Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Lavinia MUNTEANU (căsătorită CODARCEA–MUNTEANU)

CONTRIBUȚII ASUPRA MEDIILOR POROASE

CONTRIBUTIONS ON THE POROUS MEDIA

REZUMAT/ABSTRACT

Conducător științific
Prof. Habil. Dr. Marin MARIN

BRAȘOV, 2021

Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Facultatea de Matematică și Informatică

COMPONENȚA

Comisiei de doctorat

Numită prin ordinul Rectorului Universității Transilvania din Brașov

Nr. 11262 din 18.06.2021

PREȘEDINTE	**Prof. Univ. Dr. Dorina RĂDUCANU** **Decan Facultatea de Matematică și Informatică** **Universitatea Transilvania din Brașov**
CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC	**Prof. Univ. Dr. Marin MARIN** **Universitatea Transilvania din Brașov**
REFERENT OFICIAL	**Prof. Univ. Dr. Vicențiu RĂDULESCU** **Universitatea din Craiova**
REFERENT OFICIAL	**Prof. Univ. Dr. Adrian PETRUȘEL** **Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj**
REFERENT OFICIAL	**Prof. Univ. Dr. Eduard Marius CRĂCIUN** **Universitatea „Ovidius" din Constanța**

Data susținerii publice a tezei de doctorat: 23.09.2021 ora 12 online.

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util , pe adresa codarcealavinia@unitbv.ro

Totodată, vă invităm să luați parte la ședința publică de susținere a tezei de doctorat.

Vă mulțumim!

Cuprins

Contents

Capitolul 1

Introducere

1.1 Istoric

Teoria mediilor cu microstructură are ca scop principal eliminarea inadvertențelor care apar între teoria clasică a elasticității și experimentele sale specifice. Rezultatele teoriei clasice a elasticității se dovedesc a fi inadecvate în situația în care deformările generale ale mediului sunt supuse efectelor microstructurii sale, cum ar fi în cazul ceramicii, al grafitului, oaselor umane sau polimerilor, adică al corpurilor granulare cu molecule mari.

Calitatea de promotor al teoriei microstructurii este atribuită lui Eringen, care a creat bazele cercetării acestei teorii, vezi [38, 42, 45, 47]. Teoriile domeniilor microcontinue reprezintă, prin intermediul lui Eringen, o extindere a teoriilor clasice referitoare la deformări, deplasări și interacțiuni ale mediilor continue, sub aspect microscopic și la scale mici de timp. Din punct de vedere fizic, un corp material este considerat a fi o colecție a unui număr mare de particule deformabile, care influențează comportamentul macroscopic al corpului, vezi [47], reprezentare asemănătoare elementului de volum mic, conținând un număr mare de „particule mici”, pentru care legile statistice rămân valabile, prezent în mod curent în teoria transportului și mecanica statistică.

Abaterea fundamentală de la acțiunea locală specifică teoriei clasice, constituie baza teoriilor microcontinue, care privesc atât fenomenele la scală atomică, cât și multitudinea de exemple din mediul înconjurător, precum suspensiile, cristalele lichide, circulația sanguină, mediile poroase, polimerii, solidele cu microfisuri și dislocări, fluidele cu turbulențe, vârtejuri sau bule, exemple care, pentru descrierea comportamentului lor mecanic, iau în considerare deplasările microelementelor din structura lor, mai exact, ale particulelor suspendate, celulelor sanguine, aglomerărilor de cristale lichide, fibrelor, etc., vezi [47].

Apariția acestor teorii a fost inițiată de teoriile polare, în cadrul cărora, punctele materiale sunt considerate ca fiind înzestrate cu vectori directori. Recunoașterea naturii polare a solidelor cristaline este atribuită lui Voigt, care în [126], explorează proprietățile acestora, elaborând ecuațiile de echilibru pentru astfel de cristale. Ulterior, frații Cosserat au dezvoltat o teorie a elasticității prin intermediul unui principiu variațional, care poartă numele de „Acțiunea Euclidiană”, vezi [29, 47], și prin introducerea conceptului de „triedru”, mediile deformabile fiind studiate, în mod inovator, prin prisma înzestrării fiecărui punct material al acestora, cu un triedru ortonormal de vectori, care se numesc directori, având rolul de a descrie atât orientarea particulei, precum și relațiile independente ale acesteia. În acest mod, frații Cosserat au obținut o lege referitoare la momentul impulsului în cazul dinamic, însă fără a oferi o microinerție specifică sau o lege de conservare pentru tensorul de microinerție, acestea fiind esențiale în procesul de elaborare a ecuațiilor constitutive și în abordarea problemelor dinamice ale solidelor și mediilor fluente, ale cristalelor lichide și suspensiilor.

Modelul Cosserat reprezintă o variantă redusă a teoriei mediilor micropolare, mai exact, teoria cuplată a tensiunii, care se bazează pe interdependența dintre vectorul deplasare și cel de rotație, fiind utilizat pentru analizarea comportamentului mediilor înzestrate cu structură internă complexă, doar că dificultatea elaborării ecuațiilor constitutive determină inaplicabilitatea acestui model în scopul rezolvării problemelor experimentale. Această teorie a fost aprofundată în [3, 41, 47, 105].

În lucrările [35, 37] și [120], Eringen, respectiv Eringen și Suhubi au introdus o nouă teorie neliniară microcontinuă, în cadrul căreia, legile echilibrului sunt completate cu altele suplimentare și sunt luate în considerare deformările și mișcările intrinsece ale microconstituenților mediului, teoria neliniară dezvoltată în aceste lucrări fiind extinsă și aprofundată în [36] și [39]. În aceeași perioadă, și în mod independent, a fost abordată teoria liniară a elasticității microstructurii, în lucrările [51] și [107], unde Green și Rivlin, respectiv Mindlin, oferă teorii având legături indisolubile cu teoria liniară micromorfă, marcând astfel debutul unei activități extrem de intense în acest domeniu, precum și în domeniile conexe.

Cele trei teorii, micropolară, microstretch și micromorfă, introduse de Eringen, vezi [38–43, 45–47], lucrări care prezintă formulări, aprofundări, extinderi, precum și aplicații ale acestora, constituie fundamentul dezvoltării respectivelor teorii în ultimii douăzeci de ani, subiectul fiind unul de referință, prin varietatea direcțiilor de studiu pe care le oferă și a aplicațiilor care se regăsesc în mediul înconjurător.

În teoria micropolară continuă, un punct material este înzestrat cu trei vectori directori rigizi, fiind echipat cu trei grade de libertate adiționale, doar pentru rotații rigide, vezi [47], iar prin asocierea punctelor materiale cu tensori de diverse ordine, se pot elabora teorii de ordin superior. Un element infinitezimal de suprafață transmite o forță și un cuplu vector, care dau naștere unei tensiuni nonsimetrice și unui cuplu-tensor de tensiune, prima fiind relaționată cu un tensor nonsimetric de deformație iar cel de-al doilea de un tensor nonsimetric de curbură, acest prototip al mecanicii continue, introdus de Voigt, în [126] și aprofundat de Cosserat în [29], bazându-se pe corelația dintre vectorul de rotație și vectorul deplasare.

Extinderea teoriei clasice la teoria cuplată micropolară este rezultatul incapacității teoriei clasice de a estima efectele implementărilor sale, în cazul problemelor care au o scală comparabilă cu scala microstructurală a mediului respectiv, cum ar fi dimensiunea granulelor dintr-un agregat policristalin sau granular, forța aparentă a unor materiale cu acumulări de tensiune fiind mai mare pentru granulele de mărime mai mică, vezi [87]. Teoriile mediilor micropolare și micropolare poroase sunt dezvoltate, sub multiple aspecte, în lucrările [76,82,88,90], iar exemple ale studierii influenței asupra acestor medii, atât a teoriei Green-Naghdi, precum și a microtemperaturilor, regăsindu-se în [34], respectiv [92, 111].

În cazul teoriei microstretch continue, microdeformările sunt doar de tipul „respirație", mai exact, iau în considerare rezultatul contractare-dilatare axială pe parcursul rotației particulelor, gradele adiționale de libertate fiind reduse la patru, trei microrotații, alături de unul corespunzător efectului contractare-dilatare. Modelul continuului microstretch a suscitat un interes sporit, constituind subiectul unui mare număr de lucrări, vezi [14, 45, 80, 116], fiind util studierii diverselor materiale, cum ar fi mediile poroase, cu porii conținând gaz lichid, materialele compozite, armate cu fibre elastice fragmentare, asfaltul, etc.

În cazul teoriei micromorfe continue, un punct material, înzestrat cu trei vectori directori deformabili, introduce nouă grade independente de libertate, în plus față de teoria clasică. Teoria micromorfă, asemenea celei microstretch, este caracterizată de influența structurii interne a mediului asupra modelării constitutive. Teoria mediilor elastice micromorfe, abordată de Eringen în [42, 43], pe baza teoriei elastice a mediilor microstretch, a fost ulterior dezvoltată de același autor, alături de Twiss, în [123, 124], pentru mixturi policristaline, compozite granulare și suspensii fluide, teoria mediilor microcontinue fiind astfel extinsă, de la teoria clasică, la spațiile microscopice de mică scală, vezi de asemenea, [46, 47].

În ceea ce privește teoria mediilor dipolare, care este parte a teoriei structurilor multipolare, primele rezultate au fost publicate de Mindlin în [106], în care este prezentată și o formă liniară a generalizării lui Toupin din [122], rezultate dezvoltate ulterior în [107]. Tot ca inițiatori ai teoriei mediilor dipolare sunt considerați Green și Rivlin, care au dedicat cercetările lor studierii acestor noi structuri, publicând primele rezultate în [51] și abordând apoi, și în alte lucrări, structurile multipolare, în particular, pe cele dipolare.

Un mediu dipolar poros este un solid care are scheletul sau matricea elastice, iar interstițiile au lipsă de material. Teoria care studiază aceste medii are aplicații multiple în diverse domenii, polimerii, compozitele, suspensiile și cristalele fiind doar câteva exemple de medii cu microstructură. În numeroase lucrări publicate, expresia unei vaste cercetări a teoriei mediilor dipolare, respectiv a celei dipolare poroase, Marin studiază aspecte extrem de variate ale acestor domenii, exemple în acest sens fiind studiile [78, 84, 93–95, 98, 102, 103].

Teoria comportamentului mediilor termoelastice, fără disiparea energiei, prezintă două aspecte specifice, referitoare atât la neimplicarea energiei de către debitul de căldură, în contrast cu teoria termoelasticității clasice, caracterizată de Legea Fourier, precum și la determinarea tensiunii de către aceeași funcție care constituie fundamentul obținerii ecuației constitutive a vectorului flux de entropie, conducând astfel la propagarea căldurii sub forma undelor termice cu viteză finită, vezi [87].

Există mai multe teorii hiperbolice având ca scop descrierea transmiterii de căldură, cunoscute și sub denumirea de teorii ale celui de-al doilea sunet, în cadrul cărora, fluxul de căldură este modelat cu viteză de propagare finită, spre deosebire de modelul clasic, bazat pe Legea Fourier. O analiză a acestor teorii, abordate în lucrări pe parcursul unui deceniu, a fost realizată de Chandrasekharaiah în [16], unde sunt reconstituite contribuțiile referitoare atât la teoria termoelasticității în contextul relaxării termice, precum și la teoria termoelasticității dependente de rata de temperatură, evidențiind particularitățile specifice teoriei termoelasticității fără disiparea energiei.

Teoria termoelasticității fără disiparea energiei, cu particularitățile sale distincte care privesc atât debitul de căldură, precum și ecuația constitutivă a vectorului flux de entropie, are primele sale rezultate obținute de Green și Naghdi în [55]. Având la bază conceptul nou introdus de „creștere termică", această teorie a termomecanicii mediilor deformabile utilizează un echilibru general al entropiei, în același mod în care este postulat de către aceiași autori în [52], procedeu prin care ecuația energetică redusă este privită ca o identitate pentru toate procesele termodinamice, fiind impuse unele restricții asupra formelor funcționale ale variabilelor constitutive dependente. Teoria este ilustrată în detaliu, în contextul fluxului de căldură dintr-un mediu rigid, cu referire specială la propagarea undelor termice la viteză finită.

Teoria mediilor poroase este prezentă în arii extrem de variate ale vieții cotidiene, cum ar fi geologia, cu studiul rocilor și al solului, industria medicamentelor și a dispozitivelor medicale, sau procesul de fabricație a materialelor poroase, exemple în acest sens fiind ceramica, vata minerală sau materialele granulare suprapuse unor materiale solide. Fundamentul teoriei mediilor elastice cu goluri a fost realizat de Goodman și Cowin în [50], lucrare în care autorii extind conceptul de „distribuție a masei" astfel încât aceasta să înglobeze mediile granulare. Distribuția masei trebuie relaționată cu distribuția volumului granulelor, iar pentru îndeplinirea acestui scop se introduce o variabilă cinematică independentă, și anume, funcția de distribuție a volumului. Prin considerarea unui grad suplimentar de libertate cinematică, densitatea de masă este reprezentată prin produsul câmpurilor de densitate a materialului matricei, respectiv cel al fracțiunii de volum. Acest concept a fost dezvoltat ulterior de Cowin și Nunziato în [30], unde, de asemenea, abordarea teoriei respective diferă semnificativ de teoria elasticității liniare clasice, fracțiunea de volum corespunzătoare golurilor fiind considerată ca o variabilă cinematică independentă, determinând modificările induse de deformare asupra volumului golurilor, în cazul aplicațiilor prezentate. Exemple ale rezultatelor cercetării diverselor aspecte ale teoriei elasticității și termoelasticității mediilor cu goluri se regăsesc în [19, 109], respectiv în [100, 112, 118] .

Efectele difuziei sunt studiate de către Aouadi, în [4], fiind incluse ca o consecință firească a necesității impuse de evoluția tehnologiei de înaltă clasă, de către Marin, în [83], cu scopul demonstrării valabilității cunoscutului principiu Saint-Venant al teoriei elasticității clasice, în contextul termoelasticității micropolare, și de către Bazarra, în [5], în prezența microtemperaturilor și microconcentrărilor.

Generalizare a calculului clasic, teoria calculului fracționar interesează operațiile de derivare și integrare de ordin care nu este întreg. Conceptul de operator fracționar a apărut aproape simultan cu dezvoltarea celui clasic, utilizarea lui cunoscând o dezvoltare rapidă în domeniile disciplinelor aplicate, precum ecuațiile diferențiale fracționare și geometria fracționară. Evoluția teoriei calculului fracționar, este abordată în [74], lucrare în care sunt descrise multiplele moduri de introducere a derivatelor fracționare, cele inițiate de Riemann-Liouville, Caputo, Riesz-Caputo sau Miller-Ross constituind doar câteva exemple.

Folosind o derivată de ordin arbitrar, analizarea unor astfel de medii poate fi realizată mult mai adecvat și mai clar, operatorul diferențial de ordin fracționar acordând un grad sporit de libertate prin caracterul său global, în comparație cu caracterul local al operatorului clasic. Derivata de ordin fracționar Caputo este privită în [115] ca o rafinare a derivatei fracționare Riemann-Liouville, prin faptul că încorporează condițiile inițiale relevante. Teme extrem de diverse, referitoare atât la teoria termoelasticității, precum și la teoria termoelasticității poroase, de ordin fracționar, au fost abordate și și dezvoltate în numeroase lucrări publicate în ultimul deceniu, exemple în acest sens fiind: [1, 33, 48, 49, 69, 128].

1.2 Structura tezei de doctorat. Scop și obiective

Prezenta teză de doctorat este structurată sub forma a șase capitole, și anume: introducerea, ca prim capitol, urmată de patru capitole care expun contribuțiile originale, rezultate ale cercetării personale efectuate pe parcursul studiilor doctorale, asupra mediilor dipolare, dipolare poroase, micropolare poroase, micromorfe, respectiv micromorfe poroase, și un ultim capitol, care sintetizează concluziile finale, contribuțiile originale, diseminarea rezultatelor prin intermediul lucrărilor publicate și a participării la conferințe internaționale, precum și posibilele direcții viitoare de cercetare.

Capitolul de față, introductiv, este alcătuit din cinci subcapitole, descrise în cele ce urmează.

Primul subcapitol, constituit ca un istoric, prezintă atât contextul actual și rezultatele cercetărilor existente în domeniul temei abordate în această lucrare, alături de studiile publicate, precum și teoriile care vor constitui puncte de referință pentru prezentarea rezultatelor cercetării personale, cel de-al doilea subcapitol referindu-se la structura tezei de doctorat, prezentând capitolele dezvoltate în cadrul acesteia, alături de scopul și obiectivele de cercetare care au condus la elaborarea acestei teze de doctorat. Rezultatele originale ale cercetării, desfășurate pe parcursul studiilor doctorale, sunt prezentate în subcapitolul al treilea, următorul subcapitol specificând notațiile utilizate în cadrul tezei de doctorat, iar ultimul subcapitol fiind dedicat mulțumirilor datorate sprijinului primit pe parcursul studiilor doctorale și al elaborării acestei lucrări.

Scopul și obiectivele prezentei teze de doctorat, prin faptul că extinde și aprofundează cercetarea mediilor cu microstructură, respectiv a celor cu microstructură poroase, se concretizează în realizarea atât a unei baze teoretice, precum și a unor modele, care oferă posibilitatea și facilitatea ca acestea să fie aplicate studierii unor largi diversități de teorii și teme, asociate unor medii diferite de cele prezentate în cadrul acestei lucrări.

Rezultatele originale se regăsesc în următoarele patru capitole, începând cu Capitolul 2, până la Capitolul 5, prezentate sub forma a unsprezece subcapitole, care includ rezultatele cercetării personale, zece dintre aceste subcapitole fiind fundamentate pe rezultatele publicate pe parcursul studiilor doctorale. Alături de aceste subcapitole care prezintă rezultate originale, fiecare dintre aceste patru capitole conține câte un prim subcapitol care expune un scurt istoric, cu referire atât la rezultatele cercetării specifice mediilor studiate în cadrul capitolului respectiv, precum și la lucrările publicate până în prezent.

Cel de-al doilea capitol este dedicat extinderii și aprofundării cercetării mediilor termoelastice dipolare, conținând două subcapitole, în cadrul cărora am studiat efectele microtemperaturilor, respectiv influența teoriei Green-Naghdi de tip III, atât asupra trăsăturilor specifice problemei mixte, cu date inițiale și la limită, asociată mediilor termoelastice dipolare, precum și asupra comportamentului spațial al vibrațiilor, prezentând și condițiile, necesar a fi impuse, pentru o formulare corectă a respectivei probleme mixte.

Capitolul al treilea este alocat cercetării detaliate a mediilor dipolare poroase, cuprinzând trei subcapitole care prezintă rezultatele originale, după cum urmează. Primul subcapitol propune un model matematic al teoriei termoelasticității mediilor dipolare poroase construit în prezența manifestării teoriei Green-Naghdi de tip III, observând impactul pe care această teorie îl imprimă specificităților problemei mixte, cu date inițiale și la limită, ecuațiile constitutive, unicitatea, abordată într-un mod deosebit de cel clasic, reciprocitatea, precum și generalizarea unui bine-cunoscut principiu variațional constituind subiectele supuse modelării. Cel de-al doilea subcapitol este concretizat prin studierea soluțiilor generalizate ale problemei mixte, atașată teoriei mediilor dipolare elastice, poroase, utilizând teoria semigrupurilor de operatori. Ultimul subcapitol prezintă o generalizare, în termoelasticitatea mediilor dipolare poroase, a unei teoreme care privește domeniul de influență din cadrul teoriei clasice a elasticității.

Al patrulea capitol este atribuit studierii aprofundate a mediilor micropolare poroase, rezultatele cercetării fiind materializate în patru subcapitole care descriu contribuțiile originale. Primul subcapitol studiază comportarea spațială a vibrațiilor armonice, în contextul teoriei termoelasticității mediilor micropolare poroase, fără disiparea energiei, modalitatea de stabilire a estimărilor amplitudinii vibrațiilor fiind distinctă, diferită de cea clasică. Următoarele două subcapitole propun modele matematice ale teoriei termoelasticității mediilor micropolare poroase, obținute prin includerea unei deformații de ordin fracționar, respectiv prin considerarea acțiunii microtemperaturilor. Ultimul subcapitol este destinat extensiei unui consacrat principiu de minim al energiei, dezvoltat asupra mediilor elastice Cosserat poroase.

Cel de-al cincilea capitol este destinat dezvoltării studiului asupra teoriei termoelasticității mediilor micromorfe și a celor micromorfe poroase, fiind alcătuit din două subcapitole bazate pe contribuții originale, concretizate în realizarea a două modele teoretice. Primul subcapitol este rezultatul modelării algoritmice a teoriei mediilor micromorfe termoelastice, pe baza unei deformații de ordin fracționar, în timp ce conținutul celui de-al doilea subcapitol este desemnat prin modelarea teoriei termoelasticității mediilor micromorfe poroase, sub acțiunea microtemperaturilor care înzestrează microparticulele acestora.

Ultimul capitol este o sinteză a rezultatelor cercetării prezentate pe parcursul tezei de doctorat, conținând concluziile finale, contribuțiile originale, diseminarea rezultatelor, realizată prin articole publicate și prin participarea la conferințe internaționale, dar și direcțiile de cercetare care vor fi dezvoltate ulterior.

1.3 Rezultate originale obținute

Rezultatele originale ale cercetării, desfășurate în decursul studiilor doctorale, sunt prezentate în cele patru capitole care urmează primului capitol, introductiv, și sunt configurate sub forma a unsprezece subcapitole, dintre care zece se bazează pe rezultatele publicate pe parcursul studiilor doctorale, mai exact, șapte articole publicate în jurnale de specialitate cotate ISI, și anume, [26, 27, 96, 97, 99–101], patru dintre aceste articole , [26, 27, 100, 101], fiind articole premiate în cadrul competiției „Premierea rezultatelor cercetării- UEFISCDI", două capitole publicate în volume ale editurii Springer, indexate BDI, [25, 28], și un articol publicat în volumul unei conferințe internaționale de specialitate, [86].

Conținutul fiecărui capitol, cu referire la rezultatele originale obținute, este prezentat în cele ce urmează.

Capitolul 2, concretizat sub forma a două subcapitole care expun rezultatele cercetării efectuate în perioada studiilor doctorale, este destinat studierii aprofundate a mediilor dipolare, propunând două modele matematice ale teoriei termoelasticității asociate acestor medii.

În primul subcapitol am propus un model, elaborat pe baza analizei complexe a consecințelor determinate de prezența microtemperaturilor deținute de microparticule, realizând modelarea matematică a teoriei termoelasticității dipolare cu ajutorul teoriei semigrupurilor de operatori. Această teorie conferă accesibilitate abordării problemei mixte, cu date inițiale și la limită, prin modificarea ei sub forma unei probleme Cauchy, atașată unei ecuații temporale, abstracte, de evoluție, într-un spațiu Hilbert, stabilit în mod adecvat. Am obținut rezultate privind existența, unicitatea și dependența continuă a soluției problemei mixte în funcție de încărcări și date inițiale.

Subcapitolul al doilea este alocat analizei amănunțite a urmărilor acțiunii teoriei Green-Naghdi de tip III, în contextul mediilor termoelastice dipolare, având centru de simetrie, cu privire atât la aspectele specifice ale enunțării problemei mixte, prin luarea în considerare a condițiilor care trebuie îndeplinite pentru enunțarea corectă a acestei probleme, cât și la comportarea spațială a vibrațiilor. Rezultatul principal obținut constă în descrierea comportamentului spațial al amplitudinii vibrației care este soluție a problemei mixte, cu o frecvență care se încadrează până la o valoare prescrisă, și asupra căreia se pot realiza estimări, concluziile deduse având aplicabilitate și în cazul schimbării condițiilor la limită.

Capitolul 3 este consacrat dezvoltării studiului asupra mediilor dipolare poroase, fiind alcătuit din trei subcapitole care prezintă rezultatele cercetării personale.

În primul subcapitol am realizat modelarea teoriei termoelasticității mediilor dipolare poroase, în circumstanțe determinate de prezența teoriei Green-Naghdi de tip III, analizând efectele acestei teorii asupra particularităților problemei mixte, cu date inițiale și la limită, asociată acestui cadru. Extinderea detaliată a cercetării teoriei termoelasticității acestor medii, în noul context, a condus la obținerea ecuațiilor constitutive, a unei relații de reciprocitate, a unui rezultat de unicitate, într-o manieră mai puțin obișnuită, diferită de metoda transformării Laplace, prin utilizarea inegalității disipației, și a generalizării unui cunoscut principiu variațional, pentru medii anizotrope și neomogene.

Soluțiile generalizate ale problemei mixte, corespunzătoare mediilor dipolare poroase, constituie subiectul următorului subcapitol, problema mixtă, cu date inițiale și la limită, asociată unui mediu elastic poros, anizotrop și neomogen, fiind studiată printr-o modalitate aparte, constând în reducerea acestei probleme la o ecuație evoluționară, într-un spațiu Hilbert, adecvat ales. Teoria semigrupurilor de operatori liniari a facilitat deducerea rezultatelor privind atât existența și unicitatea, cât și dependența continuă a soluției problemei mixte, fără a necesita considerarea unor condiții restrictive suplimentare. Modelul de studiu este realizat cu referire la prima problemă la limită a teoriei elasticității mediilor dipolare poroase, cu mențiunea că poate fi utilizat și extins la cea de-a doua, respectiv a treia problemă la limită, prin aplicarea tiparului obținut și schimbarea condițiilor pe frontieră cu cele adecvate.

Rezultatul esențial obținut în ultimul subcapitol este reprezentat de o generalizare, în cadrul teoriei termoelasticității mediilor dipolare poroase, a teoremei referitoare la domeniul de influență din cadrul teoriei clasice a elasticității, pe baza unor inegalități deduse anterior, în cadrul aceleiași secțiuni. Paralela realizată între cele două teorii are drept consecință observarea valabilității rezultatului principal, referitor la domeniul de influență, în cadrul ambelor teorii, acest rezultat nefiind modificat de prezența efectului termic, a structurii dipolare, respectiv a golurilor.

Capitolul 4 este dedicat aprofundării cercetării mediilor micropolare poroase, fiind constituit din patru subcapitole, în care sunt prezentate rezultatele originale obținute în perioada studiilor doctorale.

În primul subcapitol am studiat comportamentul spațial al vibrațiilor armonice în timp, în cadrul oferit de teoria liniară a termoelasticității mediilor micropolare poroase, fără disiparea energiei, context care conferă trăsături particulare acestor medii. Am realizat estimări ale amplitudinii vibrațiilor armonice, pe baza determinării prealabile a unor identități, evidențiind, în același timp, rolul pe care îl ocupă distanța în raport cu baza perturbată, precum și condiția ca pentru frecvența vibrației să fie luată în considerare o valoare critică precizată. Maniera obținerii estimărilor amplitudinii vibrațiilor armonice, pe baza condițiilor de elipticitate tare a coeficienților termoelastici, este diferită de cea clasică, de tip Saint-Venant.

Pe parcursul celui de-al doilea subcapitol am realizat o modelare a teoriei termoelasticității mediilor micropolare poroase, în contextul unei deformații de ordin fracționar. Modelul, obținut prin utilizarea derivatei fracționare Caputo, constă în deducerea atât a ecuației non-Fourier a căldurii și a ecuațiilor constitutive, asociate acestei teorii și folosite ulterior pentru studierea reciprocității, precum și în determinarea unei relații de reciprocitate. Comparația înfăptuită între teoria clasică și cea a termoelasticității mediilor micropolare poroase, utilizând derivata fracționară Caputo, conduce la concluzia că există zone în cadrul cărora aceste teorii se suprapun, un exemplu în acest sens fiind validitatea, în ambele teorii, a relației de reciprocitate obținute.

În cel de-al treilea subcapitol, care prezintă rezultatele cercetării, am studiat efectul microtemperaturilor asupra particularităților esențiale ale problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a termoelasticității mediilor micropolare cu goluri. Dificultatea crescută a ecuațiilor și condițiilor care definesc termoelasticitatea mediilor micromorfe poroase, cu microparticule deținând microtemperaturi, solicită o abordare specială, constând în metoda de transformare a problemei mixte într-o problemă Cauchy, relaționată cu o ecuație de evoluție, într-un spațiu Hilbert, ales adecvat. Am obținut rezultate referitoare la unicitatea, existența și dependența continuă a soluției problemei mixte, prin intermediul teoriei semigrupurilor de operatori, teorie care confirmă a fi cea mai adecvată în abordarea acestor subiecte, în contextul dat.

În ultimul subcapitol, al celui de-al patrulea capitol, am realizat o extensie a unui cunoscut principiu de minim al energiei, dezvoltat în contextul mediilor elastice Cosserat poroase, atât prin generalizarea unei relații de reciprocitate și formularea unei probleme cu date pe frontieră, precum și prin demonstrarea unui rezultat referitor la unicitatea soluției respectivei probleme.

Capitolul 5 este dedicat studierii teoriei termoelasticității mediilor micromorfe, respectiv a celor micromorfe poroase, fiind structurat sub forma a două subcapitole care expun rezultate originale. În primul subcapitol am realizat un model algoritmic pentru obținerea unor ecuații de bază ale termoelasticității mediilor micromorfe, prin intermediul derivatei fracționare Caputo, analizând, în același timp, similaritățile acestei teorii în raport cu teoria clasică a termoelasticității. Metoda algoritmică prezentată constituie un tipar, care permite aplicarea schemei tehnice încorporate, la studierea altor tipuri de medii, extinzând astfel utilitatea ei în scopul obținerii unor obiective asemănătoare, dar în contexte diferite.

În cel de-al doilea subcapitol, conținând rezultate ale cercetării, am extins studiul problemei mixte, cu date inițiale și la limită, la cadrul oferit de influența microtemperaturilor asupra termoelasticității mediilor micromorfe poroase, studiind existența, unicitatea și dependența continuă a soluției acestei probleme prin intermediul teoriei semigrupurilor de operatori, datorită eficienței acestei teorii în facilitarea abordării subiectului, cu toate că gradul de complexitate a ecuațiilor și condițiilor este deosebit de mare.

1.4 Notații

Se consideră că mediile studiate ocupă, la momentul t_0, domeniul $\mathcal{D}$, din spațiul tridimensional Euclidian $\mathbb{R}^3$, domeniu care este o regiune regulată, cu închiderea notată cu $\overline{\mathcal{D}}$, și având frontiera o suprafață netedă, notată cu $\partial\mathcal{D}$.

Folosind un sistem Cartezian ortogonal, fixat, de axe $Ox_i,\ i = \overline{1,3}$, fiecare punct al domeniului $\mathcal{D}$ este caracterizat prin trei coordonate ortogonale, cu mențiunea că, se va utiliza notația x pentru (x_1, x_2, x_3), iar t pentru timp. În cele ce urmează, funcțiile vor fi privite ca funcții de (x, t), definite pe cilindrul $\overline{\mathcal{D}}\times(0,\infty)$, unde $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Ambele argumente, atât cel spațial, cât și variabila timp, vor fi omise, atunci când este exclusă posibilitatea unei confuzii.

De asemenea, va fi folosită cunoscuta convenție de sumare Einstein, aplicabilă în cazul în care un indice se repetă în cadrul unui monom, iar valorile pe care le vor lua indicii grecești și latini sunt $1, 2$, respectiv $1, 2, 3$. Derivata parțială a unei funcții în raport cu timpul va fi notată cu un punct deasupra funcției, adică $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$, iar un indice precedat de o virgulă va reprezenta derivata parțială în raport cu coordonata carteziană corespunzătoare, adică $f_{,j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

1.5 Mulțumiri

Dedic această lucrare, împreună cu mulțumirile mele deosebite, domnului Profesor Habil. Dr. Marin MARIN, pentru un vis împlinit și experiența descoperirii frumuseții acestui univers, pentru sprijinul real acordat în depășirea obstacolelor și pentru transformarea calității de conducător științific, al tezei mele de doctorat, în cea de mentor, în cel mai profund sens al cuvântului.

Capitolul 2

Contribuții asupra mediilor dipolare

2.1 Scurt istoric

Literatura de specialitate este marcată recent de o creștere intensivă a studiilor dedicate teoriei mediilor elastice cu microstructură. Inițiată prin apariția studiilor aparținând fraților Cosserat, vezi [29], dezvoltată ulterior de Eringen, vezi [38, 47], care propune o lege a conservării pentru tensorul de microinerție, creând astfel, un caz particular al mediilor cu microstructură, și anume, teoria mediilor micromorfe, această teorie a fost abordată și extinsă ulterior în multiple studii, exemple în acest sens fiind [8, 32, 64, 65, 95, 112].

În elasticitatea nonpolară, nu se ia în considerare faptul că răspunsul mediului la stimuli externi depinde puternic de mișcările structurii interne. Efectul nu poate fi descris prin intermediul doar a gradelor de libertate translaționale asociate punctelor materiale ale mediului.

În teoria continuă micropolară sunt prezente șase grade de libertate, jumătate dintre ele fiind cele de microrotație, spre deosebire de teoria clasică a elasticității, unde sunt prezente doar trei grade de libertate. Diferența constă în considerarea unui câmp vectorial cu trei directori, aspect deosebit de important în această teorie.

De asemenea, forțele care acționează pe elementul de suprafață sunt reprezentate atât de tensorul clasic de tensiune, precum și de un tensor cuplu-forță.

În teoria dipolară continuă, este esențial ca gradele de libertate pentru fiecare particulă să fie reprezentate prin trei translații și nouă microdeformații, iar fiecare punct material să se deformeze omogen. Există multe medii care se evidențiază prin necesitatea considerării microstructurii pe care o dețin. În acest sens, exemple sunt suspensiile, cristalele, polimerii și compozitele. Evident, scopul aplicării teoriei mediilor cu microstructură este de a evita nepotrivirea dintre teorie și aplicațiile sale.

Promotorul teoriei mediilor cu microtemperaturi este considerat Grot, care, în [56], pune bazele acestei teorii, considerând că microelementele unui mediu continuu sunt înzestrate cu microtemperaturi, alături de microdeformații, extinzând astfel teoriile existente ale mediilor cu structură interioară.

În acest context, cea de-a Doua Lege a termodinamicii este modificată, cu scopul includerii microtemperaturilor, iar ecuațiile primului moment al energiei se adaugă clasicei legi a echilibrului, corespunzătoare unui mediu cu microstructură, aceste ecuații conducând la obținerea ecuațiilor conductibilității termice pentru microtemperaturi. Există un număr vast de studii ale teoriei termoelasticității cu microtemperaturi, asociate unor medii extrem de diverse, câteva exemple în acest sens fiind [5, 21, 63, 92, 97, 101, 111, 119, 121].

2.2 Studiu asupra termoelasticității unui mediu dipolar cu microtemperaturi

2.2.1 Preliminarii

Prezentul subcapitol este dedicat studierii efectelor microtemperaturilor asupra caracteristicilor fundamentale ale problemei mixte, cu date inițiale și la limită, corespunzătoare mediilor termoelastice dipolare. În acest context, problema mixtă, cu date inițiale și la limită, va fi înlocuită printr-o problemă Cauchy, atașată unei ecuații temporale, de evoluție, pe un spațiu particular Hilbert, adecvat definit.

În acest mod, există oportunitatea utilizării rezultatelor oferite de teoria semigrupurilor de contracții, cu scopul obținerii atât a existenței și unicității soluției problemei mixte, precum și a rezultatului referitor la dependența continuă a soluției în raport cu încărcările și datele inițiale.

Rezultatele prezentate în acest subcapitol se bazează pe cele publicate în: Marin, M., Chirilă, A.,**Codarcea-Munteanu, L.**: On a thermoelastic material having a dipolar structure and microtemperatures. Appl. Math. Model. **80**, 827-839 (2020, online 2019), https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.11.022, jurnal situat în zona roșie, Q_1, cotat ISI, factor de impact 3,633 în anul 2019, articol premiat în cadrul competiției naționale „Premierea rezultatelor cercetării- UEFISCDI", vezi [101].

2.2.2 Notații și ecuații fundamentale

Fie $\mathcal{D}$ un domeniu mărginit, din spațiul Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, căruia îi corespunde, în configurația de referință, un mediu termoelastic dipolar, notațiile prezentate în secțiunea 1.4 fiind valabile pe parcursul acestui subcapitol. Alături de aceste notații, simbolurile îngroșate vor fi folosite pentru reprezentarea vectorilor, a tensorilor și a matricelor, de exemplu $\boldsymbol{u} = (u_i)_{1\le i\le 3}, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, etc.

Variabilele utilizate pentru reprezentarea ecuațiilor fundamentale care guvernează comportamentul unui mediu termoelastic dipolar, cu microtemperaturi, sunt $(u_i, \varphi_{ij}, \theta, \vartheta_i)$, unde u_i reprezintă componentele vectorului deplasare, φ_{ij} componentele tensorului deplasare dipolară, θ este variația de temperatură față de temperatura absolută T_0, din configurația de referință

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_0,$$

iar ϑ_i variația microtemperaturilor măsurate față de microtemperaturile T_i^0, din configurația de referință

$$\vartheta_i = T_i - T_i^0,$$

alături de două noi variabile, definite după cum urmează

$$\alpha(x,t) = \int_{t_0}^{t} \theta(x,s)ds, \quad \zeta_i(x,t) = \int_{t_0}^{t} \vartheta_i(x,s)ds, \tag{2.2.1}$$

unde t_0 este timpul de referință.

Variabila α, reprezentată prin relația $(2.2.1)_1$, definită prin intermediul temperaturii, se numește creștere a temperaturii sau deplasare termică, fiind introdusă de Green și Naghdi în [53], iar ζ_i, reprezentate prin relația $(2.2.1)_2$, se numesc deplasări microtermice.

Coordonatele unui punct arbitrar al mediului vor fi notate cu (x_i), iar în configurația de referință (x_i'), prin urmare, se poate presupune că temperatura absolută a mediului este reprezentată printr-o sumă de forma

$$\theta + T_i(x_i - x_i'). \tag{2.2.2}$$

Ecuațiile fundamentale, care guvernează comportamentului unui mediu termoelastic dipolar cu microtemperaturi, sunt prezentate în cele ce urmează:

- ecuațiile geometrice, care introduc tensorii de deformație, în raport cu variabilele de mișcare

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad \gamma_{ij} = u_{j,i} - \varphi_{ij}, \quad \chi_{ijk} = \varphi_{jk,i}, \tag{2.2.3}$$

- ecuațiile de mișcare

$$\begin{aligned} (\tau_{ij} + \sigma_{ji})_{,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i, \\ \mu_{ijk,i} + \sigma_{jk} + \rho g_{jk} &= I_{ks}\ddot{\varphi}_{js}, \end{aligned} \quad \text{în } \mathcal{D} \times (0, \infty), \tag{2.2.4}$$

obținute prin particularizarea pentru $n = 2$ a procedurii, utilizate de Green și Rivlin în [51], de obținere a ecuațiilor de mișcare în cazul multipolar,

- ecuațiile constitutive corespunzătoare unui mediu omogen, anizotrop, dipolar, cu microtemperaturi, vezi [62]

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} - a_{ij}\dot{\alpha} + d_{ijmn}\zeta_{m,n}, \\ \sigma_{ij} &= G_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} - b_{ij}\dot{\alpha} + e_{ijmn}\zeta_{m,n}, \\ \mu_{ijk} &= F_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} - c_{ijk}\dot{\alpha} + f_{ijkmn}\zeta_{m,n}, \\ \rho\eta &= a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\gamma_{ij} + c_{ijk}\chi_{ijk} + a\dot{\alpha} + \ell_{ij}\zeta_{i,j}, \\ \rho\eta_i &= A_{ij}\dot{\zeta}_j + B_{ij}\alpha_{,j}, \\ r_i &= -B_{ij}\dot{\zeta}_j + K_{ij}\alpha_{,j}, \\ M_{ij} &= d_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{ijmn}\gamma_{mn} + f_{ijmnr}\chi_{mnr} - \ell_{ij}\dot{\alpha} + g_{ijmn}\zeta_{m,n}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

- ecuația energiei, cu forma

$$\rho\dot{\chi}_i + r_i - h_i = 0, \tag{2.2.6}$$

- ecuațiile suplimentare ale energiei, conform [53], ca efect al prezenței microtemperaturilor

$$\begin{aligned} \rho\dot{\eta} &= r_{i,i} + \rho s, \\ \rho\dot{\eta}_i &= M_{ji,j} + \rho\mathcal{M}_i. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Notațiile folosite în ecuațiile precedente sunt cele ce urmează:

- f_i, g_{jk} reprezintă componentele forței masice, respectiv a cuplului forță masică,
- $I_{ij} = I_{ji}$ sunt coeficienții de microinerție,
- ρ este densitatea de masă în configurația de referință,
- $\tau_{ij}, \sigma_{ji}, \mu_{ijk}$ sunt componentele tensorilor de tensiune,
- η reprezintă entropia specifică pe unitatea de masă,
- η_i reprezintă componentele vectorului primului moment al entropiei,
- r_i sunt componentele vectorului flux de entropie,
- M_{ij} reprezintă componentele tensorului primului moment al fluxului de entropie,
- χ_i reprezintă rata internă de producere a entropiei pe unitatea de masă,
- h_i reprezintă componentele vectorului fluxului mediu de entropie,
- s este rata externă a sursei de entropie pe unitatea de masă,
- $\mathcal{M}_i$ reprezintă primul moment al ratei externe pentru sursa de entropie.

În același timp, coeficienții constitutivi $C_{ijmn}, B_{ijmn}, \ldots, \ell_{ij}, g_{ijmn}$ reprezintă caracteristicile mediului, fiind funcții de clasă $C^1(\mathcal{D})$, prescrise, care verifică relațiile de simetrie care urmează

$$\begin{array}{ccc} C_{ijmn} = C_{mnij}, & B_{ijmn} = B_{mnij}, & A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}, \\ B_{ij} = B_{ji}, & K_{ij} = K_{ji}, & a_{ij} = a_{ji}, \\ d_{ijmn} = d_{mnij}, & e_{ijmn} = e_{mnij}, & g_{ijmn} = g_{mnij}. \end{array} \tag{2.2.8}$$

Prin intermediul ecuațiilor geometrice (2.2.3), a ecuațiilor constitutive (2.2.5), a ecuațiilor de mișcare (2.2.4), precum și a ecuațiilor suplimentare ale energiei (2.2.7), se deduce următorul sistem de ecuații:

$$
\begin{aligned}
&[(C_{ijmn}+G_{ijmn})u_{m,n}+(G_{ijmn}+B_{ijmn})(u_{n,m}-\varphi_{mn})+(F_{mnrij}+D_{ijmnr})\varphi_{nr,m}]_{,j}-\\
&-(a_{ij}+b_{ij})\dot{\alpha}_{,j}+(d_{ijmn}+e_{ijmn})\zeta_{m,nj}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i,\\
&[F_{ijkmn}u_{m,n}+D_{mnijk}(u_{n,m}-\varphi_{mn})+A_{ijkmnr}\varphi_{nr,m}-c_{ijk}\dot{\alpha}+f_{ijkmn}\zeta_{m,n}]_{,i}+\\
&+G_{jkmn}u_{m,n}+B_{jkmn}(u_{n,m}-\varphi_{mn})+D_{jkmnr}\varphi_{nr,m}-b_{jk}\dot{\alpha}+e_{jkmn}\zeta_{m,n}+\\
&+\rho g_{jk}=I_{ks}\ddot{\varphi}_{js},\\
&(B_{ij}+\ell_{ij})\dot{\zeta}_{j,i}-K_{ij}\alpha_{,ij}+a_{ij}\dot{u}_{j,i}+b_{ij}(\dot{u}_{j,i}-\dot{\varphi}_{ij})+c_{ijk}\dot{\varphi}_{jk,i}+a\ddot{\alpha}=\rho s,\\
&d_{ijmn}u_{m,nj}+e_{ijmn}(u_{m,nj}-\varphi_{mn,j})+f_{ijmnr}\varphi_{nr,mj}-(B_{ij}+\ell_{ij})\dot{\alpha}_{,j}+\\
&+g_{ijmn}\zeta_{m,nj}-A_{ij}\ddot{\zeta}_j=-\rho\mathcal{M}_i,
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

ale cărui necunoscute sunt $u_i, \varphi_{ij}, \alpha$ și ζ_i.

Se consideră condițiile pe frontieră, după cum urmează

$$
\begin{aligned}
u_i(x,t)&=\widetilde{u}_i(x,t),\\
\varphi_{ij}(x,t)&=\widetilde{\varphi}_{ij}(x,t),\\
\alpha(x,t)&=\widetilde{\alpha}(x,t),\\
\zeta_i(x,t)&=\widetilde{\zeta}_i(x,t),
\end{aligned}
\qquad (x,t)\in\partial\mathcal{D}\times(0,\infty),
\tag{2.2.10}
$$

în acord cu problema Dirichlet, relaționată cu sistemul de ecuații (2.2.9), $\widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_{ij}, \widetilde{\alpha}$ și $\widetilde{\zeta}_i$ fiind funcții prescrise.

În același timp, pentru deplasările u_i, pentru deplasările dipolare φ_{ij}, pentru vectorul flux de entropie r_i, precum și pentru tensorul primul moment al fluxului de entropie M_{ij}, tracțiunile forțelor de suprafață aferente se notează cu t_i, μ_{jk}, r și M_i, astfel că

$$
\begin{aligned}
t_i&=(\tau_{ji}+\sigma_{ji})n_j,\\
\mu_{jk}&=\mu_{ijk}n_i,\\
r&=r_in_i,\\
M_i&=M_{ij}n_j,
\end{aligned}
\qquad \text{pe } \partial\mathcal{D},
\tag{2.2.11}
$$

n_i fiind componentele normalei unitare exterioare la suprafața $\partial\mathcal{D}$.

Pentru același sistem de ecuații (2.2.9) se consideră o problemă la limită de tip Neumann, în contextul căreia, condițiile pe frontieră (2.2.10) se prezintă sub următoarea formă:

$$
t_i=\widetilde{t}_i,\ \mu_{jk}=\widetilde{\mu}_{jk},\ r=\widetilde{r},\ M_i=\widetilde{M}_i,\ \text{pe } \partial\mathcal{D}\times(0,\infty).
\tag{2.2.12}
$$

În relația precedentă (2.2.12), $\widetilde{t}_i,\ \widetilde{\mu}_{jk},\ \widetilde{r}$ și $\widetilde{M}_i$ sunt funcții prescrise.

Alături de sistemul de ecuații (2.2.9), în continuare, vor fi considerate numai condiții de tip Dirichlet, cu alte cuvinte, de forma (2.2.10).

Cu scopul întregirii problemei mixte, cu date inițiale și la limită, corespunzătoare sistemului de ecuații (2.2.9), se adaugă condițiile inițiale care urmează

$$
\begin{aligned}
u_i(x,0)&=u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0)&=u_i^1(x),\\
\varphi_{ij}(x,0)&=\varphi_{ij}^0(x), & \dot{\varphi}_{ij}(x,0)&=\varphi_{ij}^1(x),\\
\alpha(x,0)&=\alpha^0(x), & \dot{\alpha}(x,0)&=\alpha^1(x),\\
\zeta_i(x,0)&=\zeta_i^0(x), & \dot{\zeta}_i(x,0)&=\zeta_i^1(x),
\end{aligned}
\qquad \forall x\in\mathcal{D},
\tag{2.2.13}
$$

funcțiile $u_i^0, u_i^1, \varphi_{ij}^0, \varphi_{ij}^1, \alpha^0, \alpha^1, \zeta_i^0$ și ζ_i^1 fiind prescrise pe $\mathcal{D}$.

În scopul obținerii rezultatelor principale, se consideră faptul că funcțiile din ecuațiile și condițiile formulate în această secțiune sunt suficient de regulate pe domeniul lor de definiție astfel încât să permită operații matematice ulterioare.

2.2.3 Rezultate principale obținute

Această secțiune este consacrată obținerii rezultatului principal care constă în studiul existenței și unicității soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, pentru mediile dipolare termoelastice, cu microtemperaturi, alături de rezultate privind dependența continuă a soluției atât față de datele inițiale, precum și față de încărcări, în contextul teoriei liniare.

În acest sens, se consideră, pentru energia liberă Ψ, forma pătratică care urmează

$$\begin{aligned}
\rho\Psi = {} & \frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+ \\
& + D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + d_{ijmn}\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n} + e_{ijmn}\gamma_{ij}\zeta_{m,n}+ \\
& + f_{ijkmn}\chi_{ijk}\zeta_{m,n} + \frac{1}{2}K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j} + \frac{1}{2}g_{ijmn}\zeta_{m,n}\zeta_{i,j} + \frac{1}{2}A_{ij}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_j,
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

variabilele independente $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \chi_{ijk}, \alpha$ și ζ_i ale funcției Ψ fiind luate în considerare la derivarea expresiei (2.2.14).

Rezultatul oferit de teorema care urmează este un rezultat auxiliar, care va fi folosit pentru demonstrarea unicității soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, în termoelasticitatea dipolară cu microtemperaturi.

Teorema 2.2.1 *Între variabilele care caracterizează deformația mediului dipolar termoelastic cu microtemperaturi are loc relația de egalitate care urmează*

$$\begin{aligned}
& \tau_{ij}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij} + \mu_{ijk}\chi_{ijk} + \rho\eta\dot{\alpha} + \rho\eta_i\dot{\zeta}_i + r_i\alpha_{,i} + M_{ij}\zeta_{i,j} = \\
& = C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + 2F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+ \\
& + 2D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + 2d_{ijmn}\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n} + 2e_{ijmn}\gamma_{ij}\zeta_{m,n}+ \\
& + 2f_{ijkmn}\chi_{ijk}\zeta_{m,n} + K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j} + g_{ijmn}\zeta_{m,n}\zeta_{i,j} + a\dot{\alpha}^2 + A_{ij}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_j.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Pentru demonstrarea unicității soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a termoelasticității mediilor dipolare, cu microtemperaturi, se vor impune următoarele ipoteze standard:

(i) $\rho > 0,\ I_{ij} > 0,\ a > 0;$
(ii) forma pătratică Ψ, reprezentată prin relația (2.2.14), este pozitiv semi-definită;
(iii) tensorul de conductivitate K_{ij} este pozitiv definit;
(iv) tensorul constitutiv A_{ij} este pozitiv definit.

Definiție 2.2.1 *Se numește soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a mediilor termoelastice dipolare, cu microtemperaturi, notată cu $\mathcal{P}$, sistemul ordonat $(u_i, \varphi_{ij}, \alpha, \zeta_i)$, care satisface sistemul de ecuații (2.2.9), condițiile inițiale (2.2.13)$_{1-8}$ și condițiile la limită (2.2.10)$_{1-4}$, pentru toți $(x, t) \in \mathcal{D} \times (0, \infty)$.*

Teorema 2.2.2 *Dacă atât ipotezele standard $(i) - (iv)$, precum și relațiile de simetrie (2.2.8) sunt îndeplinite, atunci problema mixtă, cu date inițiale și la limită $\mathcal{P}$, nu poate admite mai mult de o soluție.*

În cele ce urmează, va fi abordată problema referitoare la existența soluției problemei mixte $\mathcal{P}$, problemă care va fi modificată într-o problemă Cauchy, asociată unei ecuații abstracte, de evoluție, pe un spațiu Hilbert, ales în mod corespunzător.

Problema mixtă $\mathcal{P}$ va fi analizată în contextul condițiilor la limită omogene, și anume

$$\widetilde{u}_i(x,t) = \widetilde{\varphi}_{ij}(x,t) = \widetilde{\alpha}(x,t) = \widetilde{\zeta}_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,\infty). \tag{2.2.16}$$

Prin intermediul spațiilor Hilbert cunoscute $W_0^{1,2}$ și L^2 se definește spațiul Hilbert

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times \boldsymbol{L}^2 \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times \boldsymbol{L}^2 \times W_0^{1,2} \times L^2 \times W_0^{1,2} \times L^2 \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times \boldsymbol{L}^2, \tag{2.2.17}$$

unde $\boldsymbol{W}_0^{1,2} = W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} = [W_0^{1,2}]^3$, $\boldsymbol{L}^2 = L^2 \times L^2 \times L^2 = [L^2]^3$.

Spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ este înzestrat cu o normă indusă de spațiile Hilbert care fac parte din produsul său de definire, la care, în cele ce urmează, se va face referire ca la norma originală a spațiului Hilbert $\mathcal{H}$. Spațiile Hilbert și Sobolev sunt prezentate detaliat în [2, 7, 127].

Spațiul $\mathcal{H}$ devine spațiu pre-Hilbert în relația cu produsul scalar care urmează

$$\begin{aligned}
&\left\langle (u_i, v_i, \varphi_{ij}, \Phi_{ij}, \alpha, \beta, \zeta_i, \varsigma_i), (u_i', v_i', \varphi_{ij}', \Phi_{ij}', \alpha', \beta', \zeta_i', \varsigma_i') \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} (\rho v_i v_i' + I_{jk}\Phi_{js}\Phi_{ks}' + a\beta\beta' + B_{ij}\varsigma_i\varsigma_i')dV + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} [C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}' + G_{ijmn}(\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}' + \varepsilon_{ij}'\gamma_{mn}) + F_{ijmnr}(\varepsilon_{ij}\chi_{mnr}' + \varepsilon_{ij}'\chi_{mnr}) + \\
&+ B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}' + D_{ijmnr}(\gamma_{ij}\chi_{mnr}' + \gamma_{ij}'\chi_{mnr}) + A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}' + d_{ijmn}(\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n}' + \\
&+ \varepsilon_{ij}'\zeta_{m,n}) + e_{ijmn}(\gamma_{ij}\zeta_{m,n}' + \gamma_{ij}'\zeta_{m,n}) + f_{ijkmn}(\chi_{ijk}\zeta_{m,n}' + \chi_{ijk}'\zeta_{m,n}) + g_{ijmn}\zeta_{m,n}\zeta_{i,j}']dV.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Teorema 2.2.3 *Norma indusă de produsul scalar reprezentat prin relația (2.2.18) este echivalentă cu norma originală din spațiul $\mathcal{H}$.*

Urmând procedura prezentată în [112] și ținând cont de relațiile (2.2.9), se introduc operatorii care urmează

$$\begin{aligned}
&A_i^1\boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}(C_{ijmn} + 2G_{ijmn} + B_{ijmn})u_{m,nj}, \\
&A_i^2\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\rho}[-(G_{mnij} + B_{ijmn})\varphi_{mn,j} + (F_{mnrij} + D_{ijmnr})\varphi_{mn,rj}], \\
&B_i^1\beta = -\frac{1}{\rho}(a_{ij} + b_{ij})\beta_{,j}, \quad C_i^1\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{\rho}(d_{ijmn} + e_{ijmn})\zeta_{m,nj}, \\
&A^3\boldsymbol{u} = (I_{jk})^{-1}[(F_{ijkmn} + D_{mnijk})u_{n,mi} + (G_{jkmn} + B_{jkmn})u_{m,n}], \\
&A^4\boldsymbol{\varphi} = (I_{jk})^{-1}[-D_{mnijk}\varphi_{mn,i} + A_{ijkmnr}\varphi_{mn,ri} - B_{jkmn}\varphi_{mn} + D_{jkmnr}\varphi_{mn,r}], \\
&B^2\beta = -(I_{jk})^{-1}(c_{ijk}\beta_{,i} + b_{jk}\beta), \quad C^2\boldsymbol{\zeta} = (I_{jk})^{-1}(f_{ijkmn}\zeta_{m,ni} + e_{jkmn}\zeta_{m,n}), \\
&N\alpha = \frac{1}{a}K_{ij}\alpha_{,ij}, \quad Q\boldsymbol{\varsigma} = -\frac{1}{a}(B_{ij} + \ell_{ij})\varsigma_{j,i}, \\
&R^1\boldsymbol{v} = -\frac{1}{a}(a_{ij} + b_{ij})v_{j,i}, \quad R^2\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{a}(b_{ij}\Phi_{ij} - c_{ijk}\Phi_{jk,i}), \\
&A_s^5\boldsymbol{u} = \Lambda_{si}(d_{ijmn} + e_{ijmn})u_{m,nj}, \quad A_s^6\boldsymbol{\varphi} = \Lambda_{si}(f_{ijmnr}\varphi_{mn,rj} - e_{ijmn}\varphi_{mn,j}), \\
&X_s\beta = -\Lambda_{si}(B_{ji} + \ell_{ji})\beta_{,j}, \quad Y_s\boldsymbol{\zeta} = \Lambda_{si}g_{ijmn}\zeta_{m,nj},
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

unde matricea $\Lambda_{si} = (\Lambda_{ij})$ este definită prin

$$\Lambda_{ij}B_{ik} = \delta_{jk},$$

δ_{jk} fiind simbolul lui Kronecker.

Se consideră $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ matricea

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = (u_i, v_i, \varphi_{ij}, \Phi_{ij}, \alpha, \beta, \zeta_i, \varsigma_i),$$

unde funcțiile $u_i, v_i, \ldots, \zeta_i, \varsigma_i$ sunt funcții necunoscute.

În relație directă cu această matrice $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, se va considera matricea $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$, aferentă datelor inițiale

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_0 = (u_i^0, v_i^0, \varphi_{ij}^0, \Phi_{ij}^0, \alpha^0, \beta^0, \zeta_i^0, \varsigma_i^0).$$

Corespunzător încărcărilor, se consideră matricea $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, și anume

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathbf{0}, f_i, \mathbf{0}, g_{ij}, 0, s, \mathbf{0}, \mathcal{M}_i).$$

Prin intermediul operatorilor reprezentați prin relațiile (2.2.19), pentru modificarea problemei mixte $\mathcal{P}$, cu date inițiale și la limită, într-o problemă Cauchy corelată cu o ecuație de evoluție, se introduce operatorul matriceal $\mathcal{L}$, ale cărui componente vor fi tocmai operatorii introduși prin relațiile (2.2.19). Prin urmare, problema mixtă, cu date inițiale și la limită, a termoelasticității mediilor dipolare cu microtemperaturi, $\mathcal{P}$, este redusă la o problemă abstractă cu condiții inițiale în spațiul Hilbert $\mathcal{H}$, și anume

$$\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{\mathcal{U}}}{dt} = \mathcal{L}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t) + \boldsymbol{\mathcal{F}}, \\ &\boldsymbol{\mathcal{U}}(0) = \boldsymbol{\mathcal{U}}_0. \end{aligned} \qquad 0 \le t \le t_0, \tag{2.2.20}$$

În ceea ce privește domeniul de definiție al operatorului $\mathcal{L}$, acesta va fi

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}) = (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times \\ \times (W_0^{1,2} \cap W^{2,2}) \times W_0^{1,2} \times (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}^{1,2}, \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

$W_0^{1,2}, W_0^{2,2}, \boldsymbol{W}_0^{1,2}$, respectiv $\boldsymbol{W}^{2,2}$ fiind spațiile Sobolev cunoscute.

Teorema care urmează oferă detalii asupra specificității operatorului $\mathcal{L}$, evidențiind proprietatea de a fi disipativ, fiind necesară pentru demonstrarea existenței soluției problemei abstracte reprezentată prin relația (2.2.20).

Teorema 2.2.4 *Dacă atât ipotezele $(i) - (iv)$, precum și relațiile de simetrie (2.2.8) sunt satisfăcute, atunci este îndeplinită*

$$\langle \mathcal{L}\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{U}} \rangle = 0, \ \forall \boldsymbol{\mathcal{U}} \in D(\mathcal{L}). \tag{2.2.22}$$

Teorema care urmează demonstrează faptul că operatorul $\mathcal{L}$ verifică condiția de contraimagine, adică ecuația

$$\mathcal{L}\boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}', \tag{2.2.23}$$

admite cel puțin o soluție $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ în $D(\mathcal{L})$, pentru un element arbitrar, fixat, $\boldsymbol{\mathcal{U}}'$, din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.

Teorema 2.2.5 *Dacă ipotezele $(i) - (iv)$, și relațiile de simetrie (2.2.8) sunt îndeplinite, atunci operatorul $\mathcal{L}$ satisface condiția de contraimagine.*

Teorema 2.2.6 *Dacă ipotezele $(i) - (iv)$ și relațiile de simetrie (2.2.8) sunt îndeplinite, operatorul abstract $\mathcal{L}$ generează un semigrup de contracții pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.*

Teorema 2.2.7 *Dacă atât ipotezele $(i) - (iv)$, precum și relațiile de simetrie (2.2.8) sunt satisfăcute, datele inițiale $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$ aparțin domeniului operatorului $\mathcal{L}, \boldsymbol{\mathcal{U}}_0 \in D(\mathcal{L})$, iar încărcările îndeplinesc condițiile*

$$f_i, g_{ij}, s, \mathcal{M}_i \in C^1([0,\infty), L^2) \cap C^0([0,\infty), W_0^{1,2}),$$

atunci problema abstractă (2.2.20) admite soluția unică

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(t) \in C^1([0,\infty), \mathcal{H}).$$

Teorema care urmează oferă un ultim rezultat fundamental al acestui subcapitol, și anume, dependența continuă a soluțiilor în raport atât cu datele inițiale, cât și cu încărcările. Formularea acestui rezultat, corelată cu soluțiile problemei abstracte (2.2.20), dar, pe baza considerațiilor anterioare, conduce la transferarea acestui rezultat asupra soluțiilor problemei mixte, cu date inițiale și la limită.

Teorema 2.2.8 *Dacă ipotezele $(i)-(iv)$ și relațiile de simetrie (2.2.8) sunt îndeplinite, soluția $\boldsymbol{\mathcal{U}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \boldsymbol{\zeta})$ a problemei (2.2.20) este dependentă continuu atât de datele inițiale $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$, precum și de încărcările f_i, g_{ij}, s și $\mathcal{M}_i$, astfel că*

$$|\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)| \leq |\boldsymbol{\mathcal{U}}_0| + \int_0^t \|(f_i, g_{ij}, s, \mathcal{M}_i)\| ds.$$

2.2.4 Concluzii

Comportamentul unor medii avansate este analizat cu mai multă precizie, atât prin considerarea structurii sale interne, precum și a microtemperaturilor pe care particulele sale le prezintă, cu toate că, din această perspectivă, sistemul format din ecuațiile și condițiile care guvernează teoria termoelasticității devine extrem de complex, toate aspectele privind numărul necunoscutelor, al ecuațiilor diferențiale, al condițiilor la limită și inițiale fiind amplificate, context în care, aplicarea teoriei semigrupurilor de operatori este mult mai adecvată.

2.3 Vibrații în teoria Green Naghdi de tip III a termoelasticității mediilor dipolare

2.3.1 Preliminarii

Obiectivul înlăturării divergențelor dintre experimente și teoria clasică a termoelasticității, cu referire, atât la ecuația transmiterii căldurii, precum și la viteza infinită de propagare a undelor, în cazul ecuației clasice de propagare a căldurii, a condus la o largă varietate de studii dedicate acestui subiect, context în care, cele trei teorii dezvoltate de Green și Naghdi, vezi [53, 54] și [55], ocupă un loc primordial.

În principal, teoriile Green-Naghdi se bazează mai mult pe o lege a echilibrului energiei, decât pe inegalitatea entropiei. În acest context, este introdusă noțiunea de deplasare termică, notată cu α, care este corelată cu variația temperaturii θ, sub forma relației

$$\alpha(t) = \int_0^t \theta(s) ds. \tag{2.3.1}$$

Influența teoriei termoelasticității Green-Nagdi de tip III asupra unui mediu dipolar conduce, în cadrul acestui subcapitol, la formularea problemei mixte, cu date inițiale și la limită, constând în ecuații și condiții referitoare la vectorul deplasare, tensorul deplasare dipolară, temperatură, densitatea masei, capacitatea de căldură, tensorul conductivității termice, deplasarea termică, precum și la tensorii coeficienților elastici, toate aceste cantități fiind funcții netede.

Cu scopul unei formulări corecte a problemei mixte, asociată termoelasticității dipolare a teoriei Green-Naghdi de tip III, se va observa că este necesar a impune, asupra capacității de căldură și asupra densității masei, condiția de a fi pozitive, precum și asupra tensorului conductivității termice și asupra tensorilor elasticității, de a fi pozitiv definiți.

Rezultatele prezentate pe parcursul acestui subcapitol se bazează pe cele publicate în articolul: Marin, M., Chirilă, A., **Codarcea, L.**, Vlase, S.: On vibrations in Green-Naghdi thermoelasticity of dipolar bodies. An. St. Univ. Ovidius Constanța-Seria Matematică **27**(1), 125-140 (2019), https://doi.org/10.2478/auom-2019-0007, jurnal cotat ISI, factor de impact 0,844 în anul 2019, vezi [99].

2.3.2 Notații și ecuații fundamentale

Se presupune ca mediul termoelastic dipolar ocupă, la momentul t_0, domeniul $\mathcal{D}$, din spațiul Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, o bară prismatică dreaptă, cu o bază plană.

Sistemul cartezian rectangular de axe se alege astfel încât baza să fie situată pe planul x_1Ox_2, iar partea pozitivă a axei x_3 să fie direcționată de-a lungul cilindrului.

Secțiunea generică, transversală, a cilindrului va fi notată cu D, presupunând faptul că frontiera sa, ∂D, este suficient de netedă pentru a aplica teorema divergenței. Secțiunea transversală fiind uniformă pentru toți $x_3 \geq 0$, se va nota cu $D(x_3)$, secțiunea situată la distanța x_3 de bază, iar $\mathcal{D}$ se va scrie $\mathcal{D} = D\times[0, L]$, unde L este lungimea cilindrului. În plus, se notează cu $\mathcal{D}(x_3)$ porțiunea din $\mathcal{D}$ conținută între $D(x_3)$ și $D(L)$, adică $\mathcal{D}(x_3) = D \times [x_3, L]$.

Se presupune că domeniul $\mathcal{D}$ este ocupat de un mediu termoelastic neomogen și anizotrop. Modelului matematic prezentat i se asociază un sistem de ecuații care guvernează în contextul teoriei liniare a termoelasticității dipolare.

Se utilizează metoda introdusă de Green și Rivlin, vezi [51], prin care se suprapune o nouă mișcare, rigidă, diferită de mișcarea inițială, care nu afectează specificitățile mediului. Astfel, se deduc relațiile cinematice care dau expresiile tensorilor de deformație $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$ și χ_{ijk}, în raport cu variabilele de mișcare, vezi [45], reprezentate prin ecuațiile (2.2.3), alături de expresia gradientului deplasării termice

$$\beta_i = \alpha_{,i}. \tag{2.3.2}$$

Mișcarea mediului dipolar, în termoelasticitatea Green-Naghdi de tip III, va fi caracterizată prin vectorul deplasare $u = (u_i)_{1\leq i\leq 3}$, prin tensorul deplasare dipolară $\varphi = (\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, precum și prin deplasarea termică α.

Se presupune că toate componentele deplasării, variația temperaturii față de temperatura de referință, alături de derivatele spațiale și cele în raport cu timpul ale acestor funcții, sunt mici. Considerațiile sunt restricționate la contextul mediilor cu centru de simetrie. De asemenea, se presupune că mediul este liber de tensiuni în configurația de referință, având cuplul forță masică și sarcina internă de echilibru nule.

Teoria liniară solicită o formă pătratică pentru energia liberă Helmholtz Ψ, în raport cu variabilele constitutive independente,

$$\begin{aligned}\rho\Psi = &\frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+\\ &+ D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + M_{ijm}\varepsilon_{ij}\beta_m + N_{ijm}\gamma_{ij}\beta_m+\\ &+ R_{ij}\beta_i\dot{\beta}_i + P_{ijkm}\chi_{ijk}\beta_m + N_i\beta_i\theta + \frac{1}{2}K_{ij}\beta_i\beta_j - a_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - b_{ij}\gamma_{ij}\theta-\\ &- c_{ijk}\chi_{ijk}\theta - \frac{1}{2}c\theta^2.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Corespunzător, densitatea energiei interne, $\mathcal{E}$, are expresia

$$\begin{aligned}\rho\mathcal{E} = &\frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + F_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}+\\ &+ D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + M_{ijm}\varepsilon_{ij}\beta_m + N_{ijm}\gamma_{ij}\beta_m+\\ &+ P_{ijkm}\chi_{ijk}\beta_m + \frac{1}{2}K_{ij}\beta_i\beta_j + R_{ij}\beta_i\dot{\beta}_j + \frac{1}{2}c\theta^2.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Energia liberă specifică Helmholtz Ψ este utilizată în inegalitatea entropiei, cu scopul obținerii ecuațiilor constitutive, care reprezintă expresiile tensorilor de tensiune în funcție de tensorii de deformație,

$$
\begin{aligned}
\tau_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + G_{mnij}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} - a_{ij}\theta, \\
\sigma_{ij} &= G_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} - b_{ij}\theta, \\
\mu_{ijk} &= F_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} - c_{ijk}\theta, \\
\rho\eta &= a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\gamma_{ij} + c_{ijk}\chi_{ijk} - N_i\beta_i + c\theta, \\
q_m &= M_{ijm}\varepsilon_{ij} + N_{ijm}\gamma_{ij} + R_{im}\dot{\beta}_i + P_{ijkm}\chi_{ijk} + K_{im}\beta_i + N_m\theta.
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

Ecuațiile de mișcare se prezintă sub forma relațiilor (2.2.4), iar ecuația energiei se regăsește sub forma care urmează

$$
\rho\dot{\eta} = q_{i,i} + \rho r, \tag{2.3.6}
$$

cu mențiunea că ecuațiile (2.3.1), (2.3.5), (2.2.4) și (2.3.6) au loc pentru $(x,t) \in \bar{\mathcal{D}} \times (0,\infty)$.

Notațiile $f_i, g_{jk}, I_{ij}, \rho, \tau_{ij}, \sigma_{ij}, \mu_{ijk}, \eta$ și θ, utilizate în ecuațiile precedente, sunt cele prezentate în secțiunea 2.2.2, acestora alăturându-se q_i și r, reprezentând componentele fluxului de căldură, respectiv măsura debitului de căldură pe unitatea de masă. De asemenea, coeficienții constitutivi C_{ijmn}, $G_{ijmn}, \ldots, N_i$ reprezintă specificații ale mediului, care, alături de densitatea de masă și capacitatea de căldură c, sunt funcții continuu diferențiabile pe $\bar{\mathcal{D}}$, depinzând doar de variabila spațială și îndeplinind următoarele relații de simetrie:

$$
\begin{aligned}
&C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn}, \qquad G_{ijmn} = G_{jimn}, \qquad F_{ijmnr} = F_{jimnr}, \\
&B_{ijmn} = B_{mnij}, \quad A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}, \quad M_{ijk} = M_{jik}, \quad K_{ij} = K_{ji}.
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

Conform cu [55], rata internă de furnizare a căldurii pe unitatea de masă, prin intermediul gradientului de deplasare termică β_i, este

$$
\theta\xi = R_{ij}\dot{\beta}_i\dot{\beta}_j, \tag{2.3.8}
$$

unde tensorul de conductibilitate a căldurii, vezi, de asemenea, [20], satisface inegalitatea disipării

$$
R_{ij}\dot{\beta}_i\dot{\beta}_j \geq 0. \tag{2.3.9}
$$

2.3.3 Rezultate principale obținute

Se presupune, în cele ce urmează, că, atât suprafața laterală a barei prismatice, precum și baza sa $x_3 = h$, sunt menținute la deplasare termică zero, deplasare și deplasare dipolară nule, iar baza $x_3 = 0$ este supusă unei vibrații armonice în timp. Ca o consecință, în bara prismatică se preconizează obținerea unei soluții armonice în timp, adică, de forma

$$
u_j(x,t) = U_j(x)e^{i\omega t}, \quad \varphi_{jk}(x,t) = \Phi_{jk}(x,t)e^{i\omega t}, \quad \alpha(x,t) = \Lambda(x)e^{i\omega t}, \tag{2.3.10}
$$

unde i este unitatea complexă, $i^2 = -1$, iar ω este o constantă pozitivă dată.

Prin intermediul relațiilor precedente (2.3.10), relațiile cinematice (2.2.3) devin

$$
E_{mn} = \frac{1}{2}(U_{m,n} + U_{n,m}), \quad \Gamma_{mn} = U_{n,m} - \Phi_{mn}, \quad \Omega_{ijk} = \Phi_{jk,i}, \quad A_k = \Lambda_{,k}. \tag{2.3.11}
$$

Prin urmare, ecuațiile constitutive (2.3.5) adoptă forma care urmează

$$
\begin{aligned}
T_{ij} &= C_{ijmn}E_{mn} + G_{mnij}\Gamma_{mn} + F_{mnrij}\Omega_{mnr} - i\omega a_{ij}\Lambda, \\
S_{ij} &= G_{ijmn}E_{mn} + B_{ijmn}\Gamma_{mn} + D_{ijmnr}\Omega_{mnr} - i\omega b_{ij}\Lambda, \\
\Sigma_{ijk} &= F_{ijkmn}E_{mn} + D_{mnijk}\Gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\Omega_{mnr} - i\omega c_{ijk}\Lambda, \\
\rho H &= a_{ij}E_{ij} + b_{ij}\Gamma_{ij} + c_{ijk}\Omega_{ijk} - N_i A_i + i\omega c\Lambda, \\
Q_m &= M_{ijm}E_{ij} + N_{ijm}\Gamma_{ij} + P_{ijkm}\Omega_{ijk} + K_{im}A_i + i\omega R_{im}A_i + i\omega N_m\Lambda.
\end{aligned}
\tag{2.3.12}
$$

Prin intermediul relațiilor (2.3.10), în absența atât a forței masice, precum și a cuplului forță masică, ecuațiile de mișcare (2.2.4) devin

$$\begin{aligned} &(T_{mn} + S_{mn})_{,m} + \rho\omega^2 U_n = 0, \\ &\Sigma_{nmk,n} + S_{mk} + \omega^2 I_{ks}\Phi_{ms} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

De asemenea, prin utilizarea acelorași relații (2.3.10), ecuația energiei primește forma care urmează

$$Q_{j,j} - i\omega a_{jk}E_{jk} - i\omega b_{jk}\Gamma_{jk} - i\omega c_{jkm}\Omega_{jkm} + i\omega N_j A_j + c\omega^2\Lambda = 0. \tag{2.3.14}$$

Împreună cu ecuațiile de bază prezentate anterior se consideră condițiile la limită, care, pentru baza cilindrului, $x_3 = 0$, au forma

$$U_j(x) = \widetilde{U}_j(x), \quad \Phi_{jk}(x) = \widetilde{\Phi}_{jk}(x), \quad \Lambda(x) = \widetilde{\Lambda}(x), \text{ pe } D(0), \tag{2.3.15}$$

unde $\widetilde{U}_j(x), \widetilde{\Phi}_{jk}(x)$ și $\widetilde{\Lambda}(x)$ sunt funcții prescrise.

Pentru $x_3 = L$,

$$U_j(x) = 0, \quad \Phi_{jk}(x) = 0, \quad \Lambda(x) = 0, \text{ pe } D(L). \tag{2.3.16}$$

Condițiile la limită pe frontiera laterală a cilindrului vor avea forma similară

$$U_j(x) = 0, \quad \Phi_{jk}(x) = 0, \quad \Lambda(x) = 0, \text{ pe } \partial D \times [0, L]. \tag{2.3.17}$$

Problema mixtă, cu date inițiale și la limită, constând în ecuațiile de bază reprezentate prin relațiile (2.3.11)-(2.3.14) și condițiile la limită (2.3.15)-(2.3.17), va fi notată cu $\mathcal{P}$. Cele două estimări, oferite de teorema care urmează, vor fi utile în cadrul demonstrațiilor ulterioare.

Teorema 2.3.1 *Dacă $(U_j, \Phi_{jk}, \Lambda)$ este amplitudinea vibrației care este soluție a problemei $\mathcal{P}$, atunci au loc următoarele două estimări:*

$$\begin{aligned} &2\int_{D(x_3)} [C_{klmn}E_{kl}\bar{E}_{mn} + G_{klmn}(E_{kl}\bar{\Gamma}_{mn} + \bar{E}_{kl}\Gamma_{mn}) + F_{klmnr}(E_{kl}\bar{\Omega}_{mnr} + \bar{E}_{kl}\Omega_{mnr}) + \\ &+ B_{klmn}\Gamma_{kl}\bar{\Gamma}_{mn} + D_{klmnr}(\Gamma_{kl}\bar{\Omega}_{mnr} + \bar{\Gamma}_{kl}\Omega_{mnr}) + A_{jklmnr}\Omega_{jkl}\bar{\Omega}_{mnr} + \\ &+ M_{klm}(E_{kl}\bar{A}_m + \bar{E}_{kl}A_m) + N_{klm}(\Gamma_{kl}\bar{A}_m + \bar{\Gamma}_{kl}A_m) + P_{jklm}(\Omega_{jkl}\bar{A}_m + \bar{\Omega}_{jkl}A_m) + \\ &+ K_{jl}A_l\bar{A}_j - \omega^2(\rho U_j\bar{U}_j + I_{mn}\Phi_{mk}\bar{\Phi}_{nk} + c\Lambda\bar{\Lambda}) + i\omega a_{jk}(E_{jk}\bar{\Lambda} - \bar{E}_{jk}\Lambda) + \\ &+ i\omega b_{jk}(\Gamma_{jk}\bar{\Lambda} - \bar{\Gamma}_{jk}\Lambda) + ic_{jkm}(\Omega_{jkm}\bar{\Lambda} - \bar{\Omega}_{jkm}\Lambda) + i\omega N_m(\Lambda\bar{\Lambda}_{,m} - \bar{\Lambda}\Lambda_{,m})]dA = \\ &= \frac{d}{dx_3}\int_{D(x_3)} [U_m(\bar{S}_{3m} + \bar{T}_{3m}) + \bar{U}_m(S_{3m} + T_{3m}) + \Phi_{jk}\bar{\Sigma}_{3jk} + \bar{\Phi}_{jk}\Sigma_{3jk} + (\Lambda\bar{Q}_3 + \bar{\Lambda}Q_3)]dA, \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned} \int_{D(x_3)} R_{mn}A_m\bar{A}_n dA = \frac{d}{dx_3}\int_{D(x_3)} \frac{i}{2\omega}(\Lambda\bar{Q}_3 - \bar{\Lambda}Q_3)dA + \frac{d}{dx_3}\int_{\mathcal{D}} \frac{i}{2\omega}[U_m(\bar{S}_{3m} + \bar{T}_{3m}) + \\ + \bar{U}_m(S_{3m} + T_{3m}) + \Phi_{jk}\bar{\Sigma}_{3jk} - \bar{\Phi}_{jk}\Sigma_{3jk}]dA, \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

unde bara deasupra unei funcții are semnificația conjugatei complexe a respectivei funcții.

Cu scopul obținerii rezultatului principal, constând în comportamentul spațial al amplitudinii $(U_j, \Phi_{jk}, \Lambda)$, corespunzătoare vibrației armonice care este soluție a problemei $\mathcal{P}$, se introduce funcția care urmează

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_3) = &-\frac{\delta i}{2\omega}\int\limits_{D(x_3)}[U_m(\bar{S}_{3m}+\bar{T}_{3m})-\bar{U}_m(S_{3m}+T_{3m})+\Phi_{jk}\bar{\Sigma}_{3jk}-\bar{\Phi}_{jk}\Sigma_{3jk}]dA-\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_{D(x_3)}[U_m(\bar{S}_{3m}+\bar{T}_{3m})+\bar{U}_m(S_{3m}+T_{3m})+\Phi_{jk}\bar{\Sigma}_{3jk}+\bar{\Phi}_{jk}\Sigma_{3jk}]dA-\\ &-\frac{1}{2}\int\limits_{D(x_3)}[\frac{\delta i}{\omega}(\Lambda\bar{Q}_3-\bar{\Lambda}Q_3)+(\Lambda\bar{Q}_3+\bar{\Lambda}Q_3)]dA,\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

unde $x_3 \geq 0$, iar δ este un parametru care poate lua orice valoare pozitivă necesară.

De asemenea, pentru estimarea amplitudinii vibrației armonice, este necesară introducerea mărimii care urmează,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x_3) = \lambda_1 &\int\limits_{\mathcal{D}(x_3)} C_{klmn}E_{kl}\bar{E}_{mn}dV + \lambda_2 \int\limits_{\mathcal{D}(x_3)} B_{klmn}\Gamma_{kl}\bar{\Gamma}_{mn}dV+\\ +\lambda_3 &\int\limits_{\mathcal{D}(x_3)} A_{jklmnr}\Omega_{jkl}\bar{\Omega}_{mnr}dV + \lambda_4 \int\limits_{\mathcal{D}(x_3)} R_{mn}A_m\bar{A}_n dV,\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, și λ_4 sunt parametri pozitivi, care se pot alege în mod convenabil.

Se presupun următoarele ipoteze:

(i) $\rho > 0,\ I_{ij} > 0$;
(ii) tensorul conductivității căldurii R_{mn} satisface condiția

$$\mu_m\xi_m\xi_m \leq R_{mn}\xi_m\xi_n \leq \mu_M\xi_m\xi_m, \tag{2.3.22}$$

pentru toți ξ_m, unde constantele pozitive μ_m și μ_M sunt corelate cu valorile proprii, minimă și maximă, ale tensorului pozitiv definit R_{mn}. Condiții similare sunt îndeplinite și de tensorii elasticității, care apar în expresia densității energiei interne.

Teorema 2.3.2 *Dacă $(U_j, \Phi_{jk}, \Lambda)$ este amplitudinea vibrației care este soluție a problemei mixte $\mathcal{P}$, având o frecvență ω mai mică decât o valoare prescrisă ω^*, atunci se poate determina o constantă ν, astfel încât mărimea $\mathcal{M}(x_3)$ să satisfacă estimarea care urmează*

$$0 \leq \mathcal{M}(x_3) \leq \mathcal{M}(0)e^{\nu(h-x_3)},\ h \leq x_3 \leq L,\ \text{pentru orice } h \in (0, L]. \tag{2.3.23}$$

2.3.4 Concluzii

Se evidențiază faptul că procedura abordată pe parcursul acestui subcapitol este ușor diferită de cea utilizată în situația clasică a mediilor elastice simple. În ceea ce privește mediile dipolare, contextul creat de termoelasticitatea Green-Naghdi de tip III este mult mai complex, dar, cu toate acestea, comportamentul spațial al vibrațiilor armonice a fost descris prin estimări care au fost deduse într-o manieră similară, obținute doar pentru amplitudinile a căror frecvență este mai mică decât o anumită valoare critică, supusă doar efectelor mecanice.

Rezultatele obținute pot constitui un punct de plecare pentru alte studii, acestea rămânând valabile și pentru alte condiții la limită, dar în contextul în care fluxul de căldură și tracțiunile sunt presupuse a fi funcții armonice în timp, iar condițiile la limită pe frontiera laterală sunt presupuse a fi nule.

Capitolul 3

Contribuții asupra mediilor dipolare poroase

3.1 Scurt istoric

Teoria mediilor dipolare poroase a fost studiată și dezvoltată cu interes crescut în ultima perioadă, ca fiind parte a noilor modele de medii elastice continue. Printre inițiatorii acestor modele, un loc important îl ocupă Eringen, care în lucrarea sa [44], prezintă diverse metode matematice de studiere a mediilor continue, cum ar fi teoria invarianților, procese stocastice, teoria grupurilor, precum și aplicațiile acestora.

Teoria mediilor dipolare poroase este parte a teoriei mediilor cu goluri, vezi 1.1. Un mare număr de studii și lucrări au fost dedicate teoriilor mediilor dipolare, respectiv dipolare poroase, în acest context, rezultate remarcabile fiind obținute de Marin, care, în cercetările sale, dezvoltă studiul, pe de o parte, abordând noi aspecte ale teoriei mediilor dipolare, exemple fiind [75, 79, 81, 91], iar pe de altă parte, extinde cercetarea asupra unor medii particulare, cum ar fi cele poroase sau cu dublă porozitate.

În teoria necuplată a termoelasticității, două fenomene nu sunt compatibile cu experimentele concrete, și anume, ecuația transmiterii căldurii și ecuația clasică de propagare a căldurii, prima neconținând termenii elastici, iar a doua, ecuația Fourier, fiind de tip parabolic, implică o viteză infinită de propagare a undelor. Scopul eliminării acestui paradox al teoriei clasice a condus la modificarea ecuației căldurii, subiectul constituind tema unui număr mare de studii, dintre care, primul model important este datorat autorilor Lord și Shulman în [72]. Ulterior, Green și Naghdi au dezvoltat trei teorii distincte, teoria de tip I, de tip II, respectiv de tip III, în [53, 54] și [55]. Etapa a treia de modificare a ecuației căldurii a fost realizată de Tzou, vezi [125], ecuația căldurii devenind hiperbolică, implicând atât gradientul temperaturii, precum și gradientul creșterii temperaturii.

3.2 Un studiu asupra teoriei Green-Naghdi de tip III a termoelasticității mediilor dipolare poroase

3.2.1 Preliminarii

În studii recente, de exemplu [22], legea Fourier este înlocuită printr-o aproximare a ecuației

$$q_i(x, t + t_q) = -[K_{ij}\theta_{,j}(x, t + t_T) + K^*_{ij}\alpha_{,j}(x, t + t_\alpha)],$$

unde t_α, t_q și t_T sunt notațiile pentru gradientul creșterii temperaturii, fluxul de căldură, respectiv gradientul temperaturii în teoria Green–Naghdi de tip III, iar K_{ij} și K^*_{ij} reprezintă tensorul conductivității termice, respectiv tensorul ratei conductivității.

Așadar, teoria liniară Green–Naghdi de tip III a termoelasticității cuplate este formulată prin considerarea, printre variabilele constitutive, atât a gradientului temperaturii, precum și a gradientului creșterii temperaturii. Teoria Green–Naghdi de tip III, care este, de fapt, o extensie a teoriei Green–Naghdi de tip II, prezentă în [94, 125], a constituit subiectul multor studii care au descris rezultatele aplicării sale asupra unor materiale particulare, de exemplu în [22, 48, 49, 93, 99, 108], alte studii prezentând avantajele oferite de această teorie, cum ar fi [1, 34, 113].

Prezentul capitol este dedicat termoelasticității mediilor dipolare poroase sub influența teoriei Green–Naghdi de tip III, analizând problema mixtă cu date inițiale și la limită cu scopul obținerii ecuațiilor constitutive, a unui rezultat de unicitate, a unei relații de reciprocitate, precum și a unui principiu variațional, derivat din bine-cunoscutul principiu variațional al lui Gurtin, vezi [57].

Studiul prezentat în cadrul acestei secțiuni se bazează pe rezultatele publicate în articolul: **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: A study on the thermoelasticity of three-phase-lag dipolar materials with voids. Bound. Value Probl. **2019**(137), 1-24 (2019), https://doi.org/10.1186/s13661-019-1250-9, vezi [26], jurnal situat în zona roșie, Q_1 cotat ISI, factor de impact 1,794 în anul 2019, articol premiat în cadrul competiției naționale „Premierea rezultatelor cercetării-UEFISCDI". Aceste rezultate au fost în prealabil prezentate în lucrarea cu același titlu, în cadrul celei de-a XI-a ediții a Conferinței Internationale de Știința și Ingineria Materialelor BRAMAT 2019, 13-16 martie, organizată de Universitatea Transilvania din Brașov - România, la Secțiunea a III-a, iar articolul menționat mai sus este o extensie a rezultatelor publicate în: Marin, M., Agarwal, R.P., **Codarcea, L.**: A mathematical model for three-phase-lag dipolar thermoelastic bodies. J. Inequal. Appl. **2017**(109), 1-16 (2017), https://doi.org/10.1186/s13660-017-1380-5, vezi [93], jurnal situat în zona galbenă, Q_2, cotat ISI, factor de impact 1,47, articol, de asemenea, premiat în cadrul competiției naționale „Premierea rezultatelor cercetării- UEFISCDI".

3.2.2 Notații și ecuații fundamentale

Se consideră că mediul termoelastic, dipolar, poros ocupă, la momentul t_o, domeniul $\mathcal{D}$ din spațiul tridimensional Euclidian $\mathbb{R}^3$, domeniu care este o regiune regulată, cu închiderea notată $\overline{\mathcal{D}}$ și având frontiera o suprafață netedă, notată $\partial\mathcal{D}$. Comportamentul unui mediu termoelastic dipolar poros este caracterizat de vectorul deplasare $u = (u_i)_{1\leq i\leq 3}$, de vectorul deplasare dipolară $\varphi = (\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, de fracțiunea de volum ν corespunzătoare golurilor, precum și de variația de temperatură θ :

$$u_i = u_i(x,t),\ \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x,t),\ \nu = \nu(x,t),\ \theta = \theta(x,t), \quad (x,t) \in \mathcal{D} \times [0,t_0).$$

Se consideră faptul că atât componentele deplasării, variația temperaturii față de temperatura de referință, cât și derivatele parțiale în raport cu coordonatele carteziene și în raport cu timpul sunt mici. Prezentul studiu este dezvoltat în concordanță cu teoria liniară a termoelasticității mediilor dipolare poroase.

În conformitate cu [45], ecuațiile geometrice care dau expresiile tensorilor de deformație $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \chi_{ijk}$ și a vectorului υ_k în raport cu variabilele de mișcare, precum și ecuația continuității au următoarele forme:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}),\ \gamma_{ij} = u_{j,i} - \varphi_{ij},\ \chi_{ijk} = \varphi_{jk,i},\ \upsilon_k = \nu_{,k}, \tag{3.2.1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \dot{u}_{j,j} = 0, \tag{3.2.2}$$

unde ρ este densitatea mediului în configurația de referință.

Urmând propunerea oferită de Green și Naghdi în [53], vom defini, cu ajutorul temperaturii, creșterea temperaturii α și gradientul temperaturii β_i, sub forma expresiilor care urmează:

$$\alpha(x,t) = \int_{t_0}^{t} \theta(x,s)ds,\ \beta_i(x,t) = \int_{t_0}^{t} \theta_{,i}(x,s)ds. \tag{3.2.3}$$

Evident, avem $\dot{\alpha}(x,t) = \theta(x,t),\ \alpha(x,t_0) = 0,\ \beta_i(x,t) = \alpha_{,i}(x,t)$ și

$$\alpha(x,0) = 0,\ \beta_i(x,0) = 0, \tag{3.2.4}$$

dacă $t_0 = 0$. Sistemul fundamental care guvernează teoria liniară a termoelasticității mediilor dipolare poroase constă în următoarele ecuații:
– ecuațiile de mișcare

$$\left.\begin{aligned} (\tau_{ji} + \sigma_{ji})_{,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i, \\ \mu_{ijk,i} + \sigma_{jk} + \rho g_{jk} &= I_{ks}\ddot{\varphi}_{js}, \end{aligned}\right. \quad \text{în } \mathcal{D} \times (0,\infty), \tag{3.2.5}$$

– ecuațiile forțelor de echilibru

$$\lambda_{i,i} + \xi + \rho\ell = \rho k \ddot{\nu}, \quad \text{în } \mathcal{D} \times (0,\infty), \tag{3.2.6}$$

– ecuația energiei

$$T\dot{\eta} = Q - q_{i,i}, \tag{3.2.7}$$

– ecuațiile geometrice (3.2.1).

Notațiile folosite sunt următoarele:

- $\tau_{ji}, \sigma_{ji}, \mu_{ijk}$ sunt componentele tensorilor de tensiune,
- f_i, g_{jk} sunt componentele forței masice, respectiv componentele cuplului forță masică,
- I_{ij} sunt coeficienții de microinerție,
- ℓ este sarcina masică externă generalizată corespunzătoare golurilor,
- λ_i sunt componentele vectorului de tensiune internă,
- k este coeficientul de inerție,
- ξ este sarcina internă de echilibru.

În același timp, componentele t_i ale vectorului tensiunii de suprafață, componentele μ_{jk} ale cuplului de suprafață, fluxul de căldură de suprafață q și vectorul tensiunii de echilibru λ corespunzător porilor, sunt definiți sub forma următoare:

$$\left.\begin{aligned} t_i &= (\tau_{ji} + \sigma_{ji})n_j, \\ \mu_{jk} &= \mu_{ijk}n_i, \\ \lambda &= \lambda_i n_i, \\ q &= q_i n_i, \end{aligned}\right. \quad \text{pe } \partial\mathcal{D}, \tag{3.2.8}$$

pentru fiecare punct al suprafeței $\partial\mathcal{D}$, cu observația că q_i sunt componentele vectorului flux de căldură, iar n_i sunt componentele normalei unitare exterioare la suprafața $\partial\mathcal{D}$.

3.2.3 Problema mixtă, cu condiții inițiale și la limită, pentru mediile termoelastice dipolare poroase, în contextul teoriei Green–Naghdi de tip III

În cele ce urmează, vor fi deduse câteva consecințe ale legilor termodinamicii, cu scopul obținerii unor rezultate principale prezentate sub forma unor teoreme în secțiunea următoare. Pentru atingerea acestui obiectiv, utilizând procedura prezentată în [93], se impune ca primele două legi ale termodinamicii să aibă loc în orice punct al domeniului $\mathcal{D}$ și în fiecare moment t.

Folosind notațiile e și Q pentru energia internă pe unitatea de masă, respectiv pentru debitul de căldură pe unitatea de volum, Prima Lege a termodinamicii are următoarea formă:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} (\rho e + \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + \frac{1}{2}I_{ks}\dot{\varphi}_{jk}\dot{\varphi}_{js} + \frac{1}{2}k\dot{\nu}\dot{\nu})dV = \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\rho f_i\dot{u}_i + \rho g_{jk}\dot{\varphi}_{jk} + \rho\ell\dot{\nu} + Q)dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (t_i\dot{u}_i + \mu_{jk}\dot{\varphi}_{jk} + \lambda\dot{\nu} - q)dA. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

În același timp, forma locală a celei de a Doua Legi a termodinamicii este

$$\dot{\eta} \geq \frac{Q}{T} - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{q_i}{T^2}T_{,i}\ , \tag{3.2.10}$$

unde η și T reprezintă entropia pe unitatea de volum, respectiv temperatura absolută, $T = T_0 + \theta$, unde T_0 este temperatura absolută în configurația de referință.

Prin utilizarea ecuațiilor (3.2.5)$_1$, (3.2.5)$_2$ și (3.2.6), a primului principiu al termodinamicii, a teoremei divergenței și a energiei libere Helmholtz Ψ, se deduce:

$$\begin{gathered}
\tau_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}}, \qquad \mu_{ijk} = \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_{ijk}}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}\ , \\
\xi = -\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}, \qquad \lambda_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_{,i}}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} = 0, \qquad T\dot{\eta} = Q - q_{i,i}.
\end{gathered} \tag{3.2.11}$$

Prin intermediul energiei libere, relația (3.2.10) conduce la următoarea formă a inegalității entropiei

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}}\dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_{ijk}}\dot{\chi}_{ijk} + \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\dot{\nu} + \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_{,i}}\dot{\nu}_{,i} + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\dot{\theta} + \\
+ \dot{\theta}\eta - \tau_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \sigma_{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mu_{ijk}\dot{\chi}_{ijk} + \xi\dot{\nu} - \lambda_i\dot{\nu}_{,i} + \frac{q_i\theta_{,i}}{T} \leq 0.
\end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Presupunând, pe de o parte, că mediul are centru de simetrie și este liber de tensiuni în configurația sa de referință, având forța masică, cuplul forță masică și sarcina masică externă generalizată nule, iar pe de altă parte, teoria liniară impunând o formă pătratică pentru densitatea energiei interne în raport cu variabilele sale constitutive independente, energia liberă se poate dezvolta, în concordanță cu principiul conservării energiei libere și în raport cu configurația de referință, sub forma:

$$\begin{aligned}
\Psi = {} & \frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{mnij}\varepsilon_{mn}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + \\
& + D_{mnijk}\gamma_{mn}\chi_{ijk} + \frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + d_{ijm}\varepsilon_{ij}\nu_{,m} + e_{ijm}\gamma_{ij}\nu_{,m} + \\
& + f_{ijkm}\chi_{ijk}\nu_{,m} + \frac{1}{2}g_{im}\nu_{,i}\nu_{,m} + a_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + b_{ij}\gamma_{ij}\nu + c_{ijk}\chi_{ijk}\nu + d_i\nu_{,i}\nu + \\
& + \frac{1}{2}\omega\nu^2 - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - \beta_{ij}\gamma_{ij}\theta - \gamma_{ijk}\chi_{ijk}\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 - a_i\nu_{,i}\theta - b\nu\theta.
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

În expresia precedentă a energiei libere, coeficienții constitutivi, reprezentând caracteristicile mediului, sunt funcții de clasă $C^1(\mathcal{D})$, prescrise, care îndeplinesc următoarele relații de simetrie:

$$\begin{gathered}
C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn}, \ B_{ijmn} = B_{mnij}, \ G_{ijmn} = G_{ijnm}, \ F_{ijkmn} = F_{jikmn}\ , \\
A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}, \quad a_{ij} = a_{ji}\ , \quad g_{im} = g_{mi}\ , \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}\ .
\end{gathered} \tag{3.2.14}$$

Utilizând ecuațiile (3.2.11), din forma (3.2.13) pentru Ψ, se obțin următoarele ecuații constitutive:

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} + d_{ijm}\nu_{,m} + a_{ij}\nu - \alpha_{ij}\theta, \\
\sigma_{ij} &= G_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} + e_{ijm}\nu_{,m} + b_{ij}\nu - \beta_{ij}\theta, \\
\mu_{ijk} &= F_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} + f_{ijkm}\nu_{,m} + c_{ijk}\nu - \gamma_{ijk}\theta, \\
\eta &= \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta_{ij}\gamma_{ij} + \gamma_{ijk}\chi_{ijk} + a\theta + a_i\nu_{,i} + b\nu, \\
\xi &= -a_{ij}\varepsilon_{ij} - b_{ij}\gamma_{ij} - c_{ijk}\chi_{ijk} - d_i\nu_{,i} - \omega\nu + b\theta, \\
\lambda_i &= d_{mni}\varepsilon_{mn} + e_{mni}\gamma_{mn} + f_{mnri}\chi_{mnr} + g_{im}\nu_{,m} + d_i\nu - a_i\theta, \\
T_0\dot{\eta} &= Q - q_{i,i}.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

De asemenea, folosind inegalitatea (3.2.12), se deduce inegalitatea disipației

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{q_i \theta_{,i}}{T_0} dV \leq 0, \tag{3.2.16}$$

care, cu ajutorul teoremei divergenței, în cazul în care nu există flux de căldură, adică $q = 0$, devine

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{q_{i,i} \theta}{T_0} dV \geq 0.$$

În teoria Green–Naghdi de tip III, conform [22], ecuația constitutivă a vectorului flux de căldură are forma

$$q_i(x, t + t_q) = -[K_{ij}\theta_{,j}(x, t + t_T) + K^*_{ij}\alpha_{,j}(x, t + t_\beta)], \tag{3.2.17}$$

unde t_β, t_q și t_T sunt gradientul creșterii temperaturii, fluxul de căldură, respectiv gradientul temperaturii în teoria Green–Naghdi de tip III, iar tensorii K_{ij} și K^*_{ij} sunt simetrici. Urmând procedura prezentată în [93], dacă se dezvoltă în serie Taylor și se rețin doar termenii până la t_q^2, se obține următoarea ecuație:

$$q_i + t_q \dot{q}_i + \frac{1}{2} t_q^2 \ddot{q}_i = -[K_{ij}\theta_{,j} + K_{ij} t_T \dot{\theta}_{,j} + K^*_{ij}\alpha_{,j} + K^*_{ij} t_\beta \dot{\alpha}_{,j}], \quad 0 < t_\beta \leq t_T \leq t_q. \tag{3.2.18}$$

Definiție 3.2.1 *Fiind date două funcții v și w, definite pe $\mathcal{D} \times (0, \infty)$, continue în raport cu timpul, produsul de convoluție al funcțiilor v și w este definit prin:*

$$(v * w)(t) = \int_0^t v(t - s) w(s) ds.$$

Pentru alcătuirea problemei mixte, cu condiții inițiale și la limită, se adaugă, pe domeniul $\overline{\mathcal{D}}$, următoarele condiții inițiale:

$$\begin{aligned}
u_i(x,0) &= u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0) &= u_i^1(x),\\
\varphi_{ij}(x,0) &= \varphi_{ij}^0(x), & \dot{\varphi}_{ij}(x,0) &= \varphi_{ij}^1(x),\\
\nu(x,0) &= \nu^0(x), & \dot{\nu}(x,0) &= \nu^1(x),\\
\theta(x,0) &= \theta^0(x), & \dot{\theta}(x,0) &= \theta^1(x),\\
\eta(x,0) &= \eta^0(x).
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

iar pe cilindrul $\partial\mathcal{D} \times (0, \infty)$, se adaugă condițiile la limită care urmează:

$$\begin{aligned}
u_i(x,t) &= \widetilde{u}_i, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_u \times (0,\infty),\\
\varphi_{ij}(x,t) &= \widetilde{\varphi}_{ij}, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_\varphi \times (0,\infty),\\
\nu(x,t) &= \widetilde{\nu}, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_\nu \times (0,\infty),\\
\alpha(x,t) &= \widetilde{\alpha}, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_\alpha \times (0,\infty),\\
(\tau_{ji} + \sigma_{ji})(x,t) n_j &= \widetilde{t}_i, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_u^c \times (0,\infty),\\
\mu_{ijk}(x,t) n_i &= \widetilde{\mu}_{jk}, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_\varphi^c \times (0,\infty),\\
\lambda_i(x,t) n_i &= \widetilde{\lambda}, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_\nu^c \times (0,\infty),\\
q_i(x,t) n_i &= \widetilde{q}, & (x,t) &\in \partial\mathcal{D}_\alpha^c \times (0,\infty),
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

unde $\partial\mathcal{D}_u$, $\partial\mathcal{D}_\varphi$, $\partial\mathcal{D}_\nu$ și $\partial\mathcal{D}_\alpha$, împreună cu complementele lor, $\partial\mathcal{D}_u^c$, $\partial\mathcal{D}_\varphi^c$, $\partial\mathcal{D}_\nu^c$, respectiv $\partial\mathcal{D}_\alpha^c$, sunt submulțimi ale suprafeței $\partial\mathcal{D}$, astfel încât

$$\partial\mathcal{D}_u \cap \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cap \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\nu \cap \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\mathcal{D}_\alpha \cap \partial\mathcal{D}_\alpha^c = \emptyset,$$

$$\partial\overline{\mathcal{D}}_u \cup \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\overline{\mathcal{D}}_\varphi \cup \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\overline{\mathcal{D}}_\nu \cup \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\overline{\mathcal{D}}_\alpha \cup \partial\mathcal{D}_\alpha^c = \partial\mathcal{D}.$$

Se presupune că :

(i) $u_i^0, u_i^1, \varphi_{ij}^0, \varphi_{ij}^1, \nu^0, \nu^1, \theta^0, \theta^1$ și η^0 sunt funcții continue, prescrise pe $\mathcal{D}$;
(ii) $\widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_{ij}, \widetilde{\nu}$ și $\widetilde{\alpha}$ sunt funcții continue, prescrise pe domeniul lor de definiție;
(iii) $\widetilde{t}_i, \widetilde{\mu}_{jk}, \widetilde{\lambda}$ și $\widetilde{q}$ sunt funcții prescrise, regulate pe domeniul lor de definiție și continue în raport cu variabila timp.

Teorema 3.2.1 *Funcțiile u_i, φ_{ij}, η și ν satisfac ecuațiile (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) și condițiile inițiale (3.2.19), dacă și numai dacă, sunt îndeplinite următoarele relații:*

$$\begin{aligned} g * (\tau_{ji} + \sigma_{ji})_{,j} + \rho \mathscr{F}_i &= \rho u_i \ , \\ g * (\mu_{ijk,i} + \sigma_{jk}) + \rho \mathscr{G}_{jk} &= I_{ks} \varphi_{js} \ , \\ g * (\lambda_{i,i} + \xi) + \rho \mathscr{L} &= \rho k \nu \ , \qquad (x,t) \in \mathcal{D} \times (0, \infty), \\ \eta &= R - \frac{1}{T_0} l * q_{i,i}, \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

unde

$$g(t) = (l * l)(t) = t \ , \quad l(t) = 1, \qquad t \in (0, \infty), \tag{3.2.22}$$

și

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_i &= g * f_i + (t u_i^1 + u_i^0), \\ \mathscr{G}_{jk} &= g * g_{jk} + I_{ks}(t \varphi_{js}^1 + \varphi_{js}^0), \\ \mathscr{L} &= g * \ell + k(t\nu^1 + \nu^0), \\ R &= \frac{1}{T_0} l * Q + \eta^0. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

În cele ce urmează va fi folosită notația, cu $l(t) = 1, \ t \in (0, \infty)$,

$$\hat{f} = l * f = \int_0^t f(x,s) ds,$$

ceea ce permite considerarea a două noi variabile,

$$\zeta_i = \beta_i + t_T \dot{\beta}_i \ , \qquad \varsigma_i = \hat{\beta}_i + t_\alpha \beta_i \ , \tag{3.2.24}$$

cu scopul obținerii unei forme simplificate a ecuației (3.2.18), concret,

$$(1 + D_t) q_i = -(K_{ij} \dot{\zeta}_j + K_{ij}^* \dot{\varsigma}_j), \tag{3.2.25}$$

unde D_t este operatorul diferențial

$$D_t = t_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} t_q^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{3.2.26}$$

Vectorul flux de entropie r este introdus, prin intermediul notației $r_i = T_0^{-1} \hat{q}_i$, astfel:

$$r = r_i n_i = T_0^{-1} \hat{q}_i n_i. \tag{3.2.27}$$

Utilizând notațiile nou introduse, proprietățile produsului de convoluție, precum și identitățile preliminare obținute în *Teorema* 3.2.1, se pot rescrie, atât ecuația energiei sub forma

$$t * (\eta + r_{i,i} - R) = 0, \ R = T_0^{-1} \hat{Q} + \eta^0, \tag{3.2.28}$$

precum și identitățile (3.2.21)$_1$, (3.2.21)$_2$ și (3.2.21)$_3$, astfel:

$$\begin{aligned} t*(\tau_{ji}+\sigma_{ij})_{,j}+\rho\mathscr{F}_i &= \rho u_i,\\ t*(\mu_{ijk,i}+\sigma_{jk})+\rho\mathscr{G}_{jk} &= I_{ks}\varphi_{js},\\ t*(\lambda_{i,i}+\xi)+\rho\mathscr{L} &= \rho k\nu. \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Folosind ecuațiile (3.2.25) și (3.2.27), se obține ecuația

$$r_i+t_q\dot{r}_i+\frac{1}{2}t_q^2\ddot{r}_i=-\frac{1}{T_0}(K_{ij}\zeta_j+K_{ij}^*\varsigma_j), \tag{3.2.30}$$

care, prin intermediul ecuațiilor constitutive (3.2.15)$_4$ și (3.2.15)$_7$, poate fi reformulată sub forma:

$$(1+D_t)\left(\alpha_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\beta_{ij}\dot{\gamma}_{ij}+\gamma_{ijk}\dot{\chi}_{ijk}+a\dot{\theta}+a_i\dot{\nu}_{,i}+b\dot{\nu}-\frac{1}{T_0}Q\right)=\frac{1}{T_0}(K_{ij}\dot{\zeta}_j+K_{ij}^*\dot{\varsigma}_j)_{,i}, \tag{3.2.31}$$

precedenta ecuație fiind cunoscută ca *ecuația transportului de căldură*, aceasta conducând la

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}}\theta[D_t(\alpha_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\beta_{ij}\dot{\gamma}_{ij}+\gamma_{ijk}\dot{\chi}_{ijk}+a\dot{\theta}+a_i\dot{\nu}_{,i}+b\dot{\nu})-(1+D_t)\frac{Q}{T_0}-\\ &-\frac{1}{T_0}(K_{ij}\dot{\zeta}_j+K_{ij}^*\dot{\varsigma}_j)_{,i}]dV=-\int_{\mathcal{D}}\theta(\alpha_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\beta_{ij}\dot{\gamma}_{ij}+\gamma_{ijk}\dot{\chi}_{ijk}+\\ &+a\dot{\theta}+a_i\dot{\nu}_{,i}+b\dot{\nu})dV, \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

care, cu ajutorul relației (3.2.15), se scrie sub forma simplificată

$$\int_{\mathcal{D}}\theta\left(\dot{\eta}-\frac{Q}{T_0}\right)dV=\int_{\mathcal{D}}\theta\left[\frac{1}{T_0}(K_{ij}\dot{\zeta}_j+K_{ij}^*\dot{\varsigma}_j)_{,i}+D_t\left(\frac{Q}{T_0}-\dot{\eta}\right)\right]dV. \tag{3.2.33}$$

Concluzionând, ecuațiile geometrice (3.2.1), ecuațiile constitutive (3.2.15), (3.2.18) și (3.2.28), ecuațiile de mișcare și ale forțelor de echilibru (3.2.29), condițiile inițiale și la limită (3.2.19), respectiv (3.2.20), reprezintă forma generală a problemei mixte, cu condiții inițiale și la limită, notată cu $\mathcal{P}$, pentru mediile termoelastice, dipolare, poroase, în contextul teoriei Green-Naghdi de tip III.

3.2.4 Rezultate principale obținute

Pentru început, se impune ca tensorii elasticității, care apar în relațiile (3.2.13) și (3.2.15), să îndeplinească condiția conform căreia există o constantă strict pozitivă c_0, astfel încât

$$\begin{aligned} &C_{ijmn}\mathrm{u}_{ij}\mathrm{u}_{mn}+2G_{ijmn}\mathrm{u}_{ij}\mathrm{v}_{mn}+2F_{ijmnr}\mathrm{u}_{ij}\mathrm{w}_{mnr}+2d_{ijm}\mathrm{u}_{ij}\upsilon_m+\\ &+2a_{ij}\mathrm{u}_{ij}\nu+B_{ijmn}\mathrm{v}_{ij}\mathrm{v}_{mn}+2D_{ijmnr}\mathrm{v}_{ij}\mathrm{w}_{mnr}+2e_{ijm}\mathrm{v}_{ij}\upsilon_m+\\ &+2b_{ij}\mathrm{v}_{ij}\nu+A_{ijkmnr}\mathrm{w}_{ijk}\mathrm{w}_{mnr}+2f_{ijkm}\mathrm{w}_{ijk}\upsilon_m+2c_{ijk}\mathrm{w}_{ijk}\nu+\\ &+2d_i\upsilon_i\nu+g_{im}\upsilon_i\upsilon_m+\omega\nu^2\geq c_0(\mathrm{u}_{ij}\mathrm{u}_{ij}+\mathrm{v}_{ij}\mathrm{v}_{ij}+\mathrm{w}_{ijk}\mathrm{w}_{ijk}+\upsilon_i\upsilon_i+\nu^2), \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

pentru oricare cinci tensori $\mathrm{u}_{ij}, \mathrm{v}_{ij}, \mathrm{w}_{ijk}, \upsilon_i$ și ν.

3.2.4.1 Unicitate

Teorema 3.2.2 *Presupunând că:*

(i) $\rho(x)>0,\ \beta(x)>0,\ T_0(x)>0, \forall x\in\mathcal{D}$;
(ii) tensorul I_{ij} este pozitiv definit;
(iii) condiția (3.2.34) este îndeplinită,
atunci problema $\mathcal{P}$ are cel mult o soluție.

3.2.4.2 Reciprocitate

În cele ce urmează, se consideră două sisteme de încărcare $S^{(\delta)}$, care acționează succesiv asupra mediului termoelastic dipolar poros, definite astfel:

$$\begin{aligned} S^{(\delta)} = \Big\{ &\mathscr{F}_i^{(\delta)}, \mathscr{G}_{jk}^{(\delta)}, \mathscr{L}^{(\delta)}, R^{(\delta)}, \widetilde{u}_i^{(\delta)}, \widetilde{\varphi}_{ij}^{(\delta)}, \widetilde{\nu}^{(\delta)}, \widetilde{\alpha}^{(\delta)}, \widetilde{t}_i^{(\delta)}, \widetilde{\mu}_{ij}^{(\delta)}, \widetilde{\lambda}^{(\delta)}, \widetilde{\theta}^{(\delta)}, \\ &\widetilde{q}^{(\delta)}, u_i^{0(\delta)}, u_i^{1(\delta)}, \varphi_{ij}^{0(\delta)}, \varphi_{ij}^{1(\delta)}, \nu^{0(\delta)}, \nu^{1(\delta)}, \theta^{0(\delta)}, \theta^{1(\delta)}, \eta^{0(\delta)} \Big\}, \ \delta = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Corespunzător fiecărui sistem $S^{(\delta)}$, soluțiile problemei mixte vor fi notate cu

$$s^{(\delta)} = \left\{ u_i^{(\delta)}, \varphi_{ij}^{(\delta)}, \nu^{(\delta)}, \theta^{(\delta)}, \alpha^{(\delta)} \right\}, \ \delta = 1, 2.$$

Teorema 3.2.3 *Între sistemele de încărcare $S^{(\delta)}$ și soluțiile corespunzătoare acestora $s^{(\delta)}$, are loc relația de reciprocitate de tip Betti*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}} (\rho \mathscr{F}_i^{(1)} * u_i^{(2)} + \rho \mathscr{G}_{ij}^{(1)} * \varphi_{ij}^{(2)} + \rho \mathscr{L}^{(1)} * \nu^{(2)} - t * R^{(1)} * \theta^{(2)} - \frac{1}{T_0} t * q_i^{(1)} * \beta_i^{(2)}) dV + \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}} (t * t_i^{(1)} * u_i^{(2)} + t * \mu_{ij}^{(1)} * \varphi_{ij}^{(2)} + t * \lambda^{(1)} * \nu^{(2)} + \frac{1}{T_0} t * q^{(1)} * \alpha^{(2)}) dA = \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\rho \mathscr{F}_i^{(2)} * u_i^{(1)} + \rho \mathscr{G}_{ij}^{(2)} * \varphi_{ij}^{(1)} + \rho \mathscr{L}^{(2)} * \nu^{(1)} - t * R^{(2)} * \theta^{(1)} - \frac{1}{T_0} t * q_i^{(2)} * \beta_i^{(1)}) dV + \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}} (t * t_i^{(2)} * u_i^{(1)} + t * \mu_{ij}^{(2)} * \varphi_{ij}^{(1)} + t * \lambda^{(2)} * \nu^{(1)} + \frac{1}{T_0} t * q^{(2)} * \alpha^{(1)}) dA, \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

unde

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}_i^{(\delta)} = g * f_i^{(\delta)} + (t u_i^{1(\delta)} + u_i^{0(\delta)}), && t_i^{(\delta)} = (\tau_{ji}^{(\delta)} + \sigma_{ji}^{(\delta)}) n_j, \\ &\mathscr{G}_{jk}^{(\delta)} = g * g_{jk}^{(\delta)} + I_{ks}(t \varphi_{js}^{1(\delta)} + \varphi_{js}^{0(\delta)}), && \mu_{jk}^{(\delta)} = \mu_{ijk}^{(\delta)} n_i, \\ &\mathscr{L}^{(\delta)} = g * \ell^{(\delta)} + k(t \nu^{1(\delta)} + \nu^{0(\delta)}), \qquad \text{și} && \lambda^{(\delta)} = \lambda_i^{(\delta)} n_i, \\ &R^{(\delta)} = \frac{1}{T_0} l * Q^{(\delta)} + \eta^{0(\delta)}, && q^{(\delta)} = q_i^{(\delta)} n_i, \end{aligned}$$

obținute prin utilizarea relațiilor (3.2.23), respectiv (3.2.8).

3.2.4.3 Principiu variațional

Având ca scop demonstrarea principiului variațional convoluțional, pentru medii anizotrope și neomogene, derivat din cunoscutul principiu al lui Gurtin prezentat în [57], dar dezvoltat în contextul teoriei Green–Naghdi de tip III, al termoelasticității mediilor dipolare poroase, se consideră r_i sub forma

$$r_i = r_i^{(a)} + r_i^{(b)} + r_i^{(c)} + r_i^{(d)}, \tag{3.2.37}$$

se presupune că tensorii K_{ij}, respectiv K_{ij}^* sunt inversabili și se introduc tensorii s_{ij} și s_{ij}^*, definiți prin:

$$s_{ij} = [K_{ij}]^{-1}, \ s_{ij}^* = [K_{ij}^*]^{-1}. \tag{3.2.38}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (3.2.18) și (3.2.30), se deduc relațiile

$$\begin{aligned}
&(1+D_t)s_{ij}r_j^{(a)}+\frac{1}{T_0}\beta_i=0,\\
&(1+D_t)s_{ij}r_j^{(b)}+\frac{t_T}{T_0}\theta_{,i}=0,\\
&(1+D_t)s^*_{ij}q_j^{(c)}+\beta_i=0,\\
&(1+D_t)s^*_{ij}r_j^{(d)}+\frac{t_\alpha}{T_0}\beta_i=0,
\end{aligned}\tag{3.2.39}$$

unde $\beta_i=\hat{\theta}_{,i}$ și $q_i^{(c)}=T_0\dfrac{\partial r_i^{(c)}}{\partial t}$.

Se consideră procesul admisibil, bine-cunoscut sub forma unui ansamblu ordonat

$$p=(u_i,\varphi_{ij},\nu,\alpha,\theta,\varepsilon_{ij},\gamma_{ij},\chi_{ijk},\lambda_i,\tau_{ij},\sigma_{ij},\beta_i,\eta,r_i,r_{i,i},q_i),\tag{3.2.40}$$

ale cărui componente sunt funcții presupuse a fi suficient de regulate pe domeniul lor de definiție. Dacă se notează cu $\mathscr{A}$ spațiul liniar, înzestrat cu adunarea și multiplicarea cu scalar, al tuturor proceselor admisibile, se poate defini funcționala $\mathcal{F}_t(p)$, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t(p)=&\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} t*(C_{ijmn}\varepsilon_{mn}*\varepsilon_{ij}+2G_{ijmn}\gamma_{mn}*\varepsilon_{ij}+2F_{mnrij}\chi_{mnr}*\varepsilon_{ij}+\\
&+2d_{ijm}\nu_{,m}*\varepsilon_{ij}+2a_{ij}\nu*\varepsilon_{ij}+B_{ijmn}\gamma_{mn}*\gamma_{ij}+2D_{ijmnr}\chi_{mnr}*\gamma_{ij}+\\
&+2e_{ijm}\nu_{,m}*\gamma_{ij}+2b_{ij}\nu*\gamma_{ij}+A_{ijkmnr}\chi_{mnr}*\chi_{ijk}+2f_{ijkm}\nu_{,m}*\chi_{ijk}+\\
&+2c_{ijk}\nu*\chi_{ijk}+2d_i\nu*\nu_{,i}+g_{im}\nu_{,i}*\nu_{,m}+\omega\nu*\nu+a\theta*\theta)dV+\\
&+\int_{\mathcal{D}}[\rho u_i*u_i+I_{ks}\varphi_{js}*\varphi_{jk}+\rho k\nu*\nu-t*(\eta-R)*\theta]dV-\\
&-\int_{\mathcal{D}}[(t*(\tau_{ji}+\sigma_{ji})_{,j}+\rho\mathscr{F}_i)*u_i+t*\tau_{ij}*\varepsilon_{ij}+t*\sigma_{ij}*\gamma_{ij}]dV-\\
&-\int_{\mathcal{D}}[(t*(\mu_{ijk,i}+\sigma_{jk})+\rho\mathscr{G}_{jk})*\varphi_{jk}+t*\mu_{ijk}*\chi_{ijk}]dV-\int_{\mathcal{D}}[(t*(\lambda_{i,i}+\xi)+\\
&+\rho\mathscr{L})*\nu+t*\lambda_i*\nu_{,i}-t*\xi*\nu]dV+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}[l*T_0(1+D_t)s_{ij}r_i^{(a)}*r_j^{(a)}+\\
&+l*\frac{T_0}{t_T}(1+D_t)s_{ij}r_i^{(b)}*r_j^{(b)}+l*(1+D_t)s^*_{ij}q_i^{(c)}*r_j^{(c)}+l*\frac{T_0}{t_\alpha}(1+\\
&+D_t)s^*_{ij}r_i^{(d)}*r_j^{(d)}]dV+\int_{\mathcal{D}}\Big[(l*r_i*\beta_i)+(l*r_i*\alpha_{,i})-(l*\frac{1}{T_0}q_i*\beta_i)+\\
&+(l*r_{i,i}*\alpha)-(l*\frac{1}{T_0}q_{i,i}*\theta)\Big]dV+\int_{\partial\mathcal{D}_u}(t*t_i*\widetilde{u}_i)dA+\int_{\partial\mathcal{D}_u^c}[t*(t_i-\widetilde{t}_i)*u_i]dA+\\
&+\int_{\partial\mathcal{D}_\varphi}(t*\mu_{ij}*\widetilde{\varphi}_{ij})dA+\int_{\partial\mathcal{D}_\varphi^c}[t*(\mu_{ij}-\widetilde{\mu}_{ij})*\varphi_{ij}]dA+\int_{\partial\mathcal{D}_\nu}(t*\lambda*\widetilde{\nu})dA+\\
&+\int_{\partial\mathcal{D}_\nu^c}[t*(\lambda-\widetilde{\lambda})*\nu]dA-\int_{\partial\mathcal{D}_\alpha}(l*r*\widetilde{\alpha})dA-\int_{\partial\mathcal{D}_\alpha^c}[l*(r-\widetilde{r})*\alpha]dA.
\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

Aceasta poate fi rescrisă în forma:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_t(p) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}} t * (C_{ijmn}\varepsilon_{mn} * \varepsilon_{ij} + 2G_{ijmn}\gamma_{mn} * \varepsilon_{ij} + 2F_{mnrij}\chi_{mnr} * \varepsilon_{ij} + \\
&+ 2d_{ijm}\nu_{,m} * \varepsilon_{ij} + 2a_{ij}\nu * \varepsilon_{ij} + B_{ijmn}\gamma_{mn} * \gamma_{ij} + 2D_{ijmnr}\chi_{mnr} * \gamma_{ij} + \\
&+ 2e_{ijm}\nu_{,m} * \gamma_{ij} + 2b_{ij}\nu * \gamma_{ij} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} * \chi_{ijk} + 2f_{ijkm}\nu_{,m} * \chi_{ijk} + \\
&+ 2c_{ijk}\nu * \chi_{ijk} + 2d_i\nu * \nu_{,i} + g_{im}\nu_{,i} * \nu_{,m} + \omega\nu * \nu)dV + \int\limits_{\mathcal{D}} [\rho u_i * u_i + \\
&+ I_{ks}\varphi_{js} * \varphi_{jk} + \rho k\nu * \nu - t * (\eta - R) * \theta]dV + \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{2a}\Big[t * (\eta - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} - \\
&- \beta_{ij}\gamma_{ij} - \gamma_{ijk}\chi_{ijk} - a_i\nu_{,i} - b\nu) * (\eta - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} - \beta_{ij}\gamma_{ij} - \gamma_{ijk}\chi_{ijk} - a_i\nu_{,i} - \\
&- b\nu)\Big]dV - \int\limits_{\mathcal{D}} [(t * (\tau_{ji} + \sigma_{ji})_{,j} + \rho\mathcal{F}_i) * u_i + t * \tau_{ij} * \varepsilon_{ij} + t * \sigma_{ij} * \gamma_{ij}]dV - \\
&- \int\limits_{\mathcal{D}} [(t * (\mu_{ijk,i} + \sigma_{jk}) + \rho\mathcal{G}_{jk}) * \varphi_{jk} + t * \mu_{ijk} * \chi_{ijk}]dV - \int\limits_{\mathcal{D}} [(t * (\lambda_{i,i} + \xi) + \\
&+ \rho\mathcal{L}) * \nu + t * \lambda_i * \nu_{,i} - t * \xi * \nu]dV + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}} (1 + D_t)\Big(\hat{T}_0 s_{ij} r_i^{(a)} * r_j^{(a)} + \\
&+ \frac{\hat{T}_0}{t_T} s_{ij} r_i^{(b)} * r_j^{(b)} + s^*_{ij}\hat{q}_i^{(c)} * r_j^{(c)} + \frac{\hat{T}_0}{t_\alpha} s^*_{ij} r_i^{(d)} * r_j^{(d)}\Big)dV + \\
&+ \int\limits_{\mathcal{D}} \big(\hat{r}_i * \beta_i + \hat{r}_i * \alpha_{,i} - \frac{1}{T_0}\hat{q}_i * \beta_i + \hat{r}_{i,i} * \alpha - \frac{1}{T_0}\hat{q}_{i,i} * \theta\big)dV + \\
&+ \int\limits_{\partial\mathcal{D}_u} (t * t_i * \widetilde{u}_i)dA + \int\limits_{\partial\mathcal{D}_u^c} [t * (t_i - \widetilde{t}_i) * u_i]dA + \int\limits_{\partial\mathcal{D}_\varphi} (t * \mu_{ij} * \widetilde{\varphi}_{ij})dA + \\
&+ \int\limits_{\partial\mathcal{D}_\varphi^c} [t * (\mu_{ij} - \widetilde{\mu}_{ij}) * \varphi_{ij}]dA + \int\limits_{\partial\mathcal{D}_\nu} (t * \lambda * \widetilde{\nu})dA + \int\limits_{\partial\mathcal{D}_\nu^c} [t * (\lambda - \widetilde{\lambda}) * \nu)]dA - \\
&- \int\limits_{\partial\mathcal{D}_\alpha} (\hat{r} * \widetilde{\alpha})dA - \int\limits_{\partial\mathcal{D}_\alpha^c} [(r - \widetilde{r}) * \hat{\alpha}]dA.
\end{aligned}
\tag{3.2.42}
$$

În acest stadiu al studiului, se poate aborda principiul variațional al termoelasticității liniare pentru mediile dipolare poroase, sub influența teoriei Green–Naghdi de tip III, materializat în teorema de mai jos.

Teorema 3.2.4 *Dacă relațiile de simetrie (3.2.14) au loc pe $\mathcal{D}$, tensorii simetrici K_{ij}, respectiv K^*_{ij} sunt inversabili și $t_\alpha > 0, t_T > 0$, atunci*

$$\delta\mathcal{F}_t(p) = 0, \ t \geq 0, \tag{3.2.43}$$

dacă și numai dacă, p este soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită, $\mathcal{P}$.

3.2.5 Concluzii

Acest studiu aprofundează și extinde rezultatele obținute anterior, prin modelarea teoriei liniare a mediilor termoelastice, dipolare, poroase, în contextul teoriei Green–Naghdi de tip III, dezvoltând analiza în jurul suportului oferit de fracțiunea de volum, care este corelată cu introducerea unui grad adițional de libertate.

Modelul matematic, prezentat pe parcursul acestei secțiuni, constă în studiul problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a teoriei liniare asociată mediilor dipolare, poroase, studiate sub influența teoriei Green–Naghdi de tip III, obținând, în acest context, o serie de rezultate privind ecuațiile constitutive, unicitatea soluției, realizată într-un mod mai puțin uzual, diferit de cel clasic, o relație de reciprocitate, precum și o generalizare a unui bine-cunoscut principiu variațional pentru medii anizotrope și neomogene, analizate în contextul teoriei Green–Naghdi de tip III a mediilor termoelastice dipolare, poroase.

3.3 Soluții generalizate pentru probleme mixte ale mediilor dipolare poroase

3.3.1 Preliminarii

Problemele de existență, stabilitate, unicitate și dependență asociate elasticității sau termoelasticității mediilor continue cu goluri au constituit subiectul unui larg număr de studii, iar faptul că sistemul format din ecuațiile și condițiile care guvernează teoria elasticității, respectiv pe cea a termoelasticității mediilor dipolare cu goluri este extrem de complex a condus la concluzia că este necesară o nouă abordare pentru problemele studiate în acest context. Teoria semigrupurilor de operatori facilitează studiul problemelor la limită, precum și pe cele de existență, stabilitate, unicitate sau dependență, fiind folosită în numeroase lucrări dedicate studierii acestor medii, vezi [4, 78, 86, 89, 118].

Prezentul capitol se bazează pe rezultatele publicate în: Marin, M., **Codarcea, L.**: The Initial Boundary Value Problem for Porous Bodies. Proceedings of the 15th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2016 **2**, 807-816, Bratislava, Slovak Republic , https://www.researchgate.net/publication/320232732, vezi [86]. Urmând modelul prezentat în această lucrare, considerând un mediu elastic poros, neomogen și anizotrop, problema mixtă, cu date inițiale și la limită, va fi transformată într-o ecuație abstractă, temporală, omogenă și evoluționară, într-un spațiu Hilbert ales adecvat, iar prin aplicarea teoriei semigrupurilor de operatori liniari, va fi dedusă existența, unicitatea și dependența continuă a soluției.

3.3.2 Notații și ecuații fundamentale

Fie $\mathcal{D}$ o regiune deschisă, din spațiul Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, căreia îi corespunde în configurația de referință un corp dipolar poros, notațiile folosite pe parcursul acestui subcapitol fiind cele prezentate în secțiunea 1.4. Pe parcursul acestei secțiuni se consideră teoria liniară a elasticității mediilor dipolare cu goluri, iar pentru descrierea deformației unui mediu dipolar poros, mai exact, pentru vectorii deplasare, respectiv deplasare dipolară și fracțiunea de volum, aflată în directă relaționare cu golurile, precum și pentru ecuațiile și condițiile de bază, care caracterizează acestă teorie, se vor utiliza notațiile prezentate în secțiunea precedentă 3.2.2.

Ecuațiile, care guvernează teoria elasticității mediilor dipolare poroase, sunt următoarele:

– ecuațiile geometrice, care exprimă tensorii de deformație $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \chi_{ijk}$ și vectorul υ_k, reprezentate prin ecuațiile (3.2.1),
– ecuațiile de mișcare (3.2.5), în $\mathcal{D} \times [0, \infty)$,
– ecuația forțelor de echilibru, care este dată sub forma

$$\lambda_{i,i} + \rho\ell = \rho k\ddot{v}, \quad \text{în } \mathcal{D} \times [0, \infty), \tag{3.3.1}$$

notațiile folosite în aceste ecuații fiind cele descrise anterior, în secțiunea 3.2.2.

Energia liberă este considerată sub forma

$$\begin{aligned} U = &\frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{mnij}\varepsilon_{mn}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + D_{mnijk}\gamma_{mn}\chi_{ijk}+ \\ &+\frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + M_{ijk}\varepsilon_{ij}\upsilon_k + N_{ijk}\gamma_{ij}\upsilon_k + P_{ijkm}\chi_{ijk}\upsilon_{,m} + \frac{1}{2}Q_{ij}\upsilon_i\upsilon_j, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

iar prin intermediul acesteia, se obțin următoarele ecuații constitutive:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} + M_{ijk}\upsilon_k, \\ \sigma_{ij} &= G_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} + N_{ijk}\upsilon_k, \\ \mu_{ijk} &= F_{ijkmnr}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} + P_{ijkm}\upsilon_m, \\ \lambda_i &= M_{mni}\varepsilon_{mn} + N_{mni}\gamma_{mn} + P_{mnri}\chi_{mnr} + Q_{ij}\upsilon_j. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Coeficienții $C_{ijmn}, G_{ijmn}, \ldots Q_{ij}$, caracteristici ale mediului, sunt funcții prescrise, de clasă $C^1(\mathcal{D})$, care îndeplinesc relațiile de simetrie care urmează:

$$\begin{gathered} C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn}\,, \quad B_{ijmn} = B_{mnij}\,, \quad G_{ijmn} = G_{ijnm}\,, \quad F_{ijkmn} = F_{jikmn}\,, \\ A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}, \quad M_{ijk} = M_{jik}. \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Se specifică faptul că schimbarea volumului mediului rezultă din dilatarea sau comprimarea golurilor. Pentru o descriere mai amănunțită a funcțiilor λ_i, ℓ și k se pot folosi detaliile din lucrările [30] și [50].

Ecuațiilor prezentate mai sus, care caracterizează comportamentul mediilor elastice dipolare poroase, li se alătură condițiile inițiale (3.2.19)$_{1-6}$ pe $\overline{\mathcal{D}}$ și condițiile pe frontieră

$$u_i(x,t) = 0,\ \varphi_{ij}(x,t) = 0,\ \nu(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times [0,\infty). \tag{3.3.5}$$

Utilizând ecuațiile geometrice (3.2.1), ecuațiile constitutive (3.3.3), ecuațiile de mișcare (3.2.5) și ecuația forțelor de echilibru (3.2.1), se obține următorul sistem:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{u}_i =&[(C_{ijmn} + G_{ijmn})u_{n,m} + (G_{mnij} + B_{ijmn})(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + (F_{mnrij} + D_{ijmnr})\varphi_{nr,m} + \\ &+ (M_{ijk} + N_{ijk})\nu_{,k}]_{,j} + \rho f_i, \\ I_{kr}\ddot{\varphi}_{jr} =&[F_{ijkmn}u_{n,m} + D_{mnijk}(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + A_{ijkmnr}\varphi_{nr,m} + P_{ijkm}\nu_{,m}]_{,i} + G_{ijkm}u_{m,n} + \\ &+ B_{jkmn}(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + D_{jkmnr}\varphi_{nr,m} + N_{jkm}\nu_{,m} + \rho g_{jk}, \\ \rho k\ddot{\nu} =&[M_{mni}u_{n,m} + N_{mni}(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + P_{mnji}\varphi_{mn,j} + Q_{ij}\nu_{,j}]_{,i} + \rho\ell. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Definiție 3.3.1 *Se numește soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a mediilor elastice, dipolare, poroase, în cilindrul* $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \times [0,\infty)$, *sistemul ordonat* (u_i, φ_{ij}, ν), *care satisface sistemul (3.3.6), condițiile inițiale (3.2.19)*$_{1-6}$ *și condițiile la limită (3.3.5), pentru toți* $(x,t) \in \mathcal{D}_0$.

Se presupun următoarele ipoteze pentru proprietățile mediului:

$$\begin{aligned} i)\ \ & \rho > 0,\ I_{ij} > 0,\ k > 0, \\ ii)\ \ & C_{ijmn}\zeta_{ij}\zeta_{mn} + 2G_{ijmn}\zeta_{ij}\delta_{mn} + 2F_{mnrij}\zeta_{ij}\eta_{mnr} + B_{ijmn}\delta_{ij}\delta_{mn} + 2D_{ijmnr}\delta_{ij}\eta_{mnr} + \\ & + A_{ijkmnr}\eta_{ijk}\eta_{mnr} + 2M_{ijk}\zeta_{ij}\xi_k + 2N_{ijk}\delta_{ij}\xi_k + 2P_{ijkm}\eta_{ijk}\xi_k + Q_{ij}\xi_i\xi_j \geq \\ & \geq a_0(\zeta_{ij}\zeta_{ij} + \delta_{ij}\delta_{ij} + \eta_{ijk}\eta_{ijk} + \xi_i\xi_i), \\ & a_0 > 0, \text{ pentru toate } \zeta_{ij} = \zeta_{ji}, \delta_{ij}, \eta_{ijk} \text{ și } \xi_i \text{ arbitrare.} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Presupunerile de mai sus sunt făcute în concordanță cu restricțiile uzuale impuse în mecanica mediilor continue, cu scopul obținerii unicității și existenței soluțiilor.

În cele ce urmează, se vor folosi simboluri îngroșate pentru notarea vectorilor și a matricilor:

$$\boldsymbol{u} = (u_i),\ \boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_i),\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{ij}),\ \boldsymbol{\varsigma} = (\varsigma_{ij}), \quad i,j = 1,2,3. \tag{3.3.8}$$

Se definește spațiul X după cum urmează

$$X = \{\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varsigma}, \nu, \mu) : \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^{1,3}(\mathcal{D}), \boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{H}^{0,3}(\mathcal{D}), \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{H}^{1,9}(\mathcal{D}),$$
$$\boldsymbol{\varsigma} \in \boldsymbol{H}^{0,9}(\mathcal{D}), \nu \in H^1(\mathcal{D}), \mu \in H^0(\mathcal{D})\}, \tag{3.3.9}$$

unde $H_0^m(\mathcal{D})$ și $H^m(\mathcal{D})$ sunt spațiile Sobolev cunoscute, vezi [2], [7], [127], și unde au fost folosite notațiile

$$\boldsymbol{H}^{m,n}(\mathcal{D}) = [H^m(\mathcal{D})]^n, \quad \boldsymbol{H}_0^{m,n} = [H_0^m(\mathcal{D})]^n.$$

Scopul propus este acela de transforma problema mixtă, cu date inițiale și la limită, definită prin relațiile (3.3.6), $(3.2.19)_{1-6}$ și (3.3.5), într-o ecuație abstractă, omogenă și temporală din spațiul Hilbert X.

Prin urmare, se definesc următorii operatori:

$$\begin{aligned}
A_i\boldsymbol{W} &= \vartheta_i,\\
B_i\boldsymbol{W} &= \frac{1}{\rho}\big[(C_{ijmn} + G_{ijmn})u_{m,n} + (G_{mnij} + B_{ijmn})(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + (F_{mnrij}+\\
&\quad + D_{ijmnr})\varphi_{nr,m} + (M_{ijk} + N_{ijk})\nu_{,k}\big]_{,j},\\
C_{ij}\boldsymbol{W} &= \varsigma_{ij},\\
D_{jk}\boldsymbol{W} &= (I_{ks})^{-1}[F_{ijsmn}u_{m,n} + D_{mnijs}(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + A_{ijsmnr}\varphi_{nr,m} + P_{ijsm}\nu_{,m}]_{,i}+\\
&\quad + G_{jkmn}u_{m,n} + B_{jkmn}(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + D_{jkmnr}\varphi_{nr,m} + N_{ijk}\nu_{,m},\\
E\boldsymbol{W} &= \mu,\\
F\boldsymbol{W} &= \frac{1}{\rho k}\big[M_{mni}u_{n,m} + N_{mni}(u_{n,m} - \varphi_{mn}) + P_{mnji}\varphi_{mn,i} + Q_{ij}\nu_{,j}\big]_{,i}.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Fie $\mathcal{L}$ operatorul

$$\mathcal{L} = (\boldsymbol{AW}, \boldsymbol{BW}, \boldsymbol{CW}, \boldsymbol{DW}, E\boldsymbol{W}, F\boldsymbol{W}), \tag{3.3.11}$$

unde $\boldsymbol{A} = (A_i),\ \boldsymbol{B} = (B_i),\ \boldsymbol{C} = (C_{ij}),\ \boldsymbol{D} = (D_{ij}),\ i, j = 1, 2, 3$, cu domeniul

$$D = D(\mathcal{L}) = \{\boldsymbol{W} \in X : \mathcal{L}\boldsymbol{W} \in X, \boldsymbol{\vartheta} = 0, \boldsymbol{\varsigma} = 0, \mu = 0, \text{ pe } \partial\mathcal{D}\}. \tag{3.3.12}$$

Închiderea domeniului $D(\mathcal{L})$ este, evident, spațiul X și, în concluzie, $D(\mathcal{L})$ este o mulțime densă în X. $D(\mathcal{L})$ nu este o mulțime vidă, ea conținând cel puțin $C_0^\infty(\mathcal{D})^{25}$.

Așadar, problema mixtă cu date inițiale și la limită, reprezentată prin relațiile (3.3.6), $(3.2.19)_{1-6}$ și (3.3.5), este redusă la o problemă abstractă, cu condiții inițiale, în spațiul Hilbert X,

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \mathcal{L}\boldsymbol{W} + \mathcal{F}(t), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{3.3.13}$$

cu condiția inițială

$$\boldsymbol{W}(0) = \boldsymbol{W}_0, \tag{3.3.14}$$

notațiile folosite fiind următoarele:

$$\mathcal{F}(t) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{0}, \frac{1}{k}\ell), \quad \boldsymbol{W}_0 = (\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\varphi}^1, \nu^0, \nu^1),$$
$$\boldsymbol{f} = (f_i),\ \boldsymbol{g} = (g_{jk}),\ \boldsymbol{u}^0 = (u_i^0),\ \boldsymbol{u}^1 = (u_i^1),\ \boldsymbol{\varphi}^0 = (\varphi_{ij}^0),\ \boldsymbol{\varphi}^1 = (\varphi_{ij}^1).$$

3.3.3 Rezultate principale obținute

Se consideră X^*, spațiul Hilbert X înzestrat cu norma indusă de produsul intern

$$
\begin{aligned}
< \boldsymbol{W}, \overline{\boldsymbol{W}} >_* = \int_{\mathcal{D}} [\rho \vartheta_i \overline{\vartheta}_i + I_{ks} \varsigma_{ji} \overline{\varsigma}_{jk} + \rho k \mu \overline{\mu} + C_{ijmn} \varepsilon_{ij} \overline{\varepsilon}_{mn} + G_{ijmn} (\gamma_{ij} \overline{\varepsilon}_{mn} + \overline{\gamma}_{ij} \varepsilon_{mn}) + \\
+ F_{mnrij} (\varepsilon_{ij} \overline{\chi}_{mnr} + \overline{\varepsilon}_{ij} \chi_{mnr}) + B_{ijmn} \gamma_{ij} \overline{\gamma}_{mn} + D_{ijmnr} (\gamma_{ij} \overline{\chi}_{mnr} + \\
+ \overline{\gamma}_{ij} \chi_{mnr}) + A_{ijkmnr} \chi_{ijk} \overline{\chi}_{mnr} + M_{ijk} (\varepsilon_{ij} \overline{\upsilon}_k + \overline{\varepsilon}_{ij} \upsilon_k) + N_{ijk} (\gamma_{ij} \overline{\upsilon}_k + \\
+ \overline{\gamma}_{ij} \upsilon_k) + P_{ijkm} (\chi_{ijk} \overline{\upsilon}_m + \overline{\chi}_{ijk} \upsilon_m) + Q_{ij} \upsilon_i \overline{\upsilon}_j] dV.
\end{aligned} \tag{3.3.15}
$$

Teorema 3.3.1 *Norma indusă de produsul intern (3.3.15) este echivalentă cu norma originală din spațiul X.*

Teorema 3.3.2 *Operatorul $\mathcal{L}$ satisface inegalitatea*

$$< \mathcal{L}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W} >_* \leq 0, \ \forall \boldsymbol{W} \in D(\mathcal{L}). \tag{3.3.16}$$

Se observă că inegalitatea (3.3.16) asigură faptul că $\mathcal{L}$ este disipativ.

Teorema 3.3.3 *Operatorul $\mathcal{L}$ satisface relația*

$$R(\lambda I - \mathcal{L}) = X, \ \lambda > 0, \tag{3.3.17}$$

unde I reprezintă, ca de obicei, operatorul unitate.

De menționat că egalitatea (3.3.17) asigură faptul că operatorul $\mathcal{L}$ satisface așa numita condiție de contraimagine.

Se consideră un element arbitrar, fixat, $\widehat{\boldsymbol{W}}$, în spațiul X, definit

$$\widehat{\boldsymbol{W}} = (\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{\boldsymbol{\varsigma}}, \widehat{\nu}, \widehat{\mu}) \in X. \tag{3.3.18}$$

În concordanță cu relația (3.3.17), se demonstrează faptul că ecuația

$$\lambda \boldsymbol{W} - \mathcal{L}\boldsymbol{W} = \widehat{\boldsymbol{W}}, \tag{3.3.19}$$

are cel puțin o soluție $\boldsymbol{W}$ în $D(\mathcal{L})$.

Teorema 3.3.4 *Operatorul $\mathcal{L}$, definit prin relațiile (3.3.11), generează un C_0-semigrup de contracții pe X.*

Cu scopul de a studia existența și unicitatea soluției ecuației neomogene (3.3.13), va fi folosit rezultatul oferit de teorema care urmează, conform [7].

Teorema 3.3.5 *Fie $\mathcal{L}$ un generator infinitezimal al C_0- semigrupului contractiv $\mathcal{T}(t)$ pe X. Dacă $\mathcal{F}(t)$ este continuu diferențiabilă pe $[0, t_0]$, atunci problema (3.3.13), cu valorile inițiale (3.3.14), are, pentru orice $\boldsymbol{W}_0 \in D(\mathcal{L})$, unica soluție*

$$\boldsymbol{W}(t) = \mathcal{T}(t)\boldsymbol{W}_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)\mathcal{F}(s)ds, \ t \in [0, t_0], \tag{3.3.20}$$

astfel încât

$$\boldsymbol{W}(t) \in C^1([0, t_0]; X) \cap C^0([0, t_0]; D(\mathcal{L})).$$

Pe baza precedentei teoreme, se obține rezultatul teoremei care urmează, conform [7].

Teorema 3.3.6 *Se presupune că:*

a) coeficienții elastici, care sunt continuu diferențiabili, satisfac condițiile (3.3.7),

b) $\boldsymbol{f} \in C^1([0,t_0];\boldsymbol{L}_2(\mathcal{D}))$, $\boldsymbol{g} \in C^1([0,t_0];\ \boldsymbol{L}_2(\mathcal{D}))$, $\ell \in C^1([0,t_0];\ L_2(\mathcal{D}))$,
$\boldsymbol{W}_0 = (\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\varphi}^1, \nu^0, \nu^1) \in D(\mathcal{D})$,

atunci există o unică soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită,reprezentată de (3.3.6), (3.2.19)$_{1-6}$ *și (3.3.5), astfel încât*

$$(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \nu, \dot{\nu}) \in [C^1([0,t_0]); X) \cap C^0([0,t_0]; D(\mathcal{L}))]^{26}.$$

Următoarea teoremă stabilește dependența continuă a soluției problemei prezentate mai sus atât de datele inițiale, cât și de forța masică, cuplul forță masică și sarcina masică externă generalizată. Se consideră (u_i, φ_{ij}, ν) ca fiind diferența a două soluții ale problemei mixte, cu date inițiale și la limită, corespunzând diferențelor dintre datele inițiale și diferențelor dintre forțele masice, dintre cuplurile forță masică și dintre sarcinile masice externe generalizate, $\boldsymbol{W}_0 = (\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\varphi}^1, \nu^0, \nu^1)$, respectiv $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \ell)$.

Teorema 3.3.7 *Se presupune că:*

a) coeficienții elastici, care sunt continuu diferențiabili, satisfac condițiile (3.3.7),

b) $\boldsymbol{f} \in C^1([0,t_0];\boldsymbol{L}_2(\mathcal{D}))$, $\boldsymbol{g} \in C^1([0,t_0];\ \boldsymbol{L}_2\mathcal{D}))$, $\ell \in C^1([0,t_0];\ L_2(\mathcal{D})), \boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathcal{D})$, $\boldsymbol{u}^1 \in \boldsymbol{H}^0(\mathcal{D}), \boldsymbol{\varphi}^0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathcal{D}), \boldsymbol{\varphi}^1 \in \boldsymbol{H}^0(\mathcal{D}), \nu^0 \in H^1(\mathcal{D}), \nu^1 \in H^0(\mathcal{D})$.

Dacă $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}, \nu)$ *este diferența a două soluții ale problemei date de relațiile (3.3.6), (3.2.19) și (3.3.5), atunci există o constantă pozitivă* $\mathbb{M}$*, astfel încât*

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}^{1,3}(\mathcal{D})} + |\dot{\boldsymbol{u}}|_{\boldsymbol{H}^{0,3}(\mathcal{D})} + |\boldsymbol{\varphi}|_{\boldsymbol{H}^{1,9}(\mathcal{D})} + |\dot{\boldsymbol{\varphi}}|_{\boldsymbol{H}^{0,9}(\mathcal{D})} + |\nu|_{H^1(\mathcal{D})} + |\dot{\nu}|_{H^0(\mathcal{D})} \leq \\
&\leq \mathbb{M}\Big\{ |\boldsymbol{u}^0|_{\boldsymbol{H}^{1,3}(\mathcal{D})} + |\boldsymbol{u}^1|_{\boldsymbol{H}^{0,3}(\mathcal{D})} + |\boldsymbol{\varphi}^0|_{\boldsymbol{H}^{1,9}(\mathcal{D})} + |\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{1}}|_{\boldsymbol{H}^{0,9}(\mathcal{D})} + |\nu^0|_{H^1(\mathcal{D})} + |\nu^1|_{H^0(\mathcal{D})} + \\
&+ \int_0^t \left[|\boldsymbol{f}(s)|_{\boldsymbol{H}^{0,3}(\mathcal{D})} + |\boldsymbol{g}(s)|_{\boldsymbol{H}^{0,9}(\mathcal{D})} + |\ell(s)|_{H^0(\mathcal{D})} \right] ds \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

3.3.4 Concluzii

Teoria semigrupurilor de operatori prezintă avantaje care au permis demonstrarea existenței și unicității soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, pentru medii elastice cu goluri, fără a fi necesară impunerea de condiții restrictive suplimentare, această teorie facilitând și abordarea dependenței continue a soluției de datele inițiale și de forța masică, cuplul forță masică și sarcina masică externă generalizată.

Considerațiile făcute pe parcursul acestei secțiuni au vizat doar prima problemă la limită, dar dacă condițiile pe frontieră (3.3.5) se înlocuiesc cu cele corespunzătoare celei de a doua sau celei de a treia probleme la limită, folosind aceeași procedură, se observă că toate rezultatele privind existența, unicitatea și dependența continuă a soluției rămân valabile.

3.4 Termoelasticitatea unui mediu dipolar poros, cu tensiuni inițiale: domeniu de influență

3.4.1 Preliminarii

Tema acestui subcapitol face parte din teoria termoelasticității mediilor poroase. Un număr larg de studii a fost dedicat unor aspecte extrem de variate ale microstructurii, exemple fiind [50, 51, 60, 77, 89, 107], prezentul subcapitol constituind o continuare a studiului în acest sens, extinzând rezultatele anterior obținute la contextul termoelasticității mediilor poroase, cu tensiuni inițiale. Asemenea unor studii anterioare, vezi [11, 15, 67, 73, 83, 85], va fi folosită o metodă specifică, cu scopul demonstrării teoremei referitoare la domeniul de influență.

Rezultatul principal precizează faptul că soluțiile problemei mixte, cu date inițiale și la limită, în contextul termoelasticității mediilor poroase, cu tensiuni inițiale, se anulează în afara domeniului de influență $\mathcal{D}_t$, pentru orice variabilă finită $t > 0$. Se demonstrează, mai exact, că vectorul deplasare u_i, vectorul deplasare dipolară φ_{jk}, variația de temperatură θ, a mediului față de temperatura absolută, precum și fracțiunea de volum ν, asociată golurilor, nu generează perturbări în afara unui domeniu delimitat $\mathcal{D}_t$, pentru $t > 0$.

Studiul prezentat în acest subcapitol se bazează pe rezultatele publicate în articolul: Marin, M., Othman, M.I.A., Vlase, S., **Codarcea-Munteanu, L.**: Thermoelasticity of Initially Stressed Bodies with Voids: A Domain of Influence. Symmetry-Basel **11**(4) 573, 1-12, Multidisciplary Digital Publishing Institute MDPI (2019), https://doi.org/10.3390/sym11040573, vezi [100], jurnal aflat în zona galbenă, Q$_2$, cotat ISI, factor de impact 2,645 în anul 2019, articol premiat în cadrul competiției naționale „Premierea rezultatelor cercetării- UEFISCDI", vezi [100].

3.4.2 Notații și ecuații fundamentale

Se consideră $\mathcal{D}$ o regiune regulată, din spațiul tridimensional Euclidian $\mathbb{R}^3$, căreia îi corespunde, în configurația de referință, un mediu dipolar poros, anizotrop, închiderea fiind notată cu $\overline{\mathcal{D}}$, iar frontiera, o suprafață netedă, notată cu $\partial\mathcal{D}$. Notațiile referitoare la vectorul deplasare, vectorul deplasare dipolară, fracțiunea de volum relaționată golurilor, precum și variația temperaturii sunt cele utilizate în secțiunea 3.2.2, alături de notațiile prezentate în secțiunea 1.4.

De asemenea, ecuațiile geometrice care reprezintă expresiile tensorilor de deformație $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \chi_{ijk}$ precum și a vectorului v_k, sunt date de ecuațiile (3.2.1).

Energia liberă, care în contextul teoriei liniare, are o formă pătratică în raport cu variabilele sale independente, este dată de expresia care urmează

$$\begin{aligned}\rho_0 e = {} & \frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + \\ & + D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + \frac{1}{2}A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr} + u_{j,k}P_{ki}\varepsilon_{ij} - \varphi_{jk}Q_{ik}\gamma_{ij} + \\ & + u_{j,r}N_{irk}\chi_{ijk} + d_{ijm}\varepsilon_{ij}\nu_{,m} + e_{ijm}\gamma_{ij}\nu_{,m} + f_{ijkm}\chi_{ijk}\nu_{,m} + a_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + \\ & + b_{ij}\gamma_{ij}\nu + c_{ijk}\chi_{ijk}\nu + \frac{1}{2}A_{ij}\nu_{,i}\nu_{,j} + d_i\nu\nu_{,i} - a_i\theta\nu_{,i} + \frac{1}{2}\zeta\nu^2 - m\theta\nu - \\ & - \frac{1}{2}a\theta^2 - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - \beta_{ij}\gamma_{ij}\theta - \delta_{ijk}\chi_{ijk}\theta + \frac{1}{2}K_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}.\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Ecuațiile principale, care guvernează termoelasticitatea mediilor dipolare poroase, cu tensiuni inițiale, vezi [77], sunt prezentate în cele ce urmează:

- ecuațiile de mișcare

$$\begin{gathered}(\tau_{ji} + \sigma_{ji})_{,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \\ \mu_{ijk,i} + \sigma_{jk} + u_{j,i}Q_{ik} + \varphi_{ki}Q_{ji} - \varphi_{kr,i}N_{ijr} + \rho g_{jk} = I_{kr}\ddot{\varphi}_{jr},\end{gathered} \tag{3.4.2}$$

- ecuația forțelor de echilibru (3.2.6),
- ecuația energiei

$$\rho T_0 \dot{\eta} = q_{i,i} + \rho r. \tag{3.4.3}$$

Aceste ecuații se completează cu

- relațiile cinematice

$$\begin{aligned} &(3.2.1), \\ &\theta = T - T_0, \\ &\nu = \varphi - \varphi_0, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

notațiile utilizate în ecuațiile prezentate anterior fiind cele introduse în secțiunea 3.2.2, la care se adaugă următoarele:

- r este măsura debitului de căldură pe unitatea de masă,
- θ este variația de temperatură a mediului față de temperatura absolută T_0, din configurația de referință,
- φ este funcția asociată fracției de volum, care în starea de nedeformare are valoarea φ_0.

În cele ce urmează, va fi utilizată procedura aplicată de Nunziato și Cowin în [110]. Prin urmare, luând în considerare faptul că

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} = \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial e}{\partial \gamma_{ij}}, \qquad \mu_{ijk} = \frac{\partial e}{\partial \xi_{ijk}}, \\ &\lambda_i = \frac{\partial e}{\partial \nu_{,i}}, \quad \xi = -\frac{\partial e}{\partial \nu}, \quad \eta = -\frac{\partial e}{\partial \theta}, \quad q_i = \frac{\partial e}{\partial \theta_{,i}}, \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

se obțin următoarele relații constitutive:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= u_{j,k}P_{ki} + C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + G_{ijmn}\gamma_{mn} + F_{mnrij}\chi_{mnr} + a_{ij}\nu + d_{ijk}\nu_{,k} - \alpha_{ij}\theta, \\ \sigma_{ij} &= -\varphi_{jk}Q_{ik} + \varphi_{jk,r}N_{rik} + G_{mnij}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijmnr}\chi_{mnr} + b_{ij}\nu + \\ &\quad + e_{ijk}\nu_{,k} - \beta_{ij}\theta, \\ \mu_{ijk} &= u_{j,r}N_{irk} + F_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} + c_{ijk}\nu + f_{ijkm}\nu_{,m} - \delta_{ijk}\theta, \\ \lambda_i &= d_{mni}\varepsilon_{mn} + e_{mni}\gamma_{mn} + f_{mnri}\chi_{mnr} + d_i\nu + A_{ij}\nu_{,j} - a_i\theta, \\ \xi &= -a_{ij}\varepsilon_{ij} - b_{ij}\gamma_{ij} - c_{ijk}\chi_{ijk} - \zeta\nu - d_i\nu_{,i} + m\theta, \\ \eta &= \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta_{ij}\gamma_{ij} + \delta_{ijk}\chi_{ijk} + m\nu + a_i\nu_{,i} + a\theta, \\ q_i &= K_{ij}\theta_{,j}. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

În ecuațiile constitutive precedente, $A_{ijmn}, B_{ijmn}, \ldots, K_{ij}$ sunt funcții care caracterizează proprietățile elastice ale materialului, îndeplinind relațiile de simetrie care urmează

$$\begin{aligned} &C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn}, \quad B_{ijmn} = B_{mnij}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad d_{ijk} = d_{jik}, \quad A_{ijkmnr} = A_{mnrijk}, \\ &A_{ij} = A_{ji}, \quad F_{ijkmn} = F_{ijknm}, \quad G_{ijmn} = G_{ijnm}, \quad P_{ij} = P_{ji}, \quad K_{ij} = K_{ji}, \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

iar cantitățile P_{ij}, Q_{ij} și N_{ijk}, care apar în relațiile (3.4.1), $(3.4.2)_2$ și (3.4.6), sunt funcții prescrise, care verifică următoarele ecuații:

$$(P_{ij} + Q_{ij})_{,j} = 0, \qquad N_{ijk,i} + Q_{jk} = 0. \tag{3.4.8}$$

Pe baza inegalității producției de entropie, se deduce

$$K_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} \geq 0. \tag{3.4.9}$$

Pentru ca problema mixtă, cu date inițiale și la limită, să fie completă, se adaugă ecuațiilor de bază (3.2.1), (3.4.2), (3.4.6), (3.2.6), condițiile inițiale (3.2.19) definite pe $\overline{\mathcal{D}}$, iar pe cilindrul $\partial\mathcal{D} \times (0, \infty)$ se adaugă condițiile la limită

$$\begin{aligned}
u_i(x,t) &= \widetilde{u}_i, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_u \times (0,\infty),\\
\varphi_{ij}(x,t) &= \widetilde{\varphi}_{ij}, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\varphi \times (0,\infty),\\
\nu(x,t) &= \widetilde{\nu}, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\nu \times (0,\infty),\\
\theta(x,t) &= \widetilde{\theta}, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\theta \times (0,\infty),\\
(\tau_{ji} + \sigma_{ji})(x,t)n_j &= \widetilde{t}_i, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_u^c \times (0,\infty),\\
\mu_{ijk}(x,t)n_i &= \widetilde{\mu}_{jk}, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\varphi^c \times (0,\infty),\\
\lambda_i(x,t)n_i &= \widetilde{\lambda}, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\nu^c \times (0,\infty),\\
q_i(x,t)n_i &= \widetilde{q}, && (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\theta^c \times (0,\infty),
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

unde $\partial\mathcal{D}_u, \partial\mathcal{D}_\varphi, \partial\mathcal{D}_\nu$ și $\partial\mathcal{D}_\theta$, împreună cu complementele lor $\partial\mathcal{D}_u^c, \partial\mathcal{D}_\varphi^c, \partial\mathcal{D}_\nu^c$ și $\partial\mathcal{D}_\theta^c$, sunt submulțimi ale suprafeței $\partial\mathcal{D}$, astfel încât

$$\partial\mathcal{D}_u \cap \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cap \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\nu \cap \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\mathcal{D}_\theta \cap \partial\mathcal{D}_\theta^c = \varnothing,$$

$$\partial\overline{\mathcal{D}}_u \cup \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\overline{\mathcal{D}}_\varphi \cup \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\overline{\mathcal{D}}_\nu \cup \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\overline{\mathcal{D}}_\theta \cup \partial\mathcal{D}_\theta^c = \partial\mathcal{D}.$$

Se presupune că:

(a) $u_i^0, u_i^1, \varphi_{ij}^0, \varphi_{ij}^1, \nu^0, \nu^1, \theta^0, \theta^1$ și η^0 sunt funcții continue, prescrise pe domeniul $\mathcal{D}$;
(b) $\widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_{ij}, \widetilde{\nu}$ și $\widetilde{\theta}$ sunt funcții continue, prescrise pe domeniul lor de definiție;
(c) $\widetilde{t}_i, \widetilde{\mu}_{jk}, \widetilde{\lambda}$ și $\widetilde{q}$ sunt funcții prescrise, regulate pe domeniul lor de definiție și continue în raport cu variabila timp.

Prin utilizarea ecuațiilor geometrice (3.2.1) și a ecuațiilor constitutive (3.4.6), în cadrul ecuațiilor de mișcare (3.4.2), se obține sistemul de ecuații care urmează

$$\begin{aligned}
\rho\ddot{u}_i = &\big[u_{j,k}P_{ki} - \varphi_{jk}Q_{ik} + \varphi_{jk,r}N_{rik} + (C_{ijmn} + G_{mnij})\varepsilon_{mn} +\\
&+ (G_{ijmn} + B_{ijmn})\gamma_{mn} + (F_{mnrij} + D_{ijmnr})\chi_{mnr} + (a_{ij} + b_{ij})\nu +\\
&+ (d_{ijk} + e_{ijk})\nu_{,k} - (\alpha_{ij} + \beta_{ij})\theta\big]_{,j} + \rho f_i,
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

$$\begin{aligned}
I_{kr}\ddot{\varphi}_{jr} = &(u_{j,r}N_{irk} + F_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + D_{mnijk}\gamma_{mn} + A_{ijkmnr}\chi_{mnr} + c_{ijk}\nu + f_{ijkm}\nu_{,m} -\\
&- \delta_{ijk}\theta)_{,i} + u_{j,i}Q_{ik} + G_{mnjk}\varepsilon_{mn} + B_{jkmn}\gamma_{mn} + D_{jkmnr}\chi_{mnr} + b_{jk}\nu +\\
&+ e_{jki}\nu_{,i} - \beta_{jk}\theta + \rho g_{jk},
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

$$\begin{aligned}
\rho k\ddot{\nu} = &\big(d_{mni}\varepsilon_{mn} + e_{mni}\gamma_{mn} + f_{mnri}\chi_{mnr} + d_i\nu + A_{ij}\nu_{,j} - a_i\theta\big)_{,i} - \big(a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\gamma_{ij} +\\
&+ c_{ijk}\chi_{ijk} + \zeta\nu + d_i\nu_{,i} - m\theta\big) + \rho\ell,
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

$$a\dot{\theta} = \frac{1}{\rho T_0}\big(K_{ij}\theta_{,j}\big)_{,i} + \frac{1}{T_0}r - \alpha_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \beta_{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \delta_{ijk}\dot{\chi}_{ijk} - m\dot{\nu} - a_i\dot{\nu}_{,i}. \tag{3.4.14}$$

Definiție 3.4.1 *Se numește soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a teoriei termoelasticității mediilor dipolare, poroase, cu tensiuni inițiale, în cilindrul $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \times [0, t_0)$, sistemul ordonat $(u_i, \varphi_{jk}, \theta, \nu)$ care verifică sistemul format din ecuațiile (3.4.11)-(3.4.14) pentru orice $(x, t) \in \mathcal{D}_0$, condițiile inițiale (3.2.19), precum și condițiile la limită (3.4.10).*

3.4.3 Rezultate principale obținute

În cele ce urmează, pentru început va fi introdusă definirea conceptului domeniului de influență, după care va fi demonstrată inegalitatea care va constitui fundamentul teoremei de influență. Această inegalitate este similară celei demonstrate în studiul [77].

Rezultatul principal al acestui subcapitol este reprezentat de teorema referitoare la existența unui domeniu de influență, în contextul teoriei termoelasticității mediilor dipolare poroase, cu tensiuni inițiale.

Pentru atingerea scopului propus, este necesar a se impune următoarele ipoteze asupra proprietăților mediului:

$$
\begin{aligned}
(i)\qquad & \rho > 0,\ k > 0,\ I_{ij} > 0,\ T_0 > 0,\ a > 0;\\
(ii)\qquad & C_{ijmn}x_{ij}x_{mn} + 2G_{ijmn}x_{ij}y_{mn} + B_{ijmn}y_{ij}y_{mn} + 2F_{mnrij}x_{ij}z_{mnr} +\\
& + 2D_{ijmnr}y_{ij}z_{mnr} + A_{ijkmnr}z_{ijk}z_{mnr} + P_{ki}x_{jk}x_{ji} - 2Q_{ik}x_{jk}x_{ji} +\\
& + 2Q_{ik}x_{ji}y_{jk} + 2N_{irk}x_{ji}z_{jkr} + 2a_{ij}x_{ij}\omega + 2b_{ij}y_{ij}\omega + 2c_{ijk}z_{ijk}\omega + \\
& + 2d_{ijk}x_{ij}\omega_k + 2e_{ijk}y_{ij}\omega_k + 2f_{ijkm}z_{ijk}\omega_m + 2d_i\omega_i\omega + \zeta\omega^2 + \\
& + A_{ij}\omega_i\omega_j \geq \alpha(x_{ij}x_{ij} + y_{ij}y_{ij} + z_{ijk}z_{ijk} + \omega_i\omega_i + \omega^2),\\
& \text{pentru toți } x_{ij} = x_{ji}, y_{ji}, z_{ijk}, \omega_i, \omega;\\
(iii)\qquad & K_{ij}\eta_i\eta_j \geq \gamma\eta_i\eta_i,\ \text{pentru toți } \eta_i,\ \text{cu } \gamma > 0.
\end{aligned}
\tag{3.4.15}
$$

Ipotezele (i), (ii), (iii) nu sunt considerate foarte restrictive, deoarece acestea sunt frecvent impuse în mecanica mediilor continue, de exemplu, ipoteza (iii) poate fi dedusă din inegalitatea entropiei.

Prin analogie cu funcția „treaptă” a lui Heaviside, se consideră o funcție regulată, non-descrescătoare $\mathcal{U}_\alpha(z)$, după cum urmează

$$
\mathcal{U}_\alpha(z) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } z \in (-\infty, \alpha),\\ 1, & \text{dacă } z \in [\alpha, \infty), \end{cases}
$$

pentru un $\alpha > 0$, suficient de mic.

Se fixează două constante $R > 0$, $t > 0$, se folosește $r = |x - x_0|$, cu scopul de a defini, cu ajutorul funcției introduse anterior $\mathcal{U}_\alpha$, următoarea funcție utilă, pentru $0 \leq s \leq t$,

$$
V : \mathcal{D} \times [0, t] \to \mathbb{R},\ V(x_0, t) = \mathcal{U}_\alpha\left(\frac{R - r}{v} + t - s\right), \tag{3.4.16}
$$

x_0 fiind un punct arbitrar, fixat din $\mathcal{D}$, iar $v > 0$ este o constantă care va fi determinată ulterior.

Folosind sfera

$$
\mathcal{S}(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x - x_0| < R\}, \tag{3.4.17}
$$

se definește mulțimea $\mathcal{A}$, după cum urmează

$$
\mathcal{A} = \bigcup_{x \in [0,t]} \mathcal{S}[x_0, R + v(t - s)]. \tag{3.4.18}
$$

Se observă că $V(x, s)$ este o funcție regulată în toate punctele din $\mathcal{D} \times [0, t]$, care se anulează în afara mulțimii $\mathcal{A}$. Propoziția care urmează oferă o inegalitate utilă în deducerea rezultatului principal.

Propoziția 3.4.1 *Dacă sistemul ordonat $(u_i, \varphi_{ij}, \nu, \theta)$ verifică sistemul de ecuații (3.4.11)-(3.4.14),* *condițiile inițiale (3.2.19) și condițiile la limită (3.4.10), are loc următoarea inegalitate:*

$$\begin{aligned}&[\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + I_{kr}\dot{\varphi}_{jr}\dot{\varphi}_{jk} + \rho k\dot{\nu}^2 + a\theta^2 + C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}+\\ &+ B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + 2F_{mnrij}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + 2D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}+\\ &+ P_{ki}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij} - 2Q_{ik}\varepsilon_{ij}\varphi_{jk} + 2N_{rik}\varepsilon_{ij}\chi_{rjk} + 2a_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + 2b_{ij}\gamma_{ij}\nu+\\ &+ 2c_{ijk}\chi_{ijk}\nu + 2d_{ijk}\varepsilon_{ij}\nu_{,k} + 2e_{ijk}\gamma_{ij}\nu_{,k} + 2f_{ijkm}\chi_{ijk}\nu_{,k} + 2d_i\nu\nu_{,i} + \zeta\nu^2+\\ &+ A_{ij}\nu_{,i}\nu_{,j}] \geq [\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + I_{kr}\dot{\varphi}_{jr}\dot{\varphi}_{jk} + \rho k\dot{\nu}^2 + a\theta^2 + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \gamma_{ij}\gamma_{ij}+\\ &+ \chi_{ijk}\chi_{ijk} + \nu_{,i}\nu_{,i} + \nu^2],\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

pentru toți $(x, s) \in \mathcal{D} \times [0, t]$.

Se definește funcția $P(x, s)$, prin

$$\begin{aligned}P = \frac{1}{2}&[\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + I_{kr}\dot{\varphi}_{jr}\dot{\varphi}_{jk} + \rho k\dot{\nu}^2 + a\theta^2 + C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2G_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}+\\ &+ B_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + 2F_{mnrij}\varepsilon_{ij}\chi_{mnr} + 2D_{ijmnr}\gamma_{ij}\chi_{mnr} + A_{ijkmnr}\chi_{ijk}\chi_{mnr}+\\ &+ P_{ki}u_{j,k}u_{j,i} - 2Q_{ik}u_{j,i}\varphi_{jk} + 2N_{rik}u_{j,i}\varphi_{jk,r} + 2a_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + 2b_{ij}\gamma_{ij}\nu+\\ &+ 2c_{ijk}\chi_{ijk}\nu + 2d_{ijk}\varepsilon_{ij}\nu_{,k} + 2e_{ijk}\gamma_{ij}\nu_{,k} + 2f_{ijkm}\chi_{ijk}\nu_{,k} + 2d_i\nu\nu_{,i} + \zeta\nu^2+\\ &+ A_{ij}\nu_{,i}\nu_{,j}].\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Definirea funcției P, prin intermediul relației (3.4.20), conduce la concluzia că P, ca funcție de (t, s), este, de fapt, energia potențială. În cele ce urmează, se va folosi, de asemenea, funcția $K(x, s)$ definită prin

$$K = \frac{1}{2}[\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + I_{kr}\dot{\varphi}_{jr}\dot{\varphi}_{jk} + \rho k\dot{\nu}^2 + a\theta^2 + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \gamma_{ij}\gamma_{ij} + \chi_{ijk}\chi_{ijk} + \nu_{,i}\nu_{,i} + \nu^2]. \tag{3.4.21}$$

Luând în considerare ipotezele (i) și (ii), din ecuațiile (3.4.20) și (3.4.21), se deduce inegalitatea

$$P(x, \tau) \geq K(x, \tau), \ \forall (x, \tau) \in \mathcal{D} \times [0, t]. \tag{3.4.22}$$

Teorema 3.4.1 *Dacă* $(u_i, \varphi_{ij}, \theta, \nu)$ *este o soluție a sistemului reprezentat prin ecuațiile (3.4.11)-(3.4.14), care verifică condițiile inițiale (3.2.19), precum și condițiile la limită (3.4.10), atunci, pentru orice* (x, τ) *în cilindrul* $\mathcal{D} \times [0, t]$, *are loc inegalitatea care urmează*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}[x_0,R]} P(x,t)dV + \frac{1}{\rho T_0}\int_0^t \int_{\mathcal{D}[x_0,R+\mathrm{v}(t-s)]} K_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}dVds \leq\\ &\leq \int_{\mathcal{D}[x_0,R+\mathrm{v}t]} P(x,0)dV + \int_0^t \int_{\mathcal{D}[x_0,R+\mathrm{v}(t-s)]} \rho\Big(f_i\dot{u}_i + g_{jk}\dot{\varphi}_{jk} + \ell\dot{\nu}+\\ &+ \frac{1}{\rho T_0}r\theta\Big)dVds + \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}[x_0,R+\mathrm{v}(t-s)]} \Big(\widetilde{t}_i\dot{u}_i + \widetilde{\mu}_{jk}\dot{\varphi}_{jk} + \widetilde{\lambda}\dot{\nu} + \frac{1}{\rho T_0}\theta\widetilde{q}\Big)dAds,\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

pentru $R > 0, t > 0$ *și* $x_0 \in \mathcal{D}$.

În relația precedenta (3.4.23) au fost utilizate notațiile

$$\mathcal{D}[x_0, R] = \{\alpha \in \mathcal{D} : \ |\alpha - x_0| < R\},$$

$$\partial\mathcal{D}[x_0, R] = \{\alpha \in \partial\mathcal{D} : \ |\alpha - x_0| < R\}.$$

Estimările precedente, obținute în *Propoziția 3.4.1* și *Teorema 3.4.1* , vor fi folosite pentru demonstrarea teoremei principale a prezentei secțiuni, care este, de fapt, o generalizare a rezultatului privind domeniul de influență.

Se consideră $\mathscr{D}(t)$, mulțimea punctelor $x \in \bar{\mathcal{D}}$ astfel încât:

(a) pentru $x \in \mathscr{D}$, $u_i^0 \neq 0$, sau $u_i^1 \neq 0$, sau $\varphi_{ij}^0 \neq 0$, sau $\varphi_{ij}^1 \neq 0$, sau $\nu^0 \neq 0$, sau $\nu^1 \neq 0$, sau $\theta^0 \neq 0$, sau $\theta^1 \neq 0$, sau $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $f_i(x,\alpha) \neq 0$, sau $g_{jk}(x,\alpha) \neq 0$, sau $\ell(x,\alpha) \neq 0$, sau $r(x,\alpha) \neq 0$;

(b) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_u$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{u}(x,\alpha) \neq 0$;

(c) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_u^c$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{t}_i(x,\alpha) \neq 0$;

(d) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_\varphi$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{\varphi}_{ij}(x,\alpha) \neq 0$;

(e) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_\varphi^c$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{\mu}_{jk}(x,\alpha) \neq 0$;

(f) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_\nu$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{\nu}(x,\alpha) \neq 0$;

(g) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_\nu^c$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{\lambda}(x,\alpha) \neq 0$;

(h) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_\theta$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{\theta}(x,\alpha) \neq 0$;

(i) pentru $x \in \partial\mathcal{D}_\theta^c$, $\exists \alpha \in [0,t]$ astfel încât $\widetilde{q}(x,\alpha) \neq 0$.

La momentul t, domeniul de influență al datelor este reprezentat de mulțimea notată $\mathcal{D}_t$, definită prin

$$\mathcal{D}_t = \{x_0 \in \bar{\mathcal{D}} : \mathscr{D}(t) \cap \bar{\mathscr{S}}(x_o, \upsilon t) \neq \varnothing\},$$

unde $\varnothing$ este notația pentru mulțimea vidă, iar sfera $\mathscr{S}(x_0, \upsilon t)$ este definită de ecuația (3.4.17). În acest stadiu poate fi demonstrat rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 3.4.2 *Dacă $(u_i, \varphi_{ij}, \theta, \nu)$ verifică ecuațiile sistemului reprezentat prin relațiile (3.4.11)-(3.4.14) și satisface condițiile inițiale (3.2.19), precum și condițiile la limită (3.4.10), se obține o caracterizare a soluției, după cum urmează*

$$u_i = 0,\ \varphi_{ij} = 0,\ \theta = 0 \text{ și } \nu = 0,\ \textit{pentru } (x,\tau) \in \{\bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}_t\} \times [0,t]. \tag{3.4.24}$$

3.4.4 Concluzii

Se remarcă faptul că rezultatul principal al acestei secțiuni, reprezentat de *Teorema 3.4.2*, este, de fapt, o generalizare a teoremei referitoare la domeniul de influență, din teoria clasică a elasticității. Această generalizare are loc într-un context mult mai complex, și anume, în contextul teoriei termoelasticității mediilor dipolare poroase.

Prin compararea celor două teorii, cea clasică și cea menționată mai sus, se observă că rezultatul principal privind domeniul de influență este valabil în ambele teorii, acesta nefiind influențat, în niciun fel, de efectul tratamentului termic, al structurii dipolare, sau cel al golurilor.

Capitolul 4

Contribuții asupra mediilor micropolare poroase

4.1 Scurt istoric

Deformația în teoria micropolară continuă este caracterizată atât prin intermediul vectorului deplasare, precum și prin intermediul unui vector de rotație independent, care precizează sensul celor trei vectori asociați fiecărei particule materiale, particulă care poate experimenta o microrotație fără a fi supusă unei macrodeplasări.

Teoria clasică a elasticității nu are posibilitatea prezentării corecte a comportamentului unor medii care prezintă o structură internă, de exemplu mediile policristaline sau mediile cu fibre, studiate de ingineria modernă. Teoria mediilor micropolare, respectiv cea a mediilor micropolare cu goluri, au constituit subiectul unui larg număr de studii, exemple fiind [13, 87, 92, 97], respectiv [25, 68, 70, 76, 82, 88, 90].

Pe baza teoriei mediilor cu structură internă, inițiatorul teoriei mediilor cu microtemperaturi, Grot, vezi [56], stabilește și dezvoltă teoria termodinamicii mediilor elastice cu microstructură, ale căror microelemente dețin microtemperaturi. Teoria termoelasticității mediilor înzestrate cu microtemperaturi a fost abordată, pentru medii diverse, sau micropolare, în [21, 62, 63, 101, 119, 121], respectiv [92, 97, 111].

4.2 Studiul vibrațiilor mediilor micropolare poroase

4.2.1 Preliminarii

Acest subcapitol este dedicat analizei evoluției spațiale a vibrațiilor armonice în timp, studiate în contextul termoelasticității liniare a mediilor micropolare poroase, fără disiparea energiei, fapt care imprimă caracteristici specifice respectivelor medii. Particularitățile se regăsesc în două direcții: debitul de căldură nu implică disiparea energiei, așa cum se întâmplă în teoria clasică a termoelasticității, iar funcția, care determină tensiunea și permite transmiterea căldurii sub formă de unde termice cu viteză finită, este și determinanta ecuației constitutive a vectorului flux de entropie.

4.2.2 Notații și ecuații fundamentale

Fie $\mathcal{D}$ o regiune deschisă, din spațiul tridimensional Euclidian $\mathbb{R}^3$, căreia îi corespunde, în configurația de referință, un mediu termoelastic, micropolar, poros, anizotrop și omogen. Variabilele independente, care caracterizează un mediu termoelastic micropolar poros, vezi [90], sunt vectorul deplasare $u = (u_i)_{1\leq i\leq 3}$, vectorul microrotație $\varphi = (\varphi_i)_{1\leq i\leq 3}$, fracțiunea de volum ν corespunzătoare porilor și θ, variația temperaturii mediului față de temperatura absolută θ_0, pe care o are acesta în configurația de referință:

$$u_i = u_i(x,t),\ \varphi_i = \varphi_i(x,t),\ \nu = \nu(x,t),\ \theta = \theta(x,t),\ (x,t) \in \mathcal{D} \times [0,t_0].$$

Reprezentând caracteristicile cinematice ale deformării, tensorii $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$, precum și vectorul υ_i sunt exprimați de ecuațiile geometrice

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{jik}\varphi_k\ , \quad \gamma_{ij} = \varphi_{j,i}\ , \quad \upsilon_i = \nu_{,i}\ , \tag{4.2.1}$$

unde ε_{jik} este simbolul Levi-Civita.

Ecuațiile care guvernează termoelasticitatea mediilor micropolare poroase, fără disiparea energiei, sunt:

- ecuațiile de mișcare

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i, \quad \text{în } \mathcal{D} \times (0,\infty), \\ m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}t_{jk} + \rho g_i &= I_{ij}\ddot{\varphi}_j, \quad \text{în } \mathcal{D} \times (0,\infty), \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

- ecuația forțelor de echilibru

$$\lambda_{i,i} + \rho\ell = \rho k \ddot{\nu}, \text{ în } \mathcal{D} \times (0,\infty), \tag{4.2.3}$$

- ecuația energiei

$$\rho\dot{\eta} = \frac{\rho}{\theta_0} r - q_{i,i}, \text{ în } \mathcal{D} \times (0,\infty). \tag{4.2.4}$$

Notațiile utilizate în ecuațiile anterioare sunt prezentate în cele ce urmează

- t_{ji}, m_{ji} sunt componentele tensorilor de tensiune,
- f_i, g_i sunt componentele forței masice, respectiv componentele cuplului forță masică,
- ρ este densitatea mediului în configurația de referință,
- λ_i sunt componentele vectorului de tensiune internă,
- ℓ este sarcina masică externă generalizată, relaționată porilor,
- I_{ij} sunt coeficienții de microinerție,
- η este entropia pe unitatea de masă,
- r este debitul surselor externe de căldură pe unitatea de masă,
- q_i sunt componentele fluxului de căldură,
- k este coeficientul de inerție.

Considerând că mediul de referință are centru de simetrie în fiecare punct, fiind însă non-isotropic, energia liberă Ψ, prin intermediul căreia se deduc ecuațiile constitutive, este dată sub forma

$$\begin{aligned} \rho\Psi = &\frac{1}{2}A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + B_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + C_{ij}\gamma_{ij}\nu + \\ &+ \frac{1}{2}A_{ij}\upsilon_i\upsilon_j + \frac{1}{2}g\nu^2 - d_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - e_{ij}\gamma_{ij}\theta - m\nu\theta - \frac{c}{2\theta_0}\theta^2 + \frac{c}{2\theta_0}K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j}, \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

α reprezentând creșterea temperaturii exprimată de relația (3.2.3)$_1$, iar legătura dintre α și θ este dată de

$$\dot{\alpha}(x,t) = \theta(x,t),\ \alpha(x,0) = 0. \tag{4.2.6}$$

În același timp, coeficienții care apar în forma energiei libere, adică $A_{ijmn},\ B_{ijmn},\ C_{ijmn},\ A_{ij},\ B_{ij},$ $C_{ij},\ d_{ij},\ e_{ij}$ și K_{ij} reprezintă caracteristicile mediului și îndeplinesc relațiile de simetrie care urmează

$$A_{ijmn} = A_{mnij},\ C_{ijmn} = C_{mnij},\ A_{ij} = A_{ji},\ I_{ij} = I_{ji},\ K_{ij} = K_{ji}, \tag{4.2.7}$$

fiind funcții de clasă $C^1(\mathcal{D})$, prescrise.

Ecuațiile constitutive, obținute prin intermediul energiei libere (4.2.5), pentru $(x,t) \in \bar{\mathcal{D}} \times [0,\infty)$, sunt:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + B_{ij}\nu - d_{ij}\theta, \\ m_{ij} &= B_{mnij}\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} + C_{ij}\nu - e_{ij}\theta, \\ \lambda_i &= A_{ij}\nu_{,j}, \\ \rho\eta &= d_{ij}\varepsilon_{ij} + e_{ij}\gamma_{ij} + m\nu + \frac{c}{\theta_0}\theta, \\ q_i &= -\frac{1}{\theta_0}K_{ij}\beta_j, \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

sistemul ecuațiilor fiind complet, dacă se adaugă legea fluxului de căldură

$$\dot{\beta}_i = \theta_{,i}, \text{ pentru toți } (x,t) \in \bar{\mathcal{D}} \times [0,\infty), \tag{4.2.9}$$

β_i fiind date de expresia $(3.2.3)_2$.

Utilizarea ecuațiilor constitutive (4.2.8), a ecuațiilor geometrice (4.2.1), a ecuațiilor de mișcare (4.2.2), a ecuației forțelor de echilibru (4.2.3) și a ecuației energiei (4.2.4), conduce la un sistem de ecuații referitoare la deplasările u_i, microrotațiile φ_i, variația fracțiunii de volum ν și creșterea temperaturii α, și anume:

$$\begin{aligned} &\left[A_{ijmn}(u_{n,m} + \varepsilon_{nmk}\varphi_k) + B_{ijmn}\varphi_{n,m} + B_{ij}\nu - d_{ij}\dot{\alpha}\right]_{,j} + \rho f_i = \rho\ddot{u}_i, \\ &\left[B_{mnij}(u_{n,m} + \varepsilon_{nmk}\varphi_k) + C_{ijmn}\varphi_{n,m} + C_{ij}\nu - e_{ij}\dot{\alpha}\right]_{,j} + \varepsilon_{ijk}\left[A_{jkmn}(u_{n,m} + \varepsilon_{nmk}\varphi_k) + \right. \\ &\left. + B_{jkmn}\varphi_{n,m} + B_{jk}\nu - d_{jk}\dot{\alpha}\right] + \rho g_i = I_{ij}\ddot{\varphi}_j, \\ &(A_{ij}\nu_{,j})_{,i} + \rho\ell = \rho k\ddot{\nu}, \\ &\left(\frac{1}{\theta_0}K_{ij}\alpha_{,j}\right)_{,i} - d_{ij}(\dot{u}_{j,i} + \varepsilon_{jik}\dot{\varphi}_k) - e_{ij}\dot{\varphi}_{j,i} - m\dot{\nu} + \frac{\rho}{\theta_0}r = \frac{c}{\theta_0}\ddot{\alpha}, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

pentru orice $(x,t) \in \mathcal{D} \times (0,\infty)$.

4.2.3 Rezultate preliminarii obținute

Se consideră o secțiune transversală D a unui cilindru, iar frontiera secțiunii, notată cu ∂D, se presupune a fi continuu diferențiabilă. Se alege sistemul cartezian de axe ortogonale astfel încât originea sa să fie situată în centrul bazei cilindrului, iar partea pozitivă a axei x_3 să fie direcționată de-a lungul cilindrului. Lungimea cilindrului fiind notată cu L, frontiera sa laterală este $S = \partial D \times [0,L]$. Conținutul cilindrului este un mediu micropolar cu goluri, anizotrop și omogen. În același timp, cilindrul este liber de tensiuni pe suprafața laterală, deci forța masică, cuplul forță masică, sarcina masică externă generalizată și debitul surselor externe de căldură sunt nule, precum și deplasările, microrotațiile, variația fracțiunii de volum și creșterea temperaturii. Se menționează faptul că pe suprafața bazei cilindrului, deplasările, microrotațiile, variația fracțiunii de volum, precum și creșterea temperaturii sunt presupuse a fi armonice în timp. Se adaugă, sistemului de ecuații (4.2.10), următoarele condiții la limită pentru suprafața laterală

$$u_i(x,t) = 0,\ \varphi_i(x,t) = 0,\ \nu(x,t) = 0,\ \alpha(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in S \times (0,\infty), \tag{4.2.11}$$

respectiv următoarele condiții la limită pentru bază

$$\begin{aligned} u_i(x_1,x_2,0,t) &= \widetilde{u}_i(x_1,x_2)e^{i\omega t}, \\ \varphi_i(x_1,x_2,0,t) &= \widetilde{\varphi}_i(x_1,x_2)e^{i\omega t}, \\ \nu(x_1,x_2,0,t) &= \widetilde{\nu}(x_1,x_2)e^{i\omega t}, \\ \alpha(x_1,x_2,0,t) &= \widetilde{\alpha}(x_1,x_2)e^{i\omega t}, \end{aligned} \qquad (x_1,x_2) \in D(0), t > 0, \tag{4.2.12}$$

unde $\widetilde{u}_i(x_1,x_2), \widetilde{\varphi}_i(x_1,x_2), \widetilde{\nu}(x_1,x_2)$ și $\widetilde{\alpha}(x_1,x_2)$ sunt funcții regulate, prescrise, i este unitatea complexă, iar ω este o constantă pozitivă prescrisă.

Încărcările (4.2.12) induc în interiorul cilindrului vibrații armonice în timp, a căror formă este dată de

$$\begin{aligned} u_i(x_1,x_2,x_3,t) &= U_i(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}, \\ \varphi_i(x_1,x_2,x_3,t) &= \Phi_i(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}, \\ \nu(x_1,x_2,x_3,t) &= \Sigma(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}, \\ \alpha(x_1,x_2,x_3,t) &= \Lambda(x_1,x_2,x_3)e^{i\omega t}, \end{aligned} \qquad (x_1,x_2,x_3,t) \in \mathcal{D}\times(0,\infty). \tag{4.2.13}$$

Amplitudinea $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$ a vibrațiilor satisface următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} &\left[A_{ijmn}(U_{n,m}+\varepsilon_{nmk}\Phi_k)+B_{ijmn}\Phi_{n,m}+B_{ij}\Sigma-i\omega d_{ij}\Lambda\right]_{,j}+\rho\omega^2U_i=0, \\ &\left[B_{mnij}(U_{n,m}+\varepsilon_{nmk}\Phi_k)+C_{ijmn}\Phi_{n,m}+C_{ij}\Sigma-i\omega e_{ij}\Lambda\right]_{,j}+\varepsilon_{ijk}\left[A_{jkmn}(U_{n,m}+\right. \\ &\left.+\varepsilon_{nmk}\Phi_k)+B_{jkmn}\Phi_{n,m}+B_{jk}\Sigma-i\omega d_{jk}\Lambda\right]+I_{ij}\omega^2\Phi_j=0, \\ &\left(A_{ij}\Sigma_{,j}\right)_{,i}+\rho k\omega^2\Sigma=0, \\ &\left(\frac{1}{\theta_0}K_{ij}\Lambda_{,j}\right)_{,i}-i\omega d_{ij}(U_{j,i}+\varepsilon_{jik}\Phi_k)-i\omega e_{ij}\Phi_{j,i}-i\omega m\Sigma+\frac{c}{\theta_0}\omega^2\Lambda=0. \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Condițiile la limită pentru suprafața laterală (4.2.11) iau forma

$$U_i(x)=0,\ \Phi_i(x)=0,\ \Sigma(x)=0,\ \Lambda(x)=0,\ x\in S, \tag{4.2.15}$$

iar condițiile la limită pentru bază devin

$$\begin{aligned} U_i(x_1,x_2,0) &= \widetilde{U}_i(x_1,x_2), \\ \Phi_i(x_1,x_2,0) &= \widetilde{\Phi}_i(x_1,x_2), \\ \Sigma(x_1,x_2,0) &= \widetilde{\Sigma}(x_1,x_2), \\ \Lambda(x_1,x_2,0) &= \widetilde{\Lambda}(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

În cazul unui cilindru finit, va fi necesar a se prescrie condițiile la limită pentru baza superioară a cilindrului $D(L)$. Pentru o oscilație impusă, comportamentul spațial al amplitudinii a fost studiat în [13] și [18], cu condiția ca frecvența perturbatoare să fie mai mică decât o anumită frecvență critică.

Scopul principal al prezentului studiu este acela de estimare a evoluției amplitudinii în raport cu distanța axială față de baza perturbată, în acest sens, utilizând procedura prezentată în [87], se vor obține estimări asupra unei soluții a sistemului de ecuații diferențiale (4.2.14), cu condițiile la limită pentru suprafața laterală (4.2.15) și condițiile la limită pentru bază (4.2.16). În continuare, va fi folosită notația

$$\mathcal{U}_{j,i}=U_{j,i}+\varepsilon_{jik}\Phi_k. \tag{4.2.17}$$

În următoarea teoremă, vor fi determinate patru identități, care vor constitui fundamentul obținerii rezultatului principal.

Teorema 4.2.1 *Dacă $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$ este o soluție a problemei la limită constând în ecuațiile (4.2.14)-(4.2.16), sunt îndeplinite următoarele egalități:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+B_{3jmn}\Phi_{n,m}+B_{3j}\Sigma-i\omega d_{3j}\Lambda\right]\bar{U}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[A_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+B_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega d_{3j}\bar{\Lambda}\right]U_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+C_{3jmn}\Phi_{n,m}+C_{3j}\Sigma-i\omega e_{3j}\Lambda\right]\bar{\Phi}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+C_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega e_{3j}\bar{\Lambda}\right]\Phi_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(A_{3j}\Sigma_{,j})\bar{\Sigma}+(A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})\Sigma\right]dA=2\int\limits_{D(x_3)}\left\{A_{ijmn}\mathcal{U}_{j,i}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+\right.\\
&+C_{ijmn}\Phi_{n,m}\bar{\Phi}_{j,i}+B_{ijmn}\left[\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Phi}_{n,m}+\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Phi_{n,m}\right]+A_{ij}\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,j}-\rho\omega^2U_i\bar{U}_i-\\
&\left.-I_{ij}\omega^2\Phi_i\bar{\Phi}_j-\rho k\omega^2\Sigma\bar{\Sigma}\right\}dA+\int\limits_{D(x_3)}\left[B_{ij}(\Sigma\bar{\mathcal{U}}_{j,i}+\bar{\Sigma}\mathcal{U}_{j,i})+\right.\\
&\left.+C_{ij}(\Sigma\bar{\Phi}_{i,j}+\bar{\Sigma}\Phi_{i,j})+i\omega d_{ij}(\bar{\Lambda}\mathcal{U}_{j,i}-\Lambda\bar{\mathcal{U}}_{j,i})+i\omega e_{ij}(\bar{\Lambda}\Phi_{i,j}-\Lambda\bar{\Phi}_{i,j})\right]dA;
\end{aligned}
\tag{4.2.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[A_{3jmn}\bar{U}_{n,m}+B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+B_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega d_{3j}\bar{\Lambda}\right]U_j\right\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+B_{3jmn}\Phi_{n,m}+B_{3j}\Sigma-i\omega d_{3j}\Lambda\right]\bar{U}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+C_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega e_{3j}\bar{\Lambda}\right]\Phi_j\right\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{\left[B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+C_{3jmn}\Phi_{n,m}+C_{3j}\Sigma-i\omega e_{3j}\Lambda\right]\bar{\Phi}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left[(A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})\Sigma-(A_{3j}\Sigma_{,j})\bar{\Sigma}\right]dA=\int\limits_{D(x_3)}\left[B_{ij}(\bar{\Sigma}\mathcal{U}_{j,i}-\Sigma\bar{\mathcal{U}}_{j,i})+\right.\\
&\left.+C_{ij}(\Sigma\bar{\Phi}_{i,j}-\bar{\Sigma}\Phi_{i,j})+i\omega d_{ij}(\bar{\Lambda}\mathcal{U}_{j,i}+\Lambda\bar{\mathcal{U}}_{j,i})+i\omega e_{ij}(\bar{\Lambda}\Phi_{i,j}+\Lambda\bar{\Phi}_{i,j})\right]dA;
\end{aligned}
\tag{4.2.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{\theta_0}K_{3j}(\bar{\Lambda}\Lambda_{,j}+\Lambda\bar{\Lambda}_{,j})dA=2\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{\theta_0}(K_{i,j}\Lambda_{,i}\bar{\Lambda}_{,j}-c\omega^2\Lambda\bar{\Lambda})dA+\\
&+\int\limits_{D(x_3)}i\omega d_{ij}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Lambda}-\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Lambda)dA+\int\limits_{D(x_3)}i\omega e_{ij}(\Phi_{j,i}\bar{\Lambda}-\bar{\Phi}_{j,i}\Lambda)dA+\\
&+\int\limits_{D(x_3)}i\omega m(\Sigma\bar{\Lambda}-\bar{\Sigma}\Lambda)dA;
\end{aligned}
\tag{4.2.20}
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{\theta_0}K_{3j}(\bar{\Lambda}\Lambda_{,j}-\Lambda\bar{\Lambda}_{,j})dA=\int\limits_{D(x_3)}i\omega d_{ij}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Lambda}+\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Lambda)dA+\\
&+\int\limits_{D(x_3)}i\omega e_{ij}(\Phi_{j,i}\bar{\Lambda}+\bar{\Phi}_{j,i}\Lambda)dA+\int\limits_{D(x_3)}i\omega m(\Sigma\bar{\Lambda}+\bar{\Sigma}\Lambda)dA,
\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

unde $\bar{z}$ este notația pentru conjugata lui z.

Teorema 4.2.2 *Dacă $(U_i,\Phi_i,\Sigma,\Lambda)$ este o soluție a problemei la limită constând în ecuațiile (4.2.14)-(4.2.16), sunt îndeplinite următoarele egalități:*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D(x_3)}[A_{ijmn}\mathcal{U}_{n,m}\bar{\mathcal{U}}_{j,i}+C_{ijmn}\Phi_{i,j}\bar{\Phi}_{n,m}+A_{ij}\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,j}]dA+\int\limits_{D(x_3)}[B_{ijmn}(\mathcal{U}_{n,m}\bar{\Phi}_{i,j}+\\
&+\bar{\mathcal{U}}_{n,m}\Phi_{i,j})-3\omega^2(\rho U_i\bar{U}_i+\rho k\Sigma\bar{\Sigma}+I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j)]dA+2\int\limits_{D(x_3)}[B_{ij}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Sigma}+\\
&+\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Sigma)+C_{ij}(\Phi_{i,j}\bar{\Sigma}+\bar{\Phi}_{i,j}\Sigma)]dA-2i\omega\int\limits_{D(x_3)}[d_{ij}(\Lambda\bar{\mathcal{U}}_{j,i}-\bar{\Lambda}\mathcal{U}_{j,i})+e_{ij}(\Lambda\bar{\Phi}_{j,i}-\\
&-\bar{\Lambda}\Phi_{j,i})]dA+\int\limits_{D(x_3)}[x_pB_{ij}(\Sigma_{,p}\bar{\mathcal{U}}_{j,i}+\Sigma_{,p}\mathcal{U}_{j,i})+x_pC_{ij}(\Sigma_{,p}\bar{\Phi}_{i,j}+\bar{\Sigma}_{,p}\Phi_{i,j})]dA-\\
&-i\omega\int\limits_{D(x_3)}[d_{ij}x_p(\Lambda_{,p}\bar{\mathcal{U}}_{j,i}-\bar{\Lambda}_{,p}\mathcal{U}_{j,i})+e_{ij}x_p(\Lambda_{,p}\bar{\Phi}_{j,i}-\bar{\Lambda}_{,p}\Phi_{j,i})]dA=\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\{[A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+B_{3jmn}\Phi_{n,m}+B_{3j}\Sigma-i\omega d_{3j}\Lambda]x_p\bar{U}_{j,p}\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\{[A_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+B_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega d_{3j}\bar{\Lambda}]x_pU_{j,p}\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\{[B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+C_{3jmn}\Phi_{n,m}+C_{3j}\Sigma-i\omega e_{3j}\Lambda]x_p\bar{\Phi}_{j,p}\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\{[B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+C_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega e_{3j}\bar{\Lambda}]x_p\Phi_{j,p}\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}[(A_{3j}\Sigma_{,j})x_p\bar{\Sigma}_{,p}+(A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})x_p\Sigma_{,p}]dA+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}x_3[A_{ijmn}\mathcal{U}_{n,m}\bar{\mathcal{U}}_{j,i}+\\
&+C_{ijmn}\Phi_{i,j}\bar{\Phi}_{n,m}+A_{ij}\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,j}]dA+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}x_3\{B_{ijmn}[\mathcal{U}_{n,m}\bar{\Phi}_{i,j}+\bar{\mathcal{U}}_{n,m}\Phi_{i,j}]+\\
&+B_{ij}[\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Sigma}+\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Sigma]+C_{ij}[\bar{\Sigma}\Phi_{i,j}+\Sigma\bar{\Phi}_{i,j}]-\rho\omega^2U_i\bar{U}_i-\rho k\omega^2\Sigma\bar{\Sigma}\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}i\omega x_3[d_{ij}(\Lambda\bar{\mathcal{U}}_{j,i}-\bar{\Lambda}\mathcal{U}_{j,i})+e_{ij}(\Lambda\bar{\Phi}_{j,i}-\bar{\Lambda}\Phi_{j,i})-x_3I_{ij}\omega^2\Phi_i\bar{\Phi}_j]dA-\\
&-\int\limits_{\partial D(x_3)}x_pn_p\Big(A_{i\alpha m\beta}n_\alpha n_\beta\frac{\partial\mathcal{U}_i}{\partial n}\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}_m}{\partial n})+2B_{i\alpha m\beta}n_\alpha n_\beta\frac{\partial\mathcal{U}_i}{\partial n}\frac{\partial\bar{\Phi}_m}{\partial n}+\\
&+C_{i\alpha m\beta}n_\alpha n_\beta\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\frac{\partial\bar{\Phi}_m}{\partial n}+A_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\frac{\partial\Sigma}{\partial n}\frac{\partial\bar{\Sigma}}{\partial n}\Big)ds;
\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{D(x_3)} \frac{1}{\theta_0}(K_{ij}\Lambda_{,i}\bar{\Lambda}_{,j} - 3c\omega\Lambda\bar{\Lambda})dA + \int\limits_{D(x_3)} i\omega d_{ij}x_p(\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Lambda_{,p} - \mathcal{U}_{j,i}\bar{\Lambda}_{,p})dA+\\
&+\int\limits_{D(x_3)} i\omega e_{ij}x_p(\bar{\Phi}_{j,i}\Lambda_{,p} - \Phi_{j,i}\bar{\Lambda}_{,p})dA + \int\limits_{D(x_3)} i\omega m x_p(\bar{\Sigma}\Lambda_{,p} - \Sigma\bar{\Lambda}_{,p})dA+\\
&+\int\limits_{\partial D(x_3)} x_p n_p K_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta \frac{\partial\Lambda}{\partial n}\frac{\partial\bar{\Lambda}}{\partial n}ds = -\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \frac{1}{\theta_0}\big[x_\alpha K_{3\beta}(\bar{\Lambda}_{,\alpha}\Lambda_{,\beta} + \Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda}_{,\beta})+\\
&+x_\alpha K_{33}(\bar{\Lambda}_{,\alpha}\Lambda_{,3} + \Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda}_{,3})\big] - \frac{d}{dx_3}\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{x_3}{\theta_0}(K_{33}\Lambda_{,3}\bar{\Lambda}_{,3} - K_{\alpha\beta}\Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda}_{,\beta} + c\omega^2\Lambda\bar{\Lambda})dA.
\end{aligned}
\tag{4.2.23}
$$

Relațiile (4.2.22) și (4.2.23), prezentate de teorema precedentă, constituie, alături de relațiile oferite de teorema anterioară acesteia, egalități auxiliare, necesare deducerii rezultatului principal.

4.2.4 Rezultate principale obținute

Legile de conservare, care constituie obiectul demonstrației teoremei care urmează, vor fi folosite pentru deducerea unor estimări „a priori" pentru soluția problemei mixte.

Teorema 4.2.3 *Dacă $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$ este o soluție a problemei la limită constând în ecuațiile (4.2.14)-(4.2.16), au loc următoarele două legi de conservare:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \omega^2\Big(\rho U_j\bar{U}_j + I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j + \rho k\Sigma\bar{\Sigma} + \frac{c}{\theta_0}\Lambda\bar{\Lambda}\Big)dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \frac{1}{\theta_0}(K_{33}\Lambda_{,3}\bar{\Lambda}_{,3} - K_{\alpha\beta}\Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda}_{,\beta})dA + \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [A_{i3m3}\mathcal{U}_{i,3}\bar{\mathcal{U}}_{m,3}+\\
&+B_{i3m3}(\mathcal{U}_{i,3}\bar{\Phi}_{m,3} + \bar{\mathcal{U}}_{i,3}\Phi_{m,3}) + C_{i3m3}\Phi_{i,3}\bar{\Phi}_{m,3}+\\
&+B_{i3}(\Sigma\bar{\mathcal{U}}_{i,3} + \bar{\Sigma}\mathcal{U}_{i,3}) + C_{i3}(\Sigma\bar{\Phi}_{i,3} + \bar{\Sigma}\Phi_{i,3}) + A_{i3}(\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,3} + \bar{\Sigma}_{,i}\Sigma_{,3})]dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [A_{i\alpha m\beta}\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\mathcal{U}}_{m,\beta} - B_{i\alpha m\beta}(\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\Phi}_{m,\beta} + \bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha}\Phi_{m,\beta}) - C_{i\alpha m\beta}\Phi_{i,\alpha}\bar{\Phi}_{m,\beta}-\\
&-B_{i\alpha}(\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\Sigma} + \bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha}\Sigma) - C_{i\alpha}(\Phi_{i,\alpha}\bar{\Sigma} + \bar{\Phi}_{i,\alpha}\Sigma) - A_{i\alpha}(\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,\alpha} + \bar{\Sigma}_{,i}\Sigma_{,\alpha})]dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [i\omega d_{i\alpha}(\Lambda\bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha} - \bar{\Lambda}\mathcal{U}_{i,\alpha}) + i\omega e_{i\alpha}(\Lambda\bar{\Phi}_{i,\alpha} - \bar{\Lambda}\Phi_{i,\alpha})]dA+\\
&+\int\limits_{D(x_3)} i\omega m(\Lambda_{,3}\bar{\Sigma} - \bar{\Lambda}_{,3}\Sigma)dA = 0.
\end{aligned}
\tag{4.2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[A_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+B_{3j}\bar{\Sigma}+id_{3j}\bar{\Lambda}]U_j\right\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+B_{3jmn}\Phi_{n,m}+B_{3j}\Sigma-id_{3j}\Lambda]\bar{U}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+C_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega e_{3j}\bar{\Lambda}]\Phi_j\right\}dA-\\
&-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+C_{3jmn}\Phi_{n,m}+C_{3j}\Sigma-i\omega e_{3j}\Lambda]\bar{\Phi}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}(A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})\Sigma dA-\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}(A_{3j}\Sigma_{,j})\bar{\Sigma}dA=\\
&=\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{\theta_0}K_{3j}(\bar{\Lambda}\Lambda_{,j}-\Lambda\bar{\Lambda}_{,j})dA+\int\limits_{D(x_3)}[B_{ij}(\bar{\Sigma}\mathcal{U}_{j,i}-\Sigma\bar{\mathcal{U}}_{j,i})+\\
&+C_{ij}(\bar{\Sigma}\Phi_{i,j}-\Sigma\bar{\Phi}_{i,j})-i\omega m(\bar{\Sigma}\Lambda+\Sigma\bar{\Lambda})]dA.
\end{aligned}
\tag{4.2.25}
$$

Următorul rezultat constituie prima aproximare care descrie comportamentul spațial al soluției.

Teorema 4.2.4 *Dacă $(U_i,\Phi_i,\Sigma,\Lambda)$ este o soluție a problemei la limită, reprezentată prin ecuațiile (4.2.14)-(4.2.16), este îndeplinită următoarea egalitate:*

$$
\begin{aligned}
&2\int\limits_{D(x_3)}[A_{ijmn}\mathcal{U}_{j,i}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+B_{ijmn}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Phi}_{n,m}+\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Phi_{n,m})+C_{ijmn}\Phi_{n,m}\bar{\Phi}_{j,i}+A_{ij}\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,j}-\\
&-\omega^2(\rho U_i\bar{U}_i+I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j+\rho k\Sigma\bar{\Sigma}+\frac{c}{\theta_0}\Lambda\bar{\Lambda})+\frac{1}{\theta_0}K_{ij}\Lambda_{,i}\bar{\Lambda}_{,j}+\\
&+i\omega d_{ij}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Lambda}-\bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Lambda)+i\omega e_{ij}(\bar{\Lambda}\Phi_{i,j}-\Lambda\bar{\Phi}_{i,j})]dA+\\
&+\int\limits_{D(x_3)}[B_{ij}(\Sigma\bar{\mathcal{U}}_{j,i}+\bar{\Sigma}\mathcal{U}_{j,i})+C_{ij}(\Sigma\bar{\Phi}_{i,j}+\bar{\Sigma}\Phi_{i,j})+i\omega m(\Sigma\bar{\Lambda}-\bar{\Sigma}\Lambda)]dA=\\
&=\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+B_{3jmn}\Phi_{n,m}+B_{3j}\Sigma-i\omega d_{3j}\Lambda]\bar{U}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[A_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+B_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega d_{3j}\bar{\Lambda}]U_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m}+C_{3jmn}\Phi_{n,m}+C_{3j}\Sigma-i\omega e_{3j}\Lambda]\bar{\Phi}_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\left\{[B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m}+C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m}+C_{3j}\bar{\Sigma}+i\omega e_{3j}\bar{\Lambda}]\Phi_j\right\}dA+\\
&+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}[(A_{3j}\Sigma_{,j})\bar{\Sigma}+(A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})\Sigma]dA+\frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)}\frac{1}{\theta_0}K_{3j}(\bar{\Lambda}\Lambda_{,j}+\Lambda\bar{\Lambda}_{,j})dA.
\end{aligned}
\tag{4.2.26}
$$

Teorema care urmează va stabili o altă estimare „a priori”.

Teorema 4.2.5 *Dacă $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$ este o soluție a problemei la limită constând în ecuațiile (4.2.14)-(4.2.16), este îndeplinită următoarea egalitate:*

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{D(x_3)} [A_{ijmn}\mathcal{U}_{j,i}\bar{\mathcal{U}}_{n,m} + B_{ijmn}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Phi}_{n,m} + \bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Phi_{n,m}) + C_{ijmn}\Phi_{i,j}\bar{\Phi}_{n,m} + A_{ij}\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,j} + \\
&+ \frac{1}{\theta_0}K_{ij}\Lambda_{,i}\bar{\Lambda}_{,j} + \omega^2(\rho U_i\bar{U}_i + I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j + \rho k\Sigma\bar{\Sigma} + \frac{c}{\theta_0}\Lambda\bar{\Lambda})]dA - \\
&- \int\limits_{\partial D(x_3)} x_p n_p \bigg(A_{i\alpha m\beta}n_\alpha n_\beta \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n}\frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_m}{\partial n} + 2B_{i\alpha m\beta}n_\alpha n_\beta \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n}\frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial n} + \\
&+ C_{i\alpha m\beta}n_\alpha n_\beta \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial n} + A_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta \frac{\partial \Sigma}{\partial n}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial n}\bigg)ds - \int\limits_{\partial D(x_3)} x_p n_p K_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta \frac{\partial \Lambda}{\partial n}\frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial n}ds = \\
&= \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m} + B_{3jmn}\Phi_{n,m} + B_{3j}\Sigma - i\omega d_{3j}\Lambda)(\bar{U}_j + x_p\bar{U}_{j,p}) + \\
&+ (A_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m} + B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m} + B_{3j}\bar{\Sigma} + i\omega d_{3j}\bar{\Lambda})(U_j + x_p U_{j,p})]dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m} + C_{3jmn}\Phi_{n,m} + C_{3j}\Sigma - i\omega e_{3j}\Lambda)(\bar{\Phi}_j + x_p\bar{\Phi}_{j,p}) + \\
&+ (B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m} + C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m} + C_{3j}\bar{\Sigma} + i\omega e_{3j}\bar{\Lambda})(\Phi_j + x_p\Phi_{j,p})]dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} [(A_{3j}\Sigma_{,j})(\bar{\Sigma} + x_p\bar{\Sigma}_{,p}) + (A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})(\Sigma + x_p\Sigma_{,p})]dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \frac{1}{\theta_0}[K_{33}(\Lambda_{,3}\bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}_{,3}\Lambda) + K_{3\alpha}(\Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}_{,\alpha}\Lambda)]dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \frac{x_\alpha}{\theta_0}[K_{3\beta}(\Lambda_{,\beta}\bar{\Lambda}_{,\alpha} + \bar{\Lambda}_{,\beta}\Lambda_{,\alpha}) + K_{33}(\Lambda_{,3}\bar{\Lambda}_{,\alpha} + \bar{\Lambda}_{,3}\Lambda_{,\alpha})]dA - \\
&- \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \{x_3[A_{i3m3}\mathcal{U}_{i,3}\bar{\mathcal{U}}_{m,3} + B_{i3m3}(\mathcal{U}_{i,3}\bar{\Phi}_{m,3} + \bar{\mathcal{U}}_{i,3}\Phi_{m,3}) + C_{i3m3}\Phi_{i,3}\bar{\Phi}_{m,3} + A_{33}\Sigma_{,3}\bar{\Sigma}_{,3}] + \\
&+ x_3[A_{i\alpha m\beta}\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\mathcal{U}}_{m,\beta} + B_{i\alpha m\beta}(\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\Phi}_{m,\beta} + \bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha}\Phi_{m,\beta}) + C_{i\alpha m\beta}\Phi_{i,\alpha}\bar{\Phi}_{m,\beta} + A_{\alpha\beta}\Sigma_{,\alpha}\bar{\Sigma}_{,\beta}] \\
&+ x_3 i\omega[D_{i\alpha}(T\bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha} - \bar{T}\mathcal{U}_{i,\alpha}) + E_{i\alpha}(T\bar{\Phi}_{i,\alpha} - \bar{T}\Phi_{i,\alpha}) + (\Sigma\bar{\Lambda} - \bar{\Sigma}\Lambda)]\}dA \\
&+ \frac{d}{dx_3}\int\limits_{D(x_3)} \left[\frac{x_3}{\theta_0}(K_{33}\Lambda_{,3}\bar{\Lambda}_{,3} - K_{\alpha\beta}\Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda}_{,\beta}) + x_3\omega^2(\rho U_i\bar{U}_i + I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j + \rho k\Sigma\bar{\Sigma} + \frac{c}{\theta_0}\Lambda\bar{\Lambda})\right]dA.
\end{aligned}
\tag{4.2.27}
$$

Relația (4.2.27) va constitui fundamentul deducerii concluziilor privind comportamentul spațial al amplitudinii $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$, iar pentru acuratețe, se vor face presupunerile ca tensorii termoelasticității micropolare să satisfacă ipotezele frecvente ale mecanicii continue, și anume, să satisfacă condițiile de elipticitate tare:

$$
\begin{aligned}
A_{ijmn}x_i x_m y_i y_n &> 0, \\
B_{ijmn}x_i x_m y_i y_n &> 0, \\
C_{ijmn}x_i x_m y_i y_n &> 0,
\end{aligned}
\tag{4.2.28}
$$

pentru toți vectorii nenuli $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$, iar căldura specifică c, coeficienții A_{ij} și componentele tensorului conductivității K_{ij} să satisfacă condițiile

$$\begin{aligned} &c > 0, \\ &A_{ij}x_i x_j > 0, \\ &K_{ij}x_i x_j > 0, \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

pentru toți vectorii nenuli (x_1, x_2, x_3).

Curba ∂D fiind presupusă a fi regulată, există $s_0 > 0$, astfel încât $0 < s_0 \leq x_p n_p$.

Vor fi îndeplinite următoarele inegalități:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int\limits_{\partial D(x_3)} x_p n_p \Big(& A_{i\alpha m\beta} n_\alpha n_\beta \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_m}{\partial n} + 2B_{i\alpha m\beta} n_\alpha n_\beta \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial n} + C_{i\alpha m\beta} n_\alpha n_\beta \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial n} + \\ & + A_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{\partial \Sigma}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial n} \Big) ds \leq MC \int\limits_{\partial D(x_3)} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_i}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n} + \frac{\partial \Sigma}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial n} \right) ds, \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

unde

$$\begin{aligned} &M = \sup_{(x_1,x_2)\in\partial D} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}, \\ &C = (A_{i\alpha m\beta} A_{i\alpha m\beta} + 2B_{i\alpha m\beta} B_{i\alpha m\beta} + C_{i\alpha m\beta} C_{i\alpha m\beta} + A_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

În același timp, sunt îndeplinite și inegalitățile referitoare la tensorul conductivității K_{ij}, și anume:

$$0 \leq \int\limits_{\partial D(x_3)} \frac{1}{\theta_0} x_p n_p K_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{\partial \Lambda}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial n} ds \leq \frac{MK}{\theta_0} \int\limits_{\partial D(x_3)} \frac{\partial \Lambda}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial n} ds, \tag{4.2.32}$$

unde M este definit de relația (4.2.31)$_1$, iar

$$K = (K_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.33}$$

În cele ce urmează, se introduc cantitățile m_0, m_1, ω_0^* și ω_1^* astfel

$$m_0 = \max_{x_3\in[0,L]} \frac{\int\limits_{\partial D(x_3)} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_i}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n} + \frac{\partial \Sigma}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial n} \right) ds}{\int\limits_{D(x_3)} (U_i \bar{U}_i + \Phi_i \bar{\Phi}_i + \Sigma \bar{\Sigma}) dA}, \tag{4.2.34}$$

$$m_1 = \max_{x_3\in[0,L]} \frac{\int\limits_{\partial D(x_3)} \frac{\partial \Lambda}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial n} ds}{\int\limits_{D(x_3)} \Lambda \bar{\Lambda} dA}, \tag{4.2.35}$$

$$\omega^* = \frac{1}{\rho} MCm_0, \tag{4.2.36}$$

$$\omega_1^* = \frac{1}{c} MKm_1. \tag{4.2.37}$$

Se presupune că

$$\omega > \omega^* = \max\{\omega_0^*, \omega_1^*\}, \tag{4.2.38}$$

$$m \le m_0^*, \quad m_1 \le m_1^*, \tag{4.2.39}$$

unde

$$m_0^* = \max \frac{\int\limits_{\partial D(x_3)} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_i}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n} + \frac{\partial \Sigma}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial n} \right) ds}{\int\limits_{D(x_3)} (U_i \bar{U}_i + \Phi_i \bar{\Phi}_i + \Sigma \bar{\Sigma}) dA}, \tag{4.2.40}$$

$$m_1 = \max_{\Lambda \in H_0^1(D)} \frac{\int\limits_{\partial D(x_3)} \frac{\partial \Lambda}{\partial n} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial n} ds}{\int\limits_{D(x_3)} \Lambda \bar{\Lambda} dA}. \tag{4.2.41}$$

Pentru expresia lui m_0^*, reprezentat de relația (4.2.40), maximul este calculat pentru $U_i \in H_0^1(D), \Phi_i \in H_0^1(D)$ și $\Sigma \in H_0^1(D)$, $H_0^1(D)$ fiind spațiul Sobolev uzual, determinând astfel o valoare critică pentru frecvența vibrațiilor, prezentată în cele ce urmează

$$\omega^* = \max \left\{ \frac{1}{\rho} M C m_0^*, \frac{1}{c} M K m_1^* \right\}. \tag{4.2.42}$$

Pentru estimarea comportamentului spațial al amplitudinii $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$, se utilizează următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} [(A_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m} + B_{3jmn}\Phi_{n,m} + B_{3j}\Sigma - i\omega d_{3j}\Lambda)(\bar{U}_j + x_p \bar{U}_{j,p}) + \\
&+ (A_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m} + B_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m} + B_{3j}\bar{\Sigma} + i\omega d_{3j}\bar{\Lambda})(U_j + x_p U_{j,p})] dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} [(B_{3jmn}\mathcal{U}_{n,m} + C_{3jmn}\Phi_{n,m} + C_{3j}\Sigma - i\omega e_{3j}\Lambda)(\bar{\Phi}_j + x_p \bar{\Phi}_{j,p}) + \\
&+ (B_{3jmn}\bar{\mathcal{U}}_{n,m} + C_{3jmn}\bar{\Phi}_{n,m} + C_{3j}\bar{\Sigma} + i\omega e_{3j}\bar{\Lambda})(\Phi_j + x_p \Phi_{j,p})] dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} [(A_{3j}\Sigma_{,j})(\bar{\Sigma} + x_p \bar{\Sigma}_{,p}) + (A_{3j}\bar{\Sigma}_{,j})(\Sigma + x_p \Sigma_{,p})] dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \frac{1}{\theta_0} [K_{33}(\Lambda_{,3}\bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}_{,3}\Lambda) + K_{3\alpha}(\Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda} + \bar{\Lambda}_{,\alpha}\Lambda)] dA + \\
&+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \frac{x_\alpha}{\theta_0} [K_{3\beta}(\Lambda_{,\beta}\bar{\Lambda}_{,\alpha} + \bar{\Lambda}_{,\beta}\Lambda_{,\alpha}) + K_{33}(\Lambda_{,3}\bar{\Lambda}_{,\alpha} + \bar{\Lambda}_{,3}\Lambda_{,\alpha})] dA - \\
&- \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \{x_3 [A_{i3m3}\mathcal{U}_{i,3}\bar{\mathcal{U}}_{m,3} + B_{i3m3}(\mathcal{U}_{i,3}\bar{\Phi}_{m,3} + \bar{\mathcal{U}}_{i,3}\Phi_{m,3}) + C_{i3m3}\Phi_{i,3}\bar{\Phi}_{m,3} + A_{33}\Sigma_{,3}\bar{\Sigma}_{,3}] + \\
&+ x_3 [A_{i\alpha m\beta}\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\mathcal{U}}_{m,\beta} + B_{i\alpha m\beta}(\mathcal{U}_{i,\alpha}\bar{\Phi}_{m,\beta} + \bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha}\Phi_{m,\beta}) + C_{i\alpha m\beta}\Phi_{i,\alpha}\bar{\Phi}_{m,\beta} + A_{\alpha\beta}\Sigma_{,\alpha}\bar{\Sigma}_{,\beta}] + \\
&+ x_3 i\omega [D_{i\alpha}(T\bar{\mathcal{U}}_{i,\alpha} - \bar{T}\mathcal{U}_{i,\alpha}) + E_{i\alpha}(T\bar{\Phi}_{i,\alpha} - \bar{T}\Phi_{i,\alpha}) + (\Sigma\bar{\Lambda} - \bar{\Sigma}\Lambda)]\} dA \\
&+ \frac{d}{dx_3} \int\limits_{D(x_3)} \left[\frac{x_3}{\theta_0}(K_{33}\Lambda_{,3}\bar{\Lambda}_{,3} - K_{\alpha\beta}\Lambda_{,\alpha}\bar{\Lambda}_{,\beta}) + x_3\omega^2(\rho U_i\bar{U}_i + I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j + \rho k \Sigma\bar{\Sigma} + \frac{c}{\theta_0}\Lambda\bar{\Lambda}) \right] dA \ge \\
&\ge \int\limits_{D(x_3)} [A_{ijmn}\mathcal{U}_{j,i}\bar{\mathcal{U}}_{n,m} + B_{ijmn}(\mathcal{U}_{j,i}\bar{\Phi}_{n,m} + \bar{\mathcal{U}}_{j,i}\Phi_{n,m}) + C_{ijmn}\Phi_{i,j}\bar{\Phi}_{n,m} + A_{ij}\Sigma_{,i}\bar{\Sigma}_{,j} + \\
&+ \frac{1}{\theta_0} K_{ij}\Lambda_{,i}\bar{\Lambda}_{,j} + \omega^2(\rho U_i\bar{U}_i + I_{ij}\Phi_i\bar{\Phi}_j + \rho k\Sigma\bar{\Sigma} + \frac{c}{\theta_0}\Lambda\bar{\Lambda})] dA.
\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

Relația (4.2.43) reprezintă o estimare a comportamentului spațial al amplitudinii $(U_i, \Phi_i, \Sigma, \Lambda)$.

4.2.5 Concluzii

Studiul evoluției spațiale a vibrațiilor armonice în timp, asociate mediilor micropolare poroase, este realizat, pe parcursul acestei secțiuni, într-o manieră deosebită de estimările clasice de tip Saint-Venant, fiind constituit doar pe baza condițiilor de elipticitate tare a coeficienților termoelastici.

Rezultatele principale obținute sunt reprezentate de estimări ale amplitudinii vibrațiilor armonice, inclusiv ale celor care derivă din influența distanței față de baza perturbată, ținând cont de o valoare critică a frecvenței vibrațiilor.

4.3 Termoelasticitatea mediilor micropolare poroase, sub influența derivatei fracționare

4.3.1 Preliminarii

Acest subcapitol are ca subiect studierea termoelasticității mediilor micropolare poroase, prin utilizarea derivatei fracționare Caputo, cu scopul determinării unor ecuații de bază ale teoriei termoelasticității liniare a mediilor menționate mai sus, alături de o relație de reciprocitate. Determinarea formei ecuațiilor constitutive, folosite în studiul reciprocității, precum și a ecuației non-Fourier a căldurii, în contextul termoelasticității generalizate, cu deformație de ordin fracționar, situează față în față, teoria studiată în prezentul subcapitol și teoria clasică, analizând atât aspectele comune celor două teorii, precum și avantajele includerii influenței derivatei fracționare în înțelegerea comportamentului acestor medii.

Teoria micropolară este adecvată studierii mediilor cu microstructură, constituind o formă simplificată a teoriei micromorfe, un exemplu al simplificării fiind reprezentat de micșorarea numărului de constante care caracterizează ecuațiile constitutive.

Rezultatele prezentate pe parcursul acestei secțiuni se bazează pe cele publicate în: **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: Micropolar Thermoelasticity with Voids Using Fractional Order Strain. In: Flaut Cristina, Hošková-Mayerová Šárka, Flaut Daniel (eds.) Models and Theories in Social Systems **179**, 133-147. Springer, Cham (2018), https://doi.org/10.1007/978-3-030-00084-4_7, indexat BDI, vezi [25].

4.3.2 Notații și ecuații fundamentale

Se consideră o regiune deschisă, din spațiul tridimensional Euclidian $\mathbb{R}^3$, căreia îi corespunde un mediu termoelastic, micropolar, poros, anizotrop. Alături de aceste notații, conform celor prezentate în subcapitolul 4.2.2, vectorul deplasare $u = (u_i)_{1\leq i\leq 3}$, vectorul microrotație $\varphi = (\varphi_i)_{1\leq i\leq 3}$, fracțiunea de volum ν corespunzătoare golurilor, precum și variația de temperatură a mediului față de temperatura absolută T_0, din configurația de referință, $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$, vor caracteriza comportamentul unui mediu termoelastic micropolar, cu goluri.

Ecuațiile fundamentale, corespunzătoare teoriei liniare a termoelasticității mediilor micropolare poroase, sunt prezentate în cele ce urmează:

- ecuațiile geometrice (4.2.1), care exprimă tensorii $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$ și vectorul υ_i, reprezentând caracteristicile cinematice ale deformării,
- ecuațiile de mișcare (4.2.2),
- ecuațiile forțelor de echilibru, în forma

$$\lambda_{i,i} + \xi + \rho\ell = \rho k\ddot{\nu}, \text{ în } \mathcal{D}\times(0,\infty), \tag{4.3.1}$$

- ecuația energiei, în forma

$$\rho T\dot{\eta} = q_{i,i} + \rho r, \tag{4.3.2}$$

unde ξ este sarcina internă de echilibru, celelalte notații utilizate în ecuațiile anterioare fiind prezentate în subcapitolul 4.2.2.

Alături de aceste ecuații, se consideră atât condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u_i(x,0) &= u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0) &= u_i^1(x), \quad x \in \bar{\mathcal{D}},\\ \varphi_i(x,0) &= \varphi_i^0(x), & \dot{\varphi}_i(x,0) &= \varphi_i^1(x), \quad x \in \bar{\mathcal{D}},\\ \nu(x,0)V &= \nu^0(x), & \dot{\nu}(x,0) &= \nu^1(x), \quad x \in \bar{\mathcal{D}},\\ \theta(x,0) &= \theta^0(x), & \dot{\theta}(x,0) &= \theta^1(x), \quad x \in \bar{\mathcal{D}},\\ \eta(x,0) &= \eta^0(x), \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

precum și condițiile la limită care urmează

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= \widetilde{u}_i, \quad (x,t) \in \partial\mathcal{D}_u \times (0,\infty),\\ \varphi_i(x,t) &= \widetilde{\varphi}_i, \quad (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\varphi \times (0,\infty),\\ \nu(x,t) &= \widetilde{\nu}, \quad (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\nu \times (0,\infty),\\ \theta(x,t) &= \widetilde{\theta}, \quad (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\theta \times (0,\infty),\\ t_i(x,s) &= t_{ji}(x,s)n_j(x) = \widetilde{t}_i, \ (x,t) \in \partial\mathcal{D}_u^c \times (0,\infty),\\ m_i(x,s) &= m_{ji}(x,s)n_j(x) = \widetilde{m}_i, \ (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\varphi^c \times (0,\infty),\\ \lambda(x,s) &= \lambda_i(x,s)n_i(x) = \widetilde{\lambda}, \ (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\nu^c \times (0,\infty),\\ q(x,s) &= q_i(x,s)n_i(x) = \widetilde{q}_i, \ (x,t) \in \partial\mathcal{D}_\theta^c \times (0,\infty), \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

unde $\partial\mathcal{D}_u, \partial\mathcal{D}_\varphi, \partial\mathcal{D}_\nu, \partial\mathcal{D}_\theta$, respectiv complementele lor $\partial\mathcal{D}_u^c, \partial\mathcal{D}_\varphi^c, \partial\mathcal{D}_\nu^c$ și $\partial\mathcal{D}_\theta^c$, sunt submulțimi ale suprafeței $\partial\mathcal{D}$, astfel încât

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{D}_u \cup \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cup \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\nu \cup \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\mathcal{D}_\theta \cup \partial\mathcal{D}_\theta^c = \partial\mathcal{D},\\ \partial\mathcal{D}_u \cap \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cap \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\nu \cap \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\mathcal{D}_\theta \cap \partial\mathcal{D}_\theta^c = \emptyset, \end{aligned}$$

iar n_i sunt componentele normalei unitare exterioare la suprafața $\partial\mathcal{D}$.

Se presupune că:

(i) $u_i^0, u_i^1, \varphi_i^0, \varphi_i^1, \nu^0, \nu^1, \theta^0, \theta^1$ și η^0 sunt funcții continue, prescrise pe $\bar{\mathcal{D}}$;
(ii) $\widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\nu}$ și $\widetilde{\theta}$ sunt funcții continue, prescrise pe domeniul lor de definiție;
(iii) $\widetilde{t}_i, \widetilde{m}_i, \widetilde{\lambda}$ și $\widetilde{q}$ sunt funcții prescrise, regulate pe domeniul lor de definiție și continue în raport cu variabila timp.

Prima Lege a termodinamicii are următoarea formă, vezi [4, 76],

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}} (\rho\dot{u}_i\ddot{u}_i + I_{ij}\dot{\varphi}_i\ddot{\varphi}_i + \rho k\dot{\nu}\ddot{\nu} + \rho\dot{e})dV =\\ &= \int_{\mathcal{D}} \rho(f_i\dot{u}_i + g_i\dot{\varphi}_i + \ell\dot{\nu} + r)dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (t_i\dot{u}_i + m_i\dot{\varphi}_i + \lambda\dot{\nu} + q)dA. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

În cele ce urmează, vor fi folosite ecuațiile de conducție a căldurii introduse de Cattaneo, vezi [12]. Acesta a sesizat problema paradoxului ecuației căldurii, constând în tipul parabolic al respectivei ecuații ca rezultat al propagării semnalelor termice la viteză infinită, în contradicție cu rezultatele experimentelor practice, solicitând modificări ale modelului Fourier, vezi [71], în forma care urmează

$$q_i = -K_{ij}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} - \tau_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\right), \tag{4.3.6}$$

unde K_{ij} sunt componentele tensorului conductivității termice, iar τ_0 este un scalar pozitiv, denumit timpul de relaxare termică a mediului conducător de căldură. Ecuația a fost modificată ulterior, cu presupunerea că operatorul $\tau_0\left(\frac{d}{dt}\right)$ poate fi exprimat prin

$$\left(1-\tau_0\frac{d}{dt}\right)^{-1}\approx 1+\tau_0\frac{d}{dt}. \tag{4.3.7}$$

Folosind precedenta aproximare, modelul Fourier al ecuației pentru transferul de căldură în regim tranzitoriu se transformă în ecuația care îi poartă numele, ecuația Cattaneo a căldurii, vezi [12, 58], și anume

$$q_i+\tau_0\dot{q}_i=-K_{ij}T_{,j},\quad i,j=1,2,3. \tag{4.3.8}$$

Cu scopul de a obține relațiile de bază ale teoriei liniare a termoelasticității mediilor dipolare cu goluri, în contextul deformației de ordin fracționar, va fi folosită derivata fracționară Caputo de ordin α, vezi [9, 10], dată de

$$D_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds,\ 0\le\alpha\le1, \tag{4.3.9}$$

în precedenta relație $\Gamma(\cdot)$ fiind funcția Gamma, iar f presupunând a fi o funcție absolut continuă în raport cu timpul t. Energia liberă Helmholtz Ψ este dată de

$$\Psi=e-T\eta, \tag{4.3.10}$$

unde e și η reprezintă energia internă, respectiv entropia pe unitatea de volum.

4.3.3 Rezultate principale obținute

Studiul termoelasticității mediilor micropolare poroase, prin intermediul fracționalei Caputo, cu scopul determinării ecuațiilor constitutive și utilizarea acestora pentru deducerea unei relații de reciprocitate, precum și a formei ecuației non-Fourier a căldurii, sub influența derivatei de ordin fracționar, reprezintă obiectivul principal al acestei secțiuni, conducând la o comparație între teoria dezvoltată în acest context specific și teoria clasică a termoelasticității mediilor micropolare cu goluri.

4.3.3.1 Ecuațiile constitutive ale termoelasticității generalizate a mediilor micropolare poroase, cu deformație de ordin fracționar

În cele ce urmează, utilizând metoda prezentată în [128], se ține cont de faptul că starea mediului termoelastic este descrisă prin

$$\begin{aligned}\Psi&=\Psi(\widetilde{\varepsilon}_{ij},\gamma_{ij},T,T_{,i},\nu,\nu_{,i}),\\ e&=e(\widetilde{\varepsilon}_{ij},\gamma_{ij},T,T_{,i},\nu,\nu_{,i}),\\ \eta&=\eta(\widetilde{\varepsilon}_{ij},\gamma_{ij},T,T_{,i},\nu,\nu_{,i}),\\ q&=q(\widetilde{\varepsilon}_{ij},\gamma_{ij},T,T_{,i},\nu,\nu_{,i}),\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

unde

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij}=(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{ij}, \tag{4.3.12}$$

iar τ este parametrul de relaxare mecanică, scopul imediat fiind constituit de determinarea derivatei energiei libere în raport cu timpul. Utilizând ecuațiile de mișcare (4.2.2)$_1$ și (4.2.2$_2$), ecuația forțelor de echilibru (4.4.1), principiul conservării energiei (4.3.5), teorema divergenței și energia liberă Helmholtz Ψ, se deduce

$$\begin{aligned}&t_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{\varepsilon}_{ij}}, && m_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ij}}, && \lambda_i=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\nu_{,i}},\\ &\eta=-\frac{\partial\Psi}{\partial T}, && \xi=-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}, && \frac{\partial\Psi}{\partial T_{,i}}=0,\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

și

$$q_{i,i} + \rho r = \rho T \dot{\eta}, \tag{4.3.14}$$

care este, de fapt, ecuația energiei.

Forma energiei libere, urmând [90], considerând cazul în care mediul este liber de tensiuni în configurația sa de referință, cu sarcina internă de echilibru, respectiv rata fluxului, nule, în concordanță cu teoria liniară, este următoarea:

$$\begin{aligned}\rho\Psi(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \gamma_{ij}, \theta, \nu, \upsilon_i) = {} & \frac{1}{2}A_{ijmn}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{mn} + B_{ijmn}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{2}C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + B_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\nu + \\ & + C_{ij}\gamma_{ij}\nu + D_{ijk}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\upsilon_k + E_{ijk}\gamma_{ij}\upsilon_k + \frac{1}{2}A_{ij}\upsilon_i\upsilon_j + d_i\upsilon_i\nu + \frac{1}{2}g\nu^2 - \\ & - \alpha_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\theta - \beta_{ij}\gamma_{ij}\theta - \gamma_i\upsilon_i\theta - m\nu\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 - \frac{1}{2}\omega\dot{\nu}^2.\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

În relația precedentă, $f = -\omega\dot{\nu}$ reprezintă disiparea asociată comportamentului inelastic al golurilor. În ceea ce privește coeficientul ω, alături de coeficientul de inerție k, se impune condiția de a fi nenegativi, pentru a satisface inegalitatea disipației, dedusă din a Doua Lege a Termodinamicii, vezi [30, 90]. Cu referire la coeficienții care apar în relația (4.3.15), aceștia reprezintă funcții care caracterizează mediul, prescrise, și care îndeplinesc următoarele proprietăți de simetrie:

$$A_{ijmn} = A_{mnij}, \quad C_{ijmn} = C_{mnij}, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad I_{ij} = I_{ji}. \tag{4.3.16}$$

Teorema 4.3.1 *Ecuațiile constitutive ale termoelasticității generalizate, cu deformație de ordin fracționar, a mediilor micropolare poroase, sunt date de relațiile*

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijmn}(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + B_{ij}\nu + D_{ijk}\upsilon_k - \alpha_{ij}\theta, \\ m_{ij} &= B_{mnij}(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} + C_{ij}\nu + E_{ijk}\upsilon_k - \beta_{ij}\theta, \\ \lambda_i &= D_{mni}(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{mn} + E_{mni}\gamma_{mn} + A_{ij}\upsilon_i + d_i\nu - \gamma_i\theta, \\ \rho\eta &= \alpha_{ij}(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{ij} + \beta_{ij}\gamma_{ij} + \gamma_i\upsilon_i + m\nu + a\theta, \\ \xi &= -B_{ij}(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{ij} - C_{ij}\gamma_{ij} - d_i\upsilon_i - g\nu - m\theta. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

4.3.3.2 Ecuația non-Fourier a căldurii în contextul termoelasticității generalizate a mediilor micropolare poroase, cu deformație de ordin fracționar

Teorema 4.3.2 *Ecuația non-Fourier a căldurii, în contextul termoelasticității generalizate, cu deformație de ordin fracționar, a mediilor micropolare poroase, este dată de relația*

$$(K_{ij}T_{,j})_{,i} = \rho\left(1+\tau_0\frac{\partial}{\partial t}\right)r+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tau_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)[-\alpha_{ij}T_0(1+\tau^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon_{ij}-\beta_{ij}T_0\gamma_{ij}-\alpha T_0 T-mT_0T-\gamma_i T_0\upsilon_i]. \tag{4.3.18}$$

4.3.3.3 Reciprocitate

Cu scopul simplificării scrierii, urmând modelul din [59], ecuațiile de mișcare se vor scrie sub forma

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + f_i &= \rho\ddot{u}_i, && \text{în } \mathcal{D}\times(0,\infty), \\ m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}t_{jk} + g_i &= I_{ij}\ddot{\varphi}_j, && \text{în } \mathcal{D}\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

ecuația forțelor de echilibru va avea forma

$$\lambda_{i,i} + \xi + \ell = \rho k\ddot{\nu}, \tag{4.3.20}$$

iar ecuația energiei va deveni

$$\rho T\dot{\eta} = q_{i,i} + R, \tag{4.3.21}$$

prin utilizarea notației $R = \rho r$.

Studierea reciprocității va fi dezvoltată prin includerea condițiilor inițiale în ecuațiile fundamentale, vezi [59], care caracterizează teoria termoelasticității mediilor micropolare poroase, cu implicarea derivatei fracționare Caputo, și prin utilizarea produsului de convoluție introdus prin *Definiția 3.2.1*.

Teorema 4.3.3 *Funcțiile u_i, φ_i, ν și η verifică ecuațiile (4.3.19)-(4.3.21) și condițiile inițiale (4.3.3), dacă și numai dacă, următoarele relații sunt îndeplinite*

$$\begin{aligned} h * t_{ji,j} + \mathscr{F}_i &= \rho u_i, \\ h * (m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk}) + \mathscr{G}_i &= I_{ij}\varphi_j, \\ h * (\lambda_{i,i} + \xi) + \mathscr{L} &= \rho k \nu, \qquad (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,\infty), \\ \rho\eta &= \frac{1}{T_0} l * q_{i,i} + \mathscr{W}, \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

unde

$$\begin{aligned} h(t) &= (l * l)(t), \\ l(t) &= 1, \end{aligned} \qquad t \in (0,\infty), \tag{4.3.23}$$

și

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_i &= h * f_i + \rho(t u_i^1 + u_i^0), \\ \mathscr{G}_i &= h * g_i + I_{ij}(t\varphi_j^1 + \varphi_j^0), \\ \mathscr{L} &= h * \ell + \rho k(t\nu^1 + \nu^0), \\ \mathscr{W} &= \frac{1}{T_0} l * R + \rho\eta^0. \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Considerând două sisteme de încărcare $S^{(\delta)}$, care acționează succesiv asupra mediului termoelastic micropolar poros, definite după cum urmează

$$\begin{aligned} S^{(\delta)} = \Big\{ & f_i^{(\delta)}, g_i^{(\delta)}, \ell^{(\delta)}, R^{(\delta)}, \widetilde{u}_i^{(\delta)}, \widetilde{\varphi}_i^{(\delta)}, \widetilde{\nu}^{(\delta)}, \widetilde{t}_i^{(\delta)}, \widetilde{m}_i^{(\delta)}, \widetilde{\lambda}^{(\delta)}, \widetilde{\theta}^{(\delta)}, \\ & \widetilde{q}^{(\delta)}, u_i^{0(\delta)}, u_i^{1(\delta)}, \varphi_i^{0(\delta)}, \varphi_i^{1(\delta)}, \nu^{0(\delta)}, \nu^{1(\delta)}, \theta^{0(\delta)}, \theta^{1(\delta)}, \eta^{0(\delta)} \Big\}, \ \delta = 1,2, \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

se va folosi notația

$$s^{(\delta)} = \{u_i^{(\delta)}, \varphi_i^{(\delta)}, \nu^{(\delta)}, \theta^{(\delta)}\}, \quad \delta = 1,2, \tag{4.3.26}$$

pentru soluțiile problemei mixte, corespunzătoare fiecărui sistem de încărcare $S^{(\delta)}$.

De asemenea, vor fi utilizate

$$\begin{aligned} t_i^{(\delta)} &= t_{ji}^{(\delta)} n_j, \qquad m_i^{(\delta)} = m_{ji}^{(\delta)} n_j, \\ \lambda^{(\delta)} &= \lambda_i^{(\delta)} n_i, \qquad q^{(\delta)} = q_i^{(\delta)} n_i, \\ \mathscr{W} &= \frac{1}{T_0} l * R^{(\delta)} + \rho\eta^{0(\delta)}. \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Lema 4.3.1 *Presupunând că relațiile de simetrie (4.3.16) sunt îndeplinite și considerând funcțiile*

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\delta\beta} = t_{ij}^{(\delta)} * \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(\beta)} + m_{ij}^{(\delta)} * \gamma_{ij}^{(\beta)} + \lambda_i^{(\delta)} * \upsilon_i^{(\beta)} - [\rho\eta^{(\delta)}] * \theta^{(\beta)} - \xi^{(\delta)} * \nu^{(\beta)}, \tag{4.3.28}$$

are loc următoarea relație de simetrie:

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\delta\beta} = \widetilde{\mathscr{E}}_{\beta\delta}, \qquad \delta = 1,2, \ \beta = 1,2. \tag{4.3.29}$$

Reținând rezultatul de simetrie demonstrat anterior și, în același timp, realizând o incursiune în teoria termoelasticității clasice a mediilor micropolare cu goluri, fără influența derivatei fracționare, se concluzionează faptul că demonstrarea unei relații clasice de reciprocitate de tip Betti se bazează, de asemenea, pe o relație de simetrie, prezentată în lema care urmează.

Lema 4.3.2 *Funcțiile $\mathscr{E}_{\delta\beta}$, definite prin relația*

$$\mathscr{E}_{\delta\beta} = t_{ij}^{(\delta)} * \varepsilon_{ij}^{(\beta)} + m_{ij}^{(\delta)} * \gamma_{ij}^{(\beta)} + \lambda_i^{(\delta)} * \upsilon^{(\beta)} - \left[\rho\eta^{(\delta)}\right] * \theta^{(\beta)} - \xi^{(\delta)} * \nu^{(\beta)}, \tag{4.3.30}$$

cu respectarea condițiilor impuse de relațiile de simetrie (4.3.16), verifică următoarea relație de simetrie:

$$\mathscr{E}_{\delta\beta} = \mathscr{E}_{\beta\delta}, \quad \delta = 1, 2, \ \beta = 1, 2. \tag{4.3.31}$$

Realizând o comparație între relațiile (4.3.28) și (4.3.30), respectiv (4.3.29) și (4.3.31), verificate de funcțiile $\widetilde{\mathscr{E}}_{\delta\beta}$ și $\widetilde{\mathscr{E}}_{\beta\delta}$, se observă faptul că derivata fracționară Caputo nu influențează teoria clasică a termoelasticității micropolare poroase, astfel că $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ verifică relația clasică de simetrie (4.3.31).

Folosind această concluzie ca un punct de plecare, se poate exprima $\mathscr{E}_{\delta\beta}$ într-o altă formă, cu utilizarea ecuațiilor geometrice (4.2.1) și a relației $(4.3.22)_4$, după cum urmează

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\delta\beta} = &\left[t_{ij}^{(\delta)} * u_j^{(\beta)} + m_{ij}^{(\delta)} * \varphi_j^{(\beta)} + \lambda_i^{(\delta)} * \nu^{(\beta)} - \left(\frac{1}{T_0} l * q_i^{(\delta)}\right) * \theta^{(\beta)}\right]_{,i} - t_{ij,i}^{(\delta)} * u_j^{(\beta)} - \\ &- \left(m_{ij,i}^{(\delta)} + \varepsilon_{jik} t_{ik}^{(\delta)}\right) * \varphi_j^{(\beta)} - \left(\lambda_{i,i}^{(\delta)} + \xi^{(\delta)}\right) * \nu^{(\beta)} + \left(\frac{1}{T_0} l * q_i^{(\delta)}\right) * \theta_{,i}^{(\beta)} - \mathscr{W}^{(\delta)} * \theta^{(\beta)}.\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

Luând în considerare precedenta relație (4.3.32), alături de faptul că în teoria liniară $q_i = K_{ij}\theta_{,j}$, precum și proprietățile produsului de convoluție, teorema divergenței și relațiile (4.3.22), (4.3.27), se deduce

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} (h * \mathscr{E}_{\delta\beta}) dV = &\int_{\partial\mathcal{D}} h * \left[t_i^{(\delta)} * u_i^{(\beta)} + m_i^{(\delta)} * \varphi_i^{(\beta)} + \lambda^{(\delta)} * \nu^{(\beta)} - \frac{1}{T_0} l * q^{(\delta)} * \theta^{(\beta)}\right] dA + \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left[\mathscr{F}_i^{(\delta)} * u_i^{(\beta)} + \mathscr{G}_i^{(\delta)} * \varphi_i^{(\beta)} + \mathscr{L}^{(\delta)} * \nu^{(\beta)} - h * \mathscr{W}^{(\delta)} * \theta^{(\beta)} - \rho u_i^{(\delta)} * u_i^{(\beta)} - \right. \\ &\left. - I_{ij}\varphi_j^{(\delta)} * \varphi_i^{(\beta)} - \rho k \nu^{(\delta)} * \nu^{(\beta)} + \frac{1}{T_0} h * l * \left(K_{ij}\theta_{,j}^{(\delta)} * \theta_{,i}^{(\beta)}\right)\right] dV,\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

unde

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i^{(\delta)} &= h * f_i^{(\delta)} + \rho(t u_i^{1(\delta)} + u_i^{0(\delta)}), \\ \mathscr{G}_i^{(\delta)} &= h * g_i^{(\delta)} + I_{ij}(t\varphi_j^{1(\delta)} + \varphi_j^{0(\delta)}), \\ \mathscr{L}^{(\delta)} &= h * \ell^{(\delta)} + \rho k(t\nu^{1(\delta)} + \nu^{0(\delta)}), \\ \mathscr{W}^{(\delta)} &= \frac{1}{T_0} l * R^{(\delta)} + \rho\eta^{0(\delta)}.\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Cele prezentate mai sus conduc la concluzia că teorema de reciprocitate a teoriei termoelasticității mediilor micropolare cu goluri, sub influența derivatei fracționare Caputo, coincide de fapt cu teorema de reciprocitate a teoriei clasice a termoelasticității micropolare poroase, conducând astfel la concluzia valabilității teoremei care urmează, în contextul teoriei prezentate pe parcursul acestei secțiuni.

Presupunând că relațiile de simetrie (4.3.16) sunt îndeplinite, $s^{(\delta)}$ este soluția problemei mixte corespunzătoare sistemului extern $S^{(\delta)}, \delta = 1, 2$, iar coeficienții de microinerție I_{ij} și componentele tensorului conductivității termice K_{ij} verifică, de asemenea, proprietatea de simetrie, este îndeplinită următoarea relație de reciprocitate de tip Betti:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}} \left[\mathscr{F}_i^{(1)} * u_i^{(2)} + \mathscr{G}_i^{(1)} * \varphi_i^{(2)} + \mathscr{L}^{(1)} * \nu^{(2)} - h * \mathscr{W}^{(1)} * \theta^{(2)}\right] dV \\
&+ \int_{\partial\mathcal{D}} h * \left[t_i^{(1)} * u_i^{(2)} + m_i^{(1)} * \varphi_i^{(2)} + \lambda^{(1)} * \nu^{(2)} - \frac{1}{T_0} l * q^{(1)} * \theta^{(2)}\right] dA = \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left[\mathscr{F}_i^{(2)} * u_i^{(1)} + \mathscr{G}_i^{(2)} * \varphi_i^{(1)} + \mathscr{L}^{(2)} * \nu^{(1)} - h * \mathscr{W}^{(2)} * \theta^{(1)}\right] dV \\
&+ \int_{\partial\mathcal{D}} h * \left[t_i^{(2)} * u_i^{(1)} + m_i^{(2)} * \varphi_i^{(1)} + \lambda^{(2)} * \nu^{(1)} - \frac{1}{T_0} l * q^{(2)} * \theta^{(1)}\right] dA.
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

4.3.4 Concluzii

Prin deducerea, pe parcursul acestui subcapitol, a unor teoreme aparținând teoriei termoelasticității mediilor micropolare poroase, utilizând derivata fracționară Caputo, se observă că, în ceea ce privește anumite teme, cum ar fi relația de reciprocitate, teoria clasică și cea studiată în această secțiune coincid, relația de reciprocitate fiind îndeplinită în ambele teorii studiate comparativ, așadar există anumite segmente în cadrul cărora cele două teorii se suprapun.

Construirea unui model matematic, ca instrument de analiză a teoriei mai sus menționate, conduce la îmbunătățirea clasicei conexiuni teorie-practică, pentru o mai bună înțelegere a fenomenelor naturale și a mediului care ne înconjoară.

4.4 Studiu asupra mediilor micropolare poroase, cu microtemperaturi

4.4.1 Preliminarii

În acest subcapitol se studiază efectul microtemperaturilor asupra caracteristicilor principale ale problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a mediilor micropolare termoelastice cu goluri. Se specifică faptul că prezența microtemperaturilor permite transmiterea căldurii ca unde termice cu viteză finită.

Scopul acestei secțiuni constă în transformarea problemei mixte, cu date inițiale și la limită, considerată în contextul termoelasticității mediilor micropolare poroase, ale căror microparticule dețin microtemperaturi, într-o ecuație evoluționară, abstractă și temporală, pe un spațiu Hilbert, ales adecvat. Utilizând rezultate ale teoriei semigrupurilor de operatori, se demonstrează existența și unicitatea soluției problemei mixte, precum și dependența continuă a acesteia atât în raport cu datele inițiale, cât și cu încărcările.

La baza rezultatelor prezentate în acest subcapitol se află rezultatele publicate în articolul: Marin, M., **Codarcea, L.**, Chirilă, A.: Qualitative results on mixed problem of micropolar bodies with microtemperatures. Appl. Appl. Math. AAM **12**(2), 776-789 (2017), jurnal indexat ISI, vezi [97].

4.4.2 Notații și ecuații fundamentale

Fie un mediu termoelastic, micropolar, poros, care la momentul t_0 ocupă domeniul $\mathcal{D}$, din spațiul Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, domeniu care este o regiune regulată, având închiderea și frontiera, o suprafață netedă, notate cu $\bar{\mathcal{D}}$, respectiv $\partial\mathcal{D}$. Notațiile din subcapitolul 1.4 vor fi valabile pe parcursul acestei secțiuni, alături de simbolurile îngroșate care reprezintă vectorii, tensorii și matricile.

Variabilele care se utilizează la reprezentarea ecuațiilor care descriu comportamentul unui mediu termoelastic, micropolar, poros, cu microtemperaturi sunt cele din subcapitolul 4.2.2, și anume, vectorul deplasare $u = (u_i)_{1\le i\le 3}$, vectorul microrotație $\varphi = (\varphi_i)_{1\le i\le 3}$, precum și fracțiunea de volum ν aferentă golurilor, alături de cele două noi variabile, α și ζ_i, introduse prin relațiile $(2.2.1)_{1-2}$, cu notațiile corespunzătoare prezentate în secțiunea 2.2.2.

Ecuațiile fundamentale, care descriu manifestarea unui mediu termoelastic, micropolar, poros, cu microtemperaturi, sunt prezentate în cele ce urmează:

- ecuațiile geometrice (4.2.1), care exprimă tensorii $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$, precum și vectorul υ_i, caracteristici deformării, cu notațiile aferente prezentate în secțiunea 4.2.2,
- ecuațiile de mișcare (4.2.2), ale căror notații sunt, de asemenea, cele utilizate, în secțiunea 4.2.2,
- ecuațiile forțelor de echilibru , sub forma

$$\lambda_{i,i} - \xi + \rho\ell = \rho k\ddot{\nu}, \tag{4.4.1}$$

cu notațiile corespunzătoare expuse în secțiunea 4.3.2,
- ecuațiile constitutive, obținute prin aplicarea metodei prezentate de Ieșan și Quintanilla în [62], după cum urmează

$$\begin{aligned}
t_{ij} &= A_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + B_{ij}\nu - a_{ij}\dot{\alpha} + D_{ijmn}\zeta_{m,n},\\
m_{ij} &= B_{ijmn}\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} + C_{ij}\nu - b_{ij}\dot{\alpha} + E_{ijmn}\zeta_{m,n},\\
\lambda_i &= A_{ij}\upsilon_j - d_{ij}\dot{\zeta}_j + H_{ij}\alpha_{,j},\\
\xi &= B_{ij}\varepsilon_{ij} + C_{ij}\gamma_{ij} + \sigma\nu - \hbar\dot{\alpha} + F_{ij}\zeta_{i,j},\\
\rho\eta &= a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\gamma_{ij} + \hbar\nu + a\dot{\alpha} + L_{ij}\zeta_{i,j},\\
\rho\eta_i &= d_{ji}\upsilon_j + D_{ij}\dot{\zeta}_j + E_{ij}\alpha_{,j},\\
r_i &= H_{ji}\upsilon_j - E_{ij}\dot{\zeta}_j + K_{ij}\alpha_{,j},\\
M_{ij} &= D_{ijmn}\varepsilon_{mn} + E_{ijmn}\gamma_{ij} + F_{ji}\nu - L_{ji}\dot{\alpha} + G_{ijmn}\zeta_{m,n},
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

- ecuația energiei, cu forma introdusă prin intermediul relației (2.2.6), cu notațiile aferente din secțiunea 2.2.2,
- ecuațiile suplimentare ale energiei, ca o consecință a prezenței microtemperaturilor, sunt cele reprezentate prin relațiile (2.2.7), cu notațiile corespunzătoare prezentate în secțiunea 2.2.2.

Se menționează faptul că $A_{ijmn},\ B_{ijmn}, \ldots, L_{ji}$ și G_{ijmn} reprezintă coeficienții constitutivi specifici mediului, coeficienți care se supun următoarelor relații de simetrie

$$\begin{array}{ccccc}
A_{ijmn} = A_{mnij}, & C_{ijmn} = C_{mnij}, & A_{ij} = A_{ji}, & B_{ij} = B_{ji}, & C_{ij} = C_{ji},\\
D_{ij} = D_{ji}, & K_{ij} = K_{ji}, & D_{ijmn} = D_{jimn}, & E_{ijmn} = E_{jimn}, & G_{ijmn} = G_{mnij}.
\end{array} \tag{4.4.3}$$

Prin utilizarea ecuațiilor geometrice (4.2.1), a ecuațiilor constitutive (4.4.2), a ecuațiilor de mișcare (4.2.2), a ecuațiilor forțelor de echilibru (4.4.1) și a ecuațiilor suplimentare ale energiei (2.2.7), se obține următorul sistem de ecuații diferențiale, ale cărui necunoscute sunt $u_i, \varphi_i, \nu, \alpha$ și ζ_i :

$$
\begin{aligned}
& A_{ijmn}(u_{m,nj} + \varepsilon_{mnk}\varphi_{k,j}) + B_{ijmn}\varphi_{n,mj} + B_{ij}\nu_{,j} - a_{ij}\dot{\alpha}_{,j} + D_{ijmn}\zeta_{m,nj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \\
& B_{ijmn}(u_{m,nj} + \varepsilon_{mnk}\varphi_{k,j}) + C_{ijmn}\varphi_{n,mj} + C_{ij}\nu_{,j} - b_{ij}\dot{\alpha}_{,j} + E_{ijmn}\zeta_{m,nj} + \\
& + \varepsilon_{ijk}[A_{jkmn}(u_{m,n} + \varepsilon_{mnk}\varphi_k) + B_{jkmn}\varphi_{n,m} + B_{jk}\nu - a_{jk}\dot{\alpha} + D_{jkmn}\zeta_{m,n}] + \rho g_i = I_{ij}\ddot{\varphi}_j, \\
& A_{ij}\nu_{,ij} - d_{ij}\dot{\zeta}_{j,i} + H_{ij}\alpha_{,ij} - B_{ij}(u_{j,i} + \varepsilon_{ijk}\varphi_k) - C_{ij}\varphi_{j,i} - \sigma\nu + \hbar\dot{\alpha} - F_{ij}\zeta_{i,j} + \rho\ell = \rho k\ddot{\nu}, \\
& H_{ji}\nu_{,ij} - G_{ij}\dot{\zeta}_{j,i} + K_{ij}\alpha_{,ij} - a_{ij}(\dot{u}_{j,i} + \varepsilon_{jik}\dot{\varphi}_k) - b_{ij}\dot{\varphi}_{j,i} - \hbar\dot{\nu} - a\ddot{\alpha} = -\rho s, \\
& D_{ijmn}(u_{m,nj} + \varepsilon_{mnk}\varphi_{k,j}) + E_{ijmn}\varphi_{n,mj} + F_{ji}\nu_{,j} - G_{ji}\dot{\alpha}_{,j} + G_{ijmn}\zeta_{m,nj} - d_{ij}\dot{\nu}_{,j} - D_{ij}\ddot{\zeta}_j = \\
& = -\rho \mathcal{M}_i,
\end{aligned}
\tag{4.4.4}
$$

unde $G_{ij} = E_{ij} + L_{ij}$. Ținând cont de problema Dirichlet asociată sistemului de ecuații diferențiale (4.4.4), condițiile pe frontieră au forma

$$
u_i = \widetilde{u}_i,\ \varphi_i = \widetilde{\varphi}_i,\ \nu = \widetilde{\nu},\ \alpha = \widetilde{\alpha},\ \zeta_i = \widetilde{\zeta}_i,\ \text{pe}\ \ \partial\mathcal{D} \times (0, \infty),
\tag{4.4.5}
$$

unde $\widetilde{u}_i,\ \widetilde{\varphi}_i,\ \widetilde{\nu},\ \widetilde{\alpha}$ și $\widetilde{\zeta}_i$ sunt funcții prescrise.

În cazul unei probleme la limită de tip Neumann, condițiile pe frontieră (4.4.5) sunt înlocuite prin

$$
t_{ji}n_j = \widetilde{t}_i, \quad m_{ji}n_j = \widetilde{m}_i, \quad \lambda_i n_i = \widetilde{\lambda}, \quad r_i n_i = \widetilde{r}, \quad M_{ji}n_j = \widetilde{M}_i, \quad \text{pe}\ \partial\mathcal{D} \times (0, \infty),
\tag{4.4.6}
$$

unde funcțiile $\widetilde{t}_i,\ \widetilde{m}_i,\ \widetilde{\lambda},\ \widetilde{r}$ și $\widetilde{M}_i$ sunt, de asemenea, cunoscute.

În cele ce urmează se va face referire doar la cazul problemei Dirichlet.

Problema mixtă, cu date inițiale și la limită, asociată sistemului de ecuații diferențiale (4.4.4), este completă, dacă se consideră condițiile inițiale care urmează

$$
\begin{array}{ll}
u_i(x,0) = u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0) = u_i^1(x), \\
\varphi_i(x,0) = \varphi_i^0(x), & \dot{\varphi}_i(x,0) = \varphi_i^1(x), \\
\nu(x,0) = \nu^0(x), & \dot{\nu}(x,0) = \nu^1(x), \\
\alpha(x,0) = \alpha^0(x), & \dot{\alpha}(x,0) = \alpha^1(x), \\
\zeta_i(x,0) = \zeta_i^0(x), & \dot{\zeta}_i(x,0) = \zeta_i^1(x),
\end{array}
\tag{4.4.7}
$$

pentru orice $x \in \mathcal{D}$. Funcțiile $u_i^0,\ u_i^1,\ \varphi_i^0,\ \varphi_i^1,\ \nu^0,\ \nu^1,\ \alpha^0,\ \alpha^1,\ \zeta_i^0$, și ζ_i^1 sunt funcții prescrise.

4.4.3 Rezultate principale obținute

Pe parcursul acestui subcapitol se studiază atât existența și unicitatea soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, corespunzătoare unui mediu termoelastic micropolar poros, cu microtemperaturi, precum și dependența continuă a soluției, în raport cu datele inițiale și cu încărcările.

În cele ce urmează, se presupune că toate funcțiile care apar în reprezentarea ecuațiilor și condițiilor din secțiunea precedentă 4.4.2 sunt suficient de regulate pe domeniul lor de definiție, pentru a permite efectuarea de operații matematice. Teorema care urmează oferă un rezultat auxiliar, necesar în demonstrarea unicității soluției.

Teorema 4.4.1 *Între variabilele care caracterizează deformația unui mediu termoelastic micropolar poros, cu microtemperaturi, are loc următoarea egalitate*

$$
\begin{aligned}
& t_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\gamma_{ij} + \lambda_i\nu_{,i} + \xi\nu + \rho\eta\dot{\alpha} + \rho\eta_i\dot{\zeta}_i + r_i\alpha_{,i} + M_{ij}\zeta_{i,j} = \\
& A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + 2B_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + 2D_{ijmn}\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n} + \\
& + C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + 2C_{ij}\gamma_{ij}\nu + 2E_{ijmn}\gamma_{ij}\zeta_{m,n} + A_{ij}\nu_{,i}\nu_{,j} + 2H_{ij}\nu_{,i}\alpha_{,j} + \\
& + \sigma\nu^2 + 2F_{ij}\zeta_{i,j}\nu + K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j} + G_{ijmn}\zeta_{m,n}\zeta_{i,j} + a\dot{\alpha}^2 + D_{ij}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_j.
\end{aligned}
\tag{4.4.8}
$$

Pentru energia liberă, se consideră forma pătratică

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{2}[&A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{mn} + 2B_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + 2D_{ijmn}\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n}+\\ &+ C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + 2C_{ij}\gamma_{ij}\nu + 2E_{ijmn}\gamma_{ij}\zeta_{m,n} + A_{ij}\nu_{,i}\nu_{,j} + 2H_{ij}\nu_{,i}\alpha_{,j}+\\ &+ \sigma\nu^2 + 2F_{ij}\zeta_{i,j}\nu + K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j} + G_{ijmn}\zeta_{m,n}\zeta_{i,j}].\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Pentru demonstrarea unicității soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, prezentată în secțiunea precedentă 4.4.2, se impun următoarele ipoteze standard:

(i) $\rho > 0,\ I_{ij} > 0,\ k > 0,\ a > 0;$
(ii) forma pătratică Ψ, reprezentată prin relația (4.4.9), este pozitiv semi-definită;
(iii) coeficienții constitutivi D_{ij} sunt componentele unui tensor pozitiv definit.

Definiție 4.4.1 *Se numește soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a mediilor termoelastice micropolare poroase, cu microtemperaturi, notată cu $\mathcal{P}$, sistemul ordonat $(u_i,\ \varphi_i,\ \nu,\ \alpha,\ \zeta_i)$ care satisface sistemul de ecuații (4.4.4), condițiile inițiale (4.4.7) și condițiile la limită (4.4.5), pentru toți $(x,t) \in \mathcal{D} \times (0,\infty)$.*

Teorema 4.4.2 *Dacă ipotezele standard $(i) - (iii)$ și relațiile de simetrie (4.4.3) sunt îndeplinite, atunci problema mixtă, cu date inițiale și la limită, $\mathcal{P}$, nu poate admite mai mult de o soluție.*

În cele ce urmează, se va demonstra rezultatul privind existența soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, $\mathcal{P}$, în contextul în care condițiile la limită sunt omogene, însemnând că

$$u_i = \varphi_i = \nu = \alpha = \zeta_i = 0,\ \text{pe}\ \partial\mathcal{D} \times (0,\infty). \tag{4.4.10}$$

Complexitatea sistemului de ecuații, precum și a condițiilor care guvernează problema mixtă, impune, ca o necesitate, o altă abordare a problemei referitoare la existența soluției. În acest context, problema mixtă $\mathcal{P}$ se va reduce la o ecuație abstractă de evoluție pe un spațiu Hilbert, ales adecvat. Mențiunile asupra spațiilor Hilbert și Sobolev, specificate în secțiunea 2.2.3, sunt valabile și pe parcursul acestui subcapitol. Folosind spațiile uzuale Hilbert $W_0^{1,2}$ și L^2, se consideră spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ definit prin relația (2.2.17), cu notațiile corespunzătoare specifice din secțiunea 2.2.3.

Pe spațiul $\mathcal{H}$ se definește produsul scalar care urmează

$$\begin{aligned}&< (u_i, v_i, \varphi_i, \Phi_i, \nu, \mu, \alpha, \beta, \zeta_i, \varsigma_i), (u_i', v_i', \varphi_i', \Phi_i', \nu', \mu', \alpha', \beta', \zeta_i', \varsigma_i') >=\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} (\rho v_i v_i' + I_{ij}\Phi_i\Phi_i' + \rho k\mu\mu' + a\beta\beta' + D_{ij}\varsigma_i\varsigma_i')dV+\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} [A_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}' + B_{ijmn}(\varepsilon_{ij}\gamma_{mn}' + \varepsilon_{mn}'\gamma_{mn}) + B_{ij}(\varepsilon_{ij}\nu' + \varepsilon_{ij}'\nu)+\\ &+ D_{ijmn}(\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n}' + \varepsilon_{ij}'\zeta_{m,n}) + C_{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}' + C_{ij}(\gamma_{ij}\nu' + \gamma_{ij}'\nu)+\\ &+ E_{ijmn}(\gamma_{ij}\zeta_{m,n}' + \gamma_{ij}'\zeta_{m,n}) + A_{ij}\nu_{,i}\nu_{,j}' + H_{ij}(\alpha_{,j}\nu_{,i}' + \alpha_{,j}'\nu_{,i}) + \sigma\nu\nu'+\\ &+ F_{ij}(\zeta_{i,j}\nu' + \zeta_{i,j}'\nu) + K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j}' + G_{ijmn}\zeta_{i,j}\zeta_{m,n}']dV.\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Teorema 4.4.3 *Norma indusă de produsul scalar introdus prin relația (4.4.11) este echivalentă cu norma originală din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.*

Urmând metoda prezentată în [113], funcțiile care apar în membru stâng al ecuațiilor care formează sistemul (4.4.4) sugerează introducerea operatorilor care urmează

$$
\begin{aligned}
A_i^1\boldsymbol{u} &= \frac{1}{\rho}A_{ijmn}u_{m,nj}, \quad A_i^2\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\rho}[A_{ijmn}\varepsilon_{mnk}\varphi_{k,j} + B_{ijmn}\varphi_{n,mj}],\\
B_i^1 &= \frac{1}{\rho}B_{ij}\nu_{,j}, \quad C_i^1\beta = -\frac{1}{\rho}a_{ij}\beta_{,j}, \quad D_i^1\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{\rho}D_{ijmn}\zeta_{m,nj},\\
A_i^3\boldsymbol{u} &= (I_{ij})^{-1}(B_{ijmn}u_{m,nj} + \varepsilon_{ijk}A_{jkmn}u_{m,n}),\\
A_s^4\boldsymbol{\varphi} &= W_{si}[A_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnl}\varphi_l + B_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\varphi_{n,m} + C_{ijmn}\varphi_{n,mj}],\\
B_s^2\nu &= W_{si}(C_{ij}\nu_{,j} + B_{jk}\varepsilon_{ijk}\nu), \quad C_s^2\beta = -W_{si}(b_{ij}\beta_{,j} + \varepsilon_{ijk}a_{jk}\beta),\\
D_s^2\boldsymbol{\zeta} &= W_{si}(E_{ijmn}\zeta_{m,nj} + \varepsilon_{ijk}D_{jkmn}\zeta_{m,n}), \quad E\nu = \frac{1}{\rho k}(A_{ij}\nu_{,ij} - \sigma\nu),\\
F\boldsymbol{\varsigma} &= -\frac{1}{\rho k}d_{ij}\varsigma_{j,i}, \quad G\alpha = \frac{1}{\rho k}H_{ij}\alpha_{,ij}, \quad H\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho k}B_{ij}u_{j,i},\\
K\boldsymbol{\varphi} &= -\frac{1}{\rho k}(B_{ij}\varepsilon_{ijk}\varphi_k + C_{ij}\varphi_{j,i}), \quad L\beta = \frac{1}{\rho k}\hbar\beta, \quad M\boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{\rho k}F_{ij}\zeta_{i,j},\\
N\alpha &= \frac{1}{a}K_{ij}\alpha_{,ij}, \quad P\nu = \frac{1}{a}H_{ij}\nu_{,ij}, \quad Q\boldsymbol{\varsigma} = -\frac{1}{a}G_{ij}\varsigma_{j,i}, \quad R^1\boldsymbol{\upsilon} = -\frac{1}{a}a_{ij}\upsilon_{i,j},\\
R^2\boldsymbol{\Phi} &= -\frac{1}{a}(a_{ij}\varepsilon_{ijk}\Phi_k + b_{ij}\Phi_{j,i}), \quad S\mu = -\frac{1}{a}\hbar\mu, \quad A_s^5\boldsymbol{u} = \Lambda_{si}D_{ijmn}u_{m,nj},\\
A_s^6\boldsymbol{\varphi} &= \Lambda_{si}(D_{ijmn}\varepsilon_{mnk}\varphi_{k,j} + E_{ijmn}\varphi_{n,mj}), \quad W_s\nu = \Lambda_{si}F_{ji}\nu_{,j},\\
X_s\beta &= -\Lambda_{si}G_{ij}\beta_{,j}, \quad Y_s\boldsymbol{\zeta} = \Lambda_{si}G_{ijmn}\zeta_{m,nj}, \quad Z_s\mu = -\Lambda_{si}d_{ji}\mu_{,j},
\end{aligned}
\tag{4.4.12}
$$

unde matricele W_{si} și Λ_{si} sunt definite prin intermediul ecuațiilor

$$W_{si}I_{ir} = \delta_{sr} \text{ și } \Lambda_{si}D_{ir} = \delta_{sr},$$

δ_{sr} fiind simbolul lui Kronecker.

Se definește operatorul matriceal $\mathcal{L}$, cu componentele reprezentate de operatorii introduși prin relațiile precedente (4.4.12), cu scopul transformării problemei mixte, cu date inițiale și la limită, într-o problemă Cauchy, relaționată direct cu o ecuație de evoluție, și anume

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{U}}{dt} &= \mathcal{L}\mathcal{U}(t) + \mathcal{F}(t),\\
\mathcal{U}(0) &= \mathcal{U}_0.
\end{aligned}\right. \quad 0 \le t \le t_0, \tag{4.4.13}
$$

Se va considera domeniul de definiție al operatorului $\mathcal{L}$, notat cu $D(\mathcal{L})$, ca fiind mulțimea

$$
\begin{aligned}
D(\mathcal{L}) = (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times\\
\times (W_0^{1,2} \cap W^{2,2}) \times W_0^{1,2} \times (W_0^{1,2} \cap W^{2,2}) \times W_0^{1,2} \times\\
\times (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2},
\end{aligned}
\tag{4.4.14}
$$

$W_0^{1,2}$, $W^{2,2}$, $\boldsymbol{W}_0^{1,2}$, și $\boldsymbol{W}^{2,2}$ fiind spațiile Sobolev cunoscute.

De asemenea, funcția matriceală necunoscută $\mathcal{U}$, cea inițială $\mathcal{U}_0$, precum și matricea de încărcări $\mathcal{F}$ sunt definite prin

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= (u_i, \upsilon_i, \varphi_i, \Phi_i, \nu, \mu, \alpha, \beta, \zeta_i, \varsigma_i),\\
\mathcal{U}_0 &= (u_i^0, \upsilon_i^0, \varphi_i^0, \Phi_i^0, \nu^0, \mu^0, \alpha^0, \beta^0, \zeta_i^0, \varsigma_i^0),\\
\mathcal{F} &= (\mathbf{0}, f_i, \mathbf{0}, g_i, 0, \ell, 0, s, \mathbf{0}, \mathcal{M}_i).
\end{aligned}
\tag{4.4.15}
$$

Necesare demonstrării existenței și caracterizării soluției problemei abstracte (4.4.13), proprietăți ale operatorului $\mathcal{L}$ vor fi demonstrate prin intermediul teoremelor care urmează.

Teorema 4.4.4 *Dacă ipotezele (i) – (iii) și relațiile de simetrie (4.4.3) sunt îndeplinite, atunci operatorul $\mathcal{L}$ este disipativ.*

Teorema 4.4.5 *Dacă atât ipotezele standard (i) – (iii), precum și relațiile de simetrie (4.4.3) sunt satisfăcute, atunci operatorul $\mathcal{L}$ îndeplinește condiția de contraimagine.*

Rezultatele prezentate atât de *Teorema* 4.4.4, precum și de *Teorema* 4.4.5 asigură îndeplinirea, de către operatorul $\mathcal{L}$, a cerințelor Corolarului Lumer-Phillips al cunoscutei teoreme Hille-Yosida, vezi [7, 114, 127].

Teorema 4.4.6 *Dacă ipotezele (i) – (iii), și relațiile de simetrie (4.4.3) sunt îndeplinite, operatorul $\mathcal{L}$ generează un semigrup de contracții pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.*

Teorema 4.4.7 *Dacă ipotezele (i) – (iii), și relațiile de simetrie (4.4.3) sunt satisfăcute, dacă datele inițiale $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$ aparțin domeniului operatorului $\mathcal{L}, \boldsymbol{\mathcal{U}}_0 \in D(\mathcal{L})$, iar încărcările $f_i, g_i, \ell, s, \mathcal{M}_i \in C^1\left([0,\infty), L^2\right) \cap C^0\left([0,\infty), W_0^{1,2}\right)$, atunci problema abstractă (4.4.13) admite o soluție unică*

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(t) \in C^1\left([0,\infty), \mathcal{H}\right).$$

Caracterizarea soluției problemei abstracte (4.4.13) este finalizată prin intermediul unui ultim rezultat referitor la dependența continuă a soluției în raport cu încărcările și datele inițiale, exprimat prin intermediul teoremei care urmează.

Teorema 4.4.8 *Presupunând condițiile Teoremei 4.4.6 îndeplinite, soluția $\boldsymbol{\mathcal{U}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}, \nu, \alpha, \boldsymbol{\zeta})$, a problemei reprezentată prin relațiile (4.4.13),depinde continuu de datele inițiale $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$ și de încărcările f_i, g_i, ℓ, s și $\mathcal{M}_i$, astfel încât*

$$|\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)| \leq |\boldsymbol{\mathcal{U}}_0| + \int_0^t \|(f_i, g_i, \ell, s, \mathcal{M}_i)\| ds.$$

4.4.4 Concluzii

Studierea comportamentului mediilor actuale, mult mai evoluate din punctul de vedere al tehnologiei de fabricație, prin considerarea, pentru o mai mare exactitate, a microtemperaturii, alături de structura lor internă, are efect asupra ecuațiilor și condițiilor care caracterizează teoria termoelasticității în acest context, conducând la creșterea gradului acestora de dificultate.

Numărul crescut atât al necunoscutelor, precum și al condițiilor, conduce la concluzia că teoria semigrupurilor de operatori, datorită flexibilității sale, este foarte adecvată în scopul obținerii concluziilor referitoare la existența, unicitatea și dependența continuă a soluției față de datele inițiale și de încărcări.

4.5 O generalizare a principiului de minim al energiei pentru mediile Cosserat poroase

4.5.1 Preliminarii

Scopul principal al prezentului subcapitol este reprezentat de extinderea, asupra mediilor Cosserat poroase, a principiului de minim al energiei, prezentat de Ieșan și Quintanilla pentru mediile elastice cu microstructură, vezi [61].

Conform prezentării realizate de Dow în [31], principiul de minim al energiei potențiale oferă atât forme variaționale, precum și diferențiale, pentru ecuațiile care guvernează descrierea fenomenelor fizice, iar funcționalele, ca expresii ale energiei deformării, nu pot fi minimizate prin utilizarea procedurilor specifice calculului diferențial, ci prin intermediul tehnicilor aferente calculului variațional, care furnizează metode de determinare a valorilor extreme ale acestor funcționale. În [117], Reiss prezintă două principii de minim, care iau în considerare condițiile inițiale neomogene, în contextul teoriei liniare a elastodinamicii.

Rezultatele prezentate în această secțiune se bazează pe cele publicate în articolul Marin, M., Vlase, S., **Codarcea-Munteanu, L.**, Chirilă, A.: A generalization of the minimum principle energy for Cosserat porous materials. Acta Tech. Napocensis, Ser. Appl. Math. Mech. Eng. **60**(IV), 479-484 (2017), jurnal indexat ISI, vezi [96].

4.5.2 Notații și ecuații fundamentale

Se consideră un mediu elastic Cosserat, anizotrop și omogen, cu goluri, care ocupă domeniul mărginit $\mathcal{D}$, din spațiul Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, cu frontiera $\partial\mathcal{D}$, de clasă $C^{1,1}$ și cu închiderea $\bar{\mathcal{D}}$. Alături de aceste notații vor fi utilizate și cele prezentate în secțiunea 1.4.

Variabilele folosite în reprezentarea ecuațiilor fundamentale, care descriu comportamentul unui mediu elastic Cosserat poros, sunt (u_i, φ_i, ν), u_i reprezentând componentele vectorului deplasare, φ_i componentele vectorului microrotație, iar ν, fracțiunea de volum relaționată golurilor.

În axiomatizarea elastostaticii clasice, se consideră următoarele ecuații și condiții fundamentale, vezi [47], care caracterizează comportamentul, independent de timp, al unui mediu elastic prezentat mai sus:

- ecuațiile geometrice, exprimând caracteristicile cinematice ale deformării, reprezentând expresiile tensorilor $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$, precum și a vectorului υ_i, formulate sub forma relațiilor (4.2.1),
- ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + f_i &= 0, \\ m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + g_i &= 0, \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

- ecuația forțelor de echilibru, în forma

$$\lambda_{i,i} - \xi + \ell = 0, \tag{4.5.2}$$

- ecuațiile constitutive

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijmn}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\gamma_{mn} + D_{ijm}\upsilon_m + a_{ij}\nu, \\ m_{ij} &= B_{mnij}\varepsilon_{mn} + C_{ijmn}\gamma_{mn} + E_{ijm}\upsilon_m + b_{ij}\nu, \\ \lambda_i &= D_{mni}\varepsilon_{mn} + E_{mni}\gamma_{mn} + g_{im}\upsilon_m + d_i\nu, \\ \xi &= a_{mn}\varepsilon_{mn} + b_{mn}\gamma_{mn} + d_m\upsilon_m + m\nu, \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

ecuațiile de mai sus fiind considerate pe domeniul $\mathcal{D}$. Notațiile utilizate în cadrul acestor ecuații sunt cele prezentate în secțiunea 4.2.2, alături de ℓ și ξ, care reprezintă sarcina externă, respectiv internă, a forțelor de echilibru. De asemenea, coeficienții constitutivi, și anume, tensorii $A_{ijmn}, B_{ijmn}, \ldots, D_{ijm}, E_{ijm}, \ldots, a_{ij}, b_{ij}$, vectorul de componente d_i, precum și coeficientul scalar m, reprezintă funcțiile caracteristice mediului, prescrise, care îndeplinesc relațiile de simetrie:

$$A_{ijmn} = A_{mnij}, \quad C_{ijmn} = C_{mnij}, \quad g_{im} = g_{mi}. \tag{4.5.4}$$

Se impun următoarele ipoteze de regularitate asupra funcțiilor considerate:

(i) coeficienții constitutivi sunt funcții de clasă C^2 pe $\mathcal{D}$;
(ii) încărcările mediului, f_i, g_i și ℓ, sunt funcții continue pe $\mathcal{D}$.

Pentru ca sistemul ordonat (u_i, φ_i, ν) să fie un proces admisibil pe $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$, se impune condiția ca $u_i, \varphi_i, \nu \in C^1(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D})$. De asemenea, pentru ca sistemul ordonat de funcții $(t_{ij}, m_{ij}, \lambda_i)$ să fie un sistem admisibil de tensiune pe $\bar{\mathcal{D}}$, se impune condiția ca $t_{ij}, m_{ij}, \lambda_i \in C^1(\mathcal{D}) \cap C^0(\bar{\mathcal{D}})$ și ca $t_{ij,i}, m_{ij,i}, \lambda_{i,i} \in C^0(\bar{\mathcal{D}})$.

În același timp, se presupune faptul că $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \upsilon_i \in C^1(\mathcal{D}) \cap C^0(\bar{\mathcal{D}})$.

Alături de ecuațiile prezentate anterior, (4.2.1), (4.5.1)-(4.5.3), se consideră condițiile pe frontieră care urmează

$$\begin{aligned} u_i &= \widetilde{u}_i, \text{ pe } \partial\mathcal{D}_u, & t_{ji}n_j &= \widetilde{t}_i, \text{ pe } \partial\mathcal{D}_u^c, \\ \varphi_i &= \widetilde{\varphi}_i, \text{ pe } \partial\mathcal{D}_\varphi, & m_{ji}n_j &= \widetilde{m}_i, \text{ pe } \partial\mathcal{D}_\varphi^c, \\ \nu &= \widetilde{\nu}, \text{ pe } \partial\mathcal{D}_\nu, & \lambda_i n_i &= \widetilde{\lambda}, \text{ pe } \partial\mathcal{D}_\nu^c, \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

unde suprafețele $\partial\mathcal{D}_u, \partial\mathcal{D}_\varphi$ și $\partial\mathcal{D}_\nu$ împreună cu $\partial\mathcal{D}_u^c, \partial\mathcal{D}_\varphi^c$, respectiv $\partial\mathcal{D}_\nu^c$ sunt submulțimi ale frontierei $\partial\mathcal{D}$, astfel încât

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{D}_u \cup \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cup \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\nu \cup \partial\mathcal{D}_\nu^c = \partial\mathcal{D}, \\ \partial\mathcal{D}_u \cap \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cap \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\nu \cap \partial\mathcal{D}_\nu^c = \emptyset. \end{aligned}$$

Se menționează faptul că pentru un sistem extern de încărcare pe $\bar{\mathcal{D}}$,

$$L = (f_i, g_i, \ell, \widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\nu}, \widetilde{t}_i, \widetilde{m}_i, \widetilde{\lambda}),$$

sunt îndeplinite următoarele condiții:

(a) funcțiile $f_i, g_i, \ell, \widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_i,$ și $\widetilde{\nu}$ sunt continue pe domeniul lor de definiție,
(b) funcțiile $\widetilde{t}_i, \widetilde{m}_i,$ și $\widetilde{\lambda}$ sunt regulate pe domeniul lor de definiție.

Definiție 4.5.1 *Se numește soluție a problemei cu date la limită a teoriei echilibrului pentru mediile Cosserat elastice poroase, $\mathcal{P}$, sistemul ordonat (u_i, φ_i, ν), care verifică ecuațiile (4.2.1), (4.5.1)-(4.5.3) și condițiile la limită (4.5.5).*

4.5.3 Rezultate principale obținute

Se consideră faptul că mediul elastic Cosserat poros se află sub acțiunea succesivă a două sisteme de încărcare externe,

$$\mathcal{L}^{(\delta)} = (f_i^{(\delta)}, g_i^{(\delta)}, \ell^{(\delta)}, \widetilde{u}_i^{(\delta)}, \widetilde{\varphi}_i^{(\delta)}, \widetilde{\nu}^{(\delta)}, \widetilde{t}_i^{(\delta)}, \widetilde{m}_i^{(\delta)}, \widetilde{\lambda}^{(\delta)}), \quad \delta = 1, 2,$$

cărora le corespund două stări elastice, și anume

$$\mathcal{A}^{(\delta)} = (u_i^{(\delta)}, \varphi_i^{(\delta)}, \nu^{(\delta)}, \varepsilon_{ij}^{(\delta)}, \gamma_{ij}^{(\delta)}, \upsilon_i^{(\delta)}, t_{ij}^{(\delta)}, m_{ij}^{(\delta)}, \lambda_i^{(\delta)}, \xi^{(\delta)}), \quad \delta = 1, 2.$$

Teorema care urmează oferă o relație de tip Betti, fiind o replică a teoremei de reciprocitate din teoria elasticității clasice.

Teorema 4.5.1 *Considerând două stări elastice $\mathcal{A}^{(\delta)}, \delta = 1, 2,$ corespunzătoare celor două sisteme de încărcare $\mathcal{L}^{(\delta)}, \delta = 1, 2,$ are loc egalitatea care urmează*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}} (f_i^{(1)} u_i^{(2)} + g_i^{(1)} \varphi_i^{(2)} + \ell^{(1)} \nu^{(2)}) dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (t_i^{(1)} u_i^{(2)} + m_i^{(1)} \varphi_i^{(2)} + \lambda^{(1)} \nu^{(2)}) dA = \\ &= \int_{\mathcal{D}} (f_i^{(2)} u_i^{(1)} + g_i^{(2)} \varphi_i^{(1)} + \ell^{(2)} \nu^{(1)}) dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (t_i^{(2)} u_i^{(1)} + m_i^{(2)} \varphi_i^{(1)} + \lambda^{(2)} \nu^{(1)}) dA, \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

unde

$$t_i^{(\delta)} = t_{ji}^{(\delta)} n_j, \; m_i^{(\delta)} = m_{ji}^{(\delta)} n_j, \; \lambda^{(\delta)} = \lambda_i^{(\delta)} n_i, \quad \delta = 1, 2. \tag{4.5.7}$$

În cele ce urmează, cu scopul obținerii unui rezultat referitor la existența soluției problemei la limită $\mathcal{P}$, se va ține cont de o nouă formulare a ecuațiilor fundamentale.

Se consideră atât $u = (u_i, \varphi_i, \nu)$, un proces admisibil pe $\mathcal{D}$, precum și $(\varepsilon_{ij}(u), \gamma_{ij}(u), \upsilon_i(u))$, caracteristicile deformării, asociate cu u. Alături de acestea, se consideră $(t_{ij}(u), m_{ij}(u), \lambda_i(u), \xi(u))$, un sistem admisibil de tensiune pe $\bar{\mathcal{D}}$, corespunzător lui u.

Se introduc operatorii, definiți pe domeniul $\bar{\mathcal{D}}$, după cum urmează

$$\begin{aligned} L_i u &= -t_{ji,j}(u), \\ L_{3+i} u &= -m_{ji,j}(u) - \varepsilon_{ijk} t_{jk}(u), \\ L_7 u &= -\lambda_{i,i}(u) + \xi(u). \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Prin introducerea notațiilor

$$\begin{aligned} Lu &= (L_i u, L_{3+i} u, L_7 u), \\ f &= (f_i, g_i, \ell), \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

ecuațiile (4.5.1) și (4.5.2) se vor scrie sub forma

$$Lu = f. \tag{4.5.10}$$

Dacă se notează cu $\mathcal{M}$ mulțimea tuturor proceselor admisibile pe $\mathcal{D}$, încărcările în punctele frontierei $\partial\mathcal{D}$, corespunzătoare procesului admisibil $u \in \mathcal{M}$, sunt exprimate prin relațiile care urmează:

$$\begin{aligned} t_i(u) &= t_{ji}(u) n_j, \\ m_i(u) &= m_{ji}(u) n_j, \\ \lambda(u) &= \lambda_i(u) n_i. \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

Urmând procedura prezentată de Eringen în [47], se deduce faptul că densitatea energiei interne, corespunzătoare procesului admisibil $u \in \mathcal{M}$, este sub forma

$$\begin{aligned} e(u) = {} & \frac{1}{2} A_{ijmn} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{mn}(u) + B_{mnij} \varepsilon_{mn}(u) \gamma_{ij}(u) + \frac{1}{2} C_{ijmn} \gamma_{ij}(u) \gamma_{mn}(u) + \\ & + D_{ijm} \varepsilon_{ij}(u) \upsilon_m(u) + E_{ijm} \gamma_{ij}(u) \upsilon_m(u) + \frac{1}{2} g_{im} \upsilon_i(u) \upsilon_m(u) + \\ & + a_{ij} \varepsilon_{ij}(u) \nu + b_{ij} \gamma_{ij}(u) \nu + d_i \upsilon_i(u) \nu + \frac{1}{2} m \nu^2. \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Astfel, energia deformării $\mathcal{E}(u)$, corespunzătoare procesului admisibil $u \in \mathcal{M}$, va fi definită după cum urmează

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\mathcal{D}} e(u) dV. \tag{4.5.13}$$

Funcționala $\mathcal{E}$ generează următoarea formă biliniară:

$$\begin{aligned} E(u, \vartheta) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} & \{ A_{ijmn} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{mn}(\vartheta) + B_{mnij} [\varepsilon_{mn}(u) \gamma_{ij}(\vartheta) + \varepsilon_{mn}(\vartheta) \gamma_{ij}(u)] + \\ & + C_{ijmn} \gamma_{ij}(u) \gamma_{mn}(\vartheta) + D_{ijm} [\varepsilon_{ij}(u) \upsilon_m(\vartheta) + \varepsilon_{ij}(\vartheta) \upsilon_m(u)] + \\ & + E_{ijm} [\gamma_{ij}(u) \upsilon_m(\vartheta) + \gamma_{ij}(\vartheta) \upsilon_m(u)] + g_{im} \upsilon_i(u) \upsilon_m(\vartheta) + \\ & + a_{ij} [\varepsilon_{ij}(u) \nu + \varepsilon_{ij}(\vartheta) \mu] + b_{ij} [\gamma_{ij}(u) \nu + \gamma_{ij}(\vartheta) \mu] + \\ & + d_i [\upsilon_i(u) \nu + \upsilon_i(\vartheta) \mu] + \frac{1}{2} m \nu \mu \} dV, \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

unde $u, \vartheta \in \mathcal{M}$, $u = (u_i, \varphi_i, \nu)$ și $\vartheta = (v_i, \Phi_i, \mu)$.

Prin intermediul teoremei care urmează va fi demonstrat un rezultat auxiliar, util obținerii rezultatului referitor la unicitatea soluției problemei $\mathcal{P}$.

Teorema 4.5.2 *Forma biliniară $E(\mathcal{u},\vartheta)$ se poate scrie sub forma:*

$$\begin{aligned}2E(\mathcal{u},\vartheta) = &\int_{\mathcal{D}} (v_i L_i \mathcal{u} + \Phi_i L_{3+i}\mathcal{u} + \mu L_7 \mathcal{u})dV + \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} [v_i t_i(\mathcal{u}) + \Phi_i m_i(\mathcal{u}) + \mu\lambda(\mathcal{u})]dA, \quad \forall \mathcal{u},\vartheta \in \mathcal{M}.\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

Relația (4.5.15) constituie fundamentul rezultatului referitor la unicitatea soluției problemei $\mathcal{P}$, rezultat care este o replică a celui stabilit de Eringen în cazul mediilor micromorfe izotrope, vezi [43].

Teorema 4.5.3 *Oricare două soluții ale problemei la limită $\mathcal{P}$, în contextul mediilor Cosserat poroase, sunt egale până la o mișcare rigidă, cu condiția ca densitatea energiei interne să fie o formă pozitiv definită. Mai mult, dacă $\partial\mathcal{D}_u$ și $\partial\mathcal{D}_\varphi$ sunt ambele nevide, atunci problema $\mathcal{P}$ are cel mult o soluție.*

Cu scopul formulării principiului de minim al energiei pentru mediile Cosserat poroase, principiu care este similar celui din teoria elastostatică clasică, se va nota cu $\mathcal{K}$ mulțimea tuturor proceselor admisibile $\mathcal{u} = (u_i, \varphi_i, \nu)$ pe $\bar{\mathcal{D}}$, care satisfac următoarele condiții la limită:

$$u_i = \widetilde{u}_i \text{ pe } \partial\mathcal{D}_u,\ \varphi_i = \widetilde{\varphi}_i \text{ pe } \partial\mathcal{D}_\varphi,\ \nu = \widetilde{\nu} \text{ pe } \partial\mathcal{D}_\nu.$$

Pe mulțimea $\mathcal{K}$, se definește funcționala $\Lambda(\mathcal{u})$ după cum urmează

$$\Lambda(\mathcal{u}) = \mathcal{E}(\mathcal{u}) - \int_{\mathcal{D}} (f_i u_i + g_i \varphi_i + \ell\nu)dV - \int_{\partial\mathcal{D}_u^c} \widetilde{t}_i u_i dA - \int_{\partial\mathcal{D}_\varphi^c} \widetilde{m}_i \varphi_i dA - \int_{\partial\mathcal{D}_\nu^c} \widetilde{\lambda}\nu dA, \tag{4.5.16}$$

pentru orice $(u_i, \varphi_i, \nu) \in \mathcal{K}$.

Teorema 4.5.4 *Presupunând că densitatea energiei interne, reprezentată prin relația (4.5.12), este pozitiv definită și, notând cu $\mathcal{u}^*$, o soluție a problemei la limită $\mathcal{P}$, are loc estimarea*

$$\Lambda(\mathcal{u}^*) \le \Lambda(\vartheta), \tag{4.5.17}$$

pentru orice $\vartheta \in \mathcal{K}$, egalitatea având loc doar dacă $\mathcal{u}^*$ și ϑ sunt egale, până la o mișcare rigidă.

4.5.4 Concluzii

Fundamentat pe principiul de minim pentru energie, prezentat în [61], dezvoltarea acestui principiu, în contextul mediilor elastice Cosserat poroase, a fost realizată prin intermediul formulării atât a problemei cu date pe frontieră aferente, precum și a unei relații de reciprocitate de tip Betti, rezultatul principal fiind constituit de demonstrarea extensiei principiului de minim, corespunzător mediului selectat.

Capitolul 5

Contribuții asupra mediilor micromorfe

5.1 Scurt istoric

Formarea unui mod de gândire algoritmic conduce la posibilitatea rezolvării unor probleme complexe, care solicită descrierea mai multor etape de calcul. Metoda de obținere a soluției, prin descrierea unui algoritm, nu poate fi aplicată tuturor tipurilor de probleme, dar această metodă este o cerință fundamentală în ceea ce privește problemele rezolvate cu ajutorul calculatorului. Un algoritm, vezi [104], stabilește diverse tehnici și metode care au fost descoperite sau finalizate într-un anumit moment al dezvoltării unui domeniu.

În teoria micromorfă continuă, fiecare particulă este considerată ca fiind deformabilă, având douăsprezece grade independente de libertate, trei componente de deplasare, trei componente de microrotații și șase componente de microdeformații. Toate teoriile clasice ale solidelor și fluidelor au fost incluse în teoria mediilor micromorfe, vezi [36], aceste medii constituind subiectul unui număr important de lucrări, exemple fiind prezentate în subcapitolul 1.1, alături de lucrările [63, 65, 121], în cadrul cărora este analizată influența microtemperaturilor asupra mediilor elastice micromorfe.

Calculul fracționar, vezi [6], a fost multă vreme privit doar din punct de vedere teoretic, dar, de câteva decenii, el a câștigat un loc important în aplicațiile practice, fiind utilizat în domenii precum chimia, ingineria, termodinamica sau teoria controlului.

5.2 O perspectivă algoritmică asupra termoelasticității mediilor micromorfe

5.2.1 Preliminarii

Capitolul de față abordează teoria liniară a termoelasticității mediilor micromorfe, având scopul de a prezenta o perspectivă algoritmică pentru obținerea, prin intermediul derivatei fracționare Caputo, pe de o parte, a ecuațiilor constitutive ale teoriei liniare și a formei ecuației non-Fourier a căldurii, iar pe de altă parte, a unei relații de reciprocitate.

Această transpunere algoritmică a unui model matematic permite o simplificare și o sistematizare a rezolvării matematice, raționamentul matematic fiind prezentat sub forma unor pași concreți care pot fi urmați, cu scopul obținerii soluției problemei.

Rezultatele prezentate în această secțiune sunt cele publicate, sub forma unui capitol, în: **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: An Algorithmic Perspective on the Thermoelasticity of the Micromorphic Materials Using Fractional Order Strain. In: Hoškova-Mayerová Š., Flaut C., Maturo F. (eds) Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics. Studies in Fuzziness and Soft Computing **404**, 161-176. Springer, Cham (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-61334-1_8 indexat BDI, vezi [28].

5.2.2 Notații și ecuații fundamentale

Se consideră o regiune mărginită a spațiului Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, căreia îi corespunde, în configurația de referință, un mediu termoelastic micromorf. În cazul unui mediu anizotrop, ecuațiile care guvernează teoria liniară a termoelasticității micromorfe, conform [65], sunt următoarele:

- ecuațiile de mișcare

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{u}_i, \\ m_{kij,k} + t_{ji} - s_{ji} + \rho \ell_{ij} &= I_{jk} \ddot{\varphi}_{ik}, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

- ecuația energiei, reprezentată de ecuația (4.3.2),
- ecuațiile geometrice

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= u_{j,i} - \varphi_{ji}, \\ \mu_{ij} &= \frac{1}{2}(\varphi_{ij} + \varphi_{ji}), \\ \gamma_{ijk} &= \varphi_{ij,k}, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

ecuații verificate în toate punctele $(x,t) \in \mathcal{D} \times (0,\infty)$. Notațiile utilizate în precedentele ecuații sunt prezentate mai jos:

• t_{ij}, s_{ij}, m_{kij} sunt componentele tensorului de tensiune, ale tensorului de microtensiune, respectiv componentele tensorului moment de tensiune peste $\mathcal{D}$,
• u_i, φ_{ij} sunt componentele vectorului deplasare, respectiv componentele tensorului de microdeformație,
• f_i sunt componentele vectorului forță masică,
• ℓ_{ij} sunt componentele tensorului cuplu pe unitatea de masă,
• $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}$ sunt componentele tensorilor de deformație, pentru celelalte notații fiind valabile cele prezentate în secțiunea 4.2.2 .

Se adaugă ecuațiilor precedente atât condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u_i(x,0) &= u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0) &= u_i^1(x),\ x \in \bar{\mathcal{D}}, \\ \varphi_{ij}(x,0) &= \varphi_{ij}^0(x), & \dot{\varphi}(x,0) &= \varphi_{ij}^1(x),\ x \in \bar{\mathcal{D}}, \\ \theta(x,0) &= \theta^0(x), & \eta(x,0) &= \eta^0(x),\ x \in \bar{\mathcal{D}}, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

precum și condițiile la limită

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= \widetilde{u}_i \in \partial\mathcal{D}_u \times [0,\infty), \\ \varphi_{ij}(x,t) &= \widetilde{\varphi}_{ij} \in \partial\mathcal{D}_\varphi \times [0,\infty), \\ \theta(x,t) &= \widetilde{\theta} \in \partial\mathcal{D}_\theta \times [0,\infty), \\ t_i(x,s) &= t_{ji}(x,s)n_j(x) = \widetilde{t}_i, \quad (x,s) \in \partial\mathcal{D}_u^c \times [0,\infty), \\ m_{ij}(x,s) &= m_{kij}(x,s)n_k(x) = \widetilde{m}_{ij}, \quad (x,s) \in \partial\mathcal{D}_\varphi^c \times [0,\infty), \\ q(x,s) &= q_i(x,s)n_i(x) = \widetilde{q}, \ (x,s) \in \partial\mathcal{D}_\theta^c \times [0,\infty), \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

unde t_i și m_{ij} sunt componentele vectorului tensiunii de suprafață, respectiv componentele momentului de suprafață, iar n_i sunt componentele normalei unitare exterioare la suprafața $\partial\mathcal{D}$. În același timp, $\partial\mathcal{D}_u,\ \partial\mathcal{D}_\varphi,\ \partial\mathcal{D}_\theta$, împreună cu complementele lor $\partial\mathcal{D}_u^c,\ \partial\mathcal{D}_\varphi^c,\ \partial\mathcal{D}_\theta^c$, sunt submulțimi ale suprafeței $\partial\mathcal{D}$, astfel încât

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{D}_u \cup \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cup \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\theta \cup \partial\mathcal{D}_\theta^c = \partial\mathcal{D}, \\ \partial\mathcal{D}_u \cap \partial\mathcal{D}_u^c = \partial\mathcal{D}_\varphi \cap \partial\mathcal{D}_\varphi^c = \partial\mathcal{D}_\theta \cap \partial\mathcal{D}_\theta^c = \varnothing. \end{aligned}$$

Se presupune că

(i) u_i^0, u_i^1, φ_{ij}^1, θ și η^0 sunt funcții continue, prescrise pe $\mathcal{D}$;

(ii) $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\varphi}_{ij}$ și $\widetilde{\theta}$ sunt funcții continue, prescrise pe domeniul lor de definiție;

(iii) $\widetilde{t}_i$, $\widetilde{m}_{ij}$ și $\widetilde{q}$ sunt funcții prescrise, regulate pe domeniul lor de definiție și continue în raport cu variabila timp.

Primul principiu al termodinamicii mediilor micromorfe, după [129], poate fi exprimat sub forma

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}} (\rho\dot{u}_i\ddot{u}_i + I_{jk}\dot{\varphi}_{ij}\ddot{\varphi}_{ik} + \rho\dot{e})dV = \\ &= \int_{\mathcal{D}} \rho(f_i\dot{u}_i + \ell_{ij}\dot{\varphi}_{ij} + r)dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (t_i\dot{u}_i + m_{ij}\dot{\varphi}_{ij} + q)dA.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Cu scopul obținerii unor relații fundamentale ale teoriei liniare a termoelasticității mediilor micromorfe, va fi folosită derivata fracționară Caputo, de ordin α, introdusă anterior prin relația (4.3.9), din secțiunea 4.3.2. Fiind o combinație între energia internă e și funcția entropie η, energia liberă Helmholtz este definită prin relația (4.3.10).

5.2.3 Rezultate principale obținute

În cele ce urmează, pentru obținerea, într-o manieră algoritmică, pe de o parte, a ecuațiilor constitutive ale termoelasticității micromorfe și a ecuației non-Fourier a căldurii, iar pe de altă parte, a unei relații de reciprocitate, prin intermediul derivatei fracționare Caputo, se utilizează metoda prezentată de Youssef în [128], vezi de asemenea [17, 23], considerându-se starea mediului termoelastic descrisă prin

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}, T, T_{,i}),\\ e &= e(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}, T, T_{,i}),\\ \eta &= \eta(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}, T, T_{,i}),\\ q &= q(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}, T, T_{,i}),\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

unde $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ este reprezentat prin relația (4.3.12).

În concordanță cu teoria liniară, vezi [129], se consideră energia liberă în forma care urmează

$$\begin{aligned}\rho\Psi(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}, \theta) &= \frac{1}{2}C_{ijkl}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2}B_{ijkl}\mu_{ij}\mu_{kl} + \frac{1}{2}A_{ijklmn}\gamma_{ijk}\gamma_{lmn} + E_{ijkl}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\mu_{kl} + \\ &+ F_{ijlmn}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\gamma_{lmn} + G_{ijlmn}\mu_{ij}\gamma_{lmn} - a_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{ij}\theta - b_{ij}\mu_{ij}\theta - c_{ijk}\gamma_{ijk}\theta - \frac{1}{2}a\theta^2,\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

unde coeficienții $C_{ijkl}, B_{ijkl}, A_{ijklmn}, E_{ijkl}, F_{ijlmn}, G_{ijlmn}, a_{ij}, b_{ij}, c_{ijk}$ și a sunt funcții prescrise, reprezentând specificații ale mediului și îndeplinind proprietățile de simetrie de mai jos

$$\begin{aligned}&C_{ijkl} = C_{klij},\ B_{ijkl} = B_{klij} = B_{jikl},\ A_{ijklmn} = A_{lmnijk},\\ &E_{ijkl} = E_{klij},\ G_{ijlmn} = G_{jilmn},\ a_{ij} = a_{ji},\ c_{ijk} = c_{jik}.\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

În acest context, vor fi prezentați, detaliat, pașii care trebuie parcurși pentru obținerea ecuațiilor constitutive, a ecuației non-Fourier a căldurii și a relației de reciprocitate.

5.2.3.1 O perspectivă algoritmică asupra determinării ecuațiilor constitutive

Pas 1

Din ecuațiile de mișcare (5.2.1)$_1$ și (5.2.1)$_2$, se deduc următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} t_{ji,j}\dot{u}_i + \rho f_i \dot{u}_i &= \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i, \\ m_{kij,k}\dot{\varphi}_{ij} + t_{ji}\dot{\varphi}_{ij} - s_{ij}\dot{\varphi}_{ij} + \rho \ell_{ij}\dot{\varphi}_{ij} &= I_{jk}\dot{\varphi}_{ij}\ddot{\varphi}_{ik}. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Pas 2

Precedentele relații și primul principiu al termodinamicii conduc la relația

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}} (t_{ji,j}\dot{u}_i + m_{kij,k}\dot{\varphi}_{ij} + t_{ji}\dot{\varphi}_{ij} - s_{ij}\dot{\varphi}_{ij})dV + \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} dV = \\ &= \int_{\mathcal{D}} \rho r dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (t_{ji}\dot{u}_i n_j + m_{kij}\dot{\varphi}_{ij} n_k + q_i n_i) dA. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Pas 3

Se aplică teorema divergenței în precedenta relație (5.2.10), obținându-se

$$\int_{\mathcal{D}} [t_{ji}(\dot{u}_{i,j} - \dot{\varphi}_{ij}) + m_{kij}\dot{\varphi}_{ij,k} + q_{i,i} + \rho r + s_{ij}\dot{\varphi}_{ij} - \rho \dot{e}] dV = 0. \tag{5.2.11}$$

Pas 4

Din relația anterioară (5.2.11), se obține forma

$$\rho \dot{e} = t_{ji}(\dot{u}_{ij} - \dot{\varphi}_{ij}) + m_{kij}\dot{\varphi}_{ij,k} + s_{ij}\dot{\varphi}_{ij} + q_{i,i} + \rho r. \tag{5.2.12}$$

Pas 5

Se deduce

$$\rho \dot{\Psi} = t_{ji}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ji} + m_{kij}\dot{\gamma}_{ijk} + s_{ij}\mu_{ij} + q_{i,i} + \rho r - \rho \dot{T}\eta - \rho T \dot{\eta}. \tag{5.2.13}$$

Pas 6

Se obține

$$\rho \dot{\Psi} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_{ij}} \dot{\mu}_{ij} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ijk}} \dot{\gamma}_{ijk} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i}. \tag{5.2.14}$$

Pas 7

Se concluzionează cele ce urmează:

$$\begin{aligned} &t_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}, \quad s_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_{ij}}, \quad m_{kij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ijk}}, \\ &\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} = 0, \qquad \rho T \dot{\eta} = q_{i,i} + \rho r. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Pas 8

Se obțin următoarele ecuații constitutive ale mediilor micromorfe:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijkl}(1 + \tau^{\alpha} D_t^{\alpha})\varepsilon_{kl} + E_{ijkl}\mu_{kl} + F_{ijlmn}\gamma_{lmn} - a_{ij}\theta, \\ s_{ij} &= B_{ijkl}\mu_{kl} + E_{klij}(1 + \tau^{\alpha} D_t^{\alpha})\varepsilon_{kl} + G_{ijlmn}\gamma_{lmn} - b_{ij}\theta, \\ m_{kij} &= A_{ijklmn}\gamma_{lmn} + F_{lmijk}(1 + \tau^{\alpha} D_t^{\alpha})\varepsilon_{lm} + G_{lmijk}\mu_{lm} - c_{ijk}\theta, \\ \rho\eta &= a_{ij}(1 + \tau^{\alpha} D_t^{\alpha})\varepsilon_{ij} + b_{ij}\mu_{ij} + c_{ijk}\gamma_{ijk} + a\theta. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Prin parcurgerea celor opt pași, descriși anterior, se deduce teorema care se referă la determinarea ecuațiilor constitutive, corespunzătoare teoriei liniare a termoelasticității mediilor micromorfe:

Teorema 5.2.1 *Ecuațiile constitutive ale mediilor termoelastice micromorfe, sub influența derivatei fracționare Caputo, sunt descrise de relațiile (5.2.16).*

5.2.3.2 O perspectivă algoritmică asupra determinării ecuației non-Fourier a căldurii

Pas 1

Ecuația energiei (5.2.15)$_6$ se poate scrie sub o formă desfășurată

$$-\rho T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial T\partial\widetilde{\varepsilon}_{ij}}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial T\partial\mu_{ij}}\dot{\mu}_{ij}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial T\partial\gamma_{ijk}}\dot{\gamma}_{ijk}+\frac{\partial\Psi}{\partial T^2}\dot{T}\right)=q_{i,i}+\rho r. \tag{5.2.17}$$

Pas 2

Relația precedentă (5.2.17) se poate scrie sub forma echivalentă

$$-T\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{\varepsilon}_{ij}}\right)\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+\frac{\partial}{\partial T}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\mu_{ij}}\right)\dot{\mu}_{ij}+\frac{\partial}{\partial T}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ijk}}\right)\dot{\gamma}_{ijk}-\rho\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)\dot{T}\right]=q_{i,i}+\rho r. \tag{5.2.18}$$

Pas 3

Din relația anterioară (5.2.18)

$$q_{i,i}=-\rho r-T\left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial T}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+\frac{\partial s_{ij}}{\partial T}\dot{\mu}_{ij}+\frac{\partial m_{ijk}}{\partial T}\dot{\gamma}_{ijk}-\rho\frac{\partial\eta}{\partial T}\dot{T}\right). \tag{5.2.19}$$

Pas 4

Relația precedentă (5.2.19) conduce la

$$q_{i,i}=-\rho r+a_{ij}T\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+b_{ij}T\dot{\mu}_{ij}+c_{ijk}T\dot{\gamma}_{ijk}+aT\dot{T}. \tag{5.2.20}$$

Pas 5

În cazul liniarității, luând în considerare $T\approx T_0$, relația anterioară (5.2.20) devine

$$q_{i,i}=-\rho r+a_{ij}T_0\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+b_{ij}T_0\dot{\mu}_{ij}+c_{ijk}T_0\dot{\gamma}_{ijk}+aT_0\dot{T}. \tag{5.2.21}$$

Pas 6

Ecuației căldurii Cattaneo (4.3.8), conduce la

$$q_{i,i}+\tau_0\dot{q}_{i,i}=(-K_{ij}T_{,j})_{,i}\ ,\ i,j=1,2,3. \tag{5.2.22}$$

Pas 7

Se obține relația

$$\begin{aligned}(-K_{ij}T_{,j})_{,i}=&-\rho r+T_0[a_{ij}(1+\tau^\alpha D_t^\alpha)\dot{\varepsilon}_{ij}+b_{ij}\dot{\mu}_{ij}+c_{ijk}\dot{\gamma}_{ijk}+a\dot{T}]-\\&-\tau_0[\rho\dot{r}-a_{ij}T_0(1+\tau^\alpha D_t^\alpha)\ddot{\varepsilon}_{ij}-b_{ij}T_0\ddot{\mu}_{ij}-c_{ijk}T_0\ddot{\gamma}_{ijk}-aT_0\ddot{T}].\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Pas 8

Se scrie într-o formă echivalentă precedenta relație (5.2.23), după cum urmează

$$\begin{aligned}(-K_{ij}T_{,j})_{,i}=\rho\left(1+\tau_0\frac{\partial}{\partial t}\right)r+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tau_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Big[&-a_{ij}T_0(1+\tau^\alpha D_t^\alpha)\varepsilon_{ij}-\\&-b_{ij}T_0\mu_{ij}-c_{ijk}T_0\gamma_{ijk}-aT_0T\Big].\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Aceștia au constituit pașii compleți care conduc la determinarea formei ecuației non-Fourier a căldurii, în contextul termoelasticității micromorfe care utilizează derivata fracționară Caputo, prin urmare, se poate formula următoarea teoremă:

Teorema 5.2.2 *Ecuația non-Fourier a căldurii în termoelasticitatea micromorfă, sub influența derivatei fracționare Caputo, este reprezentată prin ecuația (5.2.24).*

5.2.3.3 O perspectivă algoritmică asupra reciprocității

Cu scopul determinării unei relații de reciprocitate, în contextul teoriei prezentate pe parcursul acestei secțiuni, vor fi evidențiate câteva notații, definiții și teoreme:

- utilizând metoda lui Ieșan, prezentată în [59], vezi de asemenea [24, 25], pentru simplificarea scrierii, ecuațiile de mișcare (5.2.1) vor fi reformulate sub forma care urmează

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + \mathbb{F}_i &= \rho \ddot{u}_i, \\ m_{kij,k} + t_{ji} - s_{ji} + \mathbb{L}_{ij} &= I_{jk} \ddot{\varphi}_{ik}, \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

iar ecuația energiei, ca

$$\rho T_0 \eta = q_{i,i} + \mathbb{H}, \tag{5.2.26}$$

unde $\rho f_i = \mathbb{F}_i, \rho \ell_{ij} = \mathbb{L}_{ij}$ și $\rho r = \mathbb{H}$;
- subiectul reciprocității va fi dezvoltat prin considerarea condițiilor inițiale încorporate în ecuațiile specifice termoelasticității mediilor micromorfe;
- se va folosi produsul de convoluție, introdus în secțiunea 3.2.2 prin *Definiția* 3.2.1;
- în scopul obținerii unei relații de reciprocitate, va fi utilizat rezultatul oferit de următoarea teoremă:

Teorema 5.2.3 *Funcțiile u_i, φ_{ij} și η verifică ecuațiile (5.2.25), (5.2.26) și condițiile inițiale (5.2.3), dacă și numai dacă, următoarele relații sunt satisfăcute:*

$$\begin{aligned} h * t_{ji,j} + \mathscr{F}_i &= \rho u_i, \\ h * (m_{kij,k} + t_{ji} - s_{ji}) + \mathscr{L}_{ij} &= I_{jk} \varphi_{ik}, \\ \rho \eta &= \frac{1}{T_0} l * q_{i,i} + Q, \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

unde:

$$\begin{aligned} h(t) &= (l * l)(t), \\ l(t) &= 1, \end{aligned} \qquad t \in [0, \infty), \tag{5.2.28}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_i &= h * \mathbb{F}_i + \rho (t u_i^1 + u_i^0), \\ \mathscr{L}_{ij} &= h * \mathbb{L}_{ij} + I_{ij} (t \varphi_{ij}^1 + \varphi_{ij}^0), \\ Q &= \frac{1}{T_0} l * \mathbb{H} + \rho \eta^0. \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Se consideră două sisteme de încărcare $S^{(\delta)}$, care acționează succesiv asupra mediului termoelastic micromorf, definite după cum urmează

$$\begin{aligned} S^{(\delta)} = &\{\mathbb{F}_i^{(\delta)}, \mathbb{L}_{ij}^{(\delta)}, \mathbb{H}^{(\delta)}, \widetilde{u}_i^{(\delta)}, \widetilde{\varphi}_{ij}^{(\delta)}, \widetilde{\theta}^{(\delta)}, \widetilde{t}_i^{(\delta)}, \widetilde{m}_{ij}, \widetilde{q}_i^{(\delta)}, u_i^{0(\delta)}, u_i^{1(\delta)}, \\ &\varphi_{ij}^{0(\delta)}, \varphi_{ij}^{1(\delta)}, \theta^{0(\delta)}, \eta^{0(\delta)}\}, \quad \delta = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Soluțiile problemei mixte, corespunzătoare fiecărui sistem $S^{(\delta)}, \delta = 1, 2$, vor fi notate

$$s^{(\delta)} = \left\{u_i^{(\delta)}, \varphi_{ij}^{(\delta)}, \theta^{(\delta)}\right\}, \quad \delta = 1, 2. \tag{5.2.31}$$

Se vor folosi, de asemenea, relațiile care urmează

$$t_i^{(\delta)} = t_{ji}^{(\delta)} n_j, \; m_{ij}^{(\delta)} = m_{kij}^{(\delta)} n_k, \; q^{(\delta)} = q_i^{(\delta)} n_i, \; Q^{(\delta)} = \frac{1}{T_0} l * \mathbb{H}^{(\delta)} + \rho\eta^{0(\delta)}, \quad \delta = 1, 2. \tag{5.2.32}$$

Cu scopul obținerii unei relații de reciprocitate, este prezentată o metodă algoritmică, ai cărei pași care trebuie urmați sunt descriși mai jos, menționând faptul că acest algoritm are la rândul său un sub-algoritm, al doilea pas fiind descris, la rândul său, de o serie de „sub-pași".

Pas 1

Se introduce funcția $\widetilde{\mathcal{F}}_{\delta\beta}$ reprezentată prin relația

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\delta\beta} = t_{ij}^{(\delta)} * \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(\beta)} + s_{ij}^{(\delta)} * \mu_{ij}^{(\beta)} + m_{ijk}^{(\delta)} * \gamma_{ijk}^{(\beta)} - (\rho\eta^{(\delta)}) * \theta^{(\beta)}. \tag{5.2.33}$$

Pas 2

Se demonstrează proprietatea de simetrie a funcțiilor nou introduse $\widetilde{\mathcal{F}}_{\delta\beta}$, și anume

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\delta\beta} = \widetilde{\mathcal{F}}_{\beta\delta}, \; \delta = 1, 2, \; \beta = 1, 2. \tag{5.2.34}$$

Pas 2.1

Se calculează produsul de convoluție $C_{ijkl}\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(\delta)} * \widetilde{\varepsilon}_{kl}^{(\beta)}$.

Pas 2.2

Se determină produsul de convoluție $B_{ijkl}\mu_{ij}^{(\delta)} * \mu_{kl}^{(\beta)}$.

Pas 2.3

Se dezvoltă produsul de convoluție $A_{ijklmn}\gamma_{ijk}^{(\delta)} * \gamma_{lmn}^{(\beta)}$.

Pas 2.4

Se calculează produsul de convoluție $a\theta^{(\delta)} * \theta^{(\beta)}$.

Pas 2.5

Se obține relația de simetrie (5.2.34).

Pas 3

Realizând o paralelă între relația de simetrie (5.2.34), corespunzătoare teoriei dezvoltate pe parcursul acestei secțiuni, și cea aferentă teoriei clasice a mediilor termoelastice micromorfe, exprimată prin intermediul lemei care urmează:

Lema 5.2.1 *Funcțiile $\mathcal{F}_{\delta\beta}$ definite prin*

$$\mathcal{F}_{\delta\beta} = t_{ij}^{(\delta)} * \varepsilon_{ij}^{(\beta)} + s_{ij}^{(\delta)} * \mu_{ij}^{(\beta)} + m_{kij}^{(\delta)} * \gamma_{ijk}^{(\beta)} - \left(\rho\eta^{(\delta)}\right) * \theta^{(\beta)}, \tag{5.2.35}$$

alături de relațiile de simetrie (5.2.8) îndeplinite, satisfac proprietatea de simetrie

$$\mathcal{F}_{\delta\beta} = \mathcal{F}_{\beta\delta}, \quad \delta = 1, 2, \; \beta = 1, 2, \tag{5.2.36}$$

se observă că teoria clasică a termoelasticității mediilor micromorfe nu este influențată de utilizarea derivatei fracționare, subliniind faptul că $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ îndeplinesc atât relația de simetrie (5.2.34), cât și relația clasică de simetrie (5.2.36), așadar raționamentul poate fi continuat precum în teoria clasică, spre următorul pas.

Pas 4

Relația (5.2.35), conduce la o nouă formă a funcțiilor $\mathcal{F}_{\delta\beta}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\delta\beta} = & \left[t_{ij}^{(\delta)} * u_j^{(\beta)} + m_{ikj}^{(\delta)} * \varphi_{kj}^{(\beta)} - \left(\frac{1}{T_0} l * q_i^{(\delta)}\right) * \theta^{(\beta)}\right]_{,i} - t_{ij,i}^{(\delta)} * u_j^{(\beta)} - \\ & - \left(m_{kij,k}^{(\delta)} + t_{ji}^{(\delta)} - s_{ji}^{(\delta)}\right) * \varphi_{ij}^{(\beta)} + \left(\frac{1}{T_0} l * q_i^{(\delta)}\right) * \theta_{,i}^{(\beta)} - Q^{(\delta)} * \theta^{(\beta)}.\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

Pas 5

Din precedenta relație (5.2.37), se obține

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}} (h * \mathcal{F}_{\delta\beta}) dV = \int_{\partial\mathcal{D}} h * \left(t_i^{(\delta)} * u_i^{(\beta)} + m_{ki}^{(\delta)} * \varphi_{ki}^{(\beta)} - \frac{1}{T_0} l * q^{(\delta)} * \theta^{(\beta)}\right) dA + \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left[\mathscr{F}_i^{(\delta)} * u_i^{(\beta)} + \mathscr{L}_{ij}^{(\delta)} * \varphi_{ij}^{(\beta)} - h * Q^{(\delta)} * \theta^{(\beta)} - \rho u_i^{(\delta)} * u_i^{(\beta)} - I_{jk} \varphi_{ik}^{(\delta)} * \varphi_{ij}^{(\beta)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{T_0} h * l * (K_{ij} \theta_{,j}^{(\delta)} * \theta_{,i}^{(\beta)})\right] dV,\end{aligned} \tag{5.2.38}$$

unde:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i^{(\delta)} &= h * \mathbb{F}_i^{(\delta)} + \rho\left(t u_i^{1(\delta)} + u_i^{0(\delta)}\right), \\ \mathscr{L}_{ij}^{(\delta)} &= h * \mathbb{L}_{ij}^{(\delta)} + I_{ij}\left(t \varphi_{ij}^{1(\delta)} + \varphi_{ij}^{0(\delta)}\right), \\ Q^{(\delta)} &= \frac{1}{T_0} l * \mathbb{H}^{(\delta)} + \rho \eta^{0(\delta)}.\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

Se poate concluziona faptul că reciprocitatea termoelasticității mediilor micromorfe, sub influența condițiilor derivatei fracționare Caputo, este aceeași precum reciprocitatea teoriei clasice, prin urmare, pașii precedenți conduc firesc spre ultimul pas, reprezentat prin teorema care oferă relația clasică de reciprocitate de tip Betti, valabilă în ambele cazuri, atât în teoria clasică, cât și în teoria termoelasticității mediilor micromorfe, în contextul derivatei fracționare, după cum urmează.

Pas 6

Teorema 5.2.4 *Dacă condițiile de simetrie (5.2.8) sunt îndeplinite, coeficienții de microinerție I_{ij}, respectiv componentele tensorului conductivității termice K_{ij}, sunt simetrici și $s^{(\delta)}$ este soluția corespunzătoare problemei mixte în relația cu fiecare sistem extern $S^{(\delta)}, \delta = 1, 2$, atunci are loc următoarea relație de reciprocitate*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}} \left(\mathscr{F}_i^{(1)} * u_i^{(2)} + \mathscr{L}_{ij}^{(1)} * \varphi_{ij}^{(2)} - h * Q^{(1)} * \theta^{(2)}\right) dV + \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} h * \left(t_i^{(1)} * u_i^{(2)} + m_{ki}^{(1)} * \varphi_{ki}^{(2)} - \frac{1}{T_0} l * q^{(1)} * \theta^{(2)}\right) dA = \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(\mathscr{F}_i^{(2)} * u_i^{(1)} + \mathscr{L}_{ij}^{(2)} * \varphi_{ij}^{(1)} - h * Q^{(2)} * \theta^{(1)}\right) dV + \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} h * \left(t_i^{(2)} * u_i^{(1)} + m_{ki}^{(2)} * \varphi_{ki}^{(1)} - \frac{1}{T_0} l * q^{(2)} * \theta^{(1)}\right) dA.\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

5.2.4 Concluzii

Abordarea raționamentului algoritmic în scopul elaborării ecuațiilor constitutive și a ecuației non-Fourier a căldurii, corespunzătoare teoriei termoelasticității mediilor micromorfe în contextul derivatei fracționare Caputo, precum și demonstrarea validității relației de reciprocitate de tip Betti din teoria clasică, în cadrul teoriei prezentate mai sus, și dezvoltate pe parcursul acestui capitol, are ca efect dezvoltarea unor pași concreți de urmat pentru atingerea acestui țel.

Acești pași reprezintă perspectiva algoritmică asupra teoriei termoelasticității mediilor micromorfe, sub influența derivatei fracționare Caputo, viziunea algoritmică conducând la crearea unui model, pașii și ,,sub-pașii" prezentați stabilind o schemă care poate fi aplicată și în cazul altor medii, pentru atingerea acelorași obiective.

5.3 Existența, unicitatea și dependența continuă a soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, în termoelasticitatea mediilor micromorfe poroase, cu microtemperaturi

5.3.1 Preliminarii

Studiul problemei mixte, cu date inițiale și la limită, corespunzătoare termoelasticității mediilor micromorfe poroase, sub influența microtemperaturilor, constituie subiectul acestei secțiuni.

Acest subcapitol prezintă rezultatele publicate în articolul: **Codarcea-Munteanu**, L., Marin, M.: Influence of Geometric Equations in Mixed Problem of Porous Micromorphic Bodies with Microtemperature. Mathematics **8**(8) 1386, 1-16 (2020), https://doi.org/10.3390/math8081386, jurnal situat în zona roșie, Q_1, cotat ISI, cu factor de impact 1,747 în anul 2019, premiat în cadrul competiției naționale ,,Premierea rezultatelor cercetării-UEFISCDI", vezi [27].

5.3.2 Notații și ecuații fundamentale

Fie un mediu termoelastic micromorf poros, care ocupă domeniul $\mathcal{D}$, din spațiul Euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, la momentul t_0, $\bar{\mathcal{D}}$ și $\partial\mathcal{D}$ reprezentând notațiile corespunzătoare închiderii regiunii regulate $\mathcal{D}$, respectiv frontierei, o suprafață netedă.

Exprimarea ecuațiilor fundamentale, care descriu comportamentul unui mediu termoelastic micromorf poros, cu microtemperaturi, se realizează prin intermediul variabilelor $(u_i, \varphi_{ij}, \nu, \alpha, \zeta_i)$, u_i fiind componentele vectorului deplasare, φ_{ij} componentele tensorului de microdeformație, ν fracțiunea de volum aferentă golurilor, iar α și ζ_i, cele două noi variabile, introduse prin relațiile $(2.2.1)_{1-2}$, cu notațiile corespunzătoare prezentate în secțiunea 2.2.2.

Ecuațiile și condițiile fundamentale, care guvernează comportamentul unui mediu anizotrop, termoelastic, micromorf, poros cu microtemperaturi, sunt cele care urmează:

- ecuațiile geometrice, exprimând tensorii de deformație $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ijk}$, respectiv vectorul υ_i,

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \varphi_{ji}, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2}(\varphi_{ij} + \varphi_{ji}), \quad \gamma_{ijk} = \varphi_{ij,k}, \quad \upsilon_i = \nu_{,i}, \quad (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,\infty), \tag{5.3.1}$$

- ecuațiile de mișcare (5.2.1), cu notațiile corespunzătoare menționate în secțiunea 5.2.2,
- ecuațiile forțelor de echilibru (4.4.1), cu notațiile aferente specificate în secțiunile 4.3.2 și 4.2.2,
- ecuația energiei, sub forma relației (2.2.6), cu notațiile aferente prezentate în secțiunea 2.2.2,
- ecuațiile suplimentare ale energiei, ca rezultat al existenței microtemperaturilor, introduse prin relațiile (2.2.7), cu notațiile menționate în secțiunea 2.2.2,

- ecuațiile constitutive, deduse prin aplicarea procedurii realizate de Ieșan și Quintanilla în [62], vezi, de asemenea, [66],

$$
\begin{aligned}
t_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + E_{ijmn}\mu_{mn} + F_{ijlmn}\gamma_{lmn} + B_{ij}\nu - a_{ij}\dot{\alpha} + d_{ijmn}\zeta_{m,n}\ ,\\
s_{ij} &= E_{mnij}\varepsilon_{mn} + B_{ijmn}\mu_{mn} + G_{ijlmn}\gamma_{lmn} + C_{ij}\nu - b_{ij}\dot{\alpha} + e_{ijmn}\zeta_{m,n}\ ,\\
m_{kij} &= A_{ijklmn}\gamma_{lmn} + F_{lmijk}\varepsilon_{lm} + G_{lmijk}\mu_{lm} + D_{ijk}\nu - c_{ijk}\dot{\alpha} + f_{ijkmn}\zeta_{m,n}\ ,\\
\rho\eta &= a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\mu_{ij} + c_{ijk}\gamma_{ijk} + \hbar\nu + a\dot{\alpha} + h_{ij}\zeta_{i,j},\\
\xi &= B_{ij}\varepsilon_{ij} + C_{ij}\mu_{ij} + D_{ijk}\gamma_{ijk} + \sigma\nu - \hbar\dot{\alpha} + F_{ij}\zeta_{i,j}\ ,\\
\lambda_i &= A_{ij}\upsilon_j - d_{ij}\dot{\zeta}_j + H_{ij}\alpha_{,j}\ ,\\
\rho\eta_i &= d_{ji}\upsilon_j + D_{ij}\dot{\zeta}_j + E_{ji}\alpha_{,j}\ ,\\
r_i &= H_{ji}\upsilon_j - E_{ij}\dot{\zeta}_j + K_{ij}\alpha_{,j}\ ,\\
M_{ij} &= d_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{ijmn}\mu_{mn} + f_{lmnij}\gamma_{lmn} + g_{ijmn}\zeta_{m,n} + F_{ij}\nu - h_{ij}\dot{\alpha}\ .
\end{aligned}
\tag{5.3.2}
$$

Coeficienții constitutivi $C_{ijmn}, E_{ijmn}, \ldots, F_{ij}, h_{ij}$, prezenți în reprezentarea ecuațiilor constitutive (5.3.2), exprimă specificațiile mediului și sunt funcții prescrise, de clasă $C^1(\mathcal{D})$, care îndeplinesc următoarele relații de simetrie:

$$
\begin{aligned}
&C_{ijkl} = C_{klij},\ B_{ijkl} = B_{klij} = B_{jikl},\ A_{ijklmn} = A_{lmnijk},\ E_{ijkl} = E_{klij},\\
&G_{ijlmn} = G_{jilmn},\ A_{ij} = A_{ji},\ B_{ij} = B_{ji},\ C_{ij} = C_{ji},\ K_{ij} = K_{ji},\ D_{ij} = D_{ji},\\
&a_{ij} = a_{ji},\ c_{ijk} = c_{jik},\ e_{ijmn} = e_{jimn},\ g_{ijmn} = g_{mnij},\ d_{ijmn} = d_{jimn}.
\end{aligned}
\tag{5.3.3}
$$

Utilizarea ecuațiilor geometrice (5.3.1), a ecuațiilor constitutive (5.3.2), a ecuației forțelor de echilibru (4.4.1), precum și a ecuațiilor suplimentare ale energiei (2.2.7), conduce la obținerea unui sistem de ecuații diferențiale, cu necunoscutele $u_i, \varphi_{ij}, \nu, \alpha$ și ζ_i, care are forma

$$
\begin{aligned}
&[C_{ijmn}(u_{n,m} - \varphi_{nm}) + E_{ijmn}\varphi_{nm} + F_{ijlmn}\varphi_{lm,n} + B_{ij}\nu - a_{ij}\dot{\alpha} + d_{ijmn}\zeta_{m,n}]_{,j} + \rho f_i = \rho\ddot{u}_i,\\
&[A_{ijklmn}\varphi_{lm,n} + F_{lmijk}(u_{m,l} - \varphi_{ml}) + G_{lmijk}\varphi_{ml} + D_{ijk}\nu - c_{ijk}\dot{\alpha} + f_{ijkmn}\zeta_{m,n}]_{,k} +\\
&+ [C_{ijmn}(u_{n,m} - \varphi_{nm}) + E_{ijmn}\varphi_{nm} + F_{ijlmn}\varphi_{lm,n} + B_{ij}\nu - a_{ij}\dot{\alpha} + d_{ijmn}\zeta_{m,n}] -\\
&- [E_{mnij}(u_{n,m} - \varphi_{nm}) + B_{ijmn}\varphi_{nm} + G_{ijlmn}\varphi_{lm,n} + C_{ij}\nu - b_{ij}\dot{\alpha} + e_{ijmn}\zeta_{m,n}] +\\
&+ \rho\ell_{ij} = I_{jk}\ddot{\varphi}_{ik},\\
&(A_{ij}\upsilon_j - d_{ij}\dot{\zeta}_j + H_{ij}\alpha_{,j})_{,i} - B_{ij}(u_{j,i} - \varphi_{ji}) - C_{ij}\varphi_{ji} - D_{ijk}\varphi_{ij,k} - \sigma\nu + \hbar\dot{\alpha} -\\
&- F_{ij}\zeta_{i,j} + \rho\ell = \rho k\ddot{\nu},\\
&(H_{ji}\upsilon_j - E_{ij}\dot{\zeta}_j + K_{ij}\alpha_{,j})_{,i} - a_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \dot{\varphi}_{ji}) - b_{ij}\dot{\varphi}_{ji} - c_{ijk}\dot{\varphi}_{ij,k} - \hbar\dot{\nu} - a\ddot{\alpha} -\\
&- h_{ij}\dot{\zeta}_{i,j} = -\rho s,\\
&[d_{ijmn}(u_{n,m} - \varphi_{nm}) + e_{ijmn}\varphi_{nm} + f_{lmnij}\varphi_{lm,n} + g_{ijmn}\zeta_{m,n} + F_{ij}\nu - h_{ij}\dot{\alpha}]_{,j} -\\
&- (d_{ij}\dot{\upsilon}_j + D_{ij}\ddot{\zeta}_j + E_{ji}\dot{\alpha}_{,j}) = -\rho\mathcal{M}_i.
\end{aligned}
\tag{5.3.4}
$$

În concordanță cu problema Dirichlet, corespunzătoare sistemului (5.3.4), condițiile pe frontieră se consideră sub forma care urmează

$$
\begin{aligned}
u_i(x,t) &= \widetilde{u}_i(x,t),\\
\varphi_{ij}(x,t) &= \widetilde{\varphi}_{ij}(x,t),\\
\nu(x,t) &= \widetilde{\nu}(x,t), \qquad (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,\infty),\\
\alpha(x,t) &= \widetilde{\alpha}(x,t),\\
\zeta_i(x,t) &= \widetilde{\zeta}_i(x,t),
\end{aligned}
\tag{5.3.5}
$$

unde $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\varphi}_{ij}$, $\widetilde{\nu}$, $\widetilde{\alpha}$ și $\widetilde{\zeta}_i$ sunt funcții prescrise.

Condițiile inițiale, care întregesc problema mixtă, cu date inițiale și la limită, asociată sistemului de ecuații (5.3.4), sunt prezentate în cele ce urmează

$$\begin{aligned} u_i(x,0) &= u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0) &= u_i^1(x),\\ \varphi_{ij}(x,0) &= \varphi_{ij}^0(x), & \dot{\varphi}_{ij}(x,0) &= \varphi_{ij}^1(x),\\ \nu(x,0) &= \nu^0(x), & \dot{\nu}(x,0) &= \nu^1(x),\\ \alpha(x,0) &= \alpha^0(x), & \dot{\alpha}(x,0) &= \alpha^1(x),\\ \zeta_i(x,0) &= \zeta_i^0, & \dot{\zeta}_i(x,0) &= \zeta_i^1(x), \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

pentru orice $x \in \mathcal{D}$, u_i^0, u_i^1, φ_{ij}^0, φ_{ij}^1, ν^0, ν^1, α^0, α^1, ζ_i^0 și ζ_i^1 fiind funcții, de asemenea, prescrise.

Se menționează faptul că funcțiile și condițiile prezentate anterior sunt suficient de regulate pe domeniul de definiție, pentru a avea posibilitatea efectuării operațiilor matematice ulterioare.

Definiție 5.3.1 *Se numește soluție a problemei mixte, cu date inițiale și la limită, $\mathcal{P}$, a termoelasticității mediilor micromorfe poroase, cu microtemperaturi, sistemul ordonat $(u_i, \varphi_{ij}, \nu, \alpha, \zeta_i)$ care satisface sistemul de ecuații (5.3.4), alături de condițiile inițiale (5.3.6) și de condițiile la limită (5.3.5), pentru toți $(x,t) \in \mathcal{D} \times (0,\infty)$.*

5.3.3 Rezultate auxiliare obținute

Următoarea teoremă exprimă un rezultat auxiliar, util obținerii unicității soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, a termoelasticității mediilor micromorfe poroase, cu microtemperaturi.

Teorema 5.3.1 *Variabilele, care caracterizează deformația unui mediu termoelastic micromorf poros, verifică egalitatea*

$$\begin{aligned} & t_{ij}\varepsilon_{ij} + s_{ij}\mu_{ij} + m_{kij}\gamma_{ijk} + \rho\eta\dot{\alpha} + \xi\nu + \lambda_i \upsilon_i + \rho\eta_i\dot{\zeta}_i + r_i\alpha_{,i} + M_{ij}\zeta_{i,j} = \\ & = C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + 2E_{ijmn}\varepsilon_{ij}\mu_{mn} + 2F_{ijlmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{lmn} + B_{ijmn}\mu_{ij}\mu_{mn} + \\ & + 2G_{ijlmn}\mu_{ij}\gamma_{lmn} + A_{ijklmn}\gamma_{ijk}\gamma_{lmn} + 2B_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + 2C_{ij}\mu_{ij}\nu + 2D_{ijk}\gamma_{ijk}\nu + \\ & + 2F_{ij}\zeta_{i,j}\nu + \sigma\nu^2 + 2d_{ijmn}\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n} + 2e_{ijmn}\mu_{ij}\zeta_{m,n} + 2f_{ijkmn}\gamma_{ijk}\zeta_{m,n} + \\ & + A_{ij}\upsilon_i\upsilon_j + 2H_{ij}\upsilon_i\alpha_{,j} + K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j} + g_{ijmn}\zeta_{i,j}\zeta_{m,n} + D_{ij}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_j + a(\dot{\alpha})^2. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Energia liberă Ψ este considerată sub forma pătratică

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2}C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + E_{ijmn}\varepsilon_{ij}\mu_{mn} + F_{ijlmn}\varepsilon_{ij}\gamma_{lmn} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\mu_{ij}\mu_{mn} + \\ & + G_{ijlmn}\mu_{ij}\gamma_{lmn} + \frac{1}{2}A_{ijklmn}\gamma_{ijk}\gamma_{lmn} + B_{ij}\varepsilon_{ij}\nu + C_{ij}\mu_{ij}\nu + D_{ijk}\gamma_{ijk}\nu + \\ & + F_{ij}\zeta_{i,j}\nu + \frac{1}{2}\sigma\nu^2 + d_{ijmn}\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n} + e_{ijmn}\mu_{ij}\zeta_{m,n} + f_{ijkmn}\gamma_{ijk}\zeta_{m,n} + \\ & + \frac{1}{2}A_{ij}\upsilon_i\upsilon_j + H_{ij}\upsilon_i\alpha_{,j} + \frac{1}{2}K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j} + \frac{1}{2}g_{ijmn}\zeta_{i,j}\zeta_{m,n}. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Cu scopul obținerii rezultatului referitor la unicitatea soluției problemei mixte $\mathcal{P}$, cu date inițiale și la limită, se consideră ipotezele standard care urmează:

(i) $\rho > 0,\ I_{ij} > 0,\ k > 0,\ a > 0,$

(ii) forma pătratică Ψ, exprimată prin intermediul relației (5.3.8), este pozitiv semi-definită,

(iii) coeficienții tensorului conductivității termice K_{ij} și cei constitutivi D_{ij} sunt componentele unor tensori pozitiv definiți.

5.3.4 Rezultate principale obținute

5.3.4.1 Unicitate

Teorema 5.3.2 *Dacă atât relațiile de simetrie (5.3.3), cât și ipotezele standard (i) – (iii) sunt verificate, atunci problema mixtă $\mathcal{P}$, cu date inițiale și la limită, are cel mult o soluție.*

5.3.4.2 Existența

Subiectul existenței soluției problemei mixte $\mathcal{P}$, cu date inițiale și la limită, va fi abordat în cazul în care condițiile la limită sunt omogene, ceea ce înseamnă că

$$\widetilde{u}_i(x,t)=0,\ \widetilde{\varphi}_{ij}(x,t)=0,\ \widetilde{\nu}(x,t)=0,\ \widetilde{\alpha}(x,t)=0,\ \widetilde{\zeta}_i(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathcal{D}\times(0,\infty). \tag{5.3.9}$$

Faptul că, atât sistemul de ecuații, cât și condițiile asociate problemei mixte, sunt extrem de complexe, demonstrarea rezultatului privind existența soluției acestei probleme va fi realizată într-o manieră specială, vezi [66, 97, 101], aceea de a transforma problema mixtă $\mathcal{P}$ într-o problemă Cauchy corelată cu o ecuație abstractă, de evoluție, pe un spațiu Hilbert, potrivit ales.

În cele ce urmează, vor fi folosite spațiile Hilbert și Sobolev bine-cunoscute, specificațiile referitoare la aceste spații, menționate în secțiunile 2.2.3 și 4.4.3, vor fi luate în considerare și pe parcursul acestei secțiuni.

Pe baza spațiilor Hilbert clasice $W_0^{1,2}$ și L^2, se definește spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ astfel

$$\mathcal{H}=\boldsymbol{W}_0^{1,2}\times\boldsymbol{L}^2\times\boldsymbol{W}_0^{1,2}\times\boldsymbol{L}^2\times W_0^{1,2}\times L^2\times W_0^{1,2}\times L^2\times\boldsymbol{W}_0^{1,2}\times\boldsymbol{L}^2, \tag{5.3.10}$$

cu notațiile reprezentate în secțiunea 2.2.3. În relația precedentă (5.3.10), spațiile Hilbert care se regăsesc în componența produsului de definire, induc o normă care înzestrează spațiul Hilbert $\mathcal{H}$, în continuare făcându-se referire la aceasta în calitate de norma originală a spațiului $\mathcal{H}$.

Se definește, pe spațiul $\mathcal{H}$, următorul produs scalar:

$$\begin{aligned}
&<(u_i,U_i,\varphi_{ij},\Phi_{ij},\nu,\mu,\alpha,\beta,\zeta_i,\varsigma_i),(u_i',U_i',\varphi_{ij}',\Phi_{ij}',\nu',\mu',\alpha',\beta',\zeta_i',\varsigma_i')>=\\
&\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}(\rho U_iU_i'+I_{jk}\Phi_{ij}\Phi_{ik}'+\rho k\mu\mu'+D_{ij}\varsigma_i\varsigma_j'+a\beta\beta')dV+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\big[C_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}'+\\
&+E_{ijmn}(\varepsilon_{ij}\mu_{mn}'+\varepsilon_{ij}'\mu_{mn})+F_{ijlmn}(\varepsilon_{ij}\gamma_{lmn}'+\varepsilon_{ij}'\gamma_{lmn})+B_{ijmn}\mu_{ij}\mu_{mn}'+\\
&+G_{ijlmn}(\mu_{ij}\gamma_{lmn}'+\mu_{ij}'\gamma_{lmn})+A_{ijklmn}\gamma_{ijk}\gamma_{lmn}'+B_{ij}(\varepsilon_{ij}\nu'+\varepsilon_{ij}'\nu)+C_{ij}(\mu_{ij}\nu'+\mu_{ij}'\nu)+\\
&+D_{ijk}(\gamma_{ijk}\nu'+\gamma_{ijk}'\nu)+F_{ij}(\zeta_{i,j}\nu'+\zeta_{i,j}'\nu)+\sigma\nu\nu'+d_{ijmn}(\varepsilon_{ij}\zeta_{m,n}'+\varepsilon_{ij}'\zeta_{m,n})+\\
&+e_{ijmn}(\mu_{ij}\zeta_{m,n}'+\mu_{ij}'\zeta_{m,n})+f_{ijkmn}(\gamma_{ijk}\zeta_{m,n}'+\gamma_{ijk}'\zeta_{m,n})+A_{ij}\upsilon_i\upsilon_j'+\\
&+H_{ij}(\upsilon_i\alpha_{,j}'+\upsilon_i'\alpha_{,j})+K_{ij}\alpha_{,i}\alpha_{,j}'+g_{ijmn}\zeta_{i,j}\zeta_{m,n}'\big].
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Teorema 5.3.3 *Produsul scalar introdus prin relația (5.3.11) induce o normă echivalentă cu norma originală din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.*

Alegerea formei operatorilor care urmează este inspirată de către funcțiile care intră în componența membrului stâng al fiecărei ecuații care constituie sistemul (5.3.4), astfel încât, aplicând procedura prezentată în [66], se introduc următorii operatori:

$$
\begin{aligned}
C_i^1\boldsymbol{u} &= \frac{1}{\rho}C_{ijmn}u_{n,mj}, \quad C_i^2\boldsymbol{\varphi} = -\frac{1}{\rho}\left[(C_{ijmn}-E_{ijmn})\varphi_{nm,j} - F_{ijlmn}\varphi_{lm,nj}\right],\\
B_i\nu &= \frac{1}{\rho}B_{ij}\nu_{,j}, \quad A_i^1\beta = -\frac{1}{\rho}a_{ij}\beta_{,j} \quad D_i^1\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{\rho}d_{ijmn}\zeta_{m,nj},\\
C_{ki}^3\boldsymbol{u} &= (I_{jk})^{-1}\left[(C_{ijmn}-E_{mnij})u_{n,m} + F_{lmijk}u_{m,lk}\right],\\
C_{ki}^4\boldsymbol{\varphi} &= -(I_{jk})^{-1}\left[(C_{ijmn}+B_{ijmn}-2E_{ijmn})\varphi_{nm} - A_{ijklmn}\varphi_{lm,nk}\right],\\
B_{ki}^2\nu &= (I_{jk})^{-1}\left[(B_{ij}-C_{ij})\nu + D_{ijk}\nu_{,k}\right], \quad A_{ki}^2\beta = -(I_{jk})^{-1}\left[(a_{ij}-b_{ij})\beta + c_{ijk}\beta_{,k}\right],\\
D_{ki}^2\boldsymbol{\zeta} &= -(I_{jk})^{-1}\left[(e_{ijmn}-d_{ijmn})\zeta_{m,n} - f_{ijkmn}\zeta_{m,nk}\right],\\
E\nu &= \frac{1}{\rho k}(A_{ij}\nu_{,ij} - \sigma\nu), \quad F\boldsymbol{\varsigma} = -\frac{1}{\rho k}d_{ij}\varsigma_{j,i}, \quad G\alpha = \frac{1}{\rho k}H_{ij}\alpha_{,ij},\\
H\boldsymbol{u} &= -\frac{1}{\rho k}B_{ij}u_{j,i}, \quad K\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\rho k}\left[(B_{ij}+C_{ij})\varphi_{ji} - D_{ijk}\varphi_{ij,k}\right],\\
L\beta &= \frac{1}{\rho k}\hbar\beta, \quad M\boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{\rho k}F_{ij}\zeta_{i,j}, \quad N\alpha = \frac{1}{a}K_{ij}\alpha_{,ij},\\
P\nu &= \frac{1}{a}H_{ji}\nu_{,ij}, \quad Q\boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{a}e_{ij}\varsigma_{j,i}, \quad R^1\boldsymbol{U} = -\frac{1}{a}a_{ij}U_{j,i},\\
R^2\boldsymbol{\Phi} &= \frac{1}{a}\left[(a_{ij}-b_{ij})\Phi_{ji} - c_{ijk}\Phi_{ij,k}\right], \quad S\mu = -\frac{1}{a}\hbar\mu, \quad C_s^5\boldsymbol{u} = \Lambda_{si}d_{ijmn}u_{n,mj},\\
C_s^6\boldsymbol{\varphi} &= \Lambda_{si}\left[(e_{ijmn}-d_{ijmn})\varphi_{n,mj} + f_{lmnij}\varphi_{lm,nj}\right], \quad W_s\nu = \Lambda_{si}F_{ij}\nu_{,j},\\
T_s\beta &= -\Lambda_{si}e_{ij}\beta_{,j}, \quad V_s\boldsymbol{\zeta} = \Lambda_{si}g_{ijmn}\zeta_{m,nj}, \quad Z_s\mu = -\Lambda_{si}d_{ij}\mu_{,j},
\end{aligned}
\tag{5.3.12}
$$

unde $e_{ij} = E_{ij} + h_{ij}$, iar matricea $\Lambda_{si} = (\Lambda_{ij})$ se introduce astfel încât

$$\Lambda_{ij}D_{il} = \delta_{jl},$$

δ_{jl} fiind simbolul lui Kronecker, vezi secțiunile 2.2.3 și 4.4.3.

În cele ce urmează, se consideră funcțiile matriceale $\mathcal{U}$ și $\mathcal{U}_0$, corespunzătoare necunoscutelor $u_i,\ U_i,\ \varphi_{ij},\ldots,\zeta_i,\ \varsigma_i$, și datelor inițiale $u_i^0,\ U_i^0,\ \varphi_{ij}^0,\ldots,\zeta_i^0,\ \varsigma_i^0$, precum și matricea corespunzătoare încărcărilor, $\mathcal{F}$, sub forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= (u_i, U_i, \varphi_{ij}, \Phi_{ij}, \nu, \mu, \alpha, \beta, \zeta_i, \varsigma_i),\\
\mathcal{U}_0 &= (u_i^0, U_i^0, \varphi_{ij}^0, \Phi_{ij}^0, \nu^0, \mu^0, \alpha^0, \beta^0, \zeta_i^0, \varsigma_i^0),\\
\mathcal{F} &= (\mathbf{0}, f_i, \mathbf{0}, \ell_{ij}, 0, \ell, 0, s, \mathbf{0}, \mathcal{M}_i).
\end{aligned}
\tag{5.3.13}
$$

Pentru a transforma problema mixtă $\mathcal{P}$, cu date inițiale și la limită, într-o problemă Cauchy asociată unei ecuații abstracte, de evoluție, se introduce operatorul matriceal $\mathcal{L}$, având drept componente operatorii definiți prin relațiile (5.3.12), cu domeniul de definiție $D(\mathcal{L})$, reprezentat în cele ce urmează

$$
\begin{aligned}
D(\mathcal{L}) = &(\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2} \times\\
&\times (W_0^{1,2} \cap W^{2,2}) \times W_0^{1,2} \times (W_0^{1,2} \cap W^{2,2}) \times W_0^{1,2} \times\\
&\times (\boldsymbol{W}_0^{1,2} \cap \boldsymbol{W}^{2,2}) \times \boldsymbol{W}_0^{1,2},
\end{aligned}
\tag{5.3.14}
$$

semnificația spațiilor Sobolev $W_0^{1,2},\ W^{2,2},\ \boldsymbol{W}_0^{1,2}$ și $\boldsymbol{W}^{2,2}$ fiind bine-cunoscută.

Prin intermediul funcțiilor matriceale introduse prin relațiile (5.3.13), problema Cauchy, asociată ecuației de evoluție, are forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{L}\mathcal{U}(t) + \mathcal{F}(t), \qquad 0 \le t \le t_0,\\
&\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0.
\end{aligned}
\tag{5.3.15}
$$

Proprietatea operatorului $\mathcal{L}$, oferită de teorema care urmează, este obligatorie în demonstrarea rezultatului privind existența soluției problemei Cauchy anterioare (5.3.15).

Teorema 5.3.4 *În condițiile în care atât relațiile de simetrie (5.3.3), precum și ipotezele standard (i) – (iii) sunt valabile, atunci operatorul $\mathcal{L}$ este disipativ.*

Teorema 5.3.5 *Dacă relațiile de simetrie (5.3.3) și ipotezele standard (i) – (iii) sunt îndeplinite, atunci operatorul $\mathcal{L}$ satisface condiția de contraimagine.*

Prin intermediul *Teoremelor* 5.3.4 și 5.3.5, se demonstrează faptul că operatorul $\mathcal{L}$ întrunește condițiile cerute de Corolarul Lumer-Phillips, corespunzător Teoremei Hille-Yosida, vezi [7], [127], în acest fel, fiind posibilă enunțarea teoremei prezentată în continuare.

Teorema 5.3.6 *Dacă relațiile de simetrie (5.3.3), precum și ipotezele standard (i) – (iii) sunt satisfăcute, atunci operatorul $\mathcal{L}$ generează un semigrup de contracții pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.*

Teorema 5.3.7 *În condițiile în care, atât relațiile de simetrie (5.3.3), cât și ipotezele standard (i) – (iii) sunt valabile, iar datele inițiale $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0 \in D(\mathcal{L})$ și încărcările $f_i,\ \ell_{ij},\ \ell,\ s,\ \mathcal{M}_i \in C^1([0,\infty), L^2) \cap C^0([0,\infty), W_0^{1,2})$, atunci problema abstractă, reprezentată prin relațiile (5.3.15), admite soluția unică*

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(t) \in C^1([0,\infty), \mathcal{H}).$$

5.3.4.3 Dependența continuă

Teorema 5.3.8 *Dacă relațiile de simetrie (5.3.3) și ipotezele standard (i) – (iii) sunt îndeplinite, atunci soluția $\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$, a problemei (5.3.15), depinde continuu atât de datele inițiale $\boldsymbol{\mathcal{U}}_0$, precum și de încărcările $f_i,\ \ell_{ij},\ \ell,\ s$ și $\mathcal{M}_i$, astfel că*

$$\left|\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)\right| \leq \int_0^t \parallel (f_i, \ell_{ij}, \ell, s, \mathcal{M}_i) \parallel ds + \left|\boldsymbol{\mathcal{U}}_0\right|.$$

Rezultatul teoremei de mai sus caracterizează, în mod complet, soluția problemei Cauchy (5.3.15), prin adăugarea, la rezultatele privind existența și unicitatea soluției, a dependenței continue în raport, atât de datele inițiale, precum și de încărcări.

5.3.5 Concluzii

Abordarea subiectului referitor la efectele microtemperaturii asupra mediilor termoelastice micromorfe, poroase, evidențiază avantajele utilizării teoriei semigrupurilor de operatori, în contextul dificultății crescute a ecuațiilor și condițiilor, cauzate de un număr mare de necunoscute.

Rezultatele calitative obținute, corespunzătoare existenței, unicității și dependenței continue a soluției problemei mixte, cu date inițiale și la limită, se datorează supleței acestei teorii, dezvoltarea subiectului fiind posibilă în mod firesc, chiar în cadrul unei complexități crescute a ecuațiilor și condițiilor care guvernează teoria termoelasticității mediilor micromorfe, poroase, cu microtemperaturi.

Capitolul 6

Concluzii finale, contribuții originale. Rezultate diseminate. Direcții ulterioare de cercetare

6.1 Concluzii finale, contribuții originale

Rezultatele cercetării, obținute în timpul studiilor doctorale, s-au concretizat în treisprezece articole publicate în această perioadă, nouă articole publicate în reviste de specialitate cotate ISI, și anume, [24, 26, 27, 93, 96, 97, 99--101], un articol publicat în jurnal indexat BDI, [23], două sub formă de capitole, publicate în volume ale editurii Springer, indexate BDI, [25, 28], și un articol publicat în volumul unei conferințe internaționale de specialitate, [86].

Cinci dintre articolele publicate în reviste de specialitate, cotate ISI, au fost premiate în cadrul competiției naționale ,,Premierea rezultatelor cercetării - UEFISCDI", și anume, [26, 27, 93, 100, 101].

Rezultatele originale, din cadrul tezei de doctorat, se bazează pe zece articole publicate, din cele treisprezece, dintre care, șapte articole publicate în reviste cotate ISI, mai exact, [26,27,96,97,99--101], două sub formă de capitole, publicate în volume ale editurii Springer, indexate BDI, [25, 28], și un articol publicat în volumul unei conferințe internaționale, [86]. Dintre articolele premiate, în urma competiției naționale ,,Premierea rezultatelor cercetării - UEFISCDI", sunt incluse în teza de doctorat patru, din cele cinci articole premiate, și anume, [26, 27, 100, 101].

Rezultatele cercetării mediilor dipolare s-au concretizat atât în elaborarea unui model matematic care a inclus efectele microtemperaturilor prezentate de microelemente, abordarea problemei mixte și studierea unicității, existenței și dependenței continue a soluției fiind realizată prin intermediul teoriei semigrupurilor de operatori, precum și în analizarea consecințelor determinate de prezența teoriei Green-Naghdi de tip III asupra comportării spațiale a vibrațiilor, realizată prin obținerea unor estimări ale amplitudinii.

Contribuțiile asupra mediilor dipolare poroase sunt materializate în modelarea teoriei termoelasticității, aferente acestor medii, sub acțiunea teoriei Green-Naghdi de tip III, fiind vizate studierea unicității, realizată printr-o modalitate specială, alături de obținerea ecuațiilor constitutive și a unei generalizări pentru un principiu variațional foarte cunoscut, în studierea soluțiilor generalizate ale problemei mixte, asociate acestor medii, precum și în extinderea teoremei asociate domeniului de influență din teoria clasică a elasticității, prin generalizarea acesteia la contextul mediilor dipolare poroase.

Cercetarea mediilor micropolare poroase a condus la obținerea rezultatelor originale referitoare la probleme foarte diverse, și anume: comportarea spațială a vibrațiilor armonice în timp și studiul amplitudinii, în contextul acestor medii și în lipsa disipării energiei, realizarea a două modele matematice ale teoriei termoelasticității mediilor micropolare poroase, construite, unul în prezența unei deformații de ordin fracționar, cu scopul obținerii ecuațiilor constitutive, a ecuației non-Fourier a căldurii și a unei relații de reciprocitate, celălalt, ca o consecință a înglobării efectelor existenței microtemperaturilor, precum și extinderea, asupra mediilor Cosserat poroase, a unui principiu de minim al energiei.

Contribuțiile asupra mediilor micromorfe și asupra celor micromorfe poroase sunt concluzionate prin elaborarea a două modele matematice, primul, algoritmic, fiind dedicat aprofundării teoriei termoelasticității mediilor micromorfe, prin utilizarea derivatei fracționare Caputo, iar cel de-al doilea, studiind problema mixtă a termoelasticității mediilor micromorfe poroase, în prezența microparticulelor înzestrate cu microtemperaturi.

Baza teoretică și modelele prezentate, expresii ale contribuției originale, constituie premizele extinderii studiilor efectuate și descrise pe parcursul tezei de doctorat, asupra unor medii și teme diverse, prin folosirea tiparelor propuse.

6.2 Rezultate diseminate

6.2.1 Articole publicate în timpul studiilor doctorale, incluse în teza de doctorat

Articolele elaborate și publicate în timpul studiilor doctorale, menționate în secțiunea 6.1, pe care se bazează rezultatele originale, sunt prezentate în cele ce urmează, în ordinea apariției în cadrul tezei de doctorat:

1) Marin Marin, Chirilă Adina, **Codarcea-Munteanu Lavinia**: On a thermoelastic material having a dipolar structure and microtemperatures. Applied Mathematical Modelling **80**, 827-839, Elsevier BV (2020, online 2019), https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.11.022, **cotat ISI**, vezi [101],

WOS: 000517665300044; IMPACT FACTOR: 3,633
Research Domain: Engineering (Q_1); Mathematics (Q_1); Mechanics (Q_1),

2) Marin Marin, Chirilă Adina, **Codarcea Lavinia**, Vlase Sorin: On vibrations in Green-Naghdi thermoelasticity of dipolar bodies. Analele Științifice ale Universității Ovidius Constanța-Seria Matematică **27**(1), 125-140, Ovidius University (2019), https://doi.org/10.2478/auom-2019-0007, **cotat ISI**, vezi [99],

WOS: 000465369400007; IMPACT FACTOR: 0,844
Research Domain: Mathematics (Q_2),

3) **Codarcea-Munteanu Lavinia**, Marin Marin: A study on the thermoelasticity of three-phase-lag dipolar materials with voids. Boundary Value Problems **2019**(137), 1-24, Springer Verlag (2019), https://doi.org/10.1186/s13661-019-1250-9, **cotat ISI**, vezi [26],

WOS: 000482741800001; IMPACT FACTOR: 1,794
Research Domain: Mathematics (Q_1),

4) Marin Marin, **Codarcea Lavinia**: The Initial Boundary Value Problem for Porous Bodies. Proceedings of the 15th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2016 **2**, 807-816, Bratislava, Slovak Republic, Conference Proceedings (2016),
https://www.researchgate.net/publication/320232732, vezi [86],

5) Marin Marin, Othman Mohamed I.A., Vlase Sorin, **Codarcea-Munteanu Lavinia**: Thermoelasticity of Initially Stressed Bodies with Voids: A Domain of Influence. Symmetry-Basel **11**(4) 573, 1-12, Multidisciplinary Digital Publishing Institute MDPI (2019),
https://doi.org/10.3390/sym11040573, **cotat ISI**, vezi [100],

WOS: 000467314400132; IMPACT FACTOR: 2,645
Research Domain: Science & Technology-Other Topics (Q_2),

6) **Codarcea-Munteanu Lavinia**, Marin Marin: Micropolar Thermoelasticity with Voids Using Fractional Order Strain. In: Flaut Cristina, Hošková-Mayerová Šárka, Flaut Daniel (eds.) Models and Theories in Social Systems **179**, 133-147, Springer, Cham (2018), https://doi.org/10.1007/978-3-030-00084-4_7, **indexat BDI**, vezi [25],

7) Marin Marin, **Codarcea Lavinia**, Chirilă Adina: Qualitative results on mixed problem of micropolar bodies with microtemperatures. Applications and Applied Mathematics AAM **12**(2), 776-789 (2017), **indexat ISI**, vezi [97],

WOS: 000418606200009
Research Domain: Mathematics,

8) Marin Marin, Vlase Sorin, **Codarcea-Munteanu Lavinia**, Chirilă Adina: A generalization of the minimum principle energy for Cosserat porous materials. Acta Technica Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering **60**(IV), 479-484, Technical University of Cluj-Napoca (2017), **indexat ISI**, vezi [96],

WOS: 000428901100006
Research Domain: Mechanics,

9) **Codarcea-Munteanu Lavinia**, Marin Marin: An Algorithmic Perspective on the Thermoelasticity of the Micromorphic Materials Using Fractional Order Strain. In: Hoškova-Mayerová Š., Flaut C., Maturo F. (eds) Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics. Studies in Fuzziness and Soft Computing **404**, 161-176. Springer, Cham (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-61334-1_8, **indexat BDI**, vezi [28],

10) **Codarcea-Munteanu Lavinia**, Marin Marin: Influence of Geometric Equations in Mixed Problem of Porous Micromorphic Bodies with Microtemperature. Mathematics **8**(8) 1386, 1-16, Multidisciplinary Digital Publishing Institute MPDI (2020), https://doi.org/10.3390/math8081386, **cotat ISI**, vezi [27],

WOS: 000564702500001; IMPACT FACTOR:1,747
Research Domain: Mathematics (Q_1).

6.2.2 Prezentarea rezultatelor cercetării

Conferințele internaționale, în cadrul cărora am prezentat rezultate ale cercetării, obținute pe parcursul studiilor doctorale, sunt:

- **MATHMOD 9th VIENNA International Conference on Mathematical Modelling, February 21-23, 2018, University of Technology, Wien, Austria**

Organizator:	**Vienna University of Technology - Automation and Control Institute (ACIN), Institute for Analysis and Scientific Computing (ASC)**,
Prezentare:	**Modeling Fractional Order Strain in Dipolar Thermoelasticity**,
Secțiune:	**Mechanical Systems 3**;

- **BRAMAT 11th International Conference on Materials Science and Engineering, March 13-16, 2019, Poiana Brașov, Brașov, Romania**

Organizator:	**Universitatea Transilvania din Braşov,**
Prezentare:	**A study on the thermoelasticity of three-phase-lag dipolar materials with voids,**
Secțiune:	**Ceramics, polymers and composite materials.**

6.2.3 Articole publicate în timpul studiilor doctorale, care nu au fost incluse în teza de doctorat

Alte articole elaborate și publicate în reviste de specialitate, pe parcursul studiilor doctorale, care nu au fost incluse în teza de doctorat, sunt prezentate în cele ce urmează, două dintre acestea fiind publicate în reviste cotate ISI, iar unul în revistă indexată BDI. Ordinea prezentării acestor lucrări este cea a publicării.

1) Codarcea-Munteanu Lavinia , Marin Marin: Thermoelasticity with fractional order strain for dipolar materials with voids. Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics **10**(59)(2), 49-58, Transilvania University Press (2017), **indexat BDI**, vezi [23],

2) Marin Marin, Agarwal Ravi P., **Codarcea Lavinia**: A mathematical model for three-phase-lag dipolar thermoelastic bodies. Journal of Inequalities and Applications **2017**(109), 1-16, Springer Open (2017), https://doi.org/10.1186/s13660-017-1380-5, **cotat ISI**, vezi [93],

WOS: 000401064900003; IMPACT FACTOR: 1,47
Research Domain: Mathematics (Q_1),

3) Codarcea-Munteanu Lavinia, Chirilă Adina, Marin Marin: Modeling Fractional Order Strain in Dipolar Thermoelasticity. IFAC PapersOnLine **51**-2, 601-606, Elsevier Science Direct (2018), https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.03.102, **indexat ISI**, vezi [24],

WOS: 000435693000103
Research Domain: Automation & Control Systems (Q_3).

6.2.4 Premierea rezultatelor cercetării

Dintre articolele publicate pe parcursul școlii doctorale, prezentate mai sus, au fost premiate, în cadrul competiției naționale **Premierea rezultatelor cercetării - UEFISCDI**, următoarele articole:

1) A mathematical model for three-phase-lag dipolar thermoelastic bodies. Journal of Inequalities and Applications, PN - III - P1 - 1.1 - PRECISI - 2017 - 17279, vezi [93],

2) A study on the thermoelasticity of three-phase-lag dipolar materials with voids. Boundary Value Problems, PN - III - P1 - 1.1 - PRECISI - 2019 - 37183, vezi [26],

3) Thermoelasticity of Initially Stressed Bodies with Voids: A Domain of Influence. Symmetry-Basel, PN - III - P1 - 1.1 - PRECISI - 2019 - 33351, vezi [100],

4) On a thermoelastic material having a dipolar structure and microtemperatures. Applied Mathematical Modelling, PN - III - P1 - 1.1 - PRECISI - 2020 - 43142, vezi [101],

5) Influence of Geometric Equations in Mixed Problem of Porous Micromorphic Bodies with Microtemperature. Mathematics, PN - III - P1 - 1.1 - PRECISI - 2020 - 46560, vezi [27].

6.3 Direcții ulterioare de cercetare

Pe baza modelelor și a subiectelor teoretice, referitoare la cazul anizotrop al mediilor poroase, elaborate pe parcursul tezei de doctorat, o direcție viitoare de cercetare va fi reprezentată de studierea cazului izotrop, asociat acestor medii poroase, cadru în care coeficienții se regăsesc în număr mult mai restrâns decât în cazul anizotrop, facilitând realizarea unor aplicații numerice.

O altă direcție viitoare de cercetare va consta în concretizarea rezultatelor studierii propagării undelor în medii termoelastice anizotrope poroase, în prezența teoriei Green-Naghdi de tip III, sub forma unor simulări numerice și reprezentări grafice care să interpreteze efectele, atât ale acțiunii acestei teorii, precum și ale prezenței porilor, asupra diverselor caracteristici ale undelor, cum ar fi viteza de fază sau factorul de calitate care definește atenuarea, analiza vizând deopotrivă situațiile în care calculele numerice sunt afectate sau cele în care acestea nu sunt influențate de existența golurilor.

În aceeași direcție de cercetare se va încadra și studierea propagării undelor în medii care prezintă tipare ale deformării de tip ,,origami", materializate prin expresia unor simulări numerice și a unor modele grafice. Cercetarea va fi realizată pe medii ortotrope, predispuse plierii, prin intermediul funcției Green, armonice în timp, care va avea un rol perturbator, iar prezența unei surse emitente, în mod constant, va determina o perturbare cu fronturi paralele cu plierea, și implicit o deformare de tip ,,origami".

Bibliografie

[1] Abbas, I.A.: Generalized thermoelastic interaction in functional graded material with fractional order three-phase lag heat transfer. J. Cent. South Univ. **22**(5), 1606-1613 (2015). https://doi.org/10.1007/s11771-015-2677-5

[2] Adams, R.A.: Sobolev Spaces, 1st Edition, Pure and Applied Mathematics Series **65**. Academic Press, New York (1975).

[3] Altenbach, H., Eremeyev, V.A.: Cosserat Media. Chapter in Generalized continua - from the theory to engineering applications, 65-130 (2013). https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1371-4_2

[4] Aouadi, M.: A theory of thermoelastic diffusion materials with voids. Z. Angew. Math. Phys. **61**(2), 357-379 (2010). https://doi.org/10.1007/s00033-009-0016-0

[5] Bazarra, N., Campo, M., Fernández, J.R.: A thermoelastic problem with diffusion, microtemperatures, and microconcentrations. Acta Mech. **230**, 31-48 (2019). https://doi.org/10.1007/s00707-018-2273-5

[6] Băleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., Trujillo, J.J.: Fractional Calculus: Models and Numerical Methods, Second Edition. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos: Volume 5, World Scientific (2012). https://doi.org/10.1142/10044

[7] Brezis, H.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitex, Springer, New York (2011). https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7

[8] Cao, W., Yang, X., Tian, X.: Basic theorems in linear micromorphic thermoelasticity and their primary application. Acta Mech. Solida Sin. **26**(2), 161-176 (2013). https://doi.org/10.1016/S0894-9166(13)60016-6

[9] Caputo, M.: Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. Geophys. J. R. Astron. Soc. **13**(5), 529-539 (1967). https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

[10] Caputo, M., Fabrizio, M.: A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. Progr. Fract. Differ. Appl. **1**(2), 73-85 (2015).

[11] Carbonaro, B., Russo, R.: Energy inequalities and the domain of influence theorem in classical elastodynamics. J. Elast. **14**(2), 163-174 (1998). https://doi.org/10.1007/BF00041663

[12] Cattaneo, C.: Sulla conduzione del calore. Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3**, 83-101 (1948).

[13] Ciarletta, M.: A theory of micropolar thermoelasticity without energy dissipation. J. Therm. Stresses **22**(6), 581-594 (1999). https://doi.org/10.1080/014957399280760

[14] Ciarletta, M., Scalia, A.: Some Results in Linear Theory of Thermomicrostretch Elastic Solids. Meccanica **39**(3), 191-206 (2004). https://doi.org/10.1023/B:MECC.0000022843.48821.af

[15] Chandrasekharaiah, D.S.: A uniqueness theorem in the theory of elastic materials with voids. J. Elast. **18**(2),173-179 (1987). https://doi.org/10.1007/BF00127556

[16] Chandrasekharaiah, D.S.: Hyperbolic Thermoelasticity: A review of Recent Literature. Appl. Mech. Rev. **51**(12), 705-729 (1998). https://doi.org/10.1115/1.3098984

[17] Chirilă, A.: Generalized micropolar thermoelasticity with fractional order strain. Bull. Transilvania Univ. Braşov, Ser. III: Math. Inf. Phys. **10**(59)(1), 83-90 (2017).

[18] Chiriță, S.: Spatial decay estimates for solutions describing harmonic vibrations in a thermoelastic cylinder. J. Therm. Stresses **18**(4), 421-436 (1995). https://doi.org/10.1080/01495739508946311

[19] Chiriță, S., Ghiba, I.D.: Strong ellipticity and progressive waves in elastic materials with voids. Proc. Math. Phys. Eng. Sci. **466**, 439-458 (2010). https://doi.org/10.1098/rspa.2009.0360

[20] Chiriță, S.: On the harmonic vibrations in linear theory of thermoelasticity of type III. Mech. Res. Commun. **38** , 393-398 (2011). https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.05.006

[21] Chiriță, S., Ciarletta, M., D'Apice, C.: On the theory of thermoelasticity with microtemperatures. J. Math. Anal. Appl. **397**(1), 349-361 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.061

[22] Choudhuri, S.K.R.: On A Thermoelastic Three-Phase-Lag Model. J. Therm. Stresses **30**(3), 231-238 (2007). https://doi.org/10.1080/01495730601130919

[23] **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: Thermoelasticity with fractional order strain for dipolar materials with voids. Bull. Transilvania Univ. Braşov, Ser. III: Math. Inf. Phys. **10**(59)(2), 49-58 (2017).

[24] **Codarcea-Munteanu, L. F.**, Chirilă, A.N., Marin, M.: Modeling Fractional Order Strain in Dipolar Thermoelasticity. IFAC PapersOnLine **51**-2, 601-606 (2018). https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.03.102

[25] **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: Micropolar Thermoelasticity with Voids Using Fractional Order Strain. In: Flaut Cristina, Hoškova-Mayerová Šárka, Flaut Daniel (eds) Models and Theories in Social Systems **179**, 133-147. Springer, Cham (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-030-00084-4_7

[26] **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: A study on the thermoelasticity of three-phase-lag dipolar materials with voids. Bound. Value Probl. **2019**(137), 1-24 (2019). https://doi.org/10.1186/s13661-019-1250-9

[27] **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: Influence of Geometric Equations in Mixed Problem of Porous Micromorphic Bodies with Microtemperature. Mathematics **8**(8) 1386, 1-16 (2020). https://doi.org/10.3390/math8081386

[28] **Codarcea-Munteanu, L.**, Marin, M.: An Algorithmic Perspective on the Thermoelasticity of the Micromorphic Materials Using Fractional Order Strain. In:Hoškova-Mayerová Š., Flaut C., Maturo F. (eds) Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics. Studies in Fuzziness and Soft Computing **404**, 161-176.Springer Cham (2021) https://doi.org/10.1007/978-3-030-61334-1_8

[29] Cosserat, E., Cosserat, F.: Théorie des corps déformables. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris (1909).

[30] Cowin, S.C., Nunziato, J.W.: Linear elastic materials with voids. J. Elast. **13**(2), 125-147 (1983). https://doi.org/10.1007/BF00041230

[31] Dow, J.O.: Problem Definition and Development. In: A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures, 1st Edition, 1-78. Academic Press, United States (1998). https://doi.org/10.1016/B978-012221440-0/50029-7

[32] Dyszlewicz, J.: Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Vol.**15**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2004). https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7

[33] El-Karamany, A.S., Ezzat, M.A.: On fractional thermoelasticity. Math. Mech. Solids **16**(3), 334-346 (2011). https://doi.org/10.1177/1081286510397228

[34] El-Karamany, A.S., Ezzat, M.A.: On the three-phase-lag linear micropolar thermoelasticity theory. Eur. J. Mech. A/Solids **40**, 198-208 (2013). https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.01.011

[35] Eringen, A.C.: Nonlinear Theory of Continuous Media. In: McGraw-Hill series in engineering sciences. McGraw-Hill Publishing Company, 477 pg., New York, U.S. (1962)

[36] Eringen, A.C. : Mechanics of micromorphic materials. In: Applied Mechanics, 131-138. Springer, Berlin, Heidelberg (1966). https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_12

[37] Eringen, A.C., Suhubi, E.S.: Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I. Int. J. Eng. Sci. **2** (2), 189-203 (1964). https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90004-7

[38] Eringen, A.C.: Linear Theory of Micropolar Elasticity. J. Math. Mech. **15**(6), 909-923 (1966). https://www.jstor.org/stable/24901442

[39] Eringen, A.C.: Mechanics of Micromorphic Continua. In: Mechanics of Generalized Continua, 18-35. Springer, Berlin, Heidelberg (1968).https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_2

[40] Eringen, A.C.: Micropolar Elastic Solids with Stretch. In: Elastic Solids, 31 pg., Princeton University, Department of Aerospace and Mechanical Science, U.S. (1968).

[41] Eringen, A.C.: Foundations of micropolar thermoelasticity. International Centre for Mechanical Sciences Udine, Courses and lectures **23**, Springer-Verlag, Wien GMBH (1970).

[42] Eringen, A.C.: Balance laws of micromorphic mechanics. Int. J. Eng. Sci. **8**(10), 819-828 (1970). https://doi.org/10.1016/0020-7225(70)90084-4

[43] Eringen, A.C.: Theory of micromorphic materials with memory. Int. J. Eng. Sci. **10**(7), 623-641 (1972). https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90089-4

[44] Eringen, A.C.: Continuum Physics **III**: Mixtures and E.M. Field Theories. Academic Press Inc., New Jersey (1976). https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240803-8.X5001-4

[45] Eringen, A.C.: Theory of thermo-microstretch elastic solids. Int. J. Eng. Sci. **28**(12), 1291-1301 (1990). https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90076-U

[46] Eringen, A.C.: Micromorphic Elasticity. In: Microcontinuum Field Theories 269-285, Springer, New York, NY (1999). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0555-5_7

[47] Eringen, A.C.: Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids. Springer, New York (1999).

[48] Ezzat, M.A., El Karamany, A.S., Fayik, M.A.: Fractional order theory in thermoelastic solid with three-phase-lag heat transfer. Arch. Appl. Mech. **82**(4), 557-572 (2012). https://doi.org/10.1007/s00419-011-0572-6

[49] Ezzat, M.A., El-Karamany, A.S., El-Bary, A.A.: Two-temperature theory in Green-Naghdi thermoelasticity with fractional phase-lag heat transfer. Microsyst. Technol. **24**(2), 951-961 (2018). https://doi.org/10.1007/s00542-017-3425-6

[50] Goodman, M.A., Cowin, S.C.: A continuum theory for granular materials. Arch. Ration. Mech. Anal. **44**(4), 249-266 (1972). https://doi.org/10.1007/BF00284326

[51] Green, A.E., Rivlin, R.S.: Multipolar continuum mechanics. Arch. Ration. Mech. Anal. **17**(2), 113-147 (1964). https://doi.org/10.1007/BF00253051

[52] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On thermodynamics and the nature of the second law. Proc. Math. Phys. Eng. Sci. **357**(1690), 253-270 (1977). https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0166

[53] Green, A.E., Naghdi, P.M.: A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. Proc. Math. Phys. Eng. Sci. **432**(1885), 171-194 (1991). https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012

[54] Green, A.E., Naghdi, P.M.: On undamped heat waves in an elastic solid. J. Therm. Stresses **15**(2), 253-264 (1992). https://doi.org/10.1080/01495739208946136

[55] Green, A.E., Naghdi, P.M.: Thermoelasticity without energy dissipation. J. Elast. **31**(3), 189–208 (1993). https://doi.org/10.1007/BF00044969

[56] Grot, R.A.: Thermodynamics of a continuum with microstructure. Int. J. Eng. Sci. **7**(8), 801-814 (1969). https://doi.org/10.1016/0020-7225(69)90062-7

[57] Gurtin, M.E.: Variational principles for linear initial-value problems. Q. Appl. Math. **22**(3), 252-256 (1964).

[58] Hetnarski, R.B.: Thermal Stresses IV. Elsevier, Amsterdam (1996).

[59] Ieșan, D.: Mecanica generalizată a solidelor. Universitatea ”Al. I. Cuza”, Centrul de multiplicare, Iași (1980).

[60] Ieșan, D.: A theory of thermoelastic materials with voids. Acta Mech. **60**(1-2), 67-89 (1986). https://doi.org/10.1007/BF01302942

[61] Ieșan, D., Quintanilla, R.: Existence and continuous dependence results in the theory of microstretch elastic bodies. Int. J. Eng. Sci. **32**(6), 991-1001 (1994). https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90051-5

[62] Ieșan, D., Quintanilla, R.: On a theory of thermoelasticity with microtemperatures. J. Therm. Stresses **23**(3), 199-215 (2000). https://doi.org/10.1080/014957300280407

[63] Ieșan, D.: On a theory of micromorphic elastic solids with microtemperatures. J. Therm. Stresses **24**(8), 737-752 (2001). https://doi.org/10.1080/014957301300324882

[64] Ieșan, D.: Thermoelastic Models of Continua, Solid Mechanics and its Applications Series **118**. Springer Science+Business Media Dordrecht, originally published by Kluwer Academic Publishers (2004). https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2310-1

[65] Ieșan, D., Nappa, L.: On the theory of heat for micromorphic bodies. Int. J. Eng. Sci. **43**(1-2),17-32 (2005). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.09.003

[66] Ieșan, D., Quintanilla, R.: On thermoelastic bodies with inner structure and microtemperatures. J. Math. Anal. Appl. **354**(1), 12-23 (2009). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.12.017

[67] Ignaczak, J., Carbonaro, B., Russo, R.: Domain of influence theorem in thermoelasticity with one relaxation time. J. Therm. Stresses **9** (1), 79-91 (1986). https://doi.org/10.1080/01495738608961889

[68] Iovane, G., Passarella, F.: Some Theorems in Thermoelasticity for Micropolar Porous Media. Rev. Roum. Sci. Tech. Ser. Mec. Appl. **46**(1-6), 9-18 (2001).

[69] Kumar, R., Gupta, V.: Uniqueness, reciprocity theorem and variational principle in fractional order theory of thermoelasticity with voids. Mater. Phys. Mech. (M.P.M.) **1**(1), 21-34 (2013).

[70] Lianngenga, R.: Theory of micropolar thermoelastic materials with voids. IJPAMS **9**(1), 1-8 (2016).

[71] Liu, W., Saanouni, K., Forest, S., Hu, P.: The Micromorphic Approach to Generalized Heat Equations. J. Non-Equilib. Thermodyn. **42**(4), 327-357 (2017). https://doi.org/10.1515/jnet-2016-0080

[72] Lord, H.W., Shulman, Y.: A generalized dynamical theory of theroelasticity. J. Mech. Phys. Solids **15**(5), 299-309 (1967). https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5

[73] Luca, I.: Domain of influence and uniqueness in viscothermoelasticity of integral type. Cont. Mech. Termodyn. **1** (3), 213-226 (1989). https://doi.org/10.1007/BF01171380

[74] Malinowska, A.B., Odzijewicz, T., Torres, D.F.M.: Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology, Springer (2015). https://doi.org/10.1007/978-3-319-14756-7

[75] Marin, M.: Cesaro means in thermoelasticity of dipolar bodies. Acta Mech. **122**(1-4), 155-168 (1997). https://doi.org/10.1007/BF01181996

[76] Marin, M.: A temporally evolutionary equation in elasticity of micropolar bodies with voids. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **60**(3-4), 3-12 (1998).

[77] Marin, M., Marinescu, C.: Thermoelasticity of initially stressed bodies, asymptotic equipartition of energy. Int. J. Eng. Sci. **36**(1), 73-86 (1998). https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00019-0

[78] Marin, M.: An evolutionary equation in thermoelasticity of dipolar bodies. J. Math. Phys. **40**(3), 1391-1399 (1999). https://doi.org/10.1063/1.532809

[79] Marin, M.: Week Solutions in Elasticity of Dipolar Porous Materials. Math. Probl. Eng. **2008**, article ID 158908, 1-8 (2008). https://doi.org/10.1155/2008/158908

[80] Marin, M.: Harmonic Vibrations in Thermoelasticity of Microstretch Materials. J. Vib. Acoust. **132**(4):044501, 1-6 (2010). https://doi.org/10.1115/1.4000971

[81] Marin, M.: Some Estimates on Vibrations in Thermoelasticity of Dipolar Bodies. J. Vib. Control **16**(1), 33-47 (2010). https://doi.org/10.1177/1077546309103419

[82] Marin, M., Florea, O.: On temporal behaviour of solutions in Thermoelasticity of porous micropolar bodies. An. Șt. Univ. Ovidius Constanța **22**(1), 169-188 (2014). https://doi.org/10.2478/auom-2014-0014.

[83] Marin, M., Abbas, I.A., Kumar, R.: Relaxed Saint-Venant principle for thermoelastic micropolar diffusion. Struct. Eng. Mech. **51**(4), 651-662 (2014). https://doi.org/10.12989/sem.2014.51.4.651

[84] Marin, M., Agarwal, R.P.: On the possibility of locating in time of solutions for thermoelastic porous dipolar bodies. Acta Mech. **226**(6), 2053-2063 (2015). https://doi.org/10.1007/s00707-014-1276-0

[85] Marin, M., Othman, M.I.A., Abbas, I.A.: An Extension of the Domain of Influence Theorem for Generalized Thermoelasticity of Anisotropic Material with Voids. J. Comput. Theor. Nanos. **12**(8), 1594-1598 (2015). https://doi.org/10.1166/jctn.2015.3934

[86] Marin, M.,**Codarcea, L.**: The Initial Boundary Value Problem for Porous Bodies. Proceedings of the 15th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2016 **2**, 807-816, Bratislava, Slovak Republic (2016). https://www.researchgate.net/publication/320232732

[87] Marin, M., Baleanu, D.: On vibrations in thermoelasticity without energy dissipation for micropolar bodies. Bound. Value Probl. **2016**(111), 1-19 (2016). https://doi.org/10.1186/s13661-016-0620-9

[88] Marin, M., Crăciun, E.M., Pop, N.: Considerations on mixed initial-boundary value problems for micropolar porous bodies. Dynam. Syst. Appl. **25**(1-2), 175-196 (2016).

[89] Marin, M., Nicaise, S.: Existence and stability results for thermoelastic dipolar bodies with double porosity. Contin. Mech. Termodyn. **28**(6), 1645-1657 (2016). https://doi.org/10.1007/s00161-016-0503-4

[90] Marin, M.: An approach of a heat-flux dependent theory for micropolar porous media. Meccanica **5**(5), 1127-1133 (2016). https://doi.org/10.1007/s11012-015-0265-2

[91] Marin, M., Abbas, I.: Evolution of solutions for dipolar bodies in Thermoelasticity without energy dissipation. An. Șt. Univ. Ovidius Constanța-Seria Matematică **24**(1), 57-82 (2016). https://doi.org/10.1515/auom-2016-0019

[92] Marin, M., Baleanu, D., Vlase, S.: Effect of microtemperatures for micropolar thermoelastic bodies. Struct. Eng. Mech. **6**(3), 381-387 (2017). https://doi.org/10.12989/sem.2017.61.3.381

[93] Marin, M., Agarwal, R.P., **Codarcea, L.**: A mathematical model for three-phase-lag dipolar thermoelastic bodies. J. Inequal. Appl. **2017**(109), 1-16 (2017). https://doi.org/10.1186/s13660-017-1380-5

[94] Marin, M., Broadbridge, P., Öchsner, A.: Well-posed dual-phase-lag model of a thermoelastic dipolar body. ZAMM - J. Appl. Math. Mech. / Zeitschrift für Angewandte Mathematik un Mechanik/ **97**(12), 1645-1658 (2017). https://doi.org/10.1002/zamm.201700164

[95] Marin, M., Crăciun, E.M.: Uniqueness results for a boundary value problem in dipolar thermoelasticity to model composite materials. Compos. Part B: Eng. **126**(1), 27-37 (2017). https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.05.063

[96] Marin, M., Vlase, S., **Codarcea-Munteanu, L.**, Chirilă, A.: A generalization of the minimum principle energy for Cosserat porous materials. Acta Tech. Napocensis, Ser. Appl. Math. Mech. Eng. **60**(IV), 479-484 (2017).

[97] Marin, M., **Codarcea, L.**, Chirilă, A.: Qualitative results on mixed problem of micropolar bodies with microtemperatures. Appl. Appl. Math. AAM **12**(2), 776-789 (2017).

[98] Marin, M., Radulescu, V.: A Variational Approach for the Mixed Problem in the Elastostatics of Bodies with Dipolar Structure. Mediterr. J. Math. **15**(6) 221, 1-12 (2018). https://doi.org/10.1007/s00009-018-1269-7

[99] Marin, M., Chirilă, A., **Codarcea, L.**, Vlase, S.: On vibrations in Green-Naghdi thermoelasticity of dipolar bodies. An. St. Univ. Ovidius Constanța-Seria Matematică **27**(1), 125-140 (2019). https://doi.org/10.2478/auom-2019-0007

[100] Marin, M., Othman, M.I.A., Vlase, S., **Codarcea-Munteanu, L.**: Thermoelasticity of Initially Stressed Bodies with Voids: A Domain of Influence. Symmetry-Babel **11**(4) 573, 1-12, Multidisciplinary Digital Publishing Institute MDPI (2019). https://doi.org/10.3390/sym11040573

[101] Marin, M., Chirilă, A., **Codarcea-Munteanu, L.**: On a thermoelastic material having a dipolar structure and microtemperatures. Appl. Math. Model. **80**, 827-839 (2020, online 2019). https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.11.022

[102] Marin, M., Abbas, I., Vlase, S., Crăciun, E.M.: A Study of Deformations in a Thermoelastic Dipolar Body with Voids. Symmetry-Basel **12** (2) 267,1-14 (2020). https://doi.org/10.3390/sym12020267

[103] Marin, M., Crăciun, E.M., Pop, N.: Some Results in Green-Lindsay Thermoelastity of Bodies with Dipolar Structure. Mathematics: Appl. Math. Solid Mech. MDPI **8** (4) 497, 1-12 (2020). https://doi.org/10.3390/math8040497

[104] Markov, A.A. (1957, online 2014) Theory of Algorithms. J. Symb. Log. **22**(1), 77-79 (1957, online 2014). https://doi.org/10.2307/2964063

[105] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F.: Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. **11**(1), 415-448 (1962). https://doi.org/10.1007/BF00253946

[106] Mindlin, R.D.: Microstructure in linear elasticity. Columbia University, New York (1963)

[107] Mindlin, R.D.: Micro-structure in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. **16**(1), 57-78 (1964). https://doi.org/10.1007/BF00248490

[108] Miranville, A., Quintanilla, R.: A Phase-Field Model Based on a Three-Phase-Lag Heat Conduction. Appl. Math. Optim. **63**(1), 133-150 (2011). https://doi.org/10.1007/s00245-010-9114-9

[109] Nicaise, S., Valein, J.: Stabilization of non-homogeneous elastic materials with voids. J. Math. Anal. Appl. **387**(2), 1061-1087 (2012). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.10.018

[110] Nunziato, J.W., Cowin, S.C.: A nonlinear theory of elastic materials with voids. Arch. Ration. Mech. Anal. **72**(2), 175-201 (1979). https://doi.org/10.1007/BF00249363

[111] Othman, M.I.A., Tantawi, R. S., Hilal, M.I.M.: Rotation and modified Ohm's law influence on magneto-thermoelastic micropolar material with microtemperatures. Appl. Math. Comput. **276** , 468-480 (2016). https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.12.031

[112] Othman, M.I.A., Marin, M.: Effect of thermal loading due to laser pulse on thermoelastic porous medium under G-N theory. Results Phys. **7**, 3863-3872 (2017). https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.10.012

[113] Othman, M.I.A., Elmaklizi, Y.D., Mansoure, N.T.:The effect of temperature-dependent properties on generalized magneto-thermo-elastic medium with two-temperature under three-phase-lag model. MMMS **13**(1), 122-134 (2017). https://doi.org/10.1108/MMMS-09-2016-0045

[114] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences Series **44**. Springer-Verlag, New York Inc. (1983). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[115] Povstenko, Y.Z.: Thermoelasticity that uses fractional heat conduction equation. J. Math. Sci. **162**(2), 296-305 (2009). https://doi.org/10.1007/s10958-009-9636-3

[116] Quintanilla, R.: On the spatial decay for the dynamical problem of thermo-microstretch elastic solids. Int. J. Eng. Sci. **40** (2), 109-121 (2002). https://doi.org/10.1016/S0020-7225(01)00042-8

[117] Reiss, R.: Minimum principles for linear elastodynamics. J. Elast. **8** , 35-45 (1978). https://doi.org/10.1007/BF00044509

[118] Rusu, G.: On existence and uniqueness in thermoelasticity of materials with voids. Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci. **35**(7-8), 339-346 (1987).

[119] Scalia, A., Svanadze, M.: Potential Method in the Linear Theory of Thermoelasticity with Microtemperatures. J. Therm. Stresses **32** (10), 1024-1042 (2009) https://doi.org/10.1080/01495730903103069

[120] Suhubi, E.S., Eringen, A.C.: Nonlinear theory of micro-elastic solids-II. Int. J. Eng. Sci. **2** (4), 389-404 (1964). https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90017-5

[121] Svanadze, M.: Fundamental solutions in the theory of micromorphic elastic solids with microtemperatures. J. Therm. Stresses **27**(4), 345-366 (2004). https://doi.org/10.1080/01495730490427582

[122] Toupin, R.A.: Elastic materials with couple-stresses. Arch. Ration. Mech. Anal. **11**(1), 385-414 (1962). https://doi.org/10.1007/BF00253945

[123] Twiss, R.J., Eringen, A.C.: Theory of mixtures for micromorphic materials - I: Balance laws. Int. J. Eng. Sci. **9**(10), 1019-1044 (1971). https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90032-2

[124] Twiss, R.J., Eringen, A.C.: Theory of mixtures for micromorphic materials - II. Elastic constitutive equations. Int. J. Eng. Sci. **10**(5), 437-465 (1972). https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90051-1

[125] Tzou, D.Y.: A Unified Field Approach for Heat Conduction From Macro-to Micro-Scales. J. Heat Transfer **117**(1), 8-16 (1995). https://doi.org/10.1115/1.2822329

[126] Voigt, W.: Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. I. Abh. Gessel. Wiss. Götingen **34**, 3-52 (1887). http://eudml.org/doc/135896

[127] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1980).

[128] Youssef, H.M.: Theory of generalized thermoelasticity with fractional order strain. J. Vib. Control **22**(18), 3840-3857 (2016). https://doi.org/10.1177/1077546314566837

[129] Yu, Y.J., Tian, X.G., Lu, T.J.: On fractional order generalized thermoelasticity with micromodeling. Acta Mech. **224**(12), 2911-2927 (2013). https://doi.org/10.1007/s00707-013-0913-3

Anexe

Rezumatul tezei de doctorat

Teza de doctorat de față, denumită **Contribuții asupra mediilor poroase**, este rezultatul unei cercetări complexe asupra mediilor poroase, fiind formată din șase capitole, primul introductiv, urmat de patru capitole care prezintă rezultatele originale, fundamentate pe cele publicate în zece, din cele treisprezece, articole elaborate pe parcursul studiilor doctorale, și un ultim capitol, în cadrul căruia sunt prezentate concluziile finale, contribuțiile originale și direcțiile ulterioare de cercetare.

Capitolul 2 materializează rezultatele originale, obținute în urma cercetării extinse a mediilor dipolare, prin construirea a două modele matematice ale termoelasticității acestor medii, care includ efectele, atât ale microtemperaturilor, precum și ale teoriei Green-Naghdi de tip III, asupra particularităților problemei mixte, fiind studiate existența, unicitatea și dependența continuă a soluției, prin aplicarea teoriei semigrupurilor de operatori, respectiv comportamentul spațial al vibrațiilor.

Contribuțiile originale asupra mediilor dipolare poroase sunt expuse în Capitolul 3, prima secțiune fiind rezultatul modelării matematice a teoriei termoelasticității mediilor dipolare poroase, sub acțiunea teoriei Green-Naghdi de tip III, cu studierea consecințelor asupra caracteristicilor problemei mixte, cu date inițiale și la limită, obținând forma ecuațiilor constitutive, a unei relații de reciprocitate, o generalizare a unui cunoscut principiu variațional, precum și un rezultat referitor la unicitatea soluției, într-o manieră specială, deosebită de cea clasică. Celelalte două subcapitole sunt dedicate studierii soluțiilor generalizate ale problemei mixte, prin intermediul teoriei semigrupurilor de operatori liniari, fără introducerea unor restricții adiționale, respectiv a obținerii unei extensii, asupra teoriei termoelasticității acestor medii, a teoremei referitoare la domeniul de influență, din teoria elasticității clasice, prin intermediul unor inegalități, obținute în prealabil.

Rezultatele originale, prezentate în Capitolul 4, sunt concretizate în urma cercetării mediilor micropolare poroase, cele patru subcapitole fiind dedicate, astfel: primul, analizei comportării spațiale a vibrațiile armonice în timp, în contextul teoriei liniare a termoelasticității, fără disiparea energiei, obținând estimări ale amplitudinii, următoarele două, realizării a două modele matematice, consecințe ale considerării unei deformații de ordin fracționar, cu deducerea ecuațiilor constitutive, a ecuației non-Fourier a căldurii, și a unui rezultat referitor la studiul reciprocității, respectiv a repercusiunilor înglobării microtemperaturilor asupra studiului problemei mixte, iar ultimul subcapitol este alocat extinderii unui principiu de minim al energiei, la cadrul mediilor Cosserat poroase.

Capitolul 5 conține contribuțiile originale asupra mediilor micromorfe poroase, esența acestui capitol fiind constituită prin propunerea a două modele matematice, unul algoritmic, privind studierea termoelasticității mediilor micromorfe, cu considerarea derivatei fracționare Caputo, iar celălalt, privind dezvoltarea studierii problemei mixte, în contextul creat de existența microtemperaturilor.

Scopul elaborării acestei lucrări este constituirea unui suport amplu de tehnici și modele matematice ale teoriei elasticității, respectiv a termoelasticității mediilor poroase, prin abordarea și dezvoltarea unor probleme complexe, în contexte la fel de complexe, asociate acestor medii, alcătuind o bază teoretică care creează premiza extinderii, asupra unor subiecte variate, a metodelor și schemelor prezentate, contribuind la o mai bună înțelegere a proceselor naturale și a structurii unor materiale complexe și eliminând astfel, discrepanțele dintre teorie și rezultatele oferite de experimente aplicative concrete.

The doctoral thesis summary

The present doctoral thesis, entitled **Contributions on the porous media**, is the result of a complex research on the porous media, consisting of six chapters, the first introductory, followed by four chapters presenting the original results, based on those published in ten of the thirteen articles developed during the doctoral studies, and a final chapter, in which the final conclusions, the original contributions and the further research directions are presented.

Chapter 2 materializes the original results, obtained from extensive research of dipolar media, by constructing two mathematical models of these media thermoelasticity, which include the effects of both microtemperatures and Green-Naghdi type III theory, on the peculiarities of the mixed problem, the existence, uniqueness and continuous dependence of the solution being studied by applying the theory of operators semigroups, respectively the spatial behavior of the vibrations.

The original contributions on the porous dipolar media are presented in Chapter 3, the first section being the result of mathematical modeling of the porous dipolar media thermoelasticity theory, under the action of Green-Naghdi type III theory, studying the consequences of the mixed initial-boundary value problem characteristics, obtaining the form of the constitutive equations, of a reciprocal relation, a generalization of a known variational principle, as well as a result referring to the uniqueness of the solution, in a special manner, different from the classical one. The other two subchapters are dedicated to the study of the mixed problem generalized solutions, through the theory of linear operators semigroups, without introducing additional restrictions, respectively to obtaining an extension on the thermoelasticity theory of these media, the theorem on the domain of influence, through previously obtained inequalities.

The original results, presented in Chapter 4, are concretized following the research of porous micropolar media, the four subchapters being dedicated as follows: the first, to the analysis of the spatial behavior of the harmonic vibrations in time, in the context of linear thermoelasticity, without energy dissipation, obtaining estimates of the amplitude, the next two, to the realization of two mathematical models, consequences of considering a fractional deformation, with the deduction of the constitutive equations, the non-Fourier heat equation, and a result related to the study of reciprocity, the incorporation repercussions of microtemperatures on the study of the mixed problem, and the last subchapter is allocated to the extension of a minimum energy principle, within the porous Cosserat media.

Chapter 5 contains the original contributions obtained on the porous micromorphic media, the essence of this chapter being the proposal of two mathematical models, one algorithmic, on studying the thermoelasticity of micromorphic media, considering the fractional derivative Caputo, and the other, on developing the study of the mixed problem, in the context created by the existence of the microtemperatures.

The aim of this paper is to provide a comprehensive support of mathematical techniques and models of the elasticity, respectively thermoelasticity theory of porous media, by addressing and developing complex problems, in equally complex contexts, associated with these media, forming a theoretical basis that creates the extension premise, on various topics, of the methods and schemes presented, contributing to a better understanding of natural processes and of the complex materials structure, and thus eliminating the discrepancies between theory and the results provided by concrete application experiments.