mention Shisha, Mond, Ditzian, Totik, and more recently Gonska, Păltănea, Tachev.

With concerns in the category of Schoenberg operators and spline functions we mention Schoenberg [100], [102], [107], Boor [18], [20], Marsden [73], [74], Goodman [42], [43], Greville [45]. Schoenberg spline operators are currently studied, the recent results obtained by Gonska [11], [12], [13], Păltănea [76], [77], Tachev [119], [120], [121] proving that it is an area of interest and a topical issue.

Chapter 1 contains general notions from the theory of approximation, notions used in the Doctoral Thesis. Chapter 2 presents specific results about the Schoenberg operators, operators that form the essence of the research done in the Doctoral Thesis.

Chapters 3, 4, 5 and 6 represent entirely the original contribution of the author of the Doctoral Thesis and results contained in these chapters were published in the journals: "Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A. Matemáticas", [76], "Numerical Functional Analysis and Optimization", [77], "Symmetry", [78], "Bulletin of the Transilvania University of Brasov" [82], "Renewable Energy", [79], "The Annals of the West University of Timisoara–Physics" [80], "Annals of Dunărea de Jos University of Galati, Mathematics, Physics, Theoretical Mechanics" [81].

In Chapter 3 the author presents results established for the second degree Schoenberg operators in the general case of the choice of the knots as well for particular choices of the knots. Beside the case of equidistant knots, which is the most common choice of the knots other improved choices of the knots are studied including the knots given by the roots of Chebyshev polynomials. The order of approximation is estimated

using moduli of continuity. The results presented in this Chapter have been partially published in [76] and [82].

In Chapter 4 the author obtain the exact form of the second moments for the third degree Schoenberg operators, with application in obtaining quantitative estimates and in construction of operators which preserve the space of polynomials of degree two and in construction of Schoenberg-King type operators. The results from Chapter 4 have been partially published in [77].

In Chapter 5, a definition of two-dimensional Schoenberg type operators and their properties are presented. The definition was obtained by generalizing the one-dimensional Schoenberg operators' formula. The second moment of two-dimensional Schoenberg type operators on arbitrary knots, and on equidistant knots, respectively, alongside a Voronovskaja type theorem, are given. Also, this chapter contains estimates with moduli of continuity. These results have been partially published in [78].

Applications of Schoenberg spline operators in practice are presented in Chapter 6, where a general method to improve the accuracy of clear sky models through replacement the constant turbidity factor with an interpolation polynomial which depends of solar time, for estimating the direct solar irradiance is presented. Data measured between 2013 and 2017 in *Renewable Energy Systems and Recycling* Research Center of R&D Institute of Transilvania University of Brasov were analyzed and used to improve the clear sky model Meliss. The results presented in Chapter 6 have been published in [79], [80], [81].

I would like to express my gratitude to Professor Dr. Radu Păltănea for the constant guidance, for the patience and for the support given throughout during my activity as a Ph.D. student.

1 Introduction

1.1 Fundamental notions

1.1.1 Notations

From the usual notations are specified here some of those that appear in the thesis, such as: the set of natural numbers $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; the set of real numbers that we denote by \mathbb{R} ; the space $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ times}}$, where $n \in \mathbb{N}$.

Π_n represents the space of real polynomials with a variable with degree at most n , and Π_n^m is the space of real polynomials in m variables with the total degree less than or equal to n , where $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. We denote with $[a]$ the integer part of the real number a .

Let \mathcal{A} a Banach space and $J \subset \mathcal{A}$. We note with $\mathcal{F}(J)$ the space of all real functions defined on J , with $B(J)$ the space of bounded functions, and with $C(J)$ the space of continuous functions on J , with the norm

$$\|f\| := \sup_{\chi \in J} |f(\chi)|. \tag{1.1.1}$$

We note with e_i the monomial functions $e_i(\chi) = \chi^i$ where $\chi \in \mathbb{R}$ and $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. The notation $(\cdot - \chi)_+$ is used for

$$(h - \chi)_+ = \begin{cases} h - \chi, & h - \chi > 0 \\ 0, & h - \chi \leq 0 \end{cases}.$$

1.1.2 Divided differences

A. Divided differences on simple knots

Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ and a system of distinct points (knots) from the interval $[a, b]$

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}, \text{ where } \chi_i \neq \chi_j \text{ for } i \neq j. \tag{1.1.2}$$

Definition 1.1.1. The *divided difference* of the function f on the knots (1.1.2) noted with $[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f$ is defined by

$$[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\chi_i)}{\prod_{j=1, n+1, j \neq i} (\chi_i - \chi_j)}. \tag{1.1.3}$$

The recurrence formula of divided differences on simple knots is

$$[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f = \frac{[\chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f - [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n]f}{\chi_{n+1} - \chi_1}, \tag{1.1.4}$$

where $[\chi_i]f = f(\chi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$ [90].

B. Divided differences on multiple knots

Let the interpolation knots (1.1.2), to each knot χ_i we attach a natural number a_i called his multiplicity order χ_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, derivable a sufficient number of times on $[a, b]$.

Definition 1.1.2. [90] *The divided difference by order 1 on the double knot χ_i is*

$$[\chi_i, \chi_i]f = \lim_{\chi \rightarrow \chi_i} \frac{f(\chi) - f(\chi_i)}{\chi - \chi_i} = f'(\chi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (1.1.5)$$

In general,

$$\begin{aligned} & \underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1 \text{ times}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ times}} \dots \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1} \text{ times}} f = \lim_{\chi_i^{(j)} \rightarrow \chi_i} \left[\chi_1, \chi_1^{(1)}, \dots, \right. \\ & \left. \chi_1^{(a_1-1)}, \dots, \chi_i, \chi_i^{(1)}, \dots, \chi_i^{(a_i-1)}, \dots, \chi_{n+1}, \chi_{n+1}^{(1)}, \dots, \chi_{n+1}^{(a_{n+1}-1)} \right] f \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

where $\chi_i^{(j)} \neq \chi_k^{(l)}$ for $i \neq k; l \neq j$ [90].

If f is derivable of k -times in χ , the next equality takes place

$$\underbrace{[\chi_i, \chi_i, \dots, \chi_i]}_{k+1 \text{ times}} f = \frac{f^{(k)}(\chi_i)}{k!}. \quad (1.1.7)$$

The recurrence formula of the divided differences on multiple knots

$$\begin{aligned} & \underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1 \text{ times}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ times}} \dots \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1} \text{ times}} f \\ &= \frac{1}{\chi_{n+1} - \chi_1} \left[\underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1-1 \text{ times}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ times}} \dots \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1} \text{ times}} f \right. \\ & \left. - \underbrace{[\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_1]}_{a_1 \text{ times}} \underbrace{[\chi_2, \chi_2, \dots, \chi_2]}_{a_2 \text{ times}} \dots \underbrace{[\chi_{n+1}, \chi_{n+1}, \dots, \chi_{n+1}]}_{a_{n+1}-1 \text{ times}} f \right] \quad [90]. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Definition 1.1.3. [95] (*Tiberiu Popoviciu*)

Let E a set which has at least $k + 2$ distinct points. The **function** $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ is called **convex of order** $k \geq -1$, if $[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k+2}]f \geq 0$ for any distinct points $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k+2}$ from E .

From this definition it follows that a function is convex of order -1 , if it is positive, it is convex of order 0 if it is monotone, and it is convex of order 1, if it is ordinary convex.

1.1.3 Interpolating sets. Chebyshev system

We consider a points system $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ from the interval $[a, b]$ called *interpolation knots*, and a some real value system $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. The problem of interpolation consists in finding from a given set $F \subset \mathcal{F}([a, b])$ a function $\varphi \in F$ for which

$$\varphi(\chi_i) = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.1.9)$$

Definition 1.1.4. [93] A set $F \subset \mathcal{F}([a, b])$ is called **interpolating set** of order n , on the interval $[a, b]$, if for any system of distinct points $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n \in [a, b]$ and any real numbers $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ there is a unique function $\varphi \in F$ so that the system of equations (1.1.9) takes place.

In the particular case where interpolating set F is a linear subspace of size n from $C([a, b])$, then F is called the **Haar subspace** of size n . Moreover, any algebraic basis of F consisting of n functions $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ is called the **Chebyshev system** of order n on the interval $[a, b]$ [93].

If $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ forms a Chebyshev system, then any linear combination of them is called a **polynomial** as in the case of the most important example of the Chebyshev system which is the algebraic system consisting of the functions $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n$. These generalized polynomials retain a part of properties of algebraic polynomials.

Definition 1.1.5. [60] Let a normed space $(X, \|\cdot\|)$ and Y a subspace of X . The number

$$E(\chi, Y) = \inf_{y \in Y} \|\chi - y\|,$$

is the **best approximation of χ with elements from Y** . If $y \in Y$ satisfies the property $\|\chi - y\| = E(\chi, Y)$ then y is element of the best approximation of χ through elements from Y .

Theorem 1.1.1. [60] Let the $n + 1$ order subspace Haar T on $[a, b]$, where $n \geq 0$. Let $f \in C([a, b])$ and $\varphi \in T$. The following conditions are equivalent:

i) the function φ is an element of the best approximation of f , with elements from T ,
 ii) there are the points $a \leq \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n+1} \leq b$ and a sign $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ such that $\varphi(\chi_i) - f(\chi_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - \varphi\|$, $0 \leq i \leq n + 1$.

Definition 1.1.6. The points system $a \leq \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n+1}$ is called **alternation**.

1.1.4 Lagrange Interpolation

Definition 1.1.7. [90] Let $f \in \mathcal{F}([a, b])$. The algebraic polynomial P_n , with maximum degree n , which on the knots $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$ takes the values $P_n(\chi_i) = f(\chi_i)$, with $1 \leq i \leq n + 1$ is called the **Lagrange interpolation polynomial** attached to the function f on knots $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$.

Theorem 1.1.2. [90] For $f_1, f_2 \in \mathcal{F}([a, b])$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ we have

$$\begin{aligned} &L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}](\alpha f_1 + \beta f_2)(\chi) \\ &= \alpha L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f_1(\chi) + \beta L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f_2(\chi). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Theorem 1.1.3. [90] If f is a polynomial of maximum degree n , we have:

$$L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) = f(\chi), \forall \chi \in \mathbb{R}. \quad (1.1.11)$$

Definition 1.1.8. [90] Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. The **divided difference by order n** of the function f , on the knots (1.1.2) it is the coefficient of χ^n from the Lagrange interpolation polynomial of the function f on the specified knots.

The Lagrange polynomial can be written in the form

$$L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(\chi)f(\chi_i), \quad (1.1.12)$$

where $l_i(\chi)$ are n degree polynomials which verify the conditions $P(\chi_i) = f(\chi_i)$, $1 \leq i \leq n+1$, therefore

$$l_i(\chi) = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (\chi - \chi_j)}{(\chi - \chi_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (\chi_i - \chi_j)}, \quad 1 \leq i \leq n+1 \quad [90]. \quad (1.1.13)$$

Theorem 1.1.4. [90] *If $f \in \mathcal{F}([a, b])$ and $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$ are distinct points from the interval $[a, b]$, then*

$$\begin{aligned} & L[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) \\ = & \frac{(\chi - \chi_1)L[\chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) - (\chi - \chi_{n+1})L[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n]f(\chi)}{\chi_{n+1} - \chi_1}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Theorem 1.1.5. [90] *For any $f \in \mathcal{F}([a, b])$ and any system of distinct points*

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}$$

from $[a, b]$ and any $\chi \in [a, b]$ the next equality takes place

$$\begin{aligned} & f(\chi) - L[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi) \\ = & [\chi, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+1}]f(\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)\dots(\chi - \chi_{n+1}). \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Theorem 1.1.6. [97] *For any set of distinct interpolation points $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_n$ from $[a, b]$ and for any $f \in C^{n+1}([a, b])$, and for any $\chi \in [a, b]$, the error (1.1.17) has the value:*

$$e(\chi) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (\chi - \chi_j) f^{(n+1)}(\xi), \quad (1.1.16)$$

where

$$e(\chi) = f(\chi) - P(\chi), \quad a \leq \chi \leq b, \quad (1.1.17)$$

and ξ is a point from $[a, b]$ which depends by χ .

1.2 Convergence theorems

1.2.1 Weierstrass's Theorems. Approximation by sequences of projectors

We will say that a function f is *uniformly approximable* through elements from a space $Y \subset C([a, b])$ if there is a sequence of functions from Y that converges uniformly to f .

Theorem 1.2.1. (Weierstrass)

Any function $f \in C([a, b])$ is uniformly approximable with algebraic polynomials.

Theorem 1.2.2. (Weierstrass)

Let $C_{2\pi}$ the function space 2π continuous periodicals $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Any function $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ is uniformly approximable with trigonometric polynomials.

Proposition 1.2.1. [87] Let a sequence of linear and bounded operators $(L_n)_n$, $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$. If the next conditions are fulfill

i) there is a subspace $B \subset C([a, b])$, dense in $C([a, b])$, such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = 0, \forall f \in B,$$

ii) there is $M > 0$ such that $\|L_n\| \leq M, n \in \mathbb{N}$, where

$$\|L_n\| := \sup_{f \in C([a, b]), \|f\| \leq 1} \|L_n(f)\|,$$

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = 0, \forall f \in C([a, b]). \quad (1.2.1)$$

Theorem 1.2.3. [87] Let the sequence of linearly bounded operators $(L_n)_n$, $L_n : X \rightarrow Y$, where X is a Banach space, and Y is a normed space. If

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n(\chi)\| < \infty, \forall \chi \in X,$$

then

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\| < \infty.$$

Corollary 1.2.1. Let the sequence of operators $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ which uniformly approximates the functions from a dense space $B \subset C([a, b])$, from $C([a, b])$. Then the fact that the sequence $(L_n)_n$ has uniformly bounded norms is equivalent to the fact that the sequence $(L_n)_n$ uniformly approximates all the functions from $C([a, b])$.

Definition 1.2.1. [89] Let X a vector space and Y a linear subspace of it. A linear operator $U : X \rightarrow Y$ is the projector on subspace Y if $U(y)=y, \forall y \in Y$.

Theorem 1.2.4. [97] (Lonzinski-Harshiladze)

For any sequence of projectors $(U_n)_n$, $U_n : C([a, b]) \rightarrow \Pi_n$ there is a constant $C > 0$ such that

$$\|U_n\| \geq C \ln n, \quad (1.2.2)$$

Consequently, exists a function $f \in C([a, b])$ such that $U_n f$ does not converge uniformly to f on the interval $[a, b]$.

Theorem 1.2.5. [33] (Faber)

Either one it would be an infinite triangular matrix of knots $(\chi_j^n)_{1 \leq j \leq n}$, where either one n we have $a \leq \chi_1^n < \chi_2^n < \dots < \chi_n^n \leq b$, for the sequence of operators $(U_n)_n$, with $U_n = L[\chi_1^n, \chi_2^n, \dots, \chi_n^n]$, $n \geq 1$ there is a function $f \in C([a, b])$, for which $U_n f$ does not converge uniformly on $[a, b]$ to f .

1.2.2 Positive linear operators

Definition 1.2.2. [5] Let A and B two vector spaces of functions with real values on an interval J . An application $L : A \rightarrow B$, which is additive and homogeneous, is called **linear operator**, meaning

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), \quad \forall f, g \in A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.2.3)$$

Definition 1.2.3. [5] Operator L is **positive** if for $\forall f \in A$ with $f \geq 0$ we have $L(f) \geq 0$.

Let (A, d) a compact metric space.

Definition 1.2.4. [5] An application $F : C(A) \rightarrow \mathbb{R}$ is called the **positive linear functional** on the space $C(A)$ if:

- i) $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g), \forall f, g \in C(A)$ and $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- ii) $F(f) \geq 0, \forall f \in C(A), f \geq 0$.

Proposition 1.2.2. [87] Let A a linear subspace of $\mathcal{F}(J)$ and $F_\chi : A \rightarrow \mathbb{R}$ a linearly positive functional. We have

$$F(f) \leq F(g), \quad f, g \in A, \quad f \leq g, \quad (1.2.4)$$

$$|F(f)| \leq F(|f|), \quad f \in A, \quad |f| \in A. \quad (1.2.5)$$

Proposition 1.2.3. [87] Let a linear positive functional $F : C(J) \rightarrow \mathbb{R}$, J interval. Let $\chi \in J$ fixed. We assume that one of the following conditions it is holds:

- $F(e_j) = e_j(\chi), j = 0, 1, 2$ or
 - $F(e_j) = e_j(\chi), j = 0, 1$ and χ is the left end or the right end of the interval J .
- Then

$$F(f) = f(\chi), \quad \forall f \in C(J).$$

Definition 1.2.5. [87] The **moments of linearly positive functional** $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, where A is a linear subspace of $\mathcal{F}(J)$ and $\chi \in J$ are the numbers $F((e_1 - \chi e_0)^j), j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ which are well defined if $\Pi_j \subset A$.

Theorem 1.2.6. [96] (Popoviciu)

Let the next form of linear and positive operators

$$L_n(f, \chi) = \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_{n,i}) \Psi_{n,i}(\chi), \quad f \in C[a, b], \quad \chi \in [a, b], \quad (1.2.6)$$

where $\xi_{n,i} \in [a, b]$ and $\Psi_{n,i}$ are positive polynomials.
Let suppose

$$L_n(e_0) = e_0, \quad (1.2.7)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = 0, \quad \text{uniformly with regard to } \chi \in [a, b]. \quad (1.2.8)$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f, \quad \text{uniformly on } [a, b], \quad \text{for any } f \in C([a, b]). \quad (1.2.9)$$

Theorem 1.2.7. [16] (Bohman)

Let the positive linear operators $(L_n)_n$, $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, with the form

$$L_n(f, \chi) = \sum_{i \in I_n} f(\xi_{n,i}) \Psi_{n,i}(\chi), \quad f \in C([a, b]), \quad \chi \in [a, b], \quad (1.2.10)$$

where I is a set at most countable, $\xi_{n,i} \in [a, b]$, and $\Psi_{n,i}$ are positive analytic functions. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(e_j) = e_j, \quad \text{uniform for } j = 0, 1, 2, \quad (1.2.11)$$

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f, \quad \text{uniform for any } f \in C([a, b]). \quad (1.2.12)$$

Theorem 1.2.8. [64], [65] (Korovkin)

Let the sequence of positive linear operators (L_n) , $L_n : V \rightarrow \mathcal{F}([a, b])$, where $V \subset \mathcal{F}([a, b])$ is a linear subspace which containing the functions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b])$, functions that form a Chebyshev system on the interval $[a, b]$. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varphi_j) = \varphi_j \quad \text{uniformly on } [a, b], \quad \text{with } j = 0, 1, 2, \quad (1.2.13)$$

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f \quad \text{uniformly on } [a, b], \quad \text{for all } f \in C([a, b]) \cap V. \quad (1.2.14)$$

Remark 1.2.1. For the test functions e_0, e_1, e_2 the Bohman's theorem is obtained.

Theorem 1.2.9. [41] (Voronovskaja)

If $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ is a positive linear operator such that $L_n(e_j) = e_j$, $j \in \{0, 1\}$, then, for $f \in C^2[a, b]$ and $\chi \in [a, b]$

$$L_n(f, \chi) - f(\chi) = \frac{1}{2} (L_n(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) f''(\chi) + o\left((L_n(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)\right), \quad (1.2.15)$$

uniformly in relation with $\chi \in [a, b]$.

1.2.3 Moduli of continuity

Definition 1.2.6. [87] (Păltănea)

Let $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(J)$ a linear subspace such that $\Pi_k \subset \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N}$. A function $\Omega_k : \mathcal{H} \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$ is the **modulus of continuity of order k on \mathcal{H}** if the following conditions are fulfilled:

$$\Omega_k(f, h_1) \leq \Omega_k(f, h_2), \quad f \in \mathcal{H}, \quad 0 < h_1 < h_2 \quad (1.2.16)$$

$$\Omega_k(f + p, h) = \Omega_k(f, h), \quad f \in \mathcal{H}, \quad p \in \Pi_{k-1}, \quad h > 0 \quad (1.2.17)$$

$$\Omega_k(0, h) = 0, \quad h > 0. \quad (1.2.18)$$

We define the following moduli of continuity:

- the usual first order modulus

$$\omega_1(\psi, \lambda) = \sup\{|\psi(u) - \psi(v)|, u, v \in [0, 1], |u - v| \leq \lambda\}, \quad (1.2.19)$$

- the usual second order modulus

$$\omega_2(\psi, \lambda) = \sup\{|\psi(u - \rho) - 2\psi(u) + \psi(u + \rho)|, u \pm \rho \in [0, 1], |\rho| \leq \lambda\}, \quad (1.2.20)$$

- the second order modulus Ditzian-Totik

$$\omega_2^\varphi(\psi, \lambda) = \sup\{|\psi(u - \rho) - 2\psi(u) + \psi(u + \rho)|, u \pm \rho \in [0, 1], |\rho| \leq \lambda\varphi(u)\}, \quad (1.2.21)$$

where $\psi \in C([0, 1])$, $\lambda > 0$ and $\varphi(t) = \sqrt{t(1-t)}$ [87].

The main properties of moduli of continuity of order $k = 1, 2$ are presented below

$$1) \quad \omega_k(f, 0) = 0, \quad (1.2.22)$$

$$2) \quad \omega_k(f, \cdot) \text{ is a positive function and continues on } \mathbb{R}_+, \quad (1.2.23)$$

$$3) \quad \omega_k(f, h_1 + h_2) \leq \omega_k(f, h_1) + \omega_k(f, h_2), \quad h_1, h_2 \geq 0, \quad (1.2.24)$$

$$4) \quad \omega_{k+1}(f, h) \leq 2\omega_k(f, h), \quad \forall h \geq 0, \quad (1.2.25)$$

$$5) \quad \omega_{k+1}(f, h) \leq h\omega_k(f', h), \quad h \geq 0, f \in C^1([0, 1]), \quad (1.2.26)$$

$$6) \quad \omega_k(f, nh) \leq n^k\omega_k(f, h), \quad \forall h > 0 \text{ and } n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.27)$$

Theorem 1.2.10. [114] (Shisha, Mond)

Let the linear and positive operator $L : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, $f \in C([a, b])$. For $h > 0$ and $\forall \chi \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |f(\chi)||L(e_0, \chi) - 1| + \left(L(e_0, \chi)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{h}\sqrt{L(e_0, \chi)(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}\right)\omega_1(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Theorem 1.2.11. [83] (Mond)

Let the linear and positive operator $L : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ and $f \in C([a, b])$. For $h > 0$ and $\chi \in [a, b]$ we have:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |f(\chi)||L(e_0, \chi) - 1| + \left(L(e_0, \chi)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{h^2}(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)\right)\omega_1(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

The following two theorems are found in the works [84], [85] and [87].

Theorem 1.2.12. [87] (Păltănea)

We consider a real interval I and $L : V \rightarrow \mathcal{F}(I)$ a linear and positive operator on the subspace $V \subset C(I)$, such that $\Pi_2 \subset V$, then for $\forall f \in V, \chi \in I$ and $0 < h < \frac{1}{2}\text{length}(I)$ we have:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |f(\chi)||L(e_0, \chi) - 1| + h^{-1}|(L(e_1 - \chi e_0))(\chi)|\omega_1(f, h) \\ &\quad + \left(L(e_0, \chi) + \frac{1}{2h^2}(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)\right)\omega_2(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Theorem 1.2.13. [87] (Păltănea)

Let the linear positive operator $L : F([0, 1]) \rightarrow F([0, 1])$. For $\chi \in (0, 1)$, $h \in (0, \frac{1}{2}]$ and $\forall f \in B([0, 1])$ we have:

$$\begin{aligned} |L(f, \chi) - f(\chi)| &\leq |L(e_0, \chi) - 1| \cdot \|f\| + h^{-1} \frac{|(L(e_1 - \chi e_0))(\chi)|}{2\varphi(\chi)} \omega_1^\varphi(f, 2h) \\ &+ \left[L(e_0, \chi) + \frac{3}{2} \frac{|(L(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)|}{(h\varphi(\chi))^2} \right] \omega_2^\varphi(f, h). \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

A first variant of this theorem was established in the paper [36].

Definition 1.2.7. [91] Let $(X, \|\cdot\|)$ a normed space and $Y \subset X$ a subspace endowed with semi-norm $|\cdot|_Y$. Let be $f \in X$ and $t > 0$. It is called **K-functional**

$$K(f, t, X, Y) = \inf \{ \|f - g\| + t|g|_Y, g \in Y \}. \quad (1.2.32)$$

For example, for $X = C([a, b])$, $\|f\| = \max_{\chi \in [a, b]} |f(\chi)|$ Chebyshev norm, $Y = C^r([a, b])$, $|g|_{C^r([a, b])} = \|g^{(r)}\|$ [91].

$$K_r(f, t, C([a, b]), C^r([a, b])) = \inf \{ \|f - g\| + t^r \|g^{(r)}\|, g \in C^r([a, b]) \}. \quad (1.2.33)$$

Theorem 1.2.14. [56] (Johnen)

Let $[a, b]$ an interval. There are $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ such that

$$c_1 \cdot \omega_2(f, h) \leq K_2(f, h, C([a, b]), C^2([a, b])) \leq c_2 \cdot \omega_2(f, h), \quad (1.2.34)$$

$\forall f \in C([a, b])$ and $\forall h > 0$.

2 Spline functions. Schoenberg operators

2.1 Polynomial spline functions. B-splines

2.1.1 The general case of the splines functions on multiple knots

Let the interval $[a, b]$ and a knot sequence $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ with

$$a = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = b. \quad (2.1.1)$$

Let k be a positive integer and $\mathcal{M} = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ be a vector consisting of integers with the property $1 \leq k_i \leq k + 1$, with $i = 1, 2, \dots, n - 1$, vector called *multiplicity vector* [111].

Definition 2.1.1. [111] *The space of polynomial spline functions of order k on the knots χ_1, \dots, χ_k , with the order of multiplicity k_1, k_2, \dots, k_{n-1} it is*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n) : &= \{s \in \mathcal{F}([a, b]) \mid \exists s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \in \Pi_k \text{ such that } s(\chi) = \\ &s_i(\chi) \text{ with } \chi \in I_i, i = 0, 1, \dots, n - 1; D^j s_{i-1}(\chi_i) = D^j s_i(\chi_i) \\ &\text{for } j = 0, 1, \dots, k - k_i, i = 1, \dots, n - 1\}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Theorem 2.1.1. [111] *Let*

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} k_i. \quad (2.1.3)$$

Then $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$ is a linear space of dimension $k + H$.

Construction of a local base

Definition 2.1.2. [111] Let $a < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < b$ and $1 \leq k_i \leq k + 1$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ given. Let suppose that

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{2(k+1)+H} \quad (2.1.4)$$

such that

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{k+1} \leq a, \quad b \leq y_{k+H+2} \leq \dots \leq y_{2(k+1)+H} \quad (2.1.5)$$

and

$$y_{k+2} \leq \dots \leq y_{k+H+1} = \overbrace{\chi_1, \dots, \chi_1}^{k_1}, \dots, \overbrace{\chi_{n-1}, \dots, \chi_{n-1}}^{k_{n-1}}. \quad (2.1.6)$$

Then, we will name $\{y_i\}_1^{2(k+1)+H}$ **extended knot sequence** associated with the space $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$.

Theorem 2.1.2. [111] Let $\{y_i\}_1^{2(k+1)+H}$ an extended knot sequence associated with the space $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$ and let suppose that $b < y_{2(k+1)+H}$. For $i = 1, 2, \dots, k + H + 1$ let

$$N_{n,i}(\chi) = (-1)^{k+1} (y_{i+k+1} - y_i) [y_i, \dots, y_{i+k+1}] (\chi - \cdot)_+^k, \quad a \leq \chi \leq b. \quad (2.1.7)$$

Then $\{N_{n,i}\}_1^{k+H+1}$ forms a **basis** for $\mathcal{S}(\Pi_k, \mathcal{M}, \Delta_n)$ with

$$N_{n,i}(\chi) = 0 \text{ for } \chi \notin [y_i, y_{i+k+1}], \quad (2.1.8)$$

and

$$N_{n,i}(\chi) > 0 \text{ for } \chi \in (y_i, y_{i+k+1}). \quad (2.1.9)$$

Moreover,

$$\sum_{i=1}^{k+H+1} N_{n,i}(\chi) = 1, \quad (2.1.10)$$

for all $a \leq \chi \leq b$.

The functions $N_{n,1}, N_{n,2}, \dots, N_{n,k+H+1}$ are called **B-splines**.

Remark 2.1.1. Using the identity

$$[y_i, \dots, y_{i+k+1}] (\chi - \cdot)_+^k = (-1)^{k+1} [y_i, \dots, y_{i+k+1}] (\cdot - \chi)_+^k \quad (2.1.11)$$

the functions $N_{n,i}$ also have the representation

$$N_{n,i}(\chi) = (y_{i+k+1} - y_i) [y_i, \dots, y_{i+k+1}] (\cdot - \chi)_+^k, \quad 1 \leq i \leq k + H + 1. \quad (2.1.12)$$

2.1.2 Spline functions on simple knots

Definition 2.1.3. Let a knot sequence be given $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ defined as in the relation (2.1.1). A **spline of order** k , $k \geq 1$ on the interval $[a, b]$ attached to the knot sequence Δ_n , is a function of class $C^{k-1}([a, b])$, which on each subinterval defined by two consecutive knots is a polynomial of degree k . A function k order splines with simple knots we will call it **k order spline function**. The set of k order spline functions attached to the knot sequence Δ_n is denoted by $\mathcal{S}_k(\Delta_n)$.

It follows from the above definition

$$\mathcal{S}_k(\Delta_n) = \{s \in C^{k-1}([a, b]) \mid s|_{[\chi_{i-1}, \chi_i]} \in \Pi_k, 1 \leq i \leq n\}. \quad (2.1.13)$$

Definition 2.1.4. If $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ is a knot sequence of the interval $[a, b]$ and $k \geq 1$, then we define the **extended knot sequence** $\Delta_{n,k} = \{\chi_i\}_{i=-k}^{n+k}$ with knots of form

$$0 = \chi_{-k} = \chi_{-k+1} = \dots = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \dots = \chi_{n+k} = 1. \quad (2.1.14)$$

Definition 2.1.5. [11] The **B-splines** attached to the extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ have the expression

$$N_{j,k}(\chi) = (\chi_{j+k+1} - \chi_j)[\chi_j, \chi_{j+1}, \dots, \chi_{j+k+1}](\cdot - \chi)_+^k, \quad -k \leq j \leq n-1. \quad (2.1.15)$$

Proposition 2.1.1. [11], [72], [97] For any extended knot sequence $\Delta_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 1$ we have

- i) $N_{j,k}(\chi) = 0$ for $\chi < \chi_j$ and for $\chi > \chi_{j+k+1}$, $-k \leq j \leq n-1$,
- ii) $N_{j,k}(\chi) > 0$ for $\chi_j < \chi < \chi_{j+k+1}$, $-k \leq j \leq n-1$.

Theorem 2.1.3. [97] For any knot sequence $\Delta_n = \{\chi_i\}_0^n$ of the interval $[a, b]$ and for any integer $k \geq 1$, the space $\mathcal{S}_k(\Delta_n)$ has the dimension $n+k$, and a base of his it consists of functions $N_{j,k}$, $-k \leq j \leq n-1$.

Theorem 2.1.4. [71] For any extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ of the interval $[a, b]$, $n \geq 1$, $k \geq 1$ and for any $t \in \mathbb{R}$ and for any $\chi \in [a, b]$ we have

$$(t - \chi)^k = \sum_{j=-k}^{n-1} (t - \chi_{j+1})(t - \chi_{j+2}) \dots (t - \chi_{j+k}) N_{j,k}(\chi). \quad (2.1.16)$$

Corollary 2.1.1. In the conditions of the Theorem 2.1.4 for any $0 \leq r \leq k$ we have

$$\sum_{j=-k}^{n-1} \xi_j^{(r)} N_{j,k}(\chi) = \chi^r, \quad \chi \in [a, b], \quad (2.1.17)$$

where

$$\xi^{(r)} = \binom{k}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k} \chi_{i_1} \chi_{i_2} \dots \chi_{i_r}. \quad (2.1.18)$$

Proposition 2.1.2. [71] If $\Delta_{n,k}$, $n \geq 1$, $k \geq 1$ is an extended knot sequence of the interval $[a, b]$, the functions $N_{j,k}$, $-k \leq j \leq n-1$ verify the properties:

$$1) N_{j,k}(\chi) \geq 0; \quad -k \leq j \leq n-1, \quad \chi \in [a, b]; \quad (2.1.19)$$

$$2) \sum_{j=-k}^{n-1} N_{j,k}(\chi) = 1; \quad a \leq \chi \leq b, \quad (2.1.20)$$

$$3) \sum_{j=-k}^{n-1} \xi_j N_{j,k}(\chi) = \chi; \quad a \leq \chi \leq b. \quad (2.1.21)$$

2.2 Schoenberg operators

Definition 2.2.1. [71] Let Δ_n a knot sequence of the interval $[a, b]$ and $k \geq 1$ an integer. **Schoenberg operator** $S_{\Delta_{n,k}} : \mathcal{F}([a, b]) \rightarrow \mathcal{S}_k(\Delta_n)$, attached to the extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ is defined by

$$(S_{\Delta_{n,k}}f)(\chi) = \sum_{j=-k}^{n-1} f(\xi_{j,k})N_{j,k}(\chi) \quad (2.2.1)$$

where $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi \in [a, b]$ and

$$\xi_{j,k} = \frac{\chi_{j+1} + \chi_{j+2} + \dots + \chi_{j+k}}{k}, \quad -k \leq j \leq n-1, \quad (2.2.2)$$

are **Greville abscissas**.

In the case when $\Delta_{n,k}$ contains equidistant knots and we have $k \geq 1$, then instead of $S_{\Delta_{n,k}}$ we will denote $S_{n,k}$.

Theorem 2.2.1. [11], [71], [72], [97]

- i) $S_{\Delta_{n,k}}(f)$ is a spline function of degree k on the knots $\chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_n$, that means, it is a polynomial of degree k on each interval $[\chi_{\nu-1}, \chi_\nu]$, ($1 \leq \nu \leq n$), and admits continuous derivatives of order $k-1$ on whole interval $[0, 1]$;
- ii) $S_{\Delta_{n,k}}$ is a positive linear operator;
- iii) $(S_{\Delta_{n,k}}f)(\chi)$ is for any $\chi \in [a, b]$ a convex combination of a finite number of values of the function f .
- iv) $S_{\Delta_{n,k}}f$ interpolates the function f at the ends of the interval, that means $(S_{\Delta_{n,k}}f)(a) = f(a)$ and $(S_{\Delta_{n,k}}f)(b) = f(b)$.
- v) $S_{\Delta_{n,k}}(e_\alpha) = e_\alpha$, for $\alpha = 0, 1$.

Theorem 2.2.2. [71] For any integer $k \geq 1$, and for $n = 1$, Schoenberg operators attached to the extended knot sequence $\Delta_{1,k}$:

$$\chi_{-k} = \chi_{-k+1} = \dots = \chi_0 = 0 < 1 = \chi_1 = \chi_2 = \dots \chi_{k+1}$$

of the interval $[0, 1]$ coincides with Bernstein operator B_k .

Theorem 2.2.3. [71] (Schoenberg)

For any extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ of an interval $[a, b]$ the operator $S_{\Delta_{n,k}}$ has the property of diminishing the variation of the sign. This means that for any function $f \in C([a, b])$ and for any affine function $h(\chi) = c\chi + d$, with the property $f - h$ has a finite number of sign changes over the interval $[a, b]$ result that the function $(S_{\Delta_{n,k}}f) - h$ has a number of sign changes at most equal to the number of sign changes of the function $f - h$ on the interval $[a, b]$.

Definition 2.2.2. The second moment of $S_{\Delta_{n,k}}$ is defined by $(S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$, where $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \dots$, $t \in [0, 1]$.

Theorem 2.2.4. [29] For an extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ of an interval $[a, b]$ with $k > 1$, the next relation takes place:

$$0 \leq (S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \sum_{j=-k}^{n-1} \frac{1}{k^2(k-1)} \sum_{1 \leq r < s \leq k} (\chi_{j+r} - \chi_{j+s})^2 N_{j,k}(\chi). \quad (2.2.3)$$

Corollary 2.2.1. [72] In the conditions of the Theorem 2.2.4 we have

$$0 \leq S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2(\chi) \leq \min \left\{ \frac{1}{2k}(b-a)^2, \frac{k+1}{12} \|\Delta_{n,k}\|^2 \right\}, \quad (2.2.4)$$

where $\|\Delta_{n,k}\| = \max_{1 \leq j \leq n} (\chi_j - \chi_{j-1})$.

Theorem 2.2.5. [71] Let a sequence of extended knot sequence of the interval $[a, b]$, of the form Δ_{n_m, k_m} , $m = 1, 2, \dots$, where $k_m > 1$ for all m . If we have fulfilled the condition

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\Delta_{n_m, k_m}\|}{k_m} = 0, \quad (2.2.5)$$

then it takes place

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_{\Delta_{n_m, k_m}} f)(\chi) = f(\chi), \text{ uniformly with regard to } \chi \in [a, b], \forall f \in C([a, b]). \quad (2.2.6)$$

Theorem 2.2.6. [11] For $k \geq 1$, $n \geq 1$

$$(S_{n,k}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{\min \left\{ 2\chi(1-\chi), \frac{k}{n} \right\}}{n+k-1}. \quad (2.2.7)$$

3 Improving the approximation order

Further on, in Section 3, it is worked on the interval $[0, 1]$. We consider the extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ given in (2.1.14), Greville abscissas (2.2.2), B-splines (2.1.15) and Schoenberg operators (2.2.1) and $k = 2$.

3.1 Second degree Schoenberg operators on particularly chosen knots

In literature, [11], if the extended knot sequence $\Delta_{n,k}$ consists of equidistant knots and $k = 2$, the following result is establish:

$$\frac{(S_{n,2}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1-\chi)} = \frac{\frac{1}{2n} - \frac{\chi}{4}}{1-\chi} \leq \frac{1}{2n},$$

and that imply

$$(S_{n,2}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{1}{2n} \cdot \chi(1-\chi), \quad n \geq 1, \quad \chi \in [0, 1], \quad (3.1.1)$$

where the constant $\frac{1}{2n}$ in front of $\chi(1-\chi)$ is the best possible.

For $n \geq 1$ and $k = 2$ the extended knot sequence $\Delta_{n,2}$ is:

$$0 = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = 1. \quad (3.1.2)$$

From the formula (1.1.3), for four knots and for a function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, it follows:

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]f = \sum_{p=1}^4 \left(\prod_{1 \leq \nu \leq 4, \nu \neq p} (\chi_p - \chi_\nu)^{-1} \right) f(\chi_p),$$

where $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3 < \chi_4$ are points from $[0, 1]$.

Remark 3.1.1.

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]f = 0 \text{ if } f \in \Pi_2 \quad (3.1.3)$$

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4](\cdot - \chi)_+^2 = 0, \text{ for } \chi \leq \min\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}, \quad (3.1.4)$$

and

$$[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4](\cdot - \chi)_+^2 = 0, \text{ for } \chi \geq \max\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}. \quad (3.1.5)$$

3.1.1 The second moment of second degree Schoenberg operators on particularly chosen knots

We consider a knot sequence Δ_n formed from the following particularly knots:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 0, \\ \chi_1 &= \frac{\lambda}{n}, \\ \chi_j &= \frac{\lambda}{n} + (j-1) \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}, \text{ for } 2 \leq j \leq n-2, \\ \chi_{n-1} &= 1 - \frac{\lambda}{n}, \\ \chi_n &= 1, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

where $\lambda \in (0, 1]$. For $\lambda = 1$ the particular case of *equidistant knots* is obtained.

Lemma 3.1.1. *Let $n \geq 7$, $\lambda \in (0, 1)$ and the knots chosen in (3.1.6) and the extra-knots given in (3.1.2). The following relations take place:*

Case 1. $\chi \in [\chi_0, \chi_1]$

$$\begin{aligned} N_{-1,2}(\chi) &= \frac{2n}{\lambda} \chi - \frac{n^2}{\lambda^2} \frac{2n\lambda + n - 6\lambda}{n\lambda + n - 4\lambda} \chi^2, \\ N_{0,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)}{\lambda(n\lambda + n - 4\lambda)} \chi^2, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ for } 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Case 2. $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$

$$\begin{aligned} N_{-1,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{(n\lambda + n - 4\lambda)(n-2\lambda)} \chi^2 - \frac{2n(n-2)}{n-2\lambda} \chi + \frac{n\lambda + n - 4\lambda}{n-2\lambda}, \\ N_{0,2}(\chi) &= -\frac{(n\lambda + 3n - 8\lambda)n^2(n-2)^2}{2(n\lambda + n - 4\lambda)(n-2\lambda)^2} \chi^2 + \frac{(n\lambda + 2n - 6\lambda)n(n-2)}{(n-2\lambda)^2} \chi \\ &\quad - \frac{\lambda(n\lambda + 2n - 6\lambda)(n-2)}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{1,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} \chi^2 - \frac{n\lambda(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} \chi + \frac{\lambda^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ for } 2 \leq j \leq n-1 \text{ or } j = -2. \end{aligned}$$

Case 3. $\chi \in [\chi_2, \chi_3]$

$$\begin{aligned} N_{0,2}(\chi) &= \chi^2 \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - \chi \frac{n(n-2)(n\lambda+2n-6\lambda)}{(n-2\lambda)^2} + \frac{(n\lambda+2n-6\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{1,2}(\chi) &= -\chi^2 \frac{n^2(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} + \chi \frac{n(n-2)(2n\lambda+3n-10\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\ &\quad - \frac{2\lambda^2(n-2)^2 + 6\lambda(n-2)(n-2\lambda) + 3(n-2\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{2,2}(\chi) &= \chi^2 \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - \chi \frac{n(n-2)(n+n\lambda-4\lambda)}{(n-2\lambda)^2} + \frac{(n+n\lambda-4\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ for } 3 \leq j \leq n-1 \text{ or } j \in \{-2, -1\}. \end{aligned}$$

Case 4. $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ with $3 \leq q \leq n-4$

$$N_{j,2}(\chi) = \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} \sum_{i=0}^3 d_i \left((i+j-1) \frac{n-2\lambda}{n(n-2)} + \frac{\lambda}{n} - \chi \right)_+^2,$$

for $q-2 \leq j \leq q$, where

$$d_0 = -1, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = -3, \quad d_3 = 1.$$

$$N_{j,2}(\chi) = 0 \text{ for } 2 \leq j \leq q-3 \text{ or } q+1 \leq j \leq n-1.$$

Case 5. $\chi \in [\chi_{n-3}, \chi_{n-2}]$

$$\begin{aligned} N_{n-5,2}(\chi) &= (1-\chi)^2 \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - (1-\chi) \frac{n(n-2)(n+n\lambda-4\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\ &\quad + \frac{(n+n\lambda-4\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{n-4,2}(\chi) &= -(1-\chi)^2 \frac{n^2(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2} + (1-\chi) \frac{n(n-2)(2n\lambda+3n-10\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\ &\quad - \frac{2\lambda^2(n-2)^2 + 6\lambda(n-2)(n-2\lambda) + 3(n-2\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{n-3,2}(\chi) &= \frac{\chi^2 n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2} - \chi \frac{n(n-2)(n^2-4n-n\lambda+6\lambda)}{(n-2\lambda)^2} \\ &\quad + \frac{(n^2-4n-n\lambda+6\lambda)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ for } -2 \leq j \leq n-6 \text{ or } j \geq n-2. \end{aligned}$$

Case 6. $\chi \in [\chi_{n-2}, \chi_{n-1}]$

$$\begin{aligned} N_{n-4,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2}(1-\chi)^2 - \frac{n\lambda(n-2)^2}{(n-2\lambda)^2}(1-\chi) + \frac{\lambda^2(n-2)^2}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{n-3,2}(\chi) &= -\frac{(n\lambda+3n-8\lambda)n^2(n-2)^2}{2(n\lambda+n-4\lambda)(n-2\lambda)^2}(1-\chi)^2 \\ &\quad + \frac{(n\lambda+2n-6\lambda)n(n-2)}{(n-2\lambda)^2}(1-\chi) - \frac{\lambda(n\lambda+2n-6\lambda)(n-2)}{2(n-2\lambda)^2}, \\ N_{n-2,2}(\chi) &= \frac{n^2(n-2)^2}{(n\lambda+n-4\lambda)(n-2\lambda)}(1-\chi)^2 - \frac{2n(n-2)}{n-2\lambda}(1-\chi) \\ &\quad + \frac{n\lambda+n-4\lambda}{n-2\lambda}, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ for } -2 \leq j \leq n-5 \text{ or } j = n-1. \end{aligned}$$

Case 7. $\chi \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$

$$\begin{aligned} N_{n-3,2}(\chi) &= \frac{(1-\chi)^2 n^2 (n-2)}{\lambda(n\lambda+n-4\lambda)}, \\ N_{n-2,2}(\chi) &= \frac{2n}{\lambda}(1-\chi) - \frac{n^2}{\lambda^2} \frac{2n\lambda+n-6\lambda}{n\lambda+n-4\lambda} (1-\chi)^2, \\ N_{j,2}(\chi) &= 0 \text{ for } -2 \leq j \leq n-4. \end{aligned}$$

Theorem 3.1.1. *The second moment of the second degree Schoenberg spline operator for the particularly chosen knots (3.1.6) has the next form: $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$*

$$= \begin{cases} \chi^2 \frac{n^2 - n\lambda(n+2) - 2\lambda^2(n-1)(n-4)}{4\lambda(n-2)(n\lambda+n-4\lambda)} + \chi \frac{\lambda}{2n}, & \chi \in \left[0, \frac{\lambda}{n}\right] \\ \chi^2 \frac{n(\lambda-1)}{4(n-2\lambda)} + \chi \frac{(1-\lambda)(n\lambda+n-4\lambda)}{2(n-2)(n-2\lambda)} \\ \quad + \frac{\lambda^3(n^2-6n+4)+n\lambda^2(n+2)-n^2\lambda}{4n^2(n-2)(n-2\lambda)}, & \chi \in \left[\frac{\lambda}{n}, \frac{\lambda}{n} + \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}\right] \\ \frac{1}{4n^2} \frac{(n-2\lambda)^2}{(n-2)^2}, & \chi \in \left[\frac{\lambda}{n} + \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}, 1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}\right] \\ \frac{(1-\chi)^2 n(\lambda-1)}{4(n-2\lambda)} + \frac{(1-\chi)(1-\lambda)(n\lambda+n-4\lambda)}{2(n-2)(n-2\lambda)} \\ \quad + \frac{\lambda^3(n^2-6n+4)+n\lambda^2(n+2)-n^2\lambda}{4n^2(n-2)(n-2\lambda)}, & \chi \in \left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{n-2\lambda}{n(n-2)}, 1 - \frac{\lambda}{n}\right] \\ \frac{(1-\chi)^2 [n^2 - n\lambda(n+2) - 2\lambda^2(n-1)(n-4)]}{4\lambda(n-2)(n\lambda+n-4\lambda)} + \frac{(1-\chi)\lambda}{2n}, & \chi \in \left[1 - \frac{\lambda}{n}, 1\right] \end{cases}$$

For $\lambda = 1$ the particular case of *equidistant knots* is obtained.

Theorem 3.1.2. *The second moment of the second degree Schoenberg spline operators for equidistant knots is:*

$$(S_{n,2}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{\chi^2}{4} + \frac{\chi}{2n}, & \chi \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{4n^2}, & \chi \in \left[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \\ -\frac{(1-\chi)^2}{4} + \frac{1-\chi}{2n}, & \chi \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

3.1.2 Comparing the order of approximation with the equidistant case

We make the comparison only for case $\lambda = \frac{1}{2}$.

Lemma 3.1.2. For $n \geq 1$ the next relations have place:

i)

$$\sup_{\chi \in (0,1)} \frac{(S_{n,2}^{\lambda=1}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1 - \chi)} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.1.7)$$

uniformly regarding to $\chi \in (0, 1)$.

ii)

$$\sup_{\chi \in (0,1)} \frac{(S_{\Delta n,2}^{\lambda=\frac{1}{2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1 - \chi)} = \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.1.8)$$

uniformly regarding to $\chi \in (0, 1)$.

Theorem 3.1.3. [41] If $L_n : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ is a positive linear operator such that $L_n(e_j) = e_j$, $j \in \{0, 1\}$, and exists a constant $K > 0$ such that

$$\frac{(L_n(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1 - \chi)} \leq K \cdot \frac{1}{n}, \quad \chi \in (0, 1),$$

then, for $f \in C^2([0, 1])$:

$$\left| \frac{(L_n f)(\chi) - f(\chi)}{\chi(1 - \chi)} \right| \leq \frac{K}{2n} |f''(\chi)| + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.1.9)$$

uniformly regarding to $\chi \in (0, 1)$.

We apply Theorem 3.1.3 and Lemma 3.1.2 for $\lambda = 1$ and $\lambda = \frac{1}{2}$ in the following two corollaries.

Corollary 3.1.1. One has

$$\left| \frac{(S_{n,2} f)(\chi) - f(\chi)}{\chi(1 - \chi)} \right| \leq \frac{1}{4n} |f''(\chi)| + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{uniformly regarding to } \chi, \quad (3.1.10)$$

for $f \in C^2([0, 1])$, $\chi \in (0, 1)$; or

$$\left\| \frac{S_{n,2}(f) - f}{e_1 - e_2} \right\|_{(0,1)} \leq \frac{1}{4n} \|f''\| + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.1.11)$$

Corollary 3.1.2. One has

$$\left| \frac{(S_{\Delta n,2}^{\lambda=\frac{1}{2}} f)(\chi) - f(\chi)}{\chi(1 - \chi)} \right| \leq \frac{1}{8n} |f''(\chi)| + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{uniformly regarding to } \chi, \quad (3.1.12)$$

for $f \in C^2([0, 1])$, $\chi \in (0, 1)$; or

$$\left\| \frac{S_{\Delta n,2}^{\lambda=\frac{1}{2}}(f) - f}{e_1 - e_2} \right\|_{(0,1)} \leq \frac{1}{8n} \|f''\| + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.1.13)$$

Also we can make the comparison of the cases $\lambda = 1$ and $\lambda = \frac{1}{2}$ in estimates with Ditsian-Totik modulus. For this we apply Lemma 3.1.2 and Theorem 1.2.13 and we obtain:

Corollary 3.1.3. *The next relations take place:*

i)

$$\left\| (S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=1} f)(\chi) - f(\chi) \right\|_{(0,1)} \leq \left(\frac{7}{4} + o(1) \right) \omega_2^{\varphi} \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.1.14)$$

ii)

$$\left\| (S_{\Delta_{n,2}}^{\lambda=\frac{1}{2}} f)(\chi) - f(\chi) \right\|_{(0,1)} \leq \left(\frac{11}{8} + o(1) \right) \omega_2^{\varphi} \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.1.15)$$

So that, for $\lambda = \frac{1}{2}$ an improvement of the order of approximation is obtained in both comparisons.

3.2 The second moment of second degree Schoenberg operators on arbitrary knots

3.2.1 A first method which use an auxiliary extended knot sequence

In this Section, a more general extended knot sequence $\overline{\Delta}_{n,2}$ is used:

$$y_{-2} < y_{-1} < 0 = y_0 < y_1 \dots < y_n = 1 < y_{n+1} < y_{n+2}, \quad n \geq 1. \quad (3.2.1)$$

The relations (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) from Remark 3.1.1 are validate for y_j , $-2 \leq j \leq n+2$, too.

For any real numbers $t_1 \leq t_2 < t_3 \leq t_4$ and χ , we note:

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2, t_3, t_4)(\chi) &= \frac{1}{4} \left(\frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_2} - 3 \right) (\chi - t_3)^2 + \frac{1}{2} (t_4 - 2t_3 + t_2) (\chi - t_3) \\ &\quad + \frac{1}{4} (t_3 - t_2) (t_4 - t_3). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Lemma 3.2.1. *Let the extended knot sequence $\overline{\Delta}_{n,2}$ defined in (3.2.1), $n \geq 1$. Let $\chi \in [y_q, y_{q+1}]$ where $0 \leq q \leq n-1$. Then*

$$(S_{\overline{\Delta}_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(y_{q-1}, y_q, y_{q+1}, y_{q+2})(\chi). \quad (3.2.3)$$

Theorem 3.2.1. *Let the extended knot sequence $\Delta_{n,2}$, $n \geq 1$ given in (3.1.2) and the appropriate operator $S_{\Delta_{n,2}}$. Let $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ where $0 \leq q \leq n-1$.*

The next relations take place:

- i) $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2})(\chi)$, for $1 \leq q \leq n-2$;
- ii) $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(0, 0, \chi_1, \chi_2)(\chi)$, for $q = 0$;
- iii) $(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{n-2}, \chi_{n-1}, 1, 1)(\chi)$, for $q = n-1$.

3.2.2 A second method with the direct calculation

Further on, using divided differences on multiple knots for the second moment of second degree Schoenberg operators, the above results are reached. It can be verified by comparison that the results obtained by the two methods are the same. We consider the extended knot sequence $\Delta_{n,2}$ given in (3.1.2).

Theorem 3.2.2. *Let $\chi \in [0, 1]$, and $q \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ a natural number such that $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$. In these conditions, the second moment of second degree Schoenberg operators on arbitrary knots has the next form.*

i) If $q = 0$,

$$(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} - 3 \right) + \frac{\chi}{2} \chi_1. \quad (3.2.4)$$

ii) If $q = 1$,

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - 3 \right) - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_1 - \chi_2 \right) \\ &+ \frac{\chi_1}{4} \left(\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

iii) If $2 \leq q \leq n - 3$,

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{\chi_{q+2} - \chi_{q-1}}{\chi_{q+1} - \chi_q} - 3 \right) \\ &+ \frac{\chi}{2} \left(\chi_q + \chi_{q+1} + \frac{\chi_{q-1} \chi_{q+1} - \chi_q \chi_{q+2}}{\chi_{q+1} - \chi_q} \right) \\ &+ \frac{\chi_q^2 (\chi_{q+1} + \chi_{q+2}) - \chi_{q+1}^2 (\chi_{q-1} + \chi_q)}{4(\chi_{q+1} - \chi_q)}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

iv) If $q = n - 2$,

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{(1 - \chi)^2}{4} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - 3 \right) \\ &- \frac{1 - \chi}{2} \left(\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_1 - \chi_2 \right) \\ &+ \frac{\chi_1}{4} \left(\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi_2 - \chi_1} - \chi_2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

v) If $q = n - 1$,

$$(S_{\Delta_{n,2}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{(1 - \chi)^2}{4} \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} - 3 \right) + \frac{1 - \chi}{2} \chi_1. \quad (3.2.8)$$

3.3 The second moment of second degree Schoenberg operators on knots in the roots of Chebyshev polynomials

Theorem 3.3.1. [118] *For $\Delta_{n,1}$, extended knot sequence of form (2.1.14), with*

$$\chi_k = \sin^2 \frac{(2k - 1)\pi}{4(n - 1)},$$

$1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$, $\chi_0 = 0$, $\chi_n = 1$ it takes place

$$(S_{\Delta_{n,1}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \pi^2 \cdot \frac{\chi(1-\chi)}{n^2}, \quad n \geq 2, \chi \in [0, 1]. \quad (3.3.1)$$

The roots of Chebyshev polynomials $T_n(\mu) = \cos(n \arccos \mu)$, $\mu \in [-1, 1]$ are

$$\mu_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (3.3.2)$$

Using the transformation of the interval $[-1, 1]$ in interval $[0, 1]$ by function $v(\xi) = \frac{\xi+1}{2}$, the following knots are obtained

$$\chi_k^* = v(\mu_{n-k}), \quad 1 \leq k \leq n,$$

or, more explicitly,

$$\chi_k^* = \sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.3.3)$$

We define also, $\chi_0^* = 0$ and $\chi_{n+1}^* = 1$.

We consider the extended knot sequence $\Delta_{n+1,2}^*$:

$$0 = \chi_{-2}^* = \chi_{-1}^* = \chi_0^* < \chi_1^* < \dots < \chi_n^* < \chi_{n+1}^* = \chi_{n+2}^* = \chi_{n+3}^* = 1. \quad (3.3.4)$$

3.3.1 The method which use an auxiliary extended knot sequence

From Theorem 3.2.1 we get by particularization the next Corollary. We replace n with $n+1$, and we choose an auxiliary extended knot sequence in a given form in (3.2.1) with $y_j = \chi_j^*$, ($0 \leq j \leq n+1$), $y_{-2} < y_{-1} < 0$, and $y_{n+3} > y_{n+2} > 1$.

Corollary 3.3.1. *Let the extended knot sequence $\Delta_{n+1,2}^*$, $n \geq 1$ given in (3.3.4) and the appropriate operator $S_{\Delta_{n+1,2}^*}$. Let $\chi \in [\chi_q^*, \chi_{q+1}^*]$, $0 \leq q \leq n$.*

The next relations take place:

i) For $1 \leq q \leq n-1$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-1}^*, \chi_q^*, \chi_{q+1}^*, \chi_{q+2}^*)(\chi). \quad (3.3.5)$$

ii) For $q = 0$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(0, 0, \chi_1^*, \chi_2^*)(\chi). \quad (3.3.6)$$

iii) For $q = n$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{n-1}^*, \chi_n^*, 1, 1)(\chi). \quad (3.3.7)$$

An explanation of these formulas will be made in the next section using a direct calculation method.

3.3.2 The direct calculation method

Further on, using divided differences on multiple knots the above results are obtained. We use the extended knot sequence $\Delta_{n+1,2}^*$ defined in (3.3.4).

Theorem 3.3.2. *Let $n \geq 2$, $\Delta_{n+1,2}^*$ and $\chi \in [0, 1]$. Exists a unique $q \in \{0, 1, \dots, n\}$ such that $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1})$ if $0 \leq q \leq n - 1$, respectively $\chi \in [\chi_n, \chi_{n+1}]$ if $q = n$. The second moment of second degree Schoenberg operators with knots in the roots of Chebyshev polynomials has the next form.*

i) If $q = 0$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^2}{2} \left(3 - 12 \sin^2 \frac{\pi}{4n} + 8 \sin^4 \frac{\pi}{4n} \right) + \frac{\chi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4n}. \quad (3.3.8)$$

ii) If $q = 1$,

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{(\chi - \sin^2 \frac{\pi}{4n})^2}{32 \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right)} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{4n} - 1 \right) \chi^2 \\ &- \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{7}{2} \right) \chi + \sin^4 \frac{\pi}{4n} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

iii) If $2 \leq q \leq n - 2$,

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \sin^2 \frac{\pi}{2n} \chi(1 - \chi) - \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2n}. \quad (3.3.10)$$

iv) If $q = n - 1$,

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{(1 - \chi - \sin^2 \frac{\pi}{4n})^2}{32 \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right)} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{4n} - 1 \right) (1 - \chi)^2 \\ &- \sin^2 \frac{\pi}{4n} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{7}{2} \right) (1 - \chi) + \sin^4 \frac{\pi}{4n} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

v) If $q = n$,

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{(1 - \chi)^2}{2} \left(3 - 12 \sin^2 \frac{\pi}{4n} + 8 \sin^4 \frac{\pi}{4n} \right) + \frac{1 - \chi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4n}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

The results from Corollary 3.3.1 coincide with the results from Theorem 3.3.2.

3.3.3 Basic results

Theorem 3.3.3. *If $n \geq 1$ and $\chi \in [0, 1]$ then*

$$(S_{\Delta_{n+1,2}^*}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\chi(1 - \chi)}{n^2}. \quad (3.3.13)$$

Moreover, the constant $\frac{\pi^2}{4}$ is the best possible in this inequality.

Remark 3.3.1. Because the extended knot sequence with equidistant knots divide the interval $[0, 1]$ in n subintervals and the extended knot sequence $\Delta_{n+1,2}^*$ divide the interval $[0, 1]$ in $n + 1$ subintervals, it is necessary to take $n - 1$, $n \geq 2$ in (3.3.13), to compare the relation (3.1.1) with the relation (3.3.13). It is observed that

$$\frac{\chi(1-\chi)}{4(n-1)^2} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \frac{\chi(1-\chi)}{4n^2} \leq \frac{\chi(1-\chi)}{n^2},$$

for $n \geq 2$.

Corollary 3.3.2. *If $f \in C([0, 1])$, $\chi \in [0, 1]$, $n \geq 1$, then*

$$|S_{\Delta_{n+1,2}^*}(f, \chi) - f(\chi)| \leq \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \omega_1 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n}\right). \quad (3.3.14)$$

We observe that in the case of equidistant knots, for $k = 2$, Theorem 2.2.6 approximates weaker

$$|S_{n,2}(f, \chi) - f(\chi)| \leq C \omega_1 \left(f, \sqrt{\frac{\chi(1-\chi)}{n}}\right), \quad (3.3.15)$$

where the constant C is independent of n , f and χ .

Corollary 3.3.3. *For any $f \in C([0, 1])$ and any $n \geq 2$, there is a spline s of degree 2, attached to the knots $\{0 = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_n = 1\}$, such that*

$$|f(\chi) - s(\chi)| \leq C \omega_1 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n}\right), \quad \chi \in [0, 1], \quad (3.3.16)$$

with a constant independent of f , n and χ .

We notice that the relation (3.3.16) is formally analogous to Teliakovsky's estimate, [124], of the best polynomial approximation on the interval $[0, 1]$, where n has another meaning:

Theorem 3.3.4. *There is a constant $C > 0$, such that for any function $f \in C([0, 1])$ and for every $n \in \mathbb{N}$, exists a polynomial P of degree at most n , such that*

$$|f(\chi) - P(\chi)| \leq C \omega_1 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n}\right), \quad \chi \in [0, 1]. \quad (3.3.17)$$

Corollary 3.3.4. *For $n \geq 1$, $\chi \in [0, 1]$ we have*

$$\left|S_{\Delta_{n+1,2}^*}(f, \chi) - f(\chi)\right| \leq \left(1 + \frac{\pi^2}{8}\right) \omega_2 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n}\right). \quad (3.3.18)$$

Again, an improvement is obtained by comparing it with the case of equidistant knots, from the Theorem 2.2.6,

$$|f(\chi) - S_{n,2}(f, \chi)| \leq C \omega_2 \left(f, \sqrt{\frac{\chi(1-\chi)}{n}}\right), \quad (3.3.19)$$

with a constant C independent of n , f and χ .

Formally, the estimation (3.3.18) can be compared to Gavrea's result [34] regarding the polynomial approximation, which improves Teliakovsky's result.

Theorem 3.3.5. *Exists a sequence of positive linear operators $(L_n)_n$, $L_n : C([0, 1]) \rightarrow \Pi_n$ and a constant $C > 0$, such that for any function $f \in C([0, 1])$ and any $n \in \mathbb{N}$*

$$|f(\chi) - (L_n f)(\chi)| \leq C \omega_2 \left(f, \frac{\sqrt{\chi(1-\chi)}}{n} \right), \chi \in [0, 1]. \quad (3.3.20)$$

Using the second Ditzian–Totik modulus the following result is obtained.

Corollary 3.3.5. *For $f \in C([0, 1])$ and $n \geq 1$ we have*

$$\|S_{\Delta_{n+1,2}^*}(f) - f\| \leq \left(1 + \frac{3\pi^2}{8}\right) \omega_2^\varphi \left(f, \frac{1}{n} \right). \quad (3.3.21)$$

In the case of equidistant knots in [11], the following relation was obtained:

$$\|S_{n,2}(f) - f\| \leq \frac{15}{8} \omega_2^\varphi \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad (3.3.22)$$

where $f \in C([0, 1])$, $n \geq 1$.

4 The second moment of third degree Schoenberg operators and applications

4.1 The case of arbitrary knots

4.1.1 The method with an auxiliary extended knot sequence

We consider the extended knot sequence of type (2.1.14) with arbitrary knots and $k = 3$ which we denote $\Delta_{n,3}$

$$0 = \chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1. \quad (4.1.1)$$

We will apply Marsden’s identity (2.1.16) for $k = 3$. We consider an auxiliary knot sequence $\bar{\Delta}_{n,3}$ with the knots:

$$y_{-3} < y_{-2} < y_{-1} < 0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1 < y_{n+1} < y_{n+2} < y_{n+3}, \quad (4.1.2)$$

where the knots $y_{-3} < y_{-2} < y_{-1} < 0$ and $1 < y_{n+1} < y_{n+2} < y_{n+3}$ are variable and $y_i = \chi_i$, for $0 \leq i \leq n$. By taking into account that in $(S_{\Delta_{n,k}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$, ($\chi \in [0, 1]$) is build using divided differences with multiple knots, we obtain, for $\chi \in [0, 1]$

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \lim_{\substack{y_{-3}, y_{-2}, y_{-1} \rightarrow 0 \\ y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3} \rightarrow 1}} (S_{\bar{\Delta}_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi). \quad (4.1.3)$$

In this limit the order of the points $y_{-3} < y_{-2} < y_{-1} < 0$ and $1 < y_{n+1} < y_{n+2} < y_{n+3}$ is maintained.

For any $\chi \in [0, 1]$ exists an integer $0 \leq q \leq n - 1$, such that $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}] = [y_q, y_{q+1}]$.

For knot sequence (4.1.2) and for $0 \leq q \leq n - 1$ and $\chi \in [y_q, y_{q+1}]$ we define

$$\begin{aligned} & \Gamma(y_{q-2}, y_{q-1}, y_q, y_{q+1}, y_{q+2}, y_{q+3})(\chi) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ \frac{y_{q+3} - y_{q-1}}{y_{q+2} - y_q} \cdot \frac{(\chi - y_q)^3}{y_{q+1} - y_q} - \frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q+1} - y_{q-1}} \cdot \frac{(\chi - y_{q+1})^3}{y_{q+1} - y_q} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{q-1 \leq i < j \leq q+2} (\chi - y_i)(\chi - y_j) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

more explicitly,

$$\begin{aligned} & \Gamma(y_{q-2}, y_{q-1}, y_q, y_{q+1}, y_{q+2}, y_{q+3})(\chi) \\ &= \frac{\chi^3}{9(y_{q+1} - y_q)} \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} + \frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} \right) - \frac{\chi^2}{3(y_{q+1} - y_q)} \left[y_{q+1} \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} \right. \right. \\ & + 2) + y_q \left(\frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} - 2 \right) \left. \right] + \frac{\chi}{3} \left\{ y_{q+2} + y_{q-1} + \frac{1}{y_{q+1} - y_q} \left[y_{q+1}^2 \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} \right. \right. \right. \\ & + 1) + y_q^2 \left(\frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} - 1 \right) \left. \right] \right\} - \frac{1}{9} \left\{ (y_{q+2} + y_{q-1})(y_q + y_{q+1}) + y_q y_{q+1} \right. \\ & + y_{q-1} y_{q+2} + \frac{1}{y_{q+1} - y_q} \left[y_{q+1}^3 \left(\frac{y_{q+2} - y_{q-2}}{y_{q-1} - y_{q+1}} \right) + y_q^3 \left(\frac{y_{q-1} - y_{q+3}}{y_q - y_{q+2}} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Remark 4.1.1. Because $y_i \neq y_j$, $\forall i \neq j$, $q - 2 \leq i, j \leq q + 2$, the form of Γ have sense.

Theorem 4.1.1. Let the knot sequence $\Delta_{n,3}$ given in (4.1.1). If $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, with $0 \leq q \leq n - 1$, then

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi). \quad (4.1.6)$$

Remark 4.1.2. Although in the computation of $(S_{\overline{\Delta}_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ we use all the knots $y_{q-3} < \dots < y_{q+4}$ the final results depends only on the knots $y_{q-2} < \dots < y_{q+3}$.

The form of the second moment will be established separately in some cases, from the above theorem and relation (4.1.3) in the following corollaries. For simplicity in most of the situations we consider only the case where χ is in the left part of the interval $[0, 1]$, since on the right part the result can be obtained by symmetry, replacing χ with $1 - \chi$ and y_i with y_{n-i} , ($-3 \leq i \leq n + 3$).

Corollary 4.1.1. If $n = 1$ and $\chi \in [0, 1]$, then

$$(S_{\Delta_{1,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = -\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{3}. \quad (4.1.7)$$

Corollary 4.1.2. Let $n = 2$. For $\chi \in [0, \chi_1]$ we have

$$(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(1 - \frac{1}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{1}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.8)$$

For $\chi \in [\chi_1, 1]$ the expression $(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ can be obtained by symmetry.

Corollary 4.1.3. *Let $n = 3$.*

i) For $\chi \in [0, \chi_1]$, we obtain

$$(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{1}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.9)$$

ii) For $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$, we have

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{\chi^3}{9(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1}{1 - \chi_1} - \frac{1}{\chi_2} \right) + \frac{\chi^2}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1 - 2\chi_1^2}{1 - \chi_1} - 2\chi_2 \right) + \frac{\chi}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\chi_2^2 \right. \\ & \left. - \chi_1 + \frac{\chi_1^3}{1 - \chi_1} \right) + \frac{\chi_1}{9} \left[\frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} - \frac{\chi_1^2}{(\chi_2 - \chi_1)(1 - \chi_1)} - \chi_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

iii) For $\chi \in [\chi_2, 1]$, the expression of $(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ can be obtained from case i) by symmetry.

Corollary 4.1.4. *i) For $n \geq 4$ and $\chi \in [0, \chi_1]$ we have:*

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.11)$$

ii) For $n \geq 4$ and $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ we have:

$$\begin{aligned} & (S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9(\chi_1 - \chi_2)} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} + \frac{\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left[\frac{2\chi_1 - \chi_3}{\chi_1 - \chi_3} \right. \\ & \left. + \frac{\chi_3(\chi_2 - \chi_3) + \chi_1\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right] + \frac{\chi}{3} \left[\chi_1 + \chi_2 + \frac{\chi_1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\chi_3 + \frac{\chi_1\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) \right] \\ & - \frac{\chi_1}{9} \left[\chi_2 + \frac{\chi_1\chi_3}{\chi_1 - \chi_2} + \frac{\chi_1^2\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

iii) For $n \geq 5$ and $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, with $2 \leq q \leq n - 3$ we have:

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi). \quad (4.1.13)$$

iv) For $n \geq 4$ and $\chi \in [\chi_{n-2}, \chi_{n-1}]$ the expression of $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ can be obtained by symmetry from case ii).

v) For $n \geq 4$ and $\chi \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$ the expression of $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$ can be obtained by symmetry from case i).

4.1.2 The method based on direct calculation

The explicit form of B-splines and of second moment of third degree Schoenberg operators, for arbitrary knots, on intervals of the type $[0, \chi_1]$, $[\chi_1, \chi_2]$, $[\chi_2, \chi_3]$ are presented below.

Proposition 4.1.1. *For $\chi \in [0, \chi_1]$ and $n \geq 4$ we have:*

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.14)$$

Proposition 4.1.2. For $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ and $n \geq 4$, the second moment of third degree Schoenberg operators has the following form:

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^3}{9(\chi_1 - \chi_2)} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} + \frac{\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left[\frac{2\chi_1 - \chi_3}{\chi_1 - \chi_3} \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_3(\chi_2 - \chi_3) + \chi_1\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right] + \frac{\chi}{3} \left[\chi_1 + \chi_2 + \frac{\chi_1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\chi_3 + \frac{\chi_1\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) \right] \\ &- \frac{\chi_1}{9} \left[\chi_2 + \frac{\chi_1\chi_3}{\chi_1 - \chi_2} + \frac{\chi_1^2\chi_4}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Proposition 4.1.3. For $\chi \in [\chi_2, \chi_3]$ and $n \geq 5$, we have:

$$\begin{aligned} (S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) &= \frac{\chi^3}{9(\chi_3 - \chi_2)} \left(\frac{\chi_1 - \chi_5}{\chi_2 - \chi_4} + \frac{\chi_4}{\chi_1 - \chi_3} \right) \\ &- \frac{\chi^2}{3} \left[1 + \frac{\chi_3}{\chi_3 - \chi_2} + \frac{\chi_2(\chi_1 - \chi_2 - \chi_5)}{(\chi_3 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_4)} + \frac{\chi_4(\chi_1\chi_2 - \chi_3\chi_4)}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_4)} \right] \\ &+ \frac{\chi}{3} \left[\chi_2 + \chi_3 + \frac{1}{\chi_3 - \chi_2} \left(\chi_1\chi_3 - \chi_2\chi_4 - \frac{\chi_2^2\chi_5}{\chi_2 - \chi_4} - \frac{\chi_1\chi_4(\chi_3\chi_4 - \chi_1\chi_2)}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)} \right) \right] \\ &- \frac{1}{9(\chi_2 - \chi_4)} \left[\chi_2^2(\chi_3 + \chi_4) + \frac{\chi_2(\chi_1\chi_3^2 - \chi_2^2\chi_5)}{\chi_3 - \chi_2} + \frac{\chi_2\chi_3\chi_4(\chi_3^2 - \chi_2\chi_4)}{(\chi_3 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_1\chi_4(\chi_3^2 - \chi_1\chi_4 - \chi_2\chi_4 - \chi_1\chi_3)}{\chi_1 - \chi_3} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Particular cases

Proposition 4.1.4. For $n = 1$ we have:

$$(S_{\Delta_{1,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = -\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{3}. \quad (4.1.17)$$

Proposition 4.1.5. Let $n = 2$. For $\chi \in [0, \chi_1]$, we obtain:

$$(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(1 - \frac{1}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{1}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3}\chi_1, \quad (4.1.18)$$

and for $\chi \in [\chi_1, 1]$, we have $(S_{\Delta_{2,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) =$

$$\frac{\chi^3\chi_1}{9(1 - \chi_1)^2} - \frac{\chi^2}{3} \left[1 + \frac{\chi_1^2}{(1 - \chi_1)^2} \right] + \frac{\chi}{3} \left[1 + \frac{\chi_1^3}{(1 - \chi_1)^2} \right] - \frac{\chi_1}{9} \left[1 - \frac{\chi_1(1 - 2\chi_1)}{(1 - \chi_1)^2} \right]. \quad (4.1.19)$$

Proposition 4.1.6. Let $n = 3$. For $\chi \in [0, \chi_1]$, we obtain:

$$(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{1}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3}\chi_1. \quad (4.1.20)$$

For $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$, we have $(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\chi^3}{9(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1}{1 - \chi_1} - \frac{1}{\chi_2} \right) + \frac{\chi^2}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\frac{1 - 2\chi_1^2}{1 - \chi_1} - 2\chi_2 \right) + \frac{\chi}{3(\chi_2 - \chi_1)} \left(\chi_2^2 \right. \\ &- \left. \chi_1 + \frac{\chi_1^3}{1 - \chi_1} \right) + \frac{\chi_1}{9} \left[\frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} - \frac{\chi_1^2}{(\chi_2 - \chi_1)(1 - \chi_1)} - \chi_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

For $\chi \in [\chi_2, 1]$ we have $(S_{\Delta_{3,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\chi^3}{9(1-\chi_2)} \left[\frac{1-\chi_1}{1-\chi_2} - \frac{1}{1-\chi_1} \right] - \frac{\chi^2}{3} \left[1 + \frac{\chi_2^2}{(1-\chi_2)^2} - \frac{\chi_1(1-\chi_1\chi_2)}{(1-\chi_1)(1-\chi_2)^2} \right] \\ &+ \frac{\chi}{3} \left[3 + \chi_2 - \frac{2\chi_1^2 - 4\chi_1 + 3}{(1-\chi_1)(1-\chi_2)} + \frac{1-\chi_1}{(1-\chi_2)^2} \right] + \frac{1}{9} \left[\frac{3\chi_1^2 - 6\chi_1 + 4}{(1-\chi_1)(1-\chi_2)} \right. \\ &\left. - \frac{1-\chi_1}{(1-\chi_2)^2} - 3\chi_2 - 3 \right]. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Proposition 4.1.7. Let $n = 4$. For $\chi \in [0, \chi_1]$ we have:

$$(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \frac{\chi^3}{9\chi_1} \left(\frac{\chi_3}{\chi_2} - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) - \frac{\chi^2}{3} \left(2 - \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) + \frac{\chi}{3} \chi_1. \quad (4.1.23)$$

For $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ we obtain:

$$\begin{aligned} &(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \\ &= \frac{\chi^3}{9} \left[\frac{1}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} + \frac{\chi_3}{\chi_2(\chi_1 - \chi_2)} \right] + \frac{\chi^2}{3} \left[-2 + \frac{\chi_3^2 - \chi_1(\chi_3 + 1)}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right] \\ &+ \frac{\chi}{3} \left[\frac{\chi_1^2(1 + \chi_1) - \chi_1(\chi_2^2 + \chi_3^2) + \chi_2^2\chi_3}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right] + \frac{\chi_1}{9} \left[-\chi_2 - \frac{\chi_1(\chi_1 + \chi_1\chi_3 - \chi_3^2)}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

For $\chi \in [\chi_2, \chi_3]$ we have $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\chi^3}{9(\chi_2 - \chi_3)} \left[\frac{1}{\chi_1 - \chi_3} + \frac{1 - \chi_1}{1 - \chi_2} \right] + \frac{\chi^2}{3} \left[\frac{-\chi_1\chi_2}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} \right. \\ &+ \frac{\chi_2(\chi_1 - 2\chi_3)}{(1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)} + \frac{2\chi_3}{(1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)} - \frac{\chi_1^2\chi_2 - \chi_3}{(1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} \left. \right] \\ &- \frac{\chi}{3} \left[-\frac{\chi_3^3}{(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} - \frac{\chi_2}{\chi_2 - \chi_3} - \frac{\chi_1^2}{(\chi_1 - \chi_3)(1 - \chi_2)} \right. \\ &+ \frac{\chi_2^3}{(\chi_2 - \chi_3)(1 - \chi_2)} + \frac{\chi_1\chi_3(1 - \chi_1\chi_2)}{(1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_3)} \left. \right] + \frac{1}{9} \left[-\chi_1\chi_2 \right. \\ &\left. + \frac{\chi_1^3}{(\chi_1 - \chi_2)(\chi_3 - \chi_1)} + \frac{\chi_2^3(1 + \chi_1 - \chi_1^2 - 2\chi_2 + \chi_1\chi_2)}{(\chi_1 - \chi_2)(1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)} - \chi_3(\chi_1 + \chi_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

For $\chi \in [\chi_3, 1]$ we have $(S_{\Delta_{n,3}}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) =$

$$\begin{aligned} &\frac{\chi^3}{9(1-\chi_3)} \left[\frac{\chi_1}{1-\chi_2} - \frac{\chi_2}{1-\chi_3} - \frac{\chi_2 - \chi_3}{(1-\chi_2)(1-\chi_3)} \right] - \frac{\chi^2}{3(1-\chi_3)} \left[1 - \chi_3 \right. \\ &+ \frac{\chi_1 - \chi_2}{1-\chi_2} - \frac{\chi_3(\chi_2 - \chi_3)}{1-\chi_3} \left. \right] + \frac{\chi}{3} \left[3 + \frac{1-\chi_2}{(1-\chi_3)^2} + \frac{\chi_1 + 4\chi_2 - 2\chi_2^2 - 3}{(1-\chi_2)(1-\chi_3)} + \chi_3 \right] \\ &+ \frac{\chi_3(\chi_2 + \chi_3 - \chi_3^2)}{3(1-\chi_3)^2} - \frac{\chi_2 + \chi_3 - 2\chi_2^2}{9(1-\chi_2)(1-\chi_3)^2} - \frac{\chi_1}{9(1-\chi_2)(1-\chi_3)}. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

4.2 The case of equidistant knots

Let us now consider the equidistant knots $\chi_j = \frac{j}{n}$ with $0 \leq j \leq n$ and extra-knots $\chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = 0$, respectively $\chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1$.

Theorem 4.2.1. *i) For $n = 1$ we have:*

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = -\frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{3}.$$

ii) For $n = 2$ we have:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{2\chi^3}{9} + \frac{\chi}{6}, & \chi \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{2\chi^3}{9} - \frac{2\chi^2}{3} + \frac{\chi}{2} - \frac{1}{18}, & \chi \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

iii) For $n = 3$ we have:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{\chi^3}{6} + \frac{\chi}{9}, & \chi \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{\chi^2}{6} + \frac{\chi}{6} - \frac{1}{162}, & \chi \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{\chi^3}{6} - \frac{\chi^2}{2} + \frac{7\chi}{18} - \frac{1}{18}, & \chi \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

iv) For $n = 4$ we have:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{2\chi^3}{9} + \frac{\chi}{12}, & \chi \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{2\chi^3}{9} - \frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi}{6} - \frac{1}{144}, & \chi \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -\frac{2\chi^3}{9} + \frac{\chi^2}{3} - \frac{\chi}{6} + \frac{7}{144}, & \chi \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{2\chi^3}{9} - \frac{2\chi^2}{3} + \frac{7\chi}{12} - \frac{5}{36}, & \chi \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

v) For $n \geq 5$ we have:

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) = \begin{cases} -\frac{\chi^{3n}}{18} + \frac{\chi}{3n}, & \chi \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{\chi^{3n}}{18} - \frac{\chi^2}{3} + \frac{2\chi}{3n} - \frac{1}{9n^2}, & \chi \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ \frac{1}{3n^2}, & \chi \in [\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}] \\ \frac{(1-\chi)^{3n}}{18} - \frac{(1-\chi)^2}{3} + \frac{2(1-\chi)}{3n} - \frac{1}{9n^2}, & \chi \in [\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}] \\ -\frac{(1-\chi)^{3n}}{18} + \frac{1-\chi}{3n}, & \chi \in [\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Remark 4.2.1.

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi) \leq \frac{1}{3n^2}. \quad (4.2.1)$$

4.3 Applications in approximation

Theorem 4.3.1. *Let $\Delta_{n,3}$ defined in (4.1.1), $n \geq 5$. Let $f \in C([0, 1])$. If $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, $0 \leq q \leq n - 1$, $0 < h \leq \frac{1}{2}$, then we have*

$$|(S_{\Delta_{n,3}}f)(\chi) - f(\chi)| \leq \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi)}{h^2}\right) \omega_2(f, h), \quad (4.3.1)$$

$$|(S_{\Delta_{n,3}}f)(\chi) - f(\chi)| \leq \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi)}{h^2 \chi(1 - \chi)}\right) \omega_2^\varphi(f, h), \quad (4.3.2)$$

where in the last inequality we have the additional condition $\chi \in (0, 1)$.

In the case of equidistant knots, using the estimate

$$\frac{(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)}{\chi(1 - \chi)} \leq \frac{1}{3(n - 1)}, \quad n \geq 2, \quad \chi \in (0, 1) \quad (4.3.3)$$

given in [11] we get from (4.3.2), for $h = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$:

$$\|S_{n,3}f - f\| \leq \frac{3}{2} \omega_2^\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right),$$

where the constant $\frac{3}{2}$ improves the constant $\frac{19}{12}$ given in [11].

Theorem 4.3.2. *Let $\Delta_{n,3}$ given in (4.1.1), with $n \geq 5$. Let $f \in C^2([0, 1])$. If $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, $0 \leq q \leq n - 1$, then*

$$\begin{aligned} & \left| (S_{\Delta_{n,3}}f)(\chi) - f(\chi) - \frac{1}{2} f''(\chi) \Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi) \right| \\ & \leq \frac{5}{6} \Gamma(\chi_{q-2}, \chi_{q-1}, \chi_q, \chi_{q+1}, \chi_{q+2}, \chi_{q+3})(\chi) \omega_1(f'', \|\Delta_{k,3}\|). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Lemma 4.3.1. *For $\chi \in \left[\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right]$, $n \geq 5$ we have:*

$$(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^4)(\chi) \leq \frac{1}{3n^4}. \quad (4.3.5)$$

Remark 4.3.1. Lemma 4.3.1 improves the estimation $(S_{n,3}(e_1 - \chi e_0)^4)(\chi) \leq \frac{4}{3n^4}$, $\chi \in [0, 1]$, obtained in [120].

Corollary 4.3.1. *For Schoenberg operators with equidistant knots, $S_{n,3}$, for $f \in C^2([0, 1])$, $\chi \in (0, 1)$ and $n \geq \max\left\{\frac{2}{\chi}, \frac{2}{1-\chi}, 5\right\}$ we have*

$$\left| n^2 [(S_{n,3}f)(\chi) - f(\chi)] - \frac{1}{6} f''(\chi) \right| \leq \frac{7}{36} \omega\left(f'', \frac{1}{n}\right). \quad (4.3.6)$$

Finally there exists the limit:

Corollary 4.3.2. *For Schoenberg operators with equidistant knots, $S_{n,3}$, for $f \in C^2([0, 1])$ and any compact interval $[a, b] \subset (0, 1)$ we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [(S_{n,3}f)(\chi) - f(\chi)] = \frac{1}{6} f''(\chi), \quad \text{uniformly for } \chi \in [a, b]. \quad (4.3.7)$$

4.4 Schoenberg operators for which the space of polynomials of degree two is invariant

The preservation of certain class of functions is a natural question which can be considered for the positive linear operators. For instance, Bernstein operators of degree k have the property of preservation of the degree of polynomials of degree smaller or equal to k . In the case of Schoenberg operators it is well known that the space of polynomials of degree 1 is invariant. But the invariance of the space of polynomials of degree 2 is not a general property of Schoenberg cubic operators. In the next theorem we construct special Schoenberg operators which have a such property.

Theorem 4.4.1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, n odd. There is an extended knot sequence $\Delta_{n,3}$:*

$$0 = \chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1,$$

such that

$$S_{\Delta_{n,3}}(\Pi_2) \subset \Pi_2.$$

4.5 Schoenberg-King type operators

If $(L_n)_n$, $L_n : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ is a sequence of positive linear operators that preserves the constant functions, by King type modification of them we mean a sequence of operators $(L_n^K)_n$, $L_n^K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, defined by

$$L_n^K(f, \chi) := L_n(f, r_n(\chi)), \quad f \in C([a, b]), \quad \chi \in [a, b],$$

where $r_n \in C([a, b])$, is a function such that $r_n([a, b]) \subset [a, b]$ and $L_n^K(e_2) = e_2$.

This kind of modification is due to King, [62] who applied it to Bernstein operators $B_n : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$. The resulting operators, which are noted here B_n^K , maintain the property of the uniform approximation of the functions in $C([0, 1])$. Since then, this idea was generalized in several directions. One of them is the application to several type of approximation operators, in [40]. However this kind of modification is not possible to be applied to any sequence of positive operators. We show that the King modification can be applied to Schoenberg operators.

Theorem 4.5.1. *For any knot sequence $\Delta_{n,3}$*

$$0 = \chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = \chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1,$$

exists a unique function $r_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, such that $S_{\Delta_{n,3}}^K(e_2) = e_2$. More r_n is continuous and

$$\|S_{\Delta_{n,3}}^K f - f\| \leq \frac{5}{3} \omega_1(f, \|\Delta_{n,3}\|). \quad (4.5.1)$$

Corollary 4.5.1. *In the conditions of Theorem 4.5.1, if $\|\Delta_{n,3}\| \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$), then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{\Delta_{n,3}}^K f - f\| = 0. \quad (4.5.2)$$

5 A definition of two–dimensional Schoenberg type operators

5.1 Two–dimensional Schoenberg type operators on arbitrary knots

Let $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n > 0$, $h > 0$, $m > 0$, $k > 0$ and the knot sequence $\Delta_{n,h}$:

$$0 = \chi_{-h} = \chi_{-h+1} = \dots = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n = \chi_{n+1} = \dots = \chi_{n+h} = 1, \quad (5.1.1)$$

respectively $\Delta_{m,k}$:

$$0 = \mu_{-k} = \mu_{-k+1} = \dots = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+k} = 1. \quad (5.1.2)$$

The Greville abscissas associated with knot sequence $\Delta_{n,h}$ are

$$\xi_{i,h} := \frac{\chi_{i+1} + \chi_{i+2} + \dots + \chi_{i+h}}{h}, \quad \text{with } -h \leq i \leq n-1, \quad (5.1.3)$$

and the Greville abscissas associated with knot sequence $\Delta_{m,k}$ are

$$\zeta_{j,k} := \frac{\mu_{j+1} + \mu_{j+2} + \dots + \mu_{j+k}}{k}, \quad \text{with } -k \leq j \leq m-1. \quad (5.1.4)$$

The B-splines $N_{i,h}(\chi)$ depending on $\Delta_{n,h}$ are defined through:

$$N_{i,h}(\chi) = (\chi_{i+h+1} - \chi_i)[\chi_i, \chi_{i+1}, \dots, \chi_{i+h+1}](\cdot - \chi)_+^h, \quad -h \leq i \leq n-1, \quad (5.1.5)$$

and the B-splines $N_{j,k}(\mu)$ depending on $\Delta_{m,k}$ are defined through:

$$N_{j,k}(\mu) = (\mu_{j+k+1} - \mu_j)[\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+k+1}](\cdot - \mu)_+^k, \quad -k \leq j \leq m-1. \quad (5.1.6)$$

Remark 5.1.1. If $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$ and $\mu \in [\mu_r, \mu_{r+1}]$ with $0 \leq q \leq n-1$, $0 \leq r \leq m-1$, then

$$N_{i,h}(\chi) = 0 \text{ for } i < q - h \text{ or } i \geq q + 1; \text{ and } N_{i,h}(\chi) \geq 0 \text{ for } q - h \leq i \leq q,$$

and

$$N_{j,k}(\mu) = 0 \text{ for } j < r - k \text{ or } j \geq r + 1; \text{ and } N_{j,k}(\mu) \geq 0 \text{ for } r - k \leq j \leq r.$$

Remark 5.1.2. For $\chi \in [0, 1]$:

$$i) \sum_{i=-h}^{n-1} N_{i,h}(\chi) = 1, \quad \sum_{i=-h}^{n-1} N_{i,h}(\chi) \geq 0,$$

For $\mu \in [0, 1]$:

$$ii) \sum_{j=-k}^{m-1} N_{j,k}(\mu) = 1, \quad \sum_{j=-k}^{m-1} N_{j,k}(\mu) \geq 0.$$

Definition 5.1.1. Points with coordinates (χ_i, μ_j) where $\chi_i \in \Delta_{n,h}$ and $\mu_j \in \Delta_{m,k}$ forms a network of points associated with knot sequence $\Delta_{n,h}$ and $\Delta_{m,k}$.

We use the following notations

$$\Delta_1 = \{\chi_i\}_{-h \leq i \leq n+h}, \quad \Delta_2 = \{\mu_j\}_{-k \leq j \leq m+k}, \quad (5.1.7)$$

$$\tilde{\Delta} := \Delta_1 \times \Delta_2. \quad (5.1.8)$$

$$\tilde{\Delta} := \tilde{\Delta}_{n,m}^{h,k} = \{(\chi_i, \mu_j), -h \leq i \leq n+h, -k \leq j \leq m+k\}. \quad (5.1.9)$$

Definition 5.1.2. *Two-dimensional Schoenberg type operators associated with $\tilde{\Delta}$, are defined as follows:*

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-h}^{n-1} \sum_{j=-k}^{m-1} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu)f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k}), \quad (5.1.10)$$

where $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Remark 5.1.3. By taking into account Remark 5.1.1 it follows that if $\chi \in [\chi_q, \chi_{q+1}]$, with $0 \leq q \leq n-1$ and $\mu \in [\mu_r, \mu_{r+1}]$ with $0 \leq r \leq m-1$, then

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=q-h}^q \sum_{j=r-k}^r N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu)f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k}). \quad (5.1.11)$$

Definition 5.1.3. *The surface generated by the two-dimensional operators of Schoenberg type defined in (5.1.10) is called the Schoenberg type surface.*

Proposition 5.1.1. *Let $f, g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Then*

$$S_{\tilde{\Delta}}(af + bg) = a(S_{\tilde{\Delta}}f) + b(S_{\tilde{\Delta}}g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.1.12)$$

Proposition 5.1.2. *Let $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Then*

$$(S_{\tilde{\Delta}}f) \geq 0. \quad (5.1.13)$$

Proposition 5.1.3. *Two-dimensional Schoenberg type operator $S_{\tilde{\Delta}}$ is a polynomial of degree at most h in the variable χ and degree at most k in variable μ , on each rectangle $[\chi_{i-1}, \chi_i] \times [\mu_{j-1}, \mu_j]$ with $0 \leq i \leq n-1$ and $0 \leq j \leq m-1$. Moreover, $S_{\tilde{\Delta}}$ is a B-spline in each variable.*

Proposition 5.1.4. *Two-dimensional Schoenberg type operators admit partial continuous derivatives on $[0, 1] \times [0, 1]$.*

Further on, the functions $e_0, \pi_1, \pi_2 \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$, defined by $e_0(\chi, \mu) = 1$, $\pi_1(\chi, \mu) = \chi$, $\pi_2(\chi, \mu) = \mu$ with $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ are considered.

Proposition 5.1.5. *For two-dimensional Schoenberg type operators and any $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ we have:*

- i) $(S_{\tilde{\Delta}}e_0)(\chi, \mu) = 1$,
- ii) $(S_{\tilde{\Delta}}\pi_1)(\chi, \mu) = \chi$,
- iii) $(S_{\tilde{\Delta}}\pi_2)(\chi, \mu) = \mu$,
- iv) $S_{\tilde{\Delta}}(\pi_1\pi_2)(\chi, \mu) = \chi\mu$.

Proposition 5.1.6. *Let $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ an affine function. Then*

$$(S_{\tilde{\Delta}}\varphi) = \varphi. \tag{5.1.14}$$

In the next proposition the notation $e_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$ is used, and e_0 denotes the constant function equal to 1, on the both sets $[0, 1]$ and $[0, 1] \times [0, 1]$.

Proposition 5.1.7. *For two-dimensional Schoenberg type operators $S_{\tilde{\Delta}}$ and each $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ we have:*

- i) $(S_{\tilde{\Delta}}(\pi_1 - \chi e_0))(\chi, \mu) = 0$,
- ii) $(S_{\tilde{\Delta}}(\pi_2 - \mu e_0))(\chi, \mu) = 0$,
- iii) $(S_{\tilde{\Delta}}(\pi_1 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu) = (S_{\Delta_1}(e_1 - \chi e_0)^2)(\chi)$,
- iv) $(S_{\tilde{\Delta}}(\pi_2 - \mu e_0)^2)(\chi, \mu) = (S_{\Delta_2}(e_1 - \mu e_0)^2)(\mu)$.

The sufficient condition for one-dimensional positive linear operators $L_n(f_1)$ to uniformly converge at the continuous function f_1 , [16], it is also preserved for two-dimensional Schoenberg type operators as shown in the following theorem.

Theorem 5.1.1. *For that two-dimensional Schoenberg type operators*

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-h}^{n-1} \sum_{j=-k}^{m-1} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu)f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k})$$

to converge uniformly on $[0, 1] \times [0, 1]$ to the continuous function $f(\chi, \mu)$ it is sufficient that for any $\eta_\epsilon > 0$

$$\sum \sum_{\|(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k}) - (\chi, \mu)\| < \eta_\epsilon} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu) \rightarrow 1, \tag{5.1.15}$$

uniformly for $0 \leq \chi \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ when $n \rightarrow \infty$ and $m \rightarrow \infty$.

Definition 5.1.4. *We consider knot sequence (5.1.7). The norm corresponding to each knot sequence is:*

$$\|\Delta_1\| = \max_i(\chi_{i+1} - \chi_i), \text{ respectiv } \|\Delta_2\| = \max_i(\mu_{i+1} - \mu_i). \tag{5.1.16}$$

In these conditions, we define the norm

$$\|\tilde{\Delta}\| := \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\|, \tag{5.1.17}$$

therefore $\|\tilde{\Delta}\|^2 = \max_i((\chi_{i+1} - \chi_i)^2 + (\mu_{i+1} - \mu_i)^2)$.

A quantitative version of the degree of approximation can be given using the first order modulus of continuity, defined as follows:

$$\omega_1(f, \rho) = \sup\{|f(\chi_1, \mu_1) - f(\chi_2, \mu_2)|, (\chi_1, \mu_1), (\chi_2, \mu_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \|(\chi_1, \mu_1) - (\chi_2, \mu_2) \| \leq \rho\}, \tag{5.1.18}$$

where $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$ and $\rho > 0$.

Theorem 5.1.2. For any $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$ two-dimensional Schoenberg type operators $S_{\tilde{\Delta}}$ satisfies inequality

$$\|(S_{\tilde{\Delta}}f) - f\| \leq \mathcal{V}\omega_1(f, \|\tilde{\Delta}\|), \quad (5.1.19)$$

where $\mathcal{V} = \frac{1}{2} \max\{h + 1, k + 1\}$.

Corollary 5.1.1. If

$$\|\tilde{\Delta}\| \rightarrow 0,$$

then two-dimensional Schoenberg type operators

$$(S_{\tilde{\Delta}}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-h}^{n-1} \sum_{j=-k}^{m-1} N_{i,h}(\chi)N_{j,k}(\mu)f(\xi_{i,h}, \zeta_{j,k})$$

converge uniformly on $[0, 1] \times [0, 1]$ to f , for any continuous function f .

Theorem 5.1.3. The second moment of the two-dimensional Schoenberg type operators $S_{\tilde{\Delta}}$ for $h = k = 3$, is

$$\begin{aligned} & (S_{\tilde{\Delta}}((\pi_1 - \chi e_0)^2 + (\pi_2 - \mu e_0)^2))(\chi, \mu) \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{\chi_{q+3} - \chi_{q-1}}{\chi_{q+2} - \chi_q} \cdot \frac{(\chi - \chi_q)^3}{\chi_{q+1} - \chi_q} - \frac{\chi_{q+2} - \chi_{q-2}}{\chi_{q+1} - \chi_{q-1}} \cdot \frac{(\chi - \chi_{q+1})^3}{\chi_{q+1} - \chi_q} \right. \\ & - \sum_{q-1 \leq i < j \leq q+2} (\chi - \chi_i)(\chi - \chi_j) + \frac{\mu_{r+3} - \mu_{r-1}}{\mu_{r+2} - \mu_r} \cdot \frac{(\mu - \mu_r)^3}{\mu_{r+1} - \mu_r} \\ & \left. - \frac{\mu_{r+2} - \mu_{r-2}}{\mu_{r+1} - \mu_{r-1}} \cdot \frac{(\mu - \mu_{r+1})^3}{\mu_{r+1} - \mu_r} - \sum_{r-1 \leq i < j \leq r+2} (\mu - \mu_i)(\mu - \mu_j) \right] \quad (5.1.20) \end{aligned}$$

where $(\chi, \mu) \in [\chi_q, \chi_{q+1}] \times [\mu_r, \mu_{r+1}]$ with $0 \leq q \leq n - 1$ and $0 \leq r \leq m - 1$.

5.2 Two-dimensional Schoenberg type operators on equidistant knots

Now the case $h = k = 3$, $m = n$ and equidistant knots is analysed. More precisely, the equidistant knots are $\chi_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$, and the extra-knots are $\chi_{-3} = \chi_{-2} = \chi_{-1} = 0$ and $\chi_{n+1} = \chi_{n+2} = \chi_{n+3} = 1$, respectively $\mu_j = \frac{j}{n}$, $0 \leq j \leq n$, with extra-knots $\mu_{-3} = \mu_{-2} = \mu_{-1} = 0$ and $\mu_{m+1} = \mu_{m+2} = \mu_{m+3} = 1$.

The Greville abscissas are in this case

$$\xi_{i,3} = \frac{\chi_i + \chi_{i+1} + \chi_{i+2}}{3} := \begin{cases} \chi_{i+2}, & i \in \{-3, \dots, n-1\} \setminus \{-2, n-2\} \\ \frac{1}{3n}, & i = -2, \\ \frac{3n-1}{3n}, & i = n-2 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

respectively

$$\zeta_{j,3} = \frac{\mu_j + \mu_{j+1} + \mu_{j+2}}{3} := \begin{cases} \mu_{j+2}, & j \in \{-3, \dots, n-1\} \setminus \{-2, n-2\} \\ \frac{1}{3n}, & j = -2, \\ \frac{3n-1}{3n}, & j = n-2 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

The B-splines are

$$N_{i,3}(\chi) = (\chi_{i+4} - \chi_i)[\chi_i, \chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \chi_{i+3}, \chi_{i+4}](\cdot - \chi)_+^3, \quad (5.2.3)$$

respectively

$$N_{j,3}(\mu) = (\mu_{j+4} - \mu_j)[\mu_j, \mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \mu_{j+3}, \mu_{j+4}](\cdot - \mu)_+^3. \quad (5.2.4)$$

We denote with $\tilde{S}_{n,3}$ two-dimensional Schoenberg type operators on equidistant knots with $h = k = 3$, $m = n$, and with $S_{n,3}$ one-dimensional third degree Schoenberg operators on equidistant knots.

Definition 5.2.1. *Two-dimensional Schoenberg type operators $\tilde{S}_{n,3}$, total degree at most 6, are:*

$$(\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) = \sum_{i=-3}^{n-1} \sum_{j=-3}^{n-1} N_{i,3}(\chi)N_{j,3}(\mu)f(\xi_{i,3}, \zeta_{j,3}). \quad (5.2.5)$$

Lemma 5.2.1. *The second moment of the two-dimensional Schoenberg type operators $\tilde{S}_{n,3}$, with $n \geq 5$, $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ verifies the relation*

$$(\tilde{S}_{n,3}(\pi_1 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu) \leq \frac{1}{3n^2}. \quad (5.2.6)$$

Moreover,

$$(\tilde{S}_{n,3}(\pi_1 - \chi e_0)^2)(\chi, \mu) = \frac{1}{3n^2}, \quad (5.2.7)$$

for $\chi \in [\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}]$ and $\mu \in [0, 1]$.

Similar relations are true for $(\tilde{S}_{n,3}(\pi_2 - \mu e_0)^2)(\chi, \mu)$.

Lemma 5.2.2. *For $n \geq 5$ it results*

$$(\tilde{S}_{n,3}((\pi_1 - \chi e_0)^4 + (\pi_2 - \mu e_0)^4))(\chi, \mu) \leq \frac{8}{3n^4}. \quad (5.2.8)$$

Theorem 5.2.1. *The following limit is true*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2((\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) - f(\chi, \mu)) = \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}(\chi, \mu) + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(\chi, \mu) \right], \quad (5.2.9)$$

for any $f \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$ and $(\chi, \mu) \in (0, 1) \times (0, 1)$.

To evaluate the approximation order through the operators $\tilde{S}_{n,3}$ we use general evaluations, expressed with second order moduli of continuity, demonstrated in the paper [87]. These give a finer evaluation than the evaluations with the first order modulus. For this we introduce the following notations. Let be $(X, \|\cdot\|_X)$ a normed space and $D \subset X$ a compact and convex set. Let be $e_0 \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, $e_0(t) = 1, t \in D$ and $id : X \rightarrow X$ the identical function. Let be a family of positive Borel measures $\{\tilde{\mu}_x\}_{x \in D}$ on D , $\sigma_x \neq 0$. For any Banach space $(Y, \|\cdot\|_Y)$ we can consider the linear operator $L_Y : C(D, Y) \rightarrow \mathcal{F}(D, Y)$ defined by the relation

$$(L_Y f)(x) = \int_D f d\sigma_x, \quad f \in C(D, Y), \quad x \in D, \quad (5.2.10)$$

where the integral is taken in the Bochner sense. Denote by X^* , the space of linear continuous functionals $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

If $f \in C(D, Y)$ and $h > 0$ then the usual second order modulus is defined by

$$\tilde{\omega}_2(f, h) := \sup \left\{ \left\| f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) \right\|_Y, u, v \in D, \|u - v\|_X \leq 2h \right\}. \quad (5.2.11)$$

With these elements the following theorem it will prove.

Theorem 5.2.2. *In the above conditions, if in addition we assume that X has a finite dimension p and the conditions are fulfill:*

i) $L_{\mathbb{R}}(e_0) = e_0$

ii) $L_{\mathbb{R}}(\varphi) = \varphi$, for any $\varphi \in X^$,*

then

$$\|(L_Y)(f)(x) - f(x)\|_Y \leq \left(pL_{\mathbb{R}}(e_0, x) + \frac{1}{2h^2}L_{\mathbb{R}}(\|\cdot - x\|_X^2, \chi) \right) \tilde{\omega}_2(f, h), \quad (5.2.12)$$

for $f \in C(D, Y)$, $h > 0$, $x \in D$ [86], [87].

In the case of operators $\tilde{S}_{n,3}$ we get:

Theorem 5.2.3. *We have*

$$|(\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) - f(\chi, \mu)| \leq \left(2 + \frac{1}{3h^2n^2} \right) \tilde{\omega}_2(f, h), \quad (5.2.13)$$

where $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$, $h > 0$, $(\chi, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Consequently:

$$\|(\tilde{S}_{n,3}f) - f\| \leq \frac{7}{3} \tilde{\omega}_2 \left(f, \frac{1}{n} \right), \quad f \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2.14)$$

In [87] the following *second order global continuity modulus* is also defined:

Definition 5.2.2.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^*(f, h) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\chi_i) - f(\chi) \right\|_Y, \chi \in D, \chi_i \in D, \|\chi_i - \chi\|_X \leq h, \right. \\ \left. \lambda_i \in (0, 1), 0 \leq i \leq n, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

where $f \in C(D, Y)$, $D \subset X$ it is a compact and convex set in the normed space X , Y is another normed space, and $h > 0$.

For the same previously defined operators, an evaluation that does not depend on the size of the space X is demonstrated:

Theorem 5.2.4. *We assume that conditions i) and ii) of Theorem 5.2.2 are fulfilled. Then for any Banach space Y , the operator L_Y define in (5.2.10) satisfies the inequality*

$$\|(L_Y f)(x) - f(x)\|_Y \leq \left((L_{\mathbb{R}}(e_0))(x) + \frac{1}{h^2}(L_{\mathbb{R}}(\|\cdot - x\|_X^2)(x)) \right) \tilde{\omega}_2^*(f, h), \quad (5.2.16)$$

for $f \in C(D, Y)$, $h > 0$ [87], [88].

Applying this theorem to operators $\tilde{S}_{n,3}$ we obtain

Theorem 5.2.5. *For a function f continue on $[0, 1] \times [0, 1]$ and $h > 0$ we have*

$$|(\tilde{S}_{n,3}f)(\chi, \mu) - f(\chi, \mu)| \leq \left(1 + \frac{2}{3n^2h^2} \right) \tilde{\omega}_2^*(f, h).$$

Consequently

$$\|(\tilde{S}_{n,3}f) - f\| \leq \frac{5}{3} \tilde{\omega}_2^* \left(f, \frac{1}{n} \right), \quad f \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2.17)$$

6 Applications of Schoenberg spline operators in practice

The main parameter in the design of solar energy conversion systems is the solar irradiance. A low accuracy of the theoretical models for estimating the solar irradiance leads to an inaccurate estimation of the energy that will be obtained and also affects the durability of the solar energy conversion systems. The values of the direct solar irradiance were measured in the Research Center *Renewable Energy Systems and Recycling* from R&D Institute of *Transilvania University of Brasov*.

6.1 Evaluation of the errors between the experimental values of the direct solar irradiance and the values calculated with the Meliss model

In this study, the maximum value of the direct solar irradiance in one minute "i", is denoted by B_{exp} . Standard local time is transformed into apparent solar time using the equation of time

$$ET = 9.87 \sin 2B - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B, \quad (6.1.1)$$

with

$$B = (N - 81) \frac{360}{364}, \quad (6.1.2)$$

and longitude correction

$$AST = LST + ET \pm 4(SL - LL) - DS, \quad (6.1.3)$$

where LST is the standard local time, ET is the equation of time, SL is the standard longitude, LL is the local longitude, and DS is a factor that takes into account whether the time in the analyzed period is summer time or winter time (it is 0 or 60 minutes) [57].

The study uses the measured values B_{exp} from the period 2013-2016, for the improvement of the theoretical model, and those of 2017 for the validation of the new formulations of the model. The arithmetic mean of the values of the direct solar irradiance in the clear days of the monitored period was calculated for each minute "i", noted with $B_{exp,m}$.

Experimental solar energy for the period of time $[t_1, t_2]$ is note $E_{B_{exp}}$ and is calculated with the formula

$$E_{B_{exp}} = \frac{1}{60} \sum_{i=t_1}^{t_2} B_{exp} \cdot \tau \quad [Wh/m^2], \quad (6.1.4)$$

considering B_{exp} constant over a period of time τ of one minute between two measurements. Analogous proceeded for the average experimental solar energy, noted $E_{B_{exp,m}}$, using in (6.1.4) arithmetic mean of values B_{exp} .

The interval $[t_1, t_2]$ was first considered between 04:00-20:00 for the classification of days, then was reduced to 08:00-16:00, because between these hours there are big differences between the values B_{exp} and the direct solar irradiance, denoted by B , obtained from the theoretical Meliss model.

To estimate every minute "i" the direct solar irradiance at ground level, B , for Braşov, $45.67N$ latitude and $25.55E$ longitude, we use the theoretical clear sky Meliss model [75]:

$$B = B_0 \cdot e^{\frac{-T_R}{0.9+9.4 \sin \alpha}}, \quad [W/m^2] \quad (6.1.5)$$

Solar irradiance at the upper limit of the Earth's atmosphere B_0 , take values between $1413W/m^2$ on January 3, corresponding to the shortest distance from Earth to the Sun and $1321W/m^2$ on July 3, corresponding to the greatest Earth-Sun distance. B_0 is calculated [57] depending on the number of the day (N) and using the solar constant $B_{SC} = 1367W/m^2$ with the formula

$$B_0 = B_{SC}(1 + 0.0334 \cdot \cos(0.9856N - 2.72)) [W/m^2]. \quad (6.1.6)$$

The turbidity factor T_R represents the transparency of the atmosphere to the solar radiation, and is given in [75] as monthly constant values with values between 1.8 and 2.7 for mountain areas, respectively between 2.1 and 3.5 for plain areas, and for cities the values are between 3.1 and 4.3. T_R depends on local atmospheric conditions, with monthly values between 2.8 and 3.2 for Braşov [126].

The elevation solar angle, α , takes daily values between zero (at sunrise and sunset) and a maximum value at noon; the highest values are recorded at the summer solstice and the lowest values are recorded at the winter solstice [130]. This angle depends on time and location [31] and is calculated with

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega \quad (6.1.7)$$

where δ is the angle of solar declination, ω is the hour angle, and φ is the latitude.

The absolute error, ε_a , is calculated like the difference between an experimental value V_{exp} and the theoretical one V , corresponding to minute "i". For this reason it can take both positive and negative values during a day.

$$\varepsilon_a = V_{exp,i} - V_i. \quad (6.1.8)$$

The absolute average error, $\varepsilon_{a,m}$, is calculated by considering the average of the experimental values and the average of the theoretical values corresponding to the minute "i" in (6.1.8).

The relative error, ε_r expressed as a percentage, is calculated with

$$\varepsilon_r = \frac{V_{exp,i} - V_i}{V} \cdot 100, [\%]. \quad (6.1.9)$$

The absolute mean square error between an experimental value $V_{exp,i}$ and the theoretical one V_i , for n values in the considered time interval, it is

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{exp,i} - V_i)^2}{n}}. \quad (6.1.10)$$

The relative mean square error of an experimental value $V_{exp,i}$ and the theoretical one V_i , for n values in the considered time interval, is

$$rRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{r,i})^2}{n}}, [\%]. \quad (6.1.11)$$

A first step in the proposed analysis was the study of July in the period 2013–2016. For July 2016, the available direct solar energy is evaluated based on the relation (6.1.4). Analyzing the variability of the direct solar irradiance, four types of days were identified, namely: clear sky days, partially clear sky days, partially cloudy days and cloudy days. Only four clear sky days were found in July 2016. The procedure for

identifying clear days was repeated for July 2013, 2014 and 2015. Therefore, 13 clear sky days were selected.

In 11 from those the 13 clear days selected, the model overestimates the direct solar irradiance in the central part of the day, more precisely in the time interval 8:00–16:00. An analysis was performed for this time interval using the absolute, relative error and respectively the mean square error between the experimental values and those calculated with the Meliss model.

Similarly, an analysis was performed corresponding to the time interval 4:00–20:00 for those 13 clear days. The obtained results lead to the conclusion that there are big differences between the experimental values and those calculated with the Meliss model appear in the central part of the day, in the time interval 08:00–16:00.

Except for two of the 13 clear days, the model overestimates the direct solar irradiance, the absolute average error is -140.86 W/m^2 corresponding to an average relative error of -20.35% , in solar time interval 08:00–16:00.

A similar analysis was conducted for a winter month, November, on the same period as 2013–2016. The conclusions of the November months study from the period 2013–2016 indicates to us that, except for two days out of the 11 clear sky days identified in the period mentioned above, the model underestimates the direct solar irradiance, the absolute average error is 135.14 W/m^2 corresponding to an average relative error of 29.54% in solar time interval 08:00–16:00. The absolute mean error between the direct solar energy and the calculated one in the same range as above is 0.56 kWh/m^2 , and the average relative error is 9.49% . For the solar time interval 07:00–17:00, the absolute average error increases to 0.65 kWh/m^2 , showing the importance of your accuracy in estimating the area in the central part of the day.

We deduce that the Meliss model underestimates the experimental values in the winter months, in contrast to the summer months when the model overestimates the direct solar irradiance on clear sky days. Therefore, the accuracy of the Meliss model needs to be improved, mainly in the solar time interval 08:00–16:00.

Using the Schoenberg spline operators, the Meliss model was improved, the study being extended to all months of the years 2013–2016. The experimental values measured in 2017 were used to validate the results obtained.

6.2 The use of third degree Schoenberg spline operators in the purpose improve the accuracy of the Meliss model

To improve the model, the turbidity factor considered constant during a month was replaced by time dependent fourth degree polynomials. Experimental direct solar irradiance values were used to determine cubic spline functions, using Schoenberg operators in a program created in Wolfram Mathematica 10.1. These spline functions are used to obtain two interpolation polynomials for the turbidity factor, one for the warm season and one for the cold season. The new form of the model has been validated using the 2017 measurements, the accuracy has been improved, reducing the relative error from 8.12% to 4% in the warm season and from 5.02% to 4.15% in the cold season. These improvements influence both the more accurate assessment of the solar energy to be captured and the design process of the systems.

A general algorithm has been developed to improve the accuracy of clear sky models. This algorithm was applied to the Meliss model, which estimates it every minute "i" direct solar irradiance with the formula (6.1.5). The algorithm consists of the following steps.

1. Data acquisition and processing

Based on the experimental values of the direct solar irradiance, clear days are identified and selected. For the identified clear days, in order to evaluate the accuracy of the model for clear sky, they are calculated for each minute "i", absolute and relative errors between experimental values B_{exp} of the direct solar irradiance and the calculated values B with the theoretical model.

2. Creating daily spline functions corresponding to experimental values, using Schoenberg operators

For clear days, in the case of databases with measured values at a rate of one minute, the measured values are still considered every 10 minutes along the interval between the sunrise and the sunset. These values are stored in a database and used to create third degree spline functions.

The solar time interval $[t_r, t_a]$ is normalized to $[0,1]$ using

$$x = \frac{t_s - t_r}{t_a - t_r} \quad (6.2.1)$$

where: x is the normalized solar time, t_s is the solar time expressed in minutes, t_r represents the time corresponding to sunrise, and t_a represents the time corresponding to the sunset. Further, $\left[\frac{t_a - t_r}{10}\right]$ normalized values of solar time are considered knots in the procedure of creating daily splines.

Creating spline functions using Schoenberg operators was made possible by writing a program in Wolfram Mathematica 10.1. Equidistant knots have been used to build spline functions with Schoenberg operators, more precisely these equidistant knots are those $\left[\frac{t_a - t_r}{10}\right]$ normalized solar time values.

Hence, the program built in Wolfram Mathematica 10.1, works with the number of knots $n = \left[\frac{t_a - t_r}{10}\right]$, degree of splines $k = 3$ and with $x \in [0, 1]$, finally obtaining the analytical expressions of the cubic splines $s(x)$.

Considering that the solar elevation angle depends on time solar, the direct solar irradiance can be calculated as a function with normalized solar time as variable, $x \in [0, 1]$, using the Meliss model (6.1.5), with constant turbidity factor, presented in [75]. The measured direct solar energy is obtained from the experimental values of the direct solar radiation from (6.1.4).

Direct solar energy E_{Bf} calculated by considering a function f that corresponds to a period of time $[t_1, t_2]$, is

$$E_{Bf} = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx [Wh/m^2]. \quad (6.2.2)$$

The values of solar energy obtained from (6.1.4) and from (6.2.2) are used to determine absolute error and relative error. These errors evaluate how well the measured values are approximated by the created spline functions.

Using splines has also the advantage that, the spline function mediates the measured values of direct solar irradiance, eliminating accidental deviations due to the variability of the solar radiation.

3. Determination of a daily interpolation polynomial for direct solar irradiance using the spline function created

To simplify the analytical expression of the spline function $s(x)$, which contain $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$ of third degree polynomials, in Wolfram Mathematica 10.1 an interpolation polynomial of degree low $B_{pol}(x)$ is obtained.

The fourth degree of the polynomial is recommended because the third or lower degree interpolation polynomials do not approximate well enough, and the fifth or higher degree interpolation polynomials do not bring a significant improvement over those of the fourth degree. This conclusion is based on the analysis of a large number of experimental data for clear sky days for which relative errors below 1% were obtained.

This daily interpolation polynomial is obtained using the spline function. If the interpolation is applied directly to $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$ of measured values of direct solar irradiance, we obtain in Wolfram Mathematica 10.1 an interpolation polynomial of degree $\left[\frac{t_a-t_r}{10}\right]$, which is not convenient. This is another reason that demonstrates the need to create spline functions, because in this way a small degree interpolation polynomial is obtained.

4. Determination of the turbidity factor as a daily interpolation polynomial

To reduce the error between the experimental data and the calculated values, the interpolation polynomial $B_{pol}(x)$ is used further to determine the daily variation of turbidity

$$T_R(x) = f(B_{pol})(x). \quad (6.2.3)$$

To simplify the analytical expression of turbidity which is calculated with (6.2.3), an interpolation polynomial $T_{Rpol}(x)$ is obtained in Wolfram Mathematica 10.1 approximating the daily variation of the turbidity.

Similar to way for determining the degree of the interpolation polynomial $B_{pol}(x)$, a fourth degree polynomial is recommended. The relative errors between $T_R(x)$ and $T_{Rpol}(x)$ they are very small, smaller than 0.1%.

5. Determination of the interpolation polynomial corresponding to the factor of turbidity for the warm season, respectively for the cold season

For each month in the monitored interval, a monthly interpolation polynomial is obtained that approximates the turbidity, a polynomial denoted $T_{RM}(x)$. This polynomial is obtained by averaging the homologous coefficients of the daily interpolation polynomials $T_{Rpol}(x)$ from a month.

From interpolation polynomials $T_{RM}(x)$ established for the warm season months, averaging the coefficients of the homologous terms, the interpolation polynomial for the warm season is obtained, noted $T_{RWS}(x)$. Similarly, for the cold season months, an interpolation polynomial $T_{RCS}(x)$ is obtained.

6. New formulations of the model

Using $T_{RWS}(x)$ a new formulation of the model for direct solar irradiance for the warm season is obtained, namely

$$B_{TRWS}(x) = f(T_{RWS})(x) [W/m^2], \quad (6.2.4)$$

respectively for the cold season

$$B_{TRCS}(x) = f(T_{RCS})(x) [W/m^2]. \quad (6.2.5)$$

Direct solar energy for the warm season, noted E_{BWS} , obtained with the help of the improved model, it is calculated with (6.2.2) considering the function T_{RWS} . Similar is calculated, using T_{RCS} , direct solar energy for the cold season, noted E_{BCS} .

The above algorithm was applied to improve the model Meliss (6.1.5), using data measured on clear days identical between the years 2013 and 2017.

1.Data acquisition and processing

For this study, the experimental data recorded every minute, for each day of the period 2013-2016, were processed. From the whole monitored period, 121 clear sky days were identified.

2.Creating daily spline functions corresponding to experimental values, using Schoenberg operators

For clear days, from the values measured every minute, the measured values of the direct solar irradiance every 10 minutes during the hourly interval are still considered [4:00, 20:00], which means 16 hours with 6 measured values considered in an hour, therefore 96 measured values selected for a day. These values are stored in a database and used to create third degree spline functions. The solar time interval [4:00, 20:00] corresponding to solar time $t_a - t_r$ is normalized to [0,1] using the relation (6.2.1).

Creating spline functions using Schoenberg operators was made possible by writing a program in Wolfram Mathematica 10.1, in the Figure 6.1 an excerpt from this program is presented. Equidistant knots were used to build spline functions with Schoenberg operators, more precisely these equidistant knots are the 96 values of the normalized solar time. The program built in Wolfram Mathematica 10.1, works with $n = 96, k = 3$ and $x \in [0, 1]$ normalized solar time, resulting a third degree spline function for each clear day, spline function which contains 96 third degree polynomials.

In the Table 6.1, the excerpt of spline function for 28 August 2015 is presented.

Table 6.1: Spline function created based on the measured values from 28.08.2015 (excerpt)

Expression of spline function	Normalized solar time	Solar time
$s = 1.474x^3$	[0, 1/96]	[4:00, 4:10]
$s = -0.165 + 47.71x - 4580.17x^2 + 146567x^3$	[1/96, 2/96]	[4:10, 4:20]
$s = 3.81 - 524.822x + 22901.4x^2 - 293138x^3$	[2/96, 3/96]	[4:20, 4:30]
$s = -9.608 + 763.384x - 18321.2x^2 + 146570x^3$	[3/96, 4/96]	[4:30, 4:40]
$s = 2.06 - 76.8x + 1843.2x^2 - 14745.6x^3$	[4/96, 5/96]	[4:40, 4:50]
$s = -4.189 + 283.2x - 5068.8x^2 + 29491.2x^3$	[5/96, 6/96]	[4:50, 5:00]
...
$s = 137612 - 893649x + 1.943 \cdot 10^6x^2 - 1.407 \cdot 10^6x^3$	[45/96, 46/96]	[11:30, 11:40]
$s = -539555 + 3.346 \cdot 10^6x - 6.904 \cdot 10^6x^2 + 4.747 \cdot 10^6x^3$	[46/96, 47/96]	[11:40, 11:50]
$s = 411395 - 2.481 \cdot 10^6x + 4.997 \cdot 10^6x^2 - 3.355 \cdot 10^6x^3$	[47/96, 48/96]	[11:50, 12:00]
$s = -308449 + 1.837 \cdot 10^6x - 3.64 \cdot 10^6x^2 + 2.403 \cdot 10^6x^3$	[48/96, 49/96]	[12:00, 12:10]
$s = 57870.9 - 315095x + 577894x^2 - 351683x^3$	[49/96, 50/96]	[12:10, 12:20]
$s = 641683 - 3.677 \cdot 10^6x + 7.034 \cdot 10^6x^2 - 4.483 \cdot 10^6x^3$	[50/96, 51/96]	[12:20, 12:30]
...
$s = -4.263 \cdot 10^6 + 1.39 \cdot 10^7x - 1.51 \cdot 10^7x^2 + 5.465 \cdot 10^6x^3$	[89/96, 90/96]	[18:50, 19:00]
$s = 7.339 \cdot 10^6 - 2.322 \cdot 10^7x + 2.45 \cdot 10^7x^2 - 8.615 \cdot 10^6x^3$	[90/96, 91/96]	[19:00, 19:10]
$s = -11460.9 + 37187.5x - 40172.5x^2 + 14450.7x^3$	[91/96, 92/96]	[19:10, 19:20]
$s = 91585.5 - 285392x + 296433x^2 - 102629x^3$	[92/96, 93/96]	[19:20, 19:30]
$s = -81753.4 + 251399x - 257675x^2 + 88031.2x^3$	[93/96, 94/96]	[19:30, 19:40]
$s = 28437.4 - 86206.8x + 87114.2x^2 - 29343.7x^3$	[94/96, 95/96]	[19:40, 19:50]
$s = 1.093 - 1.164 \cdot 10^{-10}x^3$	[95/96, 96/96]	[19:50, 20:00]

```

For[k = 0, k < n + 1, k++,
  If[k < 1, c[-3, x_] := n^4 (1/n - x)^3;
    c[-2, x_] := (n^4) / 8 (2/n - x)^3 - n^4 (1/n - x)^3;
    c[-1, x_] := (n^4) / 18 (3/n - x)^3 - (n^4) / 4 (2/n - x)^3 + (n^4) / 2 (1/n - x)^3;
    c[0, x_] := (n^4) / 24 (4/n - x)^3 - (n^4) / 6 (3/n - x)^3 + (n^4) / 4 (2/n - x)^3
    - (n^4) / 6 (1/n - x)^3;
    For[i = 1, i < n, i++,
      c[i_, x_] := (n^4) / 24 ((i + 4) / n - x)^3 - (n^4) / 6 ((i + 3) / n - x)^3
      + (n^4) / 4 ((i + 2) / n - x)^3 - (n^4) / 6 ((i + 1) / n - x)^3 + (n^4) / 24 (i / n - x)^3];
    For[j = -3, j < n, j++, N3[j_, x_] := 4/n c[j, x]];
  Sf1[x_] = Sum[f[j, 3] N3[j, x], {j, -3, n - 1}];
  Print["k=", k];
  Print[CoefficientList[Sf1[x], x]];
  w = CoefficientList[Sf1[x], x];
  T11[x_] = w.{1, x, x^2, x^3};
  Print["T1(0,1/96)=", T11[x]],
  If[k < 2, c[-3, x_] := 0;
    c[-2, x_] := (n^4) / 8 (2/n - x)^3;
    c[-1, x_] := (n^4) / 18 (3/n - x)^3 - (n^4) / 4 (2/n - x)^3;
    c[0, x_] := (n^4) / 24 (4/n - x)^3 - (n^4) / 6 (3/n - x)^3 + (n^4) / 4 (2/n - x)^3;
    c[1, x_] := (n^4) / 24 ((1 + 4) / n - x)^3 - (n^4) / 6 ((1 + 3) / n - x)^3
    + (n^4) / 4 ((1 + 2) / n - x)^3 - (n^4) / 6 ((1 + 1) / n - x)^3;
    For[i = 2, i < n, i++,
      c[i_, x_] := (n^4) / 24 ((i + 4) / n - x)^3 - (n^4) / 6 ((i + 3) / n - x)^3
      + (n^4) / 4 ((i + 2) / n - x)^3 - (n^4) / 6 ((i + 1) / n - x)^3 + (n^4) / 24 (i / n - x)^3];
    For[j = -3, j < n, j++, N3[j_, x_] := 4/n c[j, x]];
  Sf2[x_] = Sum[f[j, 3] N3[j, x], {j, -3, n - 1}];
  Print["k=", k];
  Print[CoefficientList[Sf2[x], x]];
  w = CoefficientList[Sf2[x], x];
  T12[x_] = w.{1, x, x^2, x^3};
  Print["T1(1/96,2/96)=", T12[x]],
  If[k < 3, c[-3, x_] := 0;

```

Figure 6.1: Program built to create daily spline functions (fragment)

In Figure 6.2 are represented for 28 August 2015 and $x \in [0, 1]$: the direct solar irradiance B calculated with the Meliss model; the experimental values of direct solar irradiance B_{exp} and the spline function s . Analyzing these data, the biggest differences are in the solar time interval [8:00, 16:00] corresponding to the normalized solar time [0.25, 0.75]. In Figure 6.3 is a detail of Figure 6.2 for the solar time interval [10, 14].

On the normalized solar time [0, 1], in 28 August 2015, the direct solar energy corresponding to the experimental data is $E_{B_{exp}} = 8184.26 \text{ Wh/m}^2$, and the one corresponding to the spline function is $E_{B_s} = 8187.23 \text{ Wh/m}^2$. The relative error of these values is $\varepsilon_{r_E} = 0.03\%$, which highlights the excellent approximation made by the splines s to the experimental values.

Because the spline functions approximate very well the evolution of the direct solar irradiance, in the next steps of the algorithm we will use the spline function instead of the measured values.

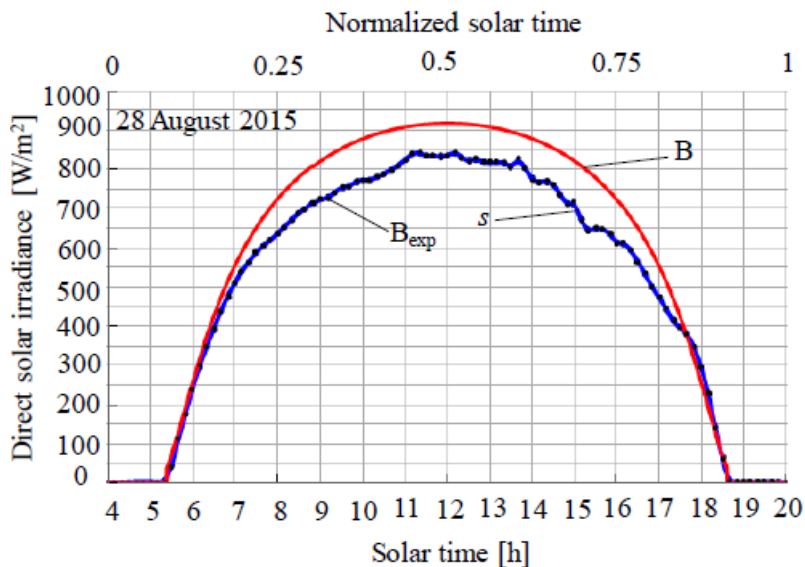


Figure 6.2: The direct solar radiation B calculated with the Meliss model, experimental values B_{exp} and the spline function s in 28 August 2015

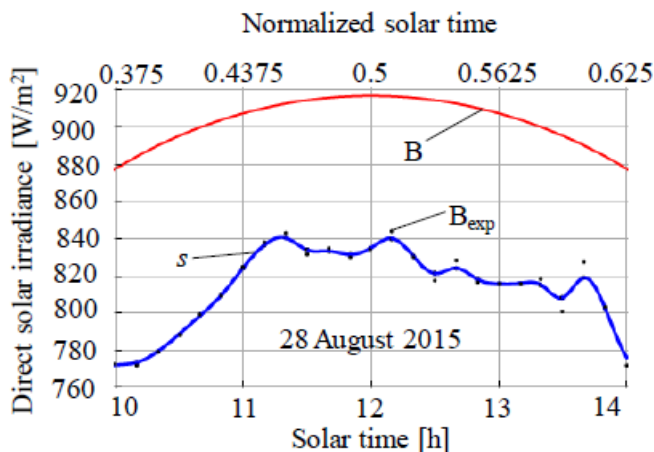


Figure 6.3: Detail for direct solar radiation B calculated with the Meliss model, experimental values B_{exp} and the spline function s

3. Determination of a daily interpolation polynomial for direct solar irradiance using the spline function created

In order to simplify the analytical expression of the function of the spline $s(x)$, which contains 96 third degree polynomials, it is obtained in Wolfram Mathematica 10.1 an interpolation polynomial $B_{pol}(x)$. This polynomial has degree four and is obtained using the spline function.

Further, the study is focused on the time interval [8:00, 16:00] corresponding to normalized solar time [0.25, 0.75]. The interpolation polynomial $B_{pol}(x)$ which approximates the spline function for 28 August 2015, it corresponds to $x \in [0.25, 0.75]$ and has the expression

$$B_{pol}(x) = -558.707 + 7282.269x - 13630.299x^2 + 11786.011x^3 - 4941.108x^4. \tag{6.2.6}$$

This interpolation polynomial $B_{pol}(x)$ approximates splines s very well in the central

part of the day, as can be seen in Figure 6.4 for 28 August 2015, unlike the Meliss model with constant turbidity factor. Maximum absolute error between $s(x)$ and $B_{pol}(x)$ is $\max \varepsilon_a = -32.28 \text{ W/m}^2$ and the maximum relative error is $\max \varepsilon_r = -0.58\%$ obtained at 0.72 normalized solar time.

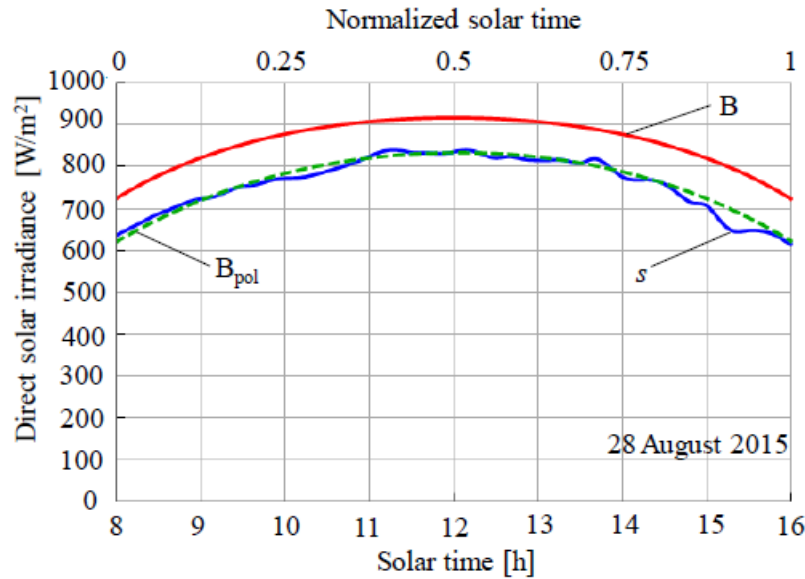


Figure 6.4: The solar radiation B calculated with the Meliss model, spline function s and the interpolation polynomial B_{pol} in 28 August 2015

4. Determination of the turbidity factor as a daily interpolation polynomial

The interpolation polynomial $B_{pol}(x)$ is used to calculate the daily variation of turbidity, based on the Meliss model (6.1.5)

$$T_R(x) = -(0.9 + 9.4 \sin \alpha) \cdot \ln \frac{B_{pol}(x)}{B_0}. \quad (6.2.7)$$

Using in relation (6.2.3) the interpolation polynomial B_{pol} from (6.2.6) for 28 August 2015 and B_0 of this day calculated with (6.1.6), turbidity results as a function of the variable x (normalized solar time).

$$T_R(x) = -(0.9 + 9.4 \sin \alpha) \cdot \ln \frac{-558.707 + 7282.269x - 13630.299x^2 + 11786.011x^3 - 4941.108x^4}{1340.05} \quad (6.2.8)$$

To reduce the complexity of the relation (6.2.8) an interpolation polynomial $T_{Rpol}(x)$ for turbidity

$$T_{Rpol}(x) = 2.654 + 22.39x - 94.585x^2 + 151.806x^3 - 83.791x^4, \quad (6.2.9)$$

is obtained in Wolfram Mathematica 10.1.

5. Determination of the interpolation polynomial corresponding to the factor of turbidity for the warm season, respectively for the cold season

The previous steps of the algorithm were applied to all clear sky days in the period 2013–2016, obtaining an interpolation polynomial $T_{Rpol}(x)$ for each day. For August

2013–2016, averages of the homologous coefficients of these polynomials are calculated for each term, and in this way, an average monthly interpolation polynomial $T_{RMAug}(x)$ is obtained.

$$T_{RMAug}(x) = 8.336 - 41.648x + 143.437x^2 - 200.09x^3 + 95.903x^4. \quad (6.2.10)$$

Using $T_{RMAug}(x)$ in (6.1.5) it is obtain $B_{TRAug}(x)$.

The direct solar energy calculated using the spline function is $E_{B_s} = 6087 \text{ Wh}/m^2$, using the Meliss model is $E_B = 6871 \text{ Wh}/m^2$ and using the average monthly interpolation polynomial is $E_{BTRAug} = 6025 \text{ Wh}/m^2$. Thus, the relative error decreases from 12.9% (between E_{B_s} and E_B) to 1% (between E_{B_s} and E_{BTRAug}).

All previous steps of the algorithm are applied to each clear sky day of each month of the period 2013-2016.

An interpolation polynomial $T_{RWS}(x)$ was obtained for turbidity in the warm season, calculating the average of the homologous coefficients of the monthly interpolation polynomials from April, May, June, July, August. Similarly, it was obtained $T_{RCS}(x)$ for the cold season (September, October, November, December, January, February, March).

$$T_{RWS}(x) = 7.03 - 32.08x + 110.94x^2 - 157.28x^3 + 77.69x^4, \quad (6.2.11)$$

$$T_{RCS}(x) = 23.96 - 170.04x + 507.45x^2 - 656.42x^3 + 308.62x^4. \quad (6.2.12)$$

6. New formulations of the Meliss model

Using $T_{RWS}(x)$ in (6.1.5), a new formulation of the model for direct solar irradiance for the warm season is obtained, namely

$$B_{TRWS}(x) = B_0 \cdot e^{\frac{-(7.03-32.08x+110.94x^2-157.28x^3+77.69x^4)}{0.9+9.4 \sin \alpha}}, \quad (6.2.13)$$

respectively replacing T_{RCS} in (6.1.5), we get a new formulation of the model for direct solar irradiance for the cold season

$$B_{TRCS}(x) = B_0 \cdot e^{\frac{-(23.96-170.04x+507.45x^2-656.42x^3+308.62x^4)}{0.9+9.4 \sin \alpha}}. \quad (6.2.14)$$

The direct solar energy corresponding to the interval [0.25, 0.75] normalized solar time, is $E_{B_s} = 6087 \text{ Wh}/m^2$, the solar energy determined using the Meliss model is $E_B = 6871 \text{ Wh}/m^2$, and the solar energy $E_{BWS} = 6323.76 \text{ Wh}/m^2$. The relative error decreases from -12.9% (between E_{B_s} and E_B) to -3.85% (between E_{B_s} and E_{BWS}).

Validation of new formulations using the measures in 2017

For validation, the days of 2017 were analyzed and the clear sky days were identified. Thus, 31 clear sky days were selected and for these days, the steps 1–6 of the above algorithm were applied.

For each clear day of the warm season 2017, an error analysis was performed, comparing the measured direct solar energy E_{B_s} , with solar energy E_B obtained with the Meliss model considering the turbidity factor constant T_R . The solar energy E_{B_s} has also been compared to daily solar energy E_{BWS} calculated with (6.2.2) where the function is the direct solar irradiance determined with the relation (6.2.4).

Therefore, for each clear day in the warm season 2017, the relative errors were calculated $\varepsilon_{r,E}$ (between E_{B_s} and E_B), and from their absolute values the relative average error was obtained $\epsilon_{r,E,m} = 8.12\%$.

For the same days, the relative errors were calculated $\epsilon_{r,EWS}$ (between E_{Bs} and E_{BWS}). The absolute values of these relative errors were used to calculate the average relative error $\epsilon_{r,EWS,m} = 4\%$. This was used for estimating the accuracy of the new formulations of the Meliss model.

Thus, for the warm season 2017, using the new formulations, an improvement is obtained in order to ensure the accuracy of 4.12%. This result, obtained for a 10 minute time scale based only on the most accurate values of direct solar irradiance, is comparable to the best improvements in accuracy obtained in other studies, such as be 4.3% in [58] where several variables are considered as inputs (air temperature, relative humidity, barometric pressure and time of day) or 4.33% in [63] where this improvement is obtained in the estimation of solar irradiance daily average monthly. Moreover, the improvement obtained by 4.12% is significantly higher than 0.22% and 0.37% obtained in [48] for estimating the hourly solar irradiance.

In the case of a photovoltaic plant with an installed power of 50 MW, which in a temperate continental climate region (Brasov, Romania) produces during the warm season approximately 40000 MWh, the obtained accuracy improvement of 4.12% represents a difference in energy production estimation of 1648 MWh/year, which corresponds to an yearly amount of 412000 euro considering the actual Green Certificate Scheme in force in Romania.

A similar analysis was made for the cold season, obtaining a decrease in the relative error from 5.02% to 4.15%. In the case of the considered photovoltaic platform (with an installed capacity of 50 MW), which produces in the cold season approximately 28500 MWh, accuracy improves with 0.87% which represents a difference in estimating the energy of 248 MWh, corresponding to an amount of 62000 euro. Therefore, because large differences are recorded in the warm season, it is necessary to keep note that the solar energy in the analyzed area is significantly higher in the months of the warm season (6 kWh/day) than in the months of the cold season (1 kWh/day).

As a recommendation, the new formulations can be renewed annually using the new measured data and thus increasing the number of years monitored.

Therefore, a better estimate of direct solar irradiance leads to important financial benefits, which is essential for a good management of photovoltaic platforms. A great advantage of this algorithm is that it can be applied in any location.

The algorithm presented has a general character and has been developed in order to improve the accuracy of the models for clear days that estimate the direct solar irradiance based on the turbidity factor considered variable during a day.

Conclusions

The study of Schoenberg operators is important from both sides: from a theoretical point of view and from practical applications.

Schoenberg operators are a specific method of spline approximation, and for practice, the spline functions are preferable to be used because they have a very good order of approximation and also they have sufficient smoothness. This Doctoral Thesis has a unitary character, it is especially concerned with the theoretical study of Schoenberg operators.

The Schoenberg operators continue to be an area of great interest in research, a field on which we intend to focus our work in the future.

References

- [1] Abel, U., Ivan, M., (1999). *Some identities for the operator of Bleimann, Butzer and Hahn involving divided differences*, *Calcolo*, 36 (3), 143-160.
- [2] Agathokleous R.A., Kalogirou S.A., (2016). *Double skin facades (DSF) and building integrated photovoltaics (BIPV): A review of configurations and heat transfer characteristics*, *Renewable Energy*, 89, 743-756.
- [3] Agathokleous R.A., Kalogirou S.A., Karellas S., (2018). *Energy analysis of a naturally ventilated Building Integrated Photovoltaic/Thermal (BIPV/T) system*, *Renewable Energy*, 128, 541-552.
- [4] Agratini, O., (2000). *Approximation by Linear Operators* (in Romanian), Cluj Univ. Press.
- [5] Altomare, F., Campiti, M., (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin.
- [6] Altomare, F., Cappelletti Montano, M., Leonessa, V., Raşa, I., (2014). *Markov operators, positive semigroups and approximation processes*, *De Gruyter Studies in Mathematics* 61.
- [7] Anastassiou, G.A., Gal, S., (2000). *Approximation theory, moduli of continuity and global smoothness preservation*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.
- [8] Bason F., (2007). *Solar irradiance measurements from the Danish Galathea 3 Expedition*, Proceedings of ISES Solar World Congress 2007; Solar Energy and Human Settlement, 26672670.
- [9] Bauer, H., (1978). *Approximation and abstract boundaries*, *Amer. Math. Monthly*, 85, 632-647.
- [10] Bernstein, S. N., (1952). *Collected Works: Constructive Theory of Functions*, Academy of Sciences USSR Press.
- [11] Beutel, L., Gonska, H., Kacso, D. and Tachev, G., (2002). *On variation-diminishing Schoenberg operators: new quantitative statements*, *Monogr. Academia Ciencias de Zaragoza* 20, 9-58.
- [12] Beutel, L., Gonska, H., Kacso, D., Tachev, G., (2002). *Variation-diminishing splines revisited*, Proceedings of the International Symposium, Cluj-Napoca, 54-75.
- [13] Beutel, L., Gonska, H., Kacsó, D., Tachev, G. (2002). *Variational-diminishing splines revisited* in: Proceedings of the international symposium on numerical analysis and approximation theory, Cluj-Napoca, Romania, May 9-11, 2002, [Trîmbiţaş, Radu T. (ed.)], Cluj Napoca University Press, 54-75.
- [14] Beutel, L., Gonska, H., Kacso, D. and Tachev, G., (2004). *On the second moments of variation-diminishing splines*, *J. Concrete and Applicable Analysis*, 2, no. 1, 91-117.

- [15] Bird R., Hulstrom R., (1981). *A Simplified Clear Sky Model for Direct and Diffuse Insolation on Horizontal Surfaces* Tech. rep., Solar Energy Research Institute.
- [16] Bohman, H., (1951). *On approximation of continuous and of analytic functions*, Arkiv for Matematik band 2 nr 3, 43-56.
- [17] Buonomano, A., Forzano, C., Kalogirou, S.A., Palombo, A., (2019). *Building-faade integrated solar thermal collectors: Energy-economic performance and indoor comfort simulation model of a water based prototype for heating, cooling, and DHW production*, Renew. Energy 137, 2036.
- [18] Boor, C., (1972). *On Calculating with B Splines*, Journal of Approximation Theory, 6, 50-62.
- [19] Boor, C., Hollig, K., (1982). *B-splines from parallelepipeds*, University of Wisconsin-Madison, Mathematics Research Center, 1-20.
- [20] Boor, C., (1990). *The Exact Condition of the B-Spline Basis May Be Hard to Determine*, Journal of Approximation Theory, 60, 344-359.
- [21] Boor, C.,(2003). *A divided difference expansion of a divided difference*, Journal of Approximation Theory, 122, 10-12.
- [22] Chang K., Zhang Q., (2019). *Improvement of the hourly global solar model and solar radiation for air-conditioning design in China*, Renewable Energy, 138, 1232-1238.
- [23] Cheney, W., Light, W., (2000). *A Course in Approximation Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [24] Chui, K.C., (1988). *Multivariate splines*, Texas A&M University.
- [25] Conti, C., Morandi, R., (2001). *The bidimensional interproximation problem and mixed splines*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 130, 116.
- [26] Curry, H.B., Schoenberg, I.J., (1966). *On Polya frequency functions IV: the fundamental spline functions and their limits*, Journal dAnalyse Mathmatique, 17, 71-107.
- [27] Demidovitch, B., Maron, I., (1973). *Éléments de calcul numerique*, traduit du Russe, Éditions Mir, Moscou.
- [28] De Vore, R.A., Lorentz, G.G. (1993) *Constructive Approximation*, Springer, Berlin, New York.
- [29] De Vore, R.A., (1972). *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin.
- [30] Ditzian, Z., Totik, V., (1987). *Moduli of Smoothness*, Springer, New York.
- [31] Duffie J.A., Beckman W.A., (2013). *Solar engineering of thermal processes*, 4th ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.
- [32] Engerer, N. A., Mills, F.P., (2015). *Validating Nine Clear Sky Radiation Models in Australia*, Solar Energy, 120, 9-24.

- [33] Faber, G., (1914). *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Deutsche Math. Jahr. 23, 192210.
- [34] Gavrea, I., (1996). *The approximation of the continuous functions by means of some linear positive operators*. Result. Math. 30 (1-2), 55-66.
- [35] Gavrea, I., (2001). *Aproximarea funcțiilor prin operatori liniari*, Ed. Mediamira, Cluj Napoca.
- [36] Gavrea, I., Gonska, H., Păltănea, R., Tachev, G., (2003). *General Estimates for the Ditzian-Totik Modulus*. East Journal of Approximations, 9: Number 2, 175-194.
- [37] Gonska, H., (1979). *Quantitative Aussagen zur Approximation durch positive lineare Operatoren*, Dissertation, Universität Duisburg.
- [38] Gonska, H., Pițul, P., Rașa, I. (2006). *On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators*, in: Numerical Analysis and Approximation Theory, Proceedings of the Int. Conf. 2006 in Cluj-Napoca, 55-80.
- [39] Gonska, H., (2007). *On the degree of approximation in Voronovskaja's Theorem*, Studia Univ. "Babeș-Bolyai", Mathematica, Volume LII, Number 3, 103-115.
- [40] Gonska, H., Pițul, P., Rașa, I. (2009). *General King-type operators*, Results in Math., 53 No.3-4: 279-286.
- [41] Gonska, H., Păltănea, R., (2010). *General Voronovskaja and Asymptotic Theorems in Simultaneous Approximation*, Birkhauser/Springer Basel AG, Mediterr J. of Math., 7, 37-49.
- [42] Goodman, T.N.T, Lee, S.L., (1981). *Spline Approximation Operators of Bernstein-Schoenberg Type in One and Two Variables*, Journal of Approximation Theory, 33, 248-263.
- [43] Goodman, T.N.T, (1985). *Asymptotic Formulas for Multivariate Bernstein-Schoenberg Operators*, Constr. Approx., 11, 439-453.
- [44] Goodman, T.N.T, (1987). *Some Properties of Bivariate Bernstein-Schoenberg Operators*, Constr. Approx., 3, 123-130.
- [45] Greville, T.N.E., Schoenberg, I.J., Sharma, A., (1976). *The Spline Interpolation of Sequences Satisfying a Linear Recurrence Relation*, Journal of Approximation Theory 17, 200-221.
- [46] Groselj, J., Knez, M., (2018). *A B-spline basis for C^1 quadratic splines on triangulations with a 10-split*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 343, 413427.
- [47] Gupta, V., Tachev, G., (2017). *Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations*, Springer, Developments in Mathematics, vol. 50.
- [48] Hocaoglu F. O., Serttas F., (2017). *A novel hybrid (Mycielski-Markov) model for hourly solar radiation forecasting*, Renewable Energy, 108, 635-643.

- [49] Ineichen P., (1983). *Quatre Annees de Mesures Densoleiement a Geneve*, Ph.D. thesis, University of Geneva.
- [50] Ineichen P., Perez R., (2002). *A new airmass independent formulation for the Linke turbidity coefficient*, Solar Energy, 73 (3), 151-157.
- [51] Ineichen, P., (2006). *Comparison of eight clear sky broadband models against 16 independent data banks*, Solar Energy, 80, 468-478.
- [52] Ionescu, V.D., (1978). *Diferențe divizate*, Editura Academiei R. S. România, București.
- [53] Isvoranu, D., Badescu, V., (2013). *Comparison between majorements and WRF numerical simulation of global solar irradiation in Romania*, The Annals of the West University of Timisoara Physics Series, LVII 24-33.
- [54] Ivan, M., (1982). *Interpolation methods and their applications*, (in Romanian), Ph. D. Thesis, Babeș-Bolyai University, Cluj-Napoca.
- [55] Ivan, M., (2006). *On the Leibniz formula for divided differences*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 35 no. 1, 59-63.
- [56] Johnen, H., (1972). *Inequalities connected with moduli of smoothness*, Mat. Vesnik, 3, 389-303.
- [57] Kalogirou S., (2014). *Solar energy engineering processes and systems*, Elsevier, Amsterdam.
- [58] Kambezidis H.D., Psiloglou B.E., Karagianis D., Dumka U.C., Kaskaoutis D.G., (2016). *Recent improvements of the Meteorological Radiation Model for solar irradiance estimates under all-sky conditions*, Renewable Energy, 93, 142-158.
- [59] Kaplani E., Kaplanis S., Mondal S., (2018). *A spatiotemporal universal model for the prediction of the global solar radiation based on Fourier series and the site altitude*, Renewable Energy, 126, 933-942.
- [60] Karlin, S., Studden, W.J., (1966). *Tchebycheff Systems with Applications in Analysis and Statistics*, Interscience, New York.
- [61] Karlin, S., Micchelli, C.A., Rinott, Y., (1986). *Multivariate Splines: A Probabilistic Perspective*, Journal of Multivariate Analysis, 20, 69-90.
- [62] King, J. O. (2003). *Positive linear operators which preserve x^2* , Acta. Math. Hung, 99, 203-208.
- [63] Koo C., Li W., Cha S.H., Zhang S., (2019). *A novel estimation approach for the solar radiation potential with its complex spatial pattern via machine-learning techniques*, Renewable Energy, 133, 575-592.
- [64] Korovkin, P.P., (1953). *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 90, 961-964.
- [65] Korovkin, P.P., (1959). *Operatori liniari și teoria aproximării* (rusă), Fizmatgiz, Moscova.

- [66] Kreuzer, W., (2019). *Using B-spline frames to represent solutions of acoustics scattering problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 351, 331-343.
- [67] Lorentz, G.C., (1986). *Bernstein Polynomials*, Chelsea Publishing Company, New York.
- [68] Lupaş, A., (1972). *Die Folge der Betaoperatoren*, Dissertation, Universität Stuttgart.
- [69] Lupaş, A., (1976) *Contribuţii la teoria aproximării prin operatori liniari*, teză de doctorat, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca.
- [70] Mamedov, R.G., (1962). *On the asymptotic value of the approximation of repeatedly differentiable functions by linear positive operators* (Russian), Doklady SSSR, 146, 1013-1016.
- [71] Marsden, M.J., (1970). *An identity for spline functions with applications to variation diminishing spline approximation*, J. Approx. Theory, 3, 7-49. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90058-4.
- [72] Marsden, M.J., (1972). *On Uniform Spline Approximation*, University of Pittsburgh, Pennsylvania, J. Approx. Theory, 6, 249-253.
- [73] Marsden, M.J., (1974). *Cubic Spline Interpolation of Continuous Functions*, J. Approx. Theory, 10, 103-111.
- [74] Marsden, M.J., (1983). *Linear and Quadratic Spline Interpolation at Knot Averages*, J. Approx. Theory, 38, 201-208.
- [75] Meliss M., (1997). *Regenerative Energiequellen*, Springer, Berlin.
- [76] **Moldovan, C. L.**, Păltănea, R. (2019). *Second degree Schoenberg operators with knots at the roots of Chebyshev polynomials*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 113(3), 2793-2804. DOI: 10.1007/s13398-019-00644-1
- [77] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., (2020), *The Exact Form of the Second Moment of Third Degree Schoenberg Spline Operators*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Taylor-Francis Online, 41:11, 1308-1325, DOI: 10.1080/01630563.2020.1764031
- [78] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., (2020), *A Definition of Two-Dimensional Schoenberg Type Operators*, Symmetry 2020, 12(8), 1364–1376, <https://doi.org/10.3390/sym12081364>
- [79] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., Visa I., (2020). *Improvement of clear sky models for direct solar irradiance considering turbidity factor variable during the day*, Renewable Energy, 161, 559–569. doi.org/10.1016/j.renene.2020.07.086
- [80] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., Visa I., (2018). *Experimental assessment of the Meliss simulation model accuracy of the direct solar irradiance in Brasov, Romania*, The Annals of the West University of Timisoara - Physics Series Vol. 60, DOI: 10.2478/awutp-2018-0003

- [81] **Moldovan C.L.**, Păltănea R., Visa I., (2018). *Comparison between measurements and Meliss simulations of the direct solar irradiance for a winter month in Brasov*, Annals of Dunarea de Jos University of Galati, Mathematics, Physics, Theoretical Mechanics, Fascicle II, Year X (XLI) No. 1, 94-103.
- [82] **Moldovan C. L.**, (2017). *A choice of the knots in Schoenberg spline operator with an improvement of the order of approximation*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Vol 10(59), No. 2, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 77-90.
- [83] Mond, B. (1976). *Note: On the degree of approximation by linear positive operators*, J. Approx. Theory, 18, 304-306. DOI: 10.1016/0021-9045(76)90022-8.
- [84] Păltănea, R. (1997). *Optimal constants in estimates with second order moduli*, Results Math., 32, 318-331. DOI: 10.1007/BF03322143.
- [85] Păltănea, R. (1995). *Best constants in estimates with second order moduli*, Approximation Theory, Proceedings of the International Dortmund Meeting, IDoMAT 95 held in Witten, Germany, 251-275.
- [86] Păltănea, R. (2002). *Estimates of approximation by linear operators in the multidimensional case*, Mathematical Analysis and Approximation Theory, Burg Verlag, 207-220.
- [87] Păltănea, R.,(2004). *Approximation Theory Using Positive Linear Operators*, Birkhäuser, Boston.
- [88] Păltănea, R. (2004). *Approximation of Functions in Banach Spaces Using Positive Linear Operators*, Proceedings of RoGer Seminar 2004.
- [89] Păltănea, R., Păltănea, E., (2009). *Elemente de Analiză matematică și Teoria aproximării*, Editura Universității Transilvania din Brașov, Brașov.
- [90] Păvăloiu, I., Pop, N., (2005). *Interpolarea și aplicațiile ei*, Risoprint, Cluj Napoca.
- [91] Peetre, J., (1969). *On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory*, Proc. Conf. Const. Theory of Functions, Eds. G. Alexits and S.B. Stechkin, Akademiai Kiado, Budapest, 351-363.
- [92] Popa, D., Rașa, I., (2016). *Steklov Averages as Positive Linear Operators*, Filomat 30(5), 11951201, DOI 10.2298/FIL1605195P.
- [93] Popoviciu, E., (1972). *Teoreme de medie în analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, Cluj.
- [94] Popoviciu, T., (1933). *Première Thèse: Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Thèse numérisée dans le cadre du programme: Numérisation de documents anciens mathématiques, 1-85.
- [95] Popoviciu, T., (1945). *Les fonctions convexes*, Herman & Cie, Paris.
- [96] Popoviciu, T., (1950). *Asupra demonstrării teoremei lui Weierstrass utilizând polinoamele de interpolare* Lucrările Sesiunii Generale Științifice ale Academiei Române din 1950 No. 1-4, (1950), (tradusă în engleză de D. Kasco, East J. Approx. 4, no. 1, (1998), 107-110.)

- [97] Powell, M.J.D., (1981). *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [98] Rice, I.R., (1969). *The Approximation of Functions: Nonlinear and multivariate theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Mass. US.
- [99] Rigollier, C., Bauer, O., Wald, L., (2000). *On the clear sky model of the ESRA - European Solar Radiation Atlas - with respect to Heliosat method*, Solar Energy 68, 3348.
- [100] Schoenberg, I.J., (1959). *On variation diminishing approximation methods*, On Numerical Approximation, MRC Symposium (R.E.Langer, ed.), Univ.of Wisconsin Press, Madison, 249-274.
- [101] Schoenberg, I.J., (1964). *On best approximations of linear operators*, I. J. Schoenberg Selected Papers, Proceedings, Series A, 67, No.2 and Indag. Math., 26, No.2, 155-163.
- [102] Schoenberg, I.J., (1964). *Spline interpolation and best quadrature formulae*, Bull. Amer. Math. Soc., Volume 70, Number 1, 143-148.
- [103] Schoenberg, I.J., (1966). *On Hermite-Birkhoff Interpolation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 16, 538-543.
- [104] Schoenberg, I.J., (1968). *On the Ahlberg-Nilson Extension of Spline Interpolation: The g -Splines and Their Optimal Properties*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 21, 207-231.
- [105] Schoenberg, I.J., (1969). *Cardinal Interpolation and Spline Functions*, J. Approx. Theory, 2, 167-206.
- [106] Schoenberg, I.J., (1970). *A Second Look at Approximate Quadrature Formulae and Spline Interpolation*, Advances in Mathematics, 4, 277-300.
- [107] Schoenberg, I.J., (1972). *Cardinal Interpolation and Spline Functions: II Interpolation of Data of Power Growth*, J. Approx. Theory, 6, 404-420.
- [108] Schoenberg, I.J., (1979). *On cardinal spline smoothing*, Approximation Theory and Functional Analysis, 383-407.
- [109] Schoenberg, I.J., (1982). *Two Applications of Approximate Differentiation Formulae: An Extremum Problem for Multiply Monotone Functions and the Differentiation of Asymptotic Expansions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 89, 251-261.
- [110] Schoenberg, I.J., (1983). *A New Approach to Euler Splines*, J. Approx. Theory, 39, 324-337.
- [111] Schumaker, L.L., (2007). *Spline functions: basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [112] Sendov, B., Popov, V., (1988). *The averaged moduli of smoothness*, John Wiley & Sons, New York.

- [113] Shashkin, Yu.A., (1967). *Frontiera Mil'man-Choquet și teoria aproximării*, Functional Anal. i Priložen., 1, no.2, 95-96.
- [114] Shisha, O., Mond, B., (1968). *The degree of convergence of linear positive operators*, IEEE, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 60, 1196-1200.
- [115] Sikkema, P.C., (1961). *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen*, Numerische Math. 3, 107-116.
- [116] Stancu, D.D., (1968). *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 13, no. 8, 1173-1194.
- [117] Stancu, D.D., Coman, G., Agratini, O., Trîmbițaș, R., Blaga, P., Chiorean, I., (2001-2002). *Analiză numerică și Teoria aproximării*, 3 volume, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.
- [118] Tachev, G.T. (2000). *Piecewise linear interpolation with nonequidistant knots*, Numer. Funct. Anal. and Optim, 21(7,8): 945-953. DOI: 10.1080/01630560008816996
- [119] Tachev, G. (2008). *A lower bound for the second moment of Schoenberg operator*, General Mathematics Vol. 16, No. 4, 165-170.
- [120] Tachev, G. (2012). *Voronovskaja's theorem for Schoenberg operator*, Math. Ineq. Appl. 15 No.1: 49-59.
- [121] Tachev, G., Zapryanova T., (2012). *Generalized Inverse Theorem for Schoenberg Operator*, Journal of Modern Mathematics Frontier, Vol.1, 11-16.
- [122] Tachev, G. (2012). *New estimates in Voronovskajas theorem*, Numer Algor, 59, 119-129.
- [123] Tachev, G., (2012) *The complete asymptotic expansion for Bernstein operators*, J. Math. Anal. Appl.385, 11791193
- [124] Teliakovsky, S.A., (1966). *Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials*, (Russian). Mat. Sb. (N.S.) 70(112) (2), 252-265.
- [125] Ugarte, M.D., Adin, A., Goicoa, T., (2017). *One-dimensional, two-dimensional, and three dimensional B-splines to specify space-time interactions in Bayesian disease mapping: Model fitting and model identifiability*, Spatial Statistics, 22, 451-468.
- [126] Visa, I., Diaconescu, D.V., Dinicu M.V., Burduhos, B.G., (2009). *Quantitative estimation of the solar radiation loss in Brasov area*, Environmental Engineering and Management Journal 8-4, 843-847.
- [127] Visa I., Duta A., Moldovan M., (2019). *Outdoor performance of a trapeze solar thermal collector for facades integration*, Renewable Energy, 137, 37-44.
- [128] Volkov, V.I., (1957). *Asupra convergenței șirurilor de operatori liniari și pozitivi în spațiul funcțiilor continue de două variabile* (rusă), Dokl. Akad. Nauk SSSR 115, 17-19.

- [129] Voronovskaja, E., (1932). *Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les pôlynomes de S. N. Bernstein*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. A, 79-85.
- [130] Voyant, C., Notton, G., Kalogirou, S.A., Nivet, M.L., Paoli, C., Motte, F., Fouilloy, A., (2017). *Machine learning methods for solar radiation forecasting: A review*, Renew. Energy 105, 569-582.

Short abstract (english / romanian)

Chapter 1 contains general notions from the theory of approximation, notions used in the Doctoral Thesis. Chapter 2 presents specific results about the Schoenberg operators, operators that form the essence of the research done in the Doctoral Thesis. Chapters 3, 4, 5 and 6 represent entirely the original contribution of the author of the Doctoral Thesis. In Chapter 3 the author presents the results established in the field of second degree Schoenberg operators, namely the improvement of the approximation order, using another way of choice of nodes for Schoenberg operators, equidistant nodes being usually used; Voronovskaja type theorems; the second moment of second degree Schoenberg operators with arbitrary nodes, respectively with nodes in the roots of Chebyshev polynomials. In Chapter 4 the author presents the exact form of the second moment of third degree Schoenberg operators on arbitrary knots, respectively equidistant knots, the applications in approximation, Schoenberg operators for which the space of second degree polynomials is invariable and Schoenberg–King type operators. In Chapter 5, a definition of two-dimensional Schoenberg type operators and their properties are presented. The definition was obtained by generalizing the one-dimensional Schoenberg operators' formula. The second moment of two-dimensional Schoenberg type operators on arbitrary knots, and on equidistant knots, respectively, alongside a Voronovskaja type theorem and estimates with moduli of continuity are given. Applications of Schoenberg spline operators in practice are presented in Chapter 6, where a general method to improve the accuracy of clear sky models through replacement the constant turbidity factor with an interpolation polynomial which depends of solar time, for estimating the direct solar irradiance is presented. Data measured between 2013 and 2016 in *Renewable Energy Systems and Recycling* Research Center of R&D Institute of Transilvania University of Brasov were analyzed and used to improve the clear sky model Meliss. The improved model was validated based on the data measured in 2017. Daily spline functions were built corresponding for each clear sky day from 2013 to 2017. The analytical expressions of these spline functions were created using the Schoenberg operators.

Capitolul 1 conține noțiuni cu caracter general din teoria aproximării, noțiuni folosite în teza de doctorat. Capitolul 2 prezintă rezultate specifice despre operatorii Schoenberg, operatori care formează esența cercetărilor efectuate în teza de doctorat. Capitolele 3, 4, 5 și 6 reprezintă în întregime contribuția originală a autorului tezei de doctorat. În Capitolul 3 autorul prezintă rezultatele stabilite în domeniul operatorilor Schoenberg de gradul doi, și anume îmbunătățirea ordinului de aproximare, folosind un alt mod de alegere a nodurilor pentru operatorii Schoenberg, uzual fiind folosite nodurile echidistante; teoreme de tip Voronovskaja; momentul de ordinul doi al operatorilor Schoenberg de gradul doi cu noduri arbitrare, respectiv cu noduri în rădăcinile polinoamelor Cebîshev. În Capitolul 4 autorul prezintă forma exactă a momentului de ordinul doi al operatorilor spline Schoenberg de gradul trei pe noduri arbitrare, respectiv echidistante, aplicații în aproximare, operatorii Schoenberg pentru care spațiul polinoamelor de gradul doi este invariabil și operatori de tip Schoenberg–King. În Capitolul 5 este prezentată o definiție a operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg construiți considerând noduri arbitrare, respectiv echidistante. Sunt studiate momentul de ordinul doi ai operatorilor bidimensionali de tip Schoenberg, teorema de tip Voronovskaja și evaluări folosind moduli de continuitate. Aplicații ale operatorilor spline Schoenberg în practică compun conținutul Capitolului 6, unde este prezentată o metodă generală de îmbunătățire a acurateții modelelor de cer senin prin înlocuirea factorului de turbiditate constant cu un polinom de interpolare care depinde de timpul solar, pentru estimarea intensității radiației solare. Au fost analizate și utilizate pentru îmbunătățirea modelului Meliss, date măsurate în perioada 2013-2016, în cadrul Centrului de Cercetare *Sisteme de Energie Regenerabile și Reciclare* din Institutul de Cercetare Dezvoltare al Universității Transilvania din Brașov. Modelul îmbunătățit a fost validat pe baza datelor măsurate în 2017. Au fost construite funcțiile spline zilnice corespunzătoare fiecărei zi senină din perioada 2013-2017. Expresiile analitice ale acestor funcții spline au fost create folosind operatorii Schoenberg.