Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Ștefan-Lucian GAROIU

Studii asupra operatorilor liniari și pozitivi

Studies on positive linear operators

REZUMAT

Conducător științific
Prof. dr. Radu PĂLTĂNEA

BRAȘOV, 2025

Cuprins

1 Introducere

1.1 Domeniul tezei

Rezultatele originale care fac parte din această teză reprezintă o cercetare în domeniul matematic al teoriei aproximării. Acest topic este de interes în cercetarea matematicii deoarece multe alte domenii din matematică sunt strâns legate de teoria aproximării. De exemplu, în analiza reală și complexă teoria generală a șirurilor și seriilor, dezvoltările asimptotice, moduli de netezime, K-funcționale și convexitatea sunt fundamentale în studiul procesleor de aprixomare. De asemenea, în teoria aproximării sunt prezente aspecte ale analizei funcționale și teoriei operatorilor precum teoria abstractă a operatorilor liniari și pozitivi împreună cu teorema lui Korovkin, C_0-semigrupuri și altele. Teoria aproximării este legată de teoria probabilităților prin teoria generală a lui Feller și de teoria ecuațiilor diferențiale prin proprietăți speciale ale unor clase de operatori. Pe de altă parte, teoria aproximării se ocupă de posibilitatea de a reduce obiectele matematice generale (cum ar fi funcțiile) la clase mai simple de obiecte (cum ar fi polinoamele). Pe parcursul cercetării în matematică, această abordare este fundamentală, făcând astfel din teoria aproximării un subiect de interes cu mare aplicabilitate.

Un moment semnificativ în dezvoltarea teoriei aproximării ca domeniu de cercetare distins în cadrul analizei matematice își are începutul cu celebrele teoreme ale celei mai bune aproximări a lui Cebyshev și ale lui K. Weierstrass care, în secolul al XIX-lea, a demonstrat aproximarea funcțiilor continue pe o mulțime compactă prin polinoame. Teorema propusă de Weierstrass a fost demonstrată și de S. N. Bernstein care a introdus celebrii operatori care îi poartă numele (acești operatori au fost modificați ulterior de L. V. Kantorovich și J. L. Durrmeyer pentru a aproxima și funcțiile integrabile). Ulterior, bazele teoriei aproximării ca subiect de cercetare în matematică au fost consolidate în continuare prin rezultate datorate lui Popoviciu, Bohman și Korovkin prin care funcțiile continue pe mulțimi compacte pot fi aproximate prin operatori pozitivi și liniari, și anume, aceștia au demonstrat că orice operator liniar și pozitiv care îndeplinește anumite condiții poate fi folosit în locul operatorului lui Bernstein.

În prezent, teoria aproximării se preocupă de metode prin care se obțin operatori liniari și pozitivi, pentru care teorema lui Korovkin poate fi utilizată pentru a verifica dacă aceștia aproximează funcții, estimări ale gradului de aproximare cu acești operatori care pot fi obținute sub formă de estimări cantitative (și anume, rezultate în termeni de module de netezime al căror scop este măsurarea netezimii), teoreme de tip Voronovskaya (ce vor fi discutat ulterior). Rezultatele fundamentale în aceste direcții se datorează lui G. G. Lorenz, R. DeVore, F. Altomare, Z. Ditzian, V. Totik, H. Gonska, P. L. Butzer, U. Abel și mulți alții. Pentru o prezentare detaliată a acestui tip de rezultate, cărțile lui Lorentz și DeVore ([37]), DeVore ([36]), Altomare ([15]), Ditzian și Totik ([39]) pot fi consultate.

1.2 Motivarea alegerii temei

După cum am menționat anterior, teoria aproximării se preocupă de aproximarea proceselor dificile prin altele mult mai simple, care pot fi studiate cu ușurință și cu proprietăți similare cu proprietățile proceselor luate în considerare. O astfel de situație poate fi observată în practică, de exemplu, în informatică unde un calculator are la dispoziție doar operațiile de adunare și înmulțire, așadar, estimările numerelor iraționale pot fi obținute de către calculator doar dacă folosește aproximări care implică aceste două operații, adică calculatorul poate face acest lucru folosind aproximări prin polinoame (de exemplu, polinomul lui Taylor, totuși în această situație apar dificultăți, deoarece nu toate funcțiile sunt netede, multe fiind continue, însă pentru a evita această problemă pot fi utilizați operatori pozitivi și liniari, cum ar fi operatorii Bernstein și alții care vor fi prezentați mai departe în teză).

În afară de aceasta, teoria aproximării poate fi utilă în teoria ecuației diferențiale unde se pot determina soluțiile unei probleme Cauchy dacă există teoreme care dau condiții în care poate fi generat C_0-semigrupul asociat cu problema Cauchy. Totuși, aici există un dezavantaj, deoarece aceste teoreme nu oferă o formă explicită a C_0-semigrupul. În teoria aproximării această problemă este rezolvată prin teoreme care generează C_0-semigrupul și oferă, de asemenea, o aproximare a acestuia prin iterații ale operatorilor liniari și pozitivi care generează semigrupul, permițând astfel studierea proprietăților C_0-semigrupului prin analiza proprietăților operatorului care îl aproximează.

Alte motivații ale alegerii acestui domeniu de cercetare sunt reprezentate de legătura dintre teoria aproximării și analiza funcțională (deoarece multe concepte din analiza funcțională pot fi folosite în teoria aproximării precum: spații Banach, principiul mărginirii uniforme, etc.) iar mai recent există o legătură între Inteligența Artificială și teoria aproximării deoarece rețelele neuronale pot fi văzute ca un operator de aproximare.

1.3 Structura tezei

Această teză este împărțită în șapte capitole. În cel de-al doilea capitol, cu titlul *Preliminarii*, prezentăm notațiile utilizate de-a lungul tezei și rezultatele din literatură, obținute de alți cercetători din acest domeniu, care au fost cele mai relevante în dezvoltarea tezei, cum ar fi operatori utilizați în teoria aproximării și proprietăți ale acestora, module de netezime, teoreme de tip Voronovskaya, aspecte din teoria C_0-smemigrupurilor și o scurtă recapitulare a rezultatelor despre seriile geometrice de operatori liniari și pozitivi. Aceste rezultate preliminare fac toate parte din Bibliografie și sunt citate ori de câte ori sunt menționate pe parcursul tezei.

This thesis is divided in seven chapters. In the second chapter, with the title *Preliminaries*, we present the notations used throughout the thesis and results din literature, obtained by other researchers in this field, such as operators used in approximation theory and theorems regarding them, moduli of smoothness, Voronovskaya theorems, C_0-smemigroups and Geometric series of positive and linear operators, which were the most relevant to developing the original results contained in this thesis. These preliminary results are all part of the References and they are cited whenever they are mentioned throughout the thesis.

Cel de-al treilea capitol, *Teorema Voronovskaya generalizată și convergența seriilor de puteri de operatori liniari și pozitivi*, este dedicat obținerii de noi operatori de aproximare care sunt construiți ca serii de puteri de operatori liniari și pozitivi mai generale (deci poate fi văzut ca o generalizare a rezultatelor existente privind seria geometrica de operatori liniari și pozitivi din [1, 4, 80] și altele menționate pe parcursul tezei). Tot în acest capitol am obținut o generalizare a teoremei Voronvsakya dând o formă explicită a limitei utilizate în astfel de teoreme. Aceste rezultate fac parte din articolul original *Generalized Voronovskaya theorem and the convergence of power series of positive linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 531 (2024), Issue 2, Part 2.

În capitolul al patrulea, *Reprezentarea limitei seriilor de puteri de operatori liniari și pozitivi prin utilizarea semigrupului de operatori generați de iterațiile acestora*, am obținut o caracterizare a unei serii generale de puteri de operatori liniari și pozitivi prin utilizarea C_0-semigrupului generat de iteratele operatorilor liniari și pozitivi aparținând unei anumite clase. Acest rezultat poate fi găsit în articolul original: *The representation of the limit of power series of positive linear operators by using the semigroup of operators generated by their iterates,* Dolomites Research Notes on Approximation (2023), 16(3), 39-47.

În capitolul al cincilea, *O teoremă de tip Voronovskaya asociată unor serii geometrice de operatori Bernstein - Durrmeyer*, am a obținut o teoremă Voronovskaya pentru operatorii obținuți de U. Abel în [1] care sunt seriile geometrice asociate operatorului Bernstein-Durrmeyer. Aici principalele dificultăți au fost cauzate de spațiul de funcții pe care a fost studiat acest operator, spațiu rar întâlnit în teoria aproximării. Aceste rezultate fac parte din articolul original: *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein-Durrmeyer operators*, Carpathian Journal of Mathematics(2025), 41(2).

În capitolul al șaselea și al șaptelea am obținut variante exponențiale ale operatorilor Kantorovich-Stancu și ale operatorilor Bernstein-Durrmeyer având ca model construcția dată în [18]. În ceea ce privește acești operatori am obținut rezultate de aproximare folosind teoremele Korovkin și prin studierea normei acestor operatori pe o versiune ponderată a sapțiilor L^p, apoi am obținut rezultate asimptotice și estimări cantitative. De asemenea, am obținut și rezultate cantitative folosind relația dintre K-funcționale și modulele de netezime (relație dată în [62]). Aceste capitole fac parte din articolele originale: *Exponential Bernstein-Durrmeyer operators*, General Mathematics(2024), Volume 32, no. 2, 84-97 și *Exponential Kantorovich-Stancu operators,* Bull. Univ. Transilvania Brasov, Ser. 3, Math. Comput. Sci., 5(67), 2025, no. 2, 127-144.

1.4 Rezultate originale obținute în teză

În timpul studiilor mele de doctorat, cercetarea pe care am realizatt-o este cuprinsă în următoarele articole originale:

1. *Generalized Voronovskaya theorem and the convergence of power series of positive linear operators*

   Aici scopul nostru a fost mai întâi să obținem o versiune generalizată a teoremei Voronovskaya sub forma limitei $n^s(L_n - I)^s f$, $s \in \mathbb{N}$, unde L_n sunt anumiți operatori liniari și pozitivi. În mod echivalent, aceasta este o formă explicită a teoremei Voronovskaya pentru combinațiile Micchelli de operatori. Apoi, aplicăm acest rezultat pentru a obține limita anumitor serii de puteri de operatori liniari și pozitivi.

2. *The representation of the limit of power series of positive linear operators by using the semigroup of operators generated by their iterates*

   În această lucrare, scopul nostru a fost de a oferi o caracterizare a limitei seriilor de puteri de forma $\beta_n \sum_{k=0}^{\infty}(L_n)^k,\ n \in \mathbb{N}$, unde $\beta_n \in \mathbb{R}$ prin utilizarea C_0-semigrupurilor generate de iterațiile operatoriilor $(L_n)_n,\ n \in \mathbb{N}$, care aparțin unei anumite clase. Acest rezultat a fost obținut prin utilizarea structurii proprii atât a operatorilor, cât și a C_0-semigrupului.

3. *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein - Durrmeyer operators*

   În acest articol am obținut un rezultat asimptotic privind convergența operatorilor $P_n = \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{\infty} M_n,\ n \in \mathbb{N}$, unde M_n sunt bine cunoscuții operatori Bernstein-Durrmeyer și P_n sunt seria geometrică de operatori asociată acestui operator. Dificultatea obținerii acestui rezultat a fost cauzată de alegerea spațiului pe care am lucrat, și anume, un subspațiu al L^∞, care este rar întâlnit în teoria aproximării.

4. *Exponential Kantorovich-Stancu operators*

   Aici am introdus o variantă exponențială a operatorilor Kantorovich-Stancu. În ceea ce privește acești operatori, demonstrăm că ei verifică condițiile teoremei lui Korovkin și, de asemenea, că ei aproximează funcții dintr-un spațiu L^p ponderat. Mai mult, vom obține o teoremă de tip Voronovskaya și câteva estimări cantitative ale aproximării folosind modulul de continuitate de ordinul întâi. De asemenea, vom demonstra câteva estimări privind aproximarea funcțiilor dintr-un spațiu L^p ponderat folosind K-funcționalele de ordinul unu și doi. În final, vom obține o estimare care implică modulul de continuitate de ordinul întâi și modulul de netezime de ordinul doi folosind relația de echivalență dintre aceste module și K-funcționalele corespunzătoare.

5. *Exponential Bernstein-Durrmeyer operators*

   În acest articol am introdus o variantă exponențială a operatorilor Bernstein-Durrmeyer. În ceea ce privește acești noi operatori obținem niște rezultate de convergență, o teoremă de tip Voronovskaya și câteva estimări cantitative folosind modulul de continuitate de ordinul întâi și modulul de netezire de ordinul doi și apoi relația dintre aceștia și K-funcționale. De asemenea, studiem proprietățile lor de aproximare simultană.

1.5 Diseminarea rezultatelor

Rezultatele enumerate în secțiunea anterioară au fost publicate în diverse jurnale de specialitate din cercetarea în matematică și unele dintre ele au fost prezentate în cadrul unor conferințe internaționale de teoria aproximării.

1. În cadrul ediției din 2022 a conferinței ”Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis”, desfășurată la Matera, Italia, 5-8 Iulie 2022, a avut loc prelegerea: *Despre convergența serii de puteri ale operatorilor liniari pozitivi.*

   De asemenea, în numărul special dedicat acestei conferințe am publicat al doilea articol:

   Ș. Garoiu, R. Paltanea, *The representation of the limit of power series of positive linear operators by using the semigroup of operators generated by their iterate,* Dolomites Research Notes on Approximation (2023), 16(3), 39-47.

   Acest articol a fost realizat în colaborare cu îndrumătorul meu Prof. Dr. Radu Păltănea.

2. În timpul celei de-a paisprezecea ediții a ”International Conference on Approximation Theory and Applications”, ținută în Sibiu, România, 12-14 Septembrie 2022, am susținut comunicarea: *Voronovskaya type results for geometric series of Durrmeyer operators*, legată de al treilea articol din secțiunea anterioară.

3. În timpul celei de-a patra ediții a

   International Conference on Mathematics and Computer Science, ținută în Brașov, România, 15-17 Septembrie, 2022, am ținut comunicarea: *On the convergence of power series of positive linear operators*

   De asemenea, am publicat următorul articol realizat în colaborare cu Prof. Dr. Radu Păltănea:

   Ş. Garoiu, R. Păltănea, *Generalized Voronovskaya theorem and the convergence of power series of positive linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 531 (2024), Issue 2, Part 2.

4. În timpul celei de-a cincea ediții a International Conference on Mathematics and Computer Science, held in Brașov, România, 13-15 Iunie, 2024, am ținut prelegerea: *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein - Durrmeyer operator*

   De asemenea, am publicat următorul articol:

   Ș. Garoiu, *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein-Durrmeyer operators*, Carpathian Journal of Mathematics(2025), 41(2),

5. Alte articole publicate:

   Ș. Garoiu, *Exponential Bernstein-Durrmeyer operators*, General Mathematics(2024), Volume 32, no. 2, 84-97,

   Ș. Garoiu, *Exponential Kantorovich-Stancu operators,* Bull. Univ. Transilvania Brasov, Ser. 3, Math. Comput. Sci., 5(67), 2025, no. 2, 127-144.

1.6 Mulțumiri

În primul rând, aș dori să-mi exprim recunoștința pentru sprijinul și contribuția neprețuită la dezvoltarea mea ca cercetător în etapa de doctorat consilierului meu prof. dr. Radu Păltănea care mi-a răspuns la fiecare întrebare pe care am avut-o și mi-a oferit îndrumarea și asistența ori de câte ori a fost nevoie.

În al doilea rând, aș dori să mulțumesc Departamentului de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov și, de asemenea, Universității mele pentru sprijinirea fiecărei ieșiri la conferințe din străinătate și, de asemenea, pentru facilitarea procedurii de cercetare.

Nu în ultimul rând, aș dori să mulțumesc mult familiei mele pentru sprijinul și încurajarea necondiționată de-a lungul acestor ani.

2 Preliminarii

2.1 Notații și rezultate de bază

În primul rând, vom prezenta notațiile folosite în teză.

Fie $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ și $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prin $C([a, b])$ ne referim la spațiul Banach al funcțiilor $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe un interval $[a, b]$, care este înzestrat cu nomra supremum $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. De asemenea, $C^k([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$, reprezintă spațiul funcțiilor continue pe $[a, b]$ ce admit derivate de ordinul k^{th} iar prin $B([a, b])$ notăm spațiul funcțiilor mărginite pe $[a, b]$.

Apoi, $L^p([0, 1])$, $1 \le p \le \infty$ reprezintă mulțimea funcțiilor p-integrabile, înzestrat cu norma $\|f\|_p = \left\{\int_0^1 |f(x)dx|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$. Are loc $f \in L^p([0, 1])$ dacă $\|f\|_p < \infty$.

Mulțimea Π reprezintă spațiul polinoamelor, iar pentru $j \in \mathbb{N}_0$, prin Π_j notăm spațiul polinoamelor de grad cel mult j. Funcțiile monomiale vor fi $e_j(x) = x^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0, 1]$. Din aceste mulțimi de polinoame vom avea nevoia de funcția:

$$\psi(x) = x(1 - x),\ x \in [0, 1]. \tag{2.1}$$

În continuare, vom prezenta câteva dintre principalele rezultate din literatura actuală în teoria aproximării care fac parte din topic-ul tezei cu teza.

Definition 2.1.1. *Fie X un spațiu de funcții. Prin operatori pozitivi și liniari înțelegem operatori $L : X \to X$ care satisfac:*

1. *$Lf > 0$ pentru $f \in X$ și $f > 0$,*
2. *$L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$, oricare ar fi $f,\ g \in X$ și $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.*

Pentru L, un operator liniar și pozitiv prin $L^k = \underbrace{L \circ \cdots \circ L}_{k\text{-times}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, cu $L_0 = I$ unde I este operatorul identitate, notăm iterațiile de ordinul k ale lui L.

În continuare, vom face următoarea notație pentru momentele și pentru momentele absolute ale operatorilor L:

$$m_n^j(x) = (L(e_1 - xe_0)^j)(x), \tag{2.2}$$
$$M_n^j(x) = (L|e_1 - xe_0|^j)(x). \tag{2.3}$$

Vom nota cu D^jL, $j = 0, 1, 2 \dots$, derivata de ordinul j^{th} a operatorului L.

Este bine cunoscut faptul că operatorii pozitivi și liniari joacă un rol important în teoria aproximării, S. N. Bernstein a demonstrând că funcțiile continue pe intervale compacte pot fi aproximate prin polinoame (teorema Weierstrass) folosind astfel de operatori. Un alt motiv pentru care operatorii liniari pozitivi sunt studiați intens este celebra Teoremă Korovkin (see [66], [67]).

Teorema 2.1.2 (Korovkin)**.** *Fie Y un subspțiu liniar al lui X și $L_n : Y \to X$ un șir de operatori liniari și pozitivi. Dacă funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in Y \cap C([0, 1])$ formează un sistem Chebyshev pe $[0, 1]$ și dacă*

$$\lim_{n\to\infty} L_n\varphi_i = \varphi_i,\ \text{uniform pentru } i = 0, 1, 2, \tag{2.4}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} L_n f = f, \text{ uniform pentru orice } f \in Y \cap C([0,1]). \tag{2.5}$$

Un sistem Chebysev de ordin $l+1$ este o mulțime de funcții $\varphi_0, \ldots, \varphi_l \in C([0,1])$ pentru care combinația liniară $\varphi = \sum_{j=0}^{p} a_j \varphi_j$, unde $p \le l$ și $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, are cel mult l rădăcini pe $[0,1]$. Pentru mai multe rezultate legate de Toerema lu Korovkin se pot consulta: [13], [14], [23] and [83].

În literatură, există o mulțime de operatori liniari pozitivi care verifică teorema lui Korovkin. Îi vom aminti doar pe cei care vor apărea în această teză. Un prim exemplu este operatorul obținut de Bernstein (vezi [28]) când a demonstrat Teorema lui Weierstrass ([93]) legată de aproximarea pe compacte, și anume operatorul B_n denumit după el:

$$\left(B_n f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \ n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1], \ f \in C([0,1]), \tag{2.6}$$

unde

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{pentru } 0 \le k \le n, \tag{2.7}$$

și $p_{n,k}(x) = 0$ pentru $k > n$. Aceși operatori au fost studiați în detaliu în: [30], [68], [38], etc. De asemenea, sunt prezente o mulțime de generalizări ale acestor operatori. Mentionam operatori Stancu (vezi [89]) $B_n^{\alpha,\beta}$, obținuți pentru funcții $f \in C([0,1])$

$$\left(B_n^{\alpha,\beta} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \ n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1], \ f \in C([0,1]), \tag{2.8}$$

unde $0 < \alpha < \beta$.

Operatorii B_n pot fi modificați astfel încât $f \in L^1([0,1])$, așadar ajungând la operatorii Kantorovich ([64]):

$$(\mathcal{K}_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt, \ x \in [0,1], \ f \in L^1([0,1]). \tag{2.9}$$

Aici, deoarece sunt relevanțși pentru teza noastră, vom menționa varianta exponențială a operatorilor $\mathcal{K}_n$ introdusă de Angeloni și Costarelli în [18]:

$$(K_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{\mu x} p_{n,k}(a_{n+1}(x))(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) e^{-\mu t} dt, \tag{2.10}$$

unde $\mu > 0$, $f \in C([0,1])$ $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, și $a_n(x) := \frac{e^{\frac{\mu x}{n}} - 1}{e^{\frac{\mu}{n}} - 1}$ sunt funcții crescătoare, continue și convexe pe $[0,1]$ pentru care $a_n(0) = 0$ și $a_n(1) = 1$.

2.2 Module de netezime

2.3 Teoreme de tip Voronovskaya

2.4 C_0-semigroupuri de operators și approximarea lor

Această secțiune este dedicată studiului C_0-semigrupurilor și modului în care acestea pot fi aproximate prin iterații ale proceselor de aproximare. Aici, amintim câteva dintre lucrările efectuate în [15] și alții.

2.4.1 C_0-semigrupuri

Fie K câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ sau al numerelor complexe $\mathbb{C}$. Vom nota cu $(E, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și prin $\mathcal{L}(E)$ spațiul operatorilor liniari și mărginiți definiți pe E. Prin înzestrarea spațiului $\mathcal{L}(E)$ cu norma supremum:

$$\|B\| := \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\| \leq 1}} \|B(f)\|, \ B \in \mathcal{L}(E),$$

se obține că $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ este de asemenea un spațiu Banach.

Definition 2.4.1. *Fie $(T(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(E)$. Familia $(T(t))_{t \geq 0}$ este un semigrup de operatori mărginți pe E dacă:*

1. *$T(0) = I$, unde I operatorul identitate pe E,*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s)$ oricare ar fi $s, t \geq 0$, și $T(t)T(s) = T(t) \circ T(s)$.*

Un semigrup $(T(t))_{t \geq 0}$ este un C_0-semigrup (semigrup puterni continuu) dacă, oricare ar fi $t_0 \geq 0$ și pentru o funcție f din E, pe $(E, \|\cdot\|)$ are loc:

$$\lim_{t \to t_0^+} T(t)(f) = T(t_0)(f).$$

Fie $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0-semigrup pe $(E, \|\cdot\|)$ și $(A, D(A))$ un operator liniar pe E, unde:

$$A(f) := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)(f) - f}{t}, \text{ oricare ar fi } f \in E. \tag{2.11}$$

și $D(A)$ domeniul lui A definit ca

$$D(A) := \left\{ f \in E \mid \exists \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)(f) - f}{t} \in E \right\}. \tag{2.12}$$

Atunci, $(A, D(A))$ este generatorul C_0-semigrupului $(T(t))_{t \geq 0}$.

2.4.2 Aproximare C_0-semigrupurilor

În cartea scrisă de Altomare și coautorii săi ([15]) există o revizuire extinsă cu privire la unele teoreme care dau condiții necesare și suficiente în care un operator liniar $(A, D(A))$ pe un spațiu Banach $(E, \|\cdot\|)$ să fie generatorul unui C_0-semigrup $(T(t))_{t\geq 0}$. Dezavantajul acestor teoreme de generare este că nu oferă o formă explicită a C_0-semogrupului, deci nu oferă nicio informație despre semigrup. Prin urmare, în teoria aproximării există rezultate care nu numai că dau condiții în care un operator adecvat este generatorul unui C_0-semigrup, dar, de asemenea, oferă mijloace de aproximare a semigrupului prin utilizarea iterațiilor operatorilor liniari, permițând astfel studierea proprietăților semigrupurilor prin studierea proprietăților operatorului care îi aproximează.

Un prim astfel de rezultat este Teorema lui Trotter (see [91])

Teorema 2.4.2 (Trotter)**.** *Pe spațiul Banach $(E, \|\cdot\|)$ fie $(L_n)_{n\geq 1}$ un șir de operatori liniari și mărginiți iar $(\rho(n))_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încît* $\lim_{n\to\infty} \rho(n) = 0$. *Se presupune că există $M \geq 1$ și $\omega \in \mathbb{R}$ pentru care*

$$\|L_n^k\| \leq Me^{\omega\rho(n)k}, \ \forall\ k, n \geq 1, \tag{2.13}$$

unde L_n^k este iterația de ordinul k^{th} al lui L_n. Fie $(A, D(A))$un operator liniar pe spațiul Banach $(E, \|\cdot\|)$ definit ca:

$$A(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{L_n f - f}{\rho(n)}, \ f \in D(A), \tag{2.14}$$

cu domeniul:

$$D(A) := \left\{ g \in E \mid \exists \lim_{n\to\infty} \frac{L_n g - g}{\rho(n)} \right\}. \tag{2.15}$$

Dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

(i) $D(A)$ este o submulțime densă în E;

(ii) $(\lambda I - A)(D(A))$ este o submulțime densă în E pentru $\lambda > \omega$;

atunci, închiderea lui $(A, D(A))$ este generatoarea C_0-semigrupului $(T(t))_{t\geq 0}$, cu proprietate că pentru orice $t \geq 0$ și pentru orice șir de numere naturale $(k(n))_{n\geq 1}$ cu $\lim_{n\to\infty} k(n)\rho(n) = t$ *are loc limita:*

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{k(n)} f = T(t)(f), \ f \in E. \tag{2.16}$$

Mai mult, pentru orice $t \geq 0$, $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

2.5 Serii geometrice de operatori liniari și pozitivi

Întrucât una dintre preocupările principale ale acestei teze este studiul seriilor generale de puteri de operatori liniari și pozitivi, vom aminti o parte din literatura de specialitate existentă în această direcție, și anume vom prezenta un scurt rezumat al rezultatelor din

[3], [4], [78] și [80] care sunt relevante pentru conținutul tezei.

Unul dintre primele studii asupra seriei geometrice de operatori liniari și pozitivi se datorează lui Păltănea, vezi [78]. Și anume, el a studiat proprietățile serie geometrică asociată operatorilor Bernstein B_n. În [78], autorul a introdus operatorii

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} (B_n)^k\,, \tag{2.17}$$

unde B_n^k sunt iterațiile de ordinul k ale B_n. Este cunoscut că iterțiile B_n^k (studiate în [2, 5, 31, 32, 55, 65, 74, 75, 85]) pot fi mereu definite, însă, sunt cazuri când operatorii A_n nu sunt bine definite, de exemplu dacă se iau în considerare valorile proprii ale B_n (date în [33]). Prin urmare, este necesară o selecție atentă a spațiului care poate fi domeniul de definiție al acestor operatori. În acest sens, în [78] autorul a demonstrat că operatorii A_n din (2.17) sunt bine definiți pe spațiul:

$$\psi C([0,1]) := \{f|\exists g \in C([0,1]),\ f = \psi g\}, \tag{2.18}$$

unde $\psi(x) = x(1-x),\ x \in [0,1]$. Mai mult, spațiul $\psi C([0,1])$ poate fi înzestrat cu norma:

$$\|f\|_\psi = \|g\|,\ f \in \psi C([0,1]), \tag{2.19}$$

și $(\psi C([0,1]), \|\cdot\|)_\psi$ este un spațiu Banach (se poate observa că convergenţă în raport cu norma $\|\cdot\|_\psi$ implică și convergenţă în raport norma obişnuită $\|\cdot\|$).

Pentru orice funcție $f \in B([0,1]) \cap C((0,1))$ și $x \in [0,1]$, în [4], următorul operator a fost definit:

$$F(f)(x) := (1-x)\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_0^x (1-t)\,f(t)dt, \tag{2.20}$$

și a fost demonstrat că $F(f) \in \psi C([0,1]) \cap C^2(0,1)$ și că are loc identitatea:

$$(F(f)(x))'' = -f(x)\,,\ f \in B([0,1]) \cap C((0,1)),\ x \in [0,1]. \tag{2.21}$$

În lucrarea [78], R. Păltănea a demonstrat următorul rezultat:

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n(\psi f) - 2F(f)||_\psi = 0,\ f \in \psi C([0,1]), \tag{2.22}$$

însă, aici o versiune puțin modificată a $F(f)$ în sensul că operatorul a fost definit pentru funcții $f \in C([0,1])$ în loc de $f \in B([0,1]) \cap C((0,1))$. Pe urmă, în [3] convergența operatorilor A_n a fost studiată pe un subspațiu mai general al $C([0,1])$, și anume, pe spațiul

$$C_0([0,1]) := \{f \in C([0,1])|\ f(0) = 0,\ f(1) = 0\}. \tag{2.23}$$

și un rezultat similar cu cel din (2.22) a fost obţinut folosind valorile proprii ale B_n.

O generalizare a operatorilor A_n a fost introdusă de Abel et al. ([4]), și anume, în formula (6.1) operatorii B_n au fost înlocuiți cu operatori liniar și pozitiv L_n aparţinând unei clase generale de operatori. Dacă notăm prin G_{L_n} seria geometrică atașată acestor operatori L_n, atunci ([4]): $\lim\limits_{n\to\infty} ||G_{L_n}(f) - 2G(f/\psi)||_\psi = 0$, pentru funcții f din spațiul

$C_\psi\,[0,1] = \{f : C([0,1]) \to C([0,1]) : \exists\, g \in B[0,1] \cap C\,(0,1)\,,\ f = \psi g\}$ care împreună cu norma $||\cdot||_\psi$ formează un spațiu Banach. Operatorii A_n au fost studiatț și pe spațiul $C_0[0,1] = \{f \in C([0,1]) :\ f(0) = f(1) = 0\}$ înzestrat cu norma supremum uzuală, în lucrarea [80]. Acolo s-a obținut o teoremă Voronovskaya.

Studii suplimentare asupra operatorilor de aproximare definiți ca serii geometrice de operatori liniari și pozitivi au fost realizate în lucrarea [4]. Acolo autorii au considerat operatorul

$$G_L = \sum_{k=0}^{\infty} L^k, \tag{2.24}$$

care este seria geometrică asociată unui operator liniar și pozitiv $L : X \to X$, unde X este un subspațiu liniar al $C([0,1])$ și L^k sunt iterațiile de ordinul k, $k \geq 1$, ale lui L și $L^0 = I$, I fiind operatorul identitate. Ca și înainte, iterațiile lui L pot fi întotdeauna definite (pentru mai multe studii privind iterațiile operatorilor liniari pozitivi vezi [48, 49, 51, 63, 94]), totuși pentru ca operatorul G_L să fie bine definit trebuie făcută o alegere adecvată a domeniului de definiție. Domeniul, considerat de autori în [4] a fost spațiul:

$$C_\psi([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | \exists g \in B([0,1]) \cap C((0,1)) : f = \psi g\}, \tag{2.25}$$

înzestrat cu norma:

$$\|f\|_\psi := \sup_{x\in(0,1)} \frac{|f(x)|}{\psi(x)},\ f \in C_\psi([0,1]). \tag{2.26}$$

De observat că:

$$C_\psi([0,1]) = \{f \in C([0,1]) |\ \exists M > 0 : |f(x)| \leq M\psi(x), x \in [0,1]\}. \tag{2.27}$$

De remarcat că $(C_\psi([0,1]), \|\cdot\|_\psi)$ este un spațiu Banach și convergență în raport cu norma $\|\cdot\|_\psi$ implică și convergența în raport cu norma supremum uzuală $\|\cdot\|$. De asemenea, $C_\psi([0,1])$ este o extindere a spațiului $\psi C([0,1])$.

Mai departe, Abel et al. au demonstrat în [4] că dacă $L : C([0,1]) \to C([0,1])$sunt operatori aparținând unei clase Λ, de operatori liniari și pozitivi (vezi mai jos definiția acestei clase de operatori), atunci operatorul G_L este bine definit pe $C_\psi([0,1])$.

Avem că $L \in \Lambda$ dacă L sunt operatori liniari și pozitivi care îndeplinesc următoarele condiții (vezi Definiția 1 din [4]):

1. L preserve linear functions;
2. $\|L\|_\psi < 1$;
3. $L \neq B_1$, where B_1 is the Bernstein operator for $n = 1$.

În continuare, a fost demonstrat că dacă $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de operatori pozitivi și liniari astfel încât $L_n \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ atunci pentru orice $f \in B([0,1]) \cap C((0,1))$ următoarea limită este valabilă în anumite condiții (vezi teorema 2, [4]):

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n G_n(\psi f) - 2F(f)\|_\psi = 0, \tag{2.28}$$

unde $G_n = G_{L_n}$, α_n este un factor de normalizare (dat în relaţia (11) din [4]) și $F(f)$ este de forma din (2.20), $F(f) \in \psi C([0,1]) \cap C^2((0,1))$.

Pe urmă, în [80], a fost demonstrat că operatorul G_L este bine definit pe spațiul $C_0([0,1])$, dat în (2.23). Mai mult, pe acest spațiu un rezultat de convergență (în raport cu norma pe spațiului $C_0([0,1])$) similar cu cel din (2.28) are loc și s-a obținut o teoremă Voronovskaya.

De remarcat că între cele trei spații considerate ca domeniu de definiție al operatorilor G_L următoarea relaţie este adevărată în raport cu norma supremum $\|\cdot\|$:

$$\overline{\psi C([0,1])} = \overline{C_\psi([0,1])} = C_0([0,1]), \tag{2.29}$$

unde $\overline{A}$ reprezintă închiderea mulțimii A.

3 Teorema Voronovskaya generalizată și convergența seriilor de puteri de operatori liniari și pozitivi

În acest capitol vom obține serii de puteri de operatori liniari și pozitivi mai generale decât cea introdusă de Abel, Ivan și Păltănea în lucrarea[4], care, așa cum am menționat în capitolul anterior, este o serie geometrică de operatori liniari și pozitivi. În această direcție am obținut o teoremă Voronovskaya generalizată și unele rezultate de convergență privind operatorul definit ca serie de puteri menționat mai sus. Aceste rezultate au fost publicate în lucrarea [46]: **Ş. Garoiu**, R. Păltănea, *Generalized Voronovskaya theorem and the convergence of power series of positive linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 531 (2024), Issue 2, Part 2.

Fie $B_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatorii Bernstein:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1],\ f \in C([0,1]),$$

unde polnoamele $p_{n,k}$ sunt definite astfel:

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \le k \le n,\ x \in [0,1].$$

Teorema Voronovskaya în norma supremum esteŞ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n(B_n f - f) - \frac{1}{2}\psi f'' \right\| = 0,\ \text{for } f \in C^2([0,1]). \tag{3.1}$$

Există o vastă literatură privind rezultatele de tip Voronovskaya pentru diverși operatori, din care amintim doar lucrarea [52], în care limita este dată într-o formă mai puternică, folosind o normă ponderată.

Unul dintre obiectivele acestui capitol este de a da o generalizare a teoremei Voronovskaya prin furnizarea unei forme explicite a limitei $\lim_{n\to\infty} n^s (L_n - I)^s$, $s \in \mathbb{N}$, unde operatorii L_n aparțin unei clase generale de operatori liniari pozitivi. Acest rezultat este echivalent cu teorema Voronovskaya explicită pentru combinațiile Micchelli de operatori L_n, date de $I - (I - L_n)^s$, definite în [71]. În cazul operatorilor Bernstein, o reprezentare parțială a limitei a fost dată de Agrawal [6].

Pe de altă parte, acest rezultat va juca un rol esențial în studiul limitei serii de putere a operatorilor. Un caz particular al seriei de puteri este dat de seria geometrică, care a fost singura luată în considerare până acum. Seria geometrică a unui șir de operatori L_n, $n = 0, 1\ldots$ is given by $\sum_{k=0}^{\infty} (L_n)^k$. După cum a fost menționat în Secțiunea 2.5 această serie geometrică nu este definită pentru toate funcțiile din $C([0,1])$, ca de exemplu, pentru funcţiile proprii ale L_n. Prin urmare, este necesară o slecție adecvată de subspații ale $C([0,1])$. Din Secțiunea 2.5 un prim spațiu care poate fi luat în considerare este subspațiul $\psi C([0,1])$ definit în (2.18), și înzestrat cu norma $\|\cdot\|_\psi$ dată în (2.19).

Amintim că în [78], a fost demonstrat că operatorul $A_n = (1/n)\sum_{k=0}^{\infty}(B_n)^k$, este bine definit pe spțiul $\psi C([0,1])$ și

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f) - 2F(f/\psi)\|_\psi = 0,\ f \in \psi C([0,1]), \tag{3.2}$$

unde $F(f)$ este dat în (2.20).

O altă demonstrașie a relației (3.2) bazată pe structura proprie a operatorilor B_n a fost dată în [3].

În lucrarea [4] s-a obţinut un rezultat analog pentru operatori A_n, construit pornind de la operatori mai generali decât B_n pe spațiul $C_\psi([0,1])$. Au fost date și alte versiuni și generalizări ale seriei geometrice de operatori în lucrările [1], [4], [56], [84], [10] și [80].

Menționăm că [4] s-a obţinut o teoremă Voronovakaya inversă. Anterior, o teoremă Voronovakaya inversă a fost obținută prin altă metodă în [16].

Un alt obiectiv al acestui capitol este de a lua în considerare serii de puteri de operatori liniari și pozitivi mai generale de forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k}(L_n)^k,\ \beta_{n,k} \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

unde operatorii L_n sunt definiți pe spațiul $C_\psi([0,1])$ iar apoi de a studia convergenţa acestor serii de puteri.

3.1 Teorema Voronovksaya generalizată

Pentru $j \in \mathbb{N}_0$, vom nota:

$$\sigma_j = \left[\frac{j+1}{2}\right], \tag{3.4}$$

unde $[a]$ este partea întreagă a lui a. Apoi $C^\infty([0,1])$ reprezintă spațiul funcțiilor $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ care admit derivată de orice ordin pe $[0,1]$.

Fie $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de operatori liniari și pozitivi. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0,1]$, vom nota

$$\begin{aligned} m_n^j(x) &= (L_n(e_1 - xe_0)^j)(x), \\ M_n^j(x) &= (L_n|e_1 - xe_0|^j)(x). \end{aligned}$$

În continuare, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va fi un șir de operatori liniari și pozitivi $L_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ care, pentru $n \in \mathbb{N}$, îndeplinesc următoarele condiții:

L1) $L_n(e_j) = e_j$, $j = 0, 1$;

L2) $m_n^j(x) = \psi(x)n^{-\sigma_j}Q_{n,j}(x)$, $j \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, unde $Q_{n,j} \in C^\infty([0,1])$ astfel încât pentru oricare $j, p \in \mathbb{N}_0$, există o constantă $C_{j,p} > 0$ cu proprietatea că $Q_{n,j}^{(p)}(x) \leq C_{j,p}$ pentru orice $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}$.

L3) $m_n^2(x) = \alpha_n \psi(x)$, cu $\alpha_n \in (0,1)$, pentru $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ și există $\alpha > 0$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \alpha$.

Lema 3.1.1. *(vezi Lema 1 din [46]) Pentru orice întreg $j \geq 0$:*

$$M_n^j(x) = \mathrm{O}\left(\frac{\psi(x)}{n^{j/2}}\right), \text{ uniform pentru } n \in \mathbb{N}, \text{ și } x \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Mai departe, modulul de continuitate de ordinul întâi al unei funcții mărginite $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, este definit ca:

$$\omega_1(g,h) = \sup\{|g(u) - g(v)|,\ u,v \in [0,1],\ |u-v| \leq h\},\ h > 0.$$

Lema 3.1.2. *(vezi Lema 2 din [46]) Fie $k \geq 1$ și fie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \in C^k([0,1])$, $(n \in \mathbb{N})$, un șir de funcții astfel încât*

$$\lim_{h\to 0} \omega_1(g_n^{(k)}, h) = 0, \text{ uniform pentru } n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Atunci,

$$(L_n g_n)(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} m_n^j(x)(D^j g_n)(x) + \mathrm{o}\left(\frac{\psi(x)}{n^{k/2}}\right), \text{ uniform pentru } x \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Pentru $j \in \mathbb{N}_0$ și $n \in \mathbb{N}$ considerăm operatorul $P_n^j : C^j([0,1]) \to C([0,1])$ definit ca

$$(P_n^j f)(x) = \frac{1}{j!} m_n^j(x)(D^j f)(x),\ f \in C^j([0,1]),\ x \in [0,1]. \tag{3.8}$$

De asemenea, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$ și oricare numere întregi $j_1, \ldots, j_p \geq 0$, notăm

$$P_n^{j_p,\ldots,j_1} = P_n^{j_p} \circ \cdots \circ P_n^{j_1};\ \text{dacă } p \geq 1 \text{ și } P_n = I,\ \text{dacă } p = 0. \tag{3.9}$$

Lema 3.1.3. *(vezi Lema 3 din [46]) Fie $j_1, \ldots j_p \geq 0$ și $p \in \mathbb{N}$ numere întregi astfel încât cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 2. Atunci, pentru orice număr întreg $0 \leq k \leq j_1 + \ldots + j_p$, există anumite funcții $\tau_{n,k}^{j_1,\ldots,j_p} \in C^\infty([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, care au următoarele proprietăți*

i) pentru orice număr întreg $s \geq 0$ există o constantă C ce depinde doar de $j_1, \ldots, j_p$, k și s, pentru care $|(\tau_{n,k}^{j_1,\ldots,j_p})^{(s)}(x)| \leq Cn^{j_1+\ldots+j_p-2}$, pentru $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0,1]$;

ii) pentru orice funcție $f \in C^{j_1+\ldots+j_p}([0,1])$ are loc:

$$(P_n^{j_p,\ldots,j_1} f)(x) = \frac{\psi(x)}{n^{\sigma_{j_1}+\ldots+\sigma_{j_p}}} \sum_{k=0}^{j_1+\ldots+j_p} f^{(k)}(x)\tau_{n,k}^{j_1,\ldots,j_p}(x),\ x \in [0,1]. \tag{3.10}$$

Lema 3.1.4. *(vezi Lema 4 din [46]) Fie $s \geq 2$ un număr întreg și $f \in C^{2s}([0,1])$ o funcție. Fie $j_1, j_2, \ldots, j_p \geq 0$ numere întregi, $p \in \mathbb{N}$ și $r = j_1 + \ldots + j_p$ astfel încât $r < 2s$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $g_n = n^q P_n^{j_p,\ldots,j_1} f$, unde $q = \sigma_{j_1} + \ldots + \sigma_{j_p}$. Atunci $g_n \in C^{2s-r}([0,1])$ și*

$$\lim_{h\to 0} \omega_1(g_n^{(2s-r)}, h) = 0, \text{ uniform în raport cu } n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Pentru numerele întregi $s \geq 2$ și $0 \leq p \leq s$, definim

$$\begin{aligned} &\Lambda_p^s = \{(j_1, \ldots, j_p) : \ j_1, \ldots, j_p \in \mathbb{N}_0, \ j_1 + \cdots + j_p \leq 2s\}, \ \text{if } p \geq 1 \\ &\Lambda_0^s = \emptyset. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Lema 3.1.5. *(vezi Lema 5 din [46]) Fie s și p numere întregi astfel încât $s \geq 2$ și $0 \leq p \leq s$. Pentru oricare $f \in C^{2s}([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0,1]$ are loc*

$$((L_n)^p f)(x) = \sum_{(j_1,\ldots,j_p)\in\Lambda_p^s} (P_n^{j_p,\ldots,j_1} f)(x) + \mathrm{o}\left(\frac{\psi(x)}{n^s}\right), \ x \in [0,1], \tag{3.13}$$

unde $\mathrm{o}\left(\frac{\psi(x)}{n^s}\right)$ $(n \to \infty)$ *este uniform în raport cu* $x \in [0,1]$.

Prezentăm acum următorul rezultat, care este o ușoară îmbunătățire a teoremei 6 [46].

Teorema 3.1.6. *Pentru orice număr întreg $s \geq 1$ și pentru fiecare funcție $f \in C^{2s}([0,1])$ avem*

$$((L_n - I)^s f)(x) = \frac{1}{n^s}\left(\frac{\alpha}{2}\psi D^2\right)^s f(x) + \mathrm{o}\left(\frac{\psi(x)}{n^s}\right), \ \textit{uniform pentru } x \in [0,1]. \tag{3.14}$$

În consecință, are loc:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n^s((L_n - I)^s f) - \left(\frac{1}{2}\psi D^2\right)^s f \right\|_\psi = 0 \tag{3.15}$$

Observația 3.1.7. *(vezi Observația 7 din [46])* În cazul $s = 1$ rezultatul Voronovskaya dat în (3.14) a fost obținut ca un caz particular, dar cu alte condiții asupra operatorilor L_n, în [52].

Următorul Corolar este o îmbunătățire a Corolarului 8 de la [46].

Corolarul 3.1.8. *Pentru orice număr întreg $s \geq 1$ și pentru fiecare funcție $f \in C^{2s}([0,1])$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n^s((L_n - I)^s f) - \left(\frac{\alpha}{2}\psi D^2\right)^s f \right\| = 0. \tag{3.16}$$

Următoarea observație este o ușoară îmbunătățire a Observația 9 din [46].

Observația 3.1.9. Fie Z_n^s combinațiile Micchelli de operatori $(L_n)_n$, date de

$$Z_n^s = I - (I - L_n)^s, \ n, s \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Relația (3.14) poate fi scrisă în mod echivalent ca

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n^s(Z_n^s f - f) + \left(-\frac{\alpha}{2}\psi D^2\right)^s f \right\|_\psi = 0, \ f \in C^{2s}([0,1]). \tag{3.18}$$

Aceasta rezultă din egalitatea $Z_n^s - I = (-1)^{s+1}(L_n - I)^s$.

3.2 Serii de puteri de operatori liniari și pozitivi generalizate

În această secțiune vom considera operatorii liniari și pozitivi $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care îndeplinesc condiţiile L1), L2) şi L3) din secţiunea precedentă.

Observația 3.2.1. *(vezi Observația 10 din [46])* Din condiţiile L1)-L3) se poate deduce că

$L_n\psi = (1-\alpha_n)\psi$, deoarece $(L_n\psi)(x) = (L_ne_1)(x)-m_2(x)-2x(L_ne_1)(x)+x^2(L_ne_0)(x) = \psi(x) - m_n^2(x)$.

Pentru un operator liniar mărginit $T : C_\psi([0,1]) \to C_\psi([0,1])$, pentru simplitate, vom scrie $\|T\|_\psi$ în loc de $\|T\|_{\mathcal{L}(C_\psi([0,1]),C_\psi([0,1]))}$. Deoarece L_n satisface condiţia L3) rezultă că L_n este un operator liniar și mărginit pe $C_\psi([0,1])$ și că $\|L_n\|_\psi = 1-\alpha_n$. Într-adevăr, dacă $f \in C_\psi([0,1])$ atunci, folosind Observația 3.2.1, ăentru $x \in (0,1)$, avem că:

$$|(L_nf)(x)| \le (L_n|f|)(x) = \left(L_n\frac{|f|}{\psi}\psi\right)(x) \le \|f\|_\psi(L_n\psi)(x) = \|f\|_\psi(1-\alpha_n)\psi(x).$$

Atunci

$$\|L_n\|_\psi = \sup_{\|f\|_\psi\le 1}\sup_{x\in(0,1)}\frac{|(L_nf)(x)|}{\psi(x)} \le \sup_{\|f\|_\psi\le 1}\sup_{x\in(0,1)}\frac{(L_n\|f\|_\psi\psi)(x)}{\psi(x)} = 1-\alpha_n.$$

Fie $s \ge 0$ un întreg. Definim $A_n^s : C_\psi([0,1]) \to C_\psi([0,1])$ astfel

$$A_n^s = \frac{\alpha_n^{s+1}}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}(k)_s(L_n)^{k-s} \tag{3.19}$$

unde $(k)_s = k(k-1)\dots(k-s+1)$ iar convergenţa seriei se consideră în raport cu norma $\|\cdot\|_\psi$.

Următoarea Lemă demonstrează existența operatorului nostru.

Lema 3.2.2. *(vezi Lema 11 D=din [46]) Operatorul $A_n^s : C_\psi([0,1]) \to C_\psi([0,1])$ este bine definit şi $\|A_n^s\|_\psi = 1$.*

Lema 3.2.3. *(vezi Lema 12 din [46]) Pe spațiul $C_\psi([0,1])$ sunt valabile următoarele identități*

i) $(I-L_n)^{s+1}\sum_{k=s}^{\infty}(k)_s(L_n)^{k-s} = s!I$,

ii) $\sum_{k=s}^{\infty}(k)_s(L_n)^{k-s}(I-L_n)^{s+1} = s!I$,

unde cu I am notat operatorul de identitate.

Vom defini următorii operatori: $\tilde{F} : C_\psi([0,1]) \to C_\psi([0,1])$, $\tilde{F}(f) = F(f/\psi)$, $H_s : C_\psi([0,1]) \to C_\psi([0,1])$, $H_s = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{s+1}\tilde{F}^{s+1}$ și $\tilde{D} : C^2([0,1]) \to \psi C([0,1])$, $\tilde{D}f = -\frac{\alpha}{2}\psi D^2 f$, unde $s \in \mathbb{N}_0$ și operatorul F este definit ca în (2.20) și deoarece are loc (2.27) atunci $F(f) \in C_\psi([0,1])$ deci $\tilde{F}$ este bine definit pe $C_\psi([0,1])$.

Lema 3.2.4. *(vezo Lema 13 din [46]) Pentru $f \in C_\psi([0,1])$, $s \in \mathbb{N}_0$ și $x \in (0,1)$ avem că:*

$$(\tilde{D}^{s+1} H_s f)(x) = f(x). \tag{3.20}$$

În cele din urmă, putem demonstra principalul rezultat al acestei secțiuni

Teorema 3.2.5. *(vezi Teorema 14 din [46]) Pentru $f \in C_\psi([0,1])$ și $s \in \mathbb{N}$ are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n^s f - \alpha^{s+1} H_s f\|_\psi = 0. \tag{3.21}$$

3.3 Aplicații

Pentru aceste aplicații facem trimitere la Secțiunea 4 din [46].

1. Operatorii Bernstein

Un prim exemplu de operatori care verifică condițiile L1), L2) și L3) sunt operatorii Bernstein B_n din (2.6) și (2.7). Momentele lor $m_n^j(x) = B_n(e_1 - xe_0)^j(x)$, $j \in \mathbb{N}_0$ satisfac următoarele relații [68], [37]:

$$m_n^0(x) = 1, \quad m_n^1(x) = 0, \quad m_n^2(x) = \frac{x(1-x)}{n},\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1] \tag{3.22}$$

și

$$m_n^{j+1}(x) = \frac{x(1-x)}{n}((m_n^j)'(x) + j m_n^{j-1}(x)),\ j \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]. \tag{3.23}$$

Din (3.22) se poate deduce imediat că operatorii B_n satisfac condițiile L1) și L3) cu $\alpha_n = \frac{1}{n}$ și $\alpha = 1$. Din (3.23) prin inducție se poate arăta că, pentru $j \geq 2$, avem

$$m_n^j(x) = \psi(x) n^{-\sigma_j} \cdot Q_{n,j}(x), \tag{3.24}$$

unde $Q_{n,j}$ este un polinom de grad $j-2$ cu coeficienți mărginiți în raport cu n. Așadar este îndeplinită și condiția L2). În consecință, putem aplica Teorema 3.1.6 și Teorema 3.2.5 operatorilor Bernstein.

2. Operatorii Durrmeyer modificați

Pentru un parametru $\rho \geq 1$, fie operatorii $U_n^\rho : C([0,1]) \to C([0,1])$, vezi [79], [53], definiți ca

$$(U_n^\rho f)(x) = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k}^\rho(f) p_{n,k}(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1],\ f \in C([0,1]),$$

unde $F_{n,0}(f) = f(0),\ F_{n,n}(f) = f(1)$ și

$$F_{n,k}(f) = \int_0^1 f(t) \frac{t^{k\rho-1}(1-t)^{(n-k)\rho-1}}{B(k\rho,(n-k)\rho)} dt,\ 1 \leq k \leq n-1,$$

B fiind funcția beta. Acești operatori devin operatorii Durrmeyer genuine, pentru $\rho = 1$ și $\lim_{\rho\to\infty} U_n^\rho f = B_n f$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $f \in C([0,1])$, [53]. Este cunoscut că $U_n^\rho e_j = e_j$,

$j = 0, 1$ deci condiția L1) este îndeplinită. Cu notația $m_n^j(x) = (U_n^\rho(e_1 - xe_0)^j)(x)$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0, 1]$ avem, pentru $j \geq 1$, că:

$$m_n^{j+1}(x) = \frac{1}{n\rho + j}\Big(\rho\psi(x)(m_n^j)'(x) + j(1 - 2x)m_n^j(x) + j(\rho + 1)\psi(x)m_n^{j-1}(x)\Big). \quad (3.25)$$

De aici, rezultă că $m_n^2(x) = \frac{\rho+1}{n\rho+1}\psi(x)$. Așadar condiția L3) este satisfacută pentru $\alpha_n = \frac{\rho+1}{n\rho+1}$, $n \geq 2$ și $\alpha = \frac{\rho+1}{\rho}$. De asemenea, din relația (3.25) condiția L2) rezultă prin inducție. Așadar Teorema 3.1.6 și Teorema 3.2.5 pot fi aplicate operatorilor U_n^ρ.

4 Reprezentarea limitei seriilor de puteri de operatori liniari și pozitivi prin utilizarea semigrupului de operatori generați de iterațiile acestora

În acest capitol obținem o caracterizare a limitei seriilor de puteri de operatori liniari și pozitivi folosind C_0-semigrupul generat de iterațiile acestor operatori. Rezultatele prezentate aici au fost publicate în lucrarea [47]: **Ș. Garoiu**, R. Paltanea, *The representation of the limit of power series of positive linear operators by using the semigroup of operators generated by their iterate,* Dolomites Research Notes on Approximation (2023), 16(3), 39-47.

Fie L un operator liniar pozitiv şi L^k iterașiile sale de ordinul $k$pentru $k \geq 1$ cu $L^0 = I$, unde I este operatorul identitate.

Dacă $(L_n)_n$, $L_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ este un șir de operatori liniari și pozitivi, seria geometrică a operatorilor L_n este de forma

$$\beta_n \sum_{k=0}^{\infty} (L_n)^k,\ n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

unde $\beta_n \in \mathbb{R}$ este un factor de normalizare. După cum am mentionat în Capitolul 2, Secțiunea 5 seria geometrică de operatori liniari și pozitivi nu este definită pentru orice funcție di $C([0,1])$. De exemplu, în ipoteza că L_n invariază constantele, atunci operatorii din (4.1) nu sunt definite pentru astfel de funcții. Pentru a defini această serie geometrică de operatori este necesară restrângerea domeniului de definiție al operatorilor. Un spațiu care poate fi luat în considerare este spațiul $\psi C([0,1])$, defininit în (2.18), înzestrat cu norma $\|\cdot\|_\psi$ definită în (2.19).

Amintim că un prim studiu al convergenței seriei geometrice atașate la un șir de operatori $(L_n)_n$ a fost realizat în lucrarea [78], și anume, a fost considerat cazul când $L_n = B_n$, unde B_n sunt operatorii Bersntein. Acolo a fost arătat operatorii $A_n : \psi C([0,1]) \to \psi C([0,1])$, pot fi definiți ca

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (B_n)^k,\ n \in \mathbb{N}$$

iar acest șir admite limită când $n \to \infty$, pe saptiul $(\psi C([0,1]), \|\cdot\|_\psi)$, care poate fi descris în mod explicit.

În această direcție, mai multe lucrări au extins acest studiu pentru diverse clase de operatori liniari și pozitivi și pentru alte spații de funcții, vezi [1], [3], [4], [56], [78], [80], [84].

Recent, în lucrarea lui Acar, Aral și Raşa ([10]) a fost introdusă o nouă modalitate de a descrie limita uniformă a seriei geometrice de forma (4.1) folosind C_0-semigrupl de operatori generat de iterațiile operatorilor L_n. Pentru mai multe detalii vezi Capitolul 2, Secțiunea 5 care conține câteva dintre rezultatele obținute de autorii lucrării menționate.

Scopul nostru este de a studia convergența unor serii de puteri mai generale de forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k} (L_n)^k \tag{4.2}$$

folosind C_0-semigrupul generat de iterațiile operatorilor L_n. Abordarea noastră diferă de studiul realizat în [10] prin considerarea unui alt tip de operatori, a unui alt spațiu de funcții și a unui tip mai puternic de convergență.

Pentru a face acest lucru pe lângă spațiul $\psi C([0,1])$ vom considera și spațiul $C_\psi([0,1])$ definit în (2.25) cu norma $\|\cdot\|_\psi$ dată în (2.26). Acest spațiu este o extensie a spațiului $\psi C([0,1])$ și (see [4]):

$$C_\psi([0,1]) = \{f \in C([0,1]),\ \|f\|_\psi < \infty\}.$$

De asemenea $C_\psi([0,1])$ înzestrat cu norma $\|\cdot\|_\psi$ este un spațiu Banach, dar nu este un spațiu Banach în raport cu norma supremum $\|\cdot\|$, deoarece

$$\overline{\psi C([0,1])} = \overline{C_\psi([0,1])} = C_0([0,1]),$$

unde $C_0([0,1]) = \{f \in C([0,1]) | f(0) = 0, f(1) = 0\}$.

Dacă $f, f_n \in C_\psi([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$ și $\|f - f_n\|_\psi \to 0$, $(n \to \infty)$ atunci $\|f - f_n\| \to 0$, $(n \to \infty)$. Din acest motiv, putem numi $\|\cdot\|_\psi$ norma tare pe $C_\psi([0,1])$.

Dacă $L : C_\psi([0,1]) \to C_\psi([0,1])$ este un operator liniar și mărginit vom folosi notația

$$\|L\|_\psi = \sup_{\|f\|_\psi \leq 1} \|Lf\|_\psi. \tag{4.3}$$

4.1 Rezultate auxiliare

Pe parcursul acestui capitol vom lua în considerare un șir $(L_n)_n$ de operatori liniari și pozitivi $L_n : C([0,1]) \to C([0,1])$, $L_n \neq I$, ce verifică următoarele condiții.

A1) Există $\alpha \in (0,1)$ și $\alpha_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $L_n(\psi) = (1 - \alpha_n)\,\psi$, $n \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \alpha$.

A2) Operatorii L_n admit valorile proprii $a_{n,j}$ asociate polinoamelor proprii $p_{n,j}$, $0 \leq j \leq n$, cu $deg\ p_{n,j} = j$, unde, pentru un polinom p notăm cu $deg\ p$, gradul lui p.

A3) Există polinoame p_j, $j \geq 0$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} p_{n,j} = p_j$, $j = 0, 1, \ldots$.

A4) Pentru orice $j \geq 0$ există $l_j \in (0,1]$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n,j})^n = l_j$$

și mai mult, dacă $l_j = 1$, atunci $a_{n,j} = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

A5) Avem că $L_n(\psi\Pi) \subset \psi\Pi$.

A6) Există $(T(t))_{t>0}$ un C_0- semigrup de operatori pentru care

$$T(t)f = \lim_{n\to\infty} (L_n)^{k_n} f, \text{ uniform pentru } f \in C([0,1]),\ t \geq 0, \tag{4.4}$$

dacă $k_n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = t$.

Din condițiile A1)-A6) rezultă următoarele consecințe.

Observația 4.1.1. *(vezi Observația 1, [47])* Deoarece L_n este un operator liniar și pozitiv cu $L_n \neq I$, din condiția A4) există cel mult două valori ale $j \geq 0$, pentru care $l_j = 1$.

Observația 4.1.2. *(vezi Observația 2, [47])* Din condiția A4) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = 1, \text{ și } \lim_{n\to\infty} n(1 - a_{n,j}) = -\ln l_j,\ j = 0, 1, \ldots. \tag{4.5}$$

Observația 4.1.3. *(vezi Observația 3, [47])* Din condițiile A3), A4) and A6) rezultă că

$$T(t)p_j = l_j^t p_j,\ j \in \mathbb{N}_0,\ t \geq 0. \tag{4.6}$$

De remarcat că în anumite ipoteze toerema lui Trotter, adică Teorema 2.4.2 (vezi [91]), asigură îndeplinirea condiție A6).

Observația 4.1.4. *(vezi Observația 4, [47])* Pentru $r \geq 0$, deoarece polinoamele $p_{n,j}$, $0 \leq j \leq r$ au proprietatea că $deg\ p_{n,j} = j$, ele formează o bază pentru Π_r și în consecință $L_n(\Pi_r) \subset \Pi_r$. Atunci, prin inducție, $L_n^k(\Pi_r) \subset \Pi_r$, $k \in \mathbb{N}$, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$. Din condiția A6) rezultă că $T(t)(\Pi_r) \subset \Pi_r$, $r \in \mathbb{N}_0$.

Observația 4.1.5. *(vezi Observația 5, [47])* Menționăm că prima parte a condiției A1) este o consecință a următoarelor condiții: $L_n(e_j) = e_j$, $j = 0, 1$ și $L_n(\Pi_2) \subset \Pi_2$. Într-adevăr, s-a demonstrat în [4] că dacă $L : C([0,1]) \to C([0,1])$ este un operator liniar și pozitiv astfel încât $L_n(e_j) = e_j$, $j = 0, 1$ și $L_n(\Pi_2) \subset \Pi_2$, atunci există $\beta \in [0, 1)$ astfel încât $L\psi = \beta\psi$.

De asemenea, condiția A5) este o consecință a următoarelor condiții: $L_n(C([0,1])) \subset \Pi$ și $L_n(e_j) = e_j$, $j = 0, 1$. Într-adevăr, în acest caz avem $L_n f(0) = f(0)$ și $L_n f(1) = f(1)$, pentru orice $f \in C([0,1])$. În consecință, pentru $f \in \psi C([0,1])$ rezultă că $L_n f(0) = L_n f(1) = 0$ deci $L_n(\psi C([0,1])) \subset \psi\Pi$.

În cele din urmă avem nevoie de următoarele leme.

Lema 4.1.6. *(vezi Lema 2.1 din [47]) Pentru orice $t \geq 0$ rezultă că $T(t)(C_\psi([0,1])) \subset C_\psi([0,1])$ și*

$$\|T(t)\|_\psi = e^{-\alpha t}. \tag{4.7}$$

Lema 4.1.7. *(vezi Lema 2.2 din [47]) Fie $r \in \mathbb{N}$. Dacă un șir de polinoame $(\sigma_n)_n$, $\sigma_n \in \psi\Pi_r$ este uniform convergent la un polinom $\sigma^\star \in \psi\Pi_r$, atunci șirul $(\sigma_n)_n$ converge, de asmenea, la $\sigma^\star$ în norma $\|\cdot\|_\psi$.*

4.2 Rezultate principale

Următoarea lemă joacă un rol important în vederea obținerii rezultatului principal.

Lema 4.2.1. *(vezi Lema 3.1 din [47]) Pentru $p \in \Pi$, $s \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ și un șir de numere naturale $(k_n)_n$ astfel încât $k_n/n \to t$, $(n \to \infty)$ exista limita:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n^{s+1}} \sum_{i=0}^{k_n} (i)_s (L_n)^i p = \frac{1}{t^{s+1}} \int_0^t u^s T(u) p du. \tag{4.8}$$

uniformă pe $[0,1]$, unde $(i)_s = i(i-1)\ldots(i-s+1)$.

Corolarul 4.2.2. *(vezi Corollary 3.2 din [47]) Pentru orice $p \in \psi\Pi$, $s \in \mathbb{N}_0$, $t > 0$ și un șir de numere naturale $(k_n)_n$ astfel încât $k_n/n \to t$, $(n \to \infty)$ are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{k_n^{s+1}} \sum_{i=0}^{k_n} (i)_s (L_n)^i p - \frac{1}{t^{s+1}} \int_0^t u^s T(u) p du \right\|_\psi = 0. \tag{4.9}$$

Acum avem nevoie de următoarea teoremă care, cu notații modificate, provine dintr-un rezultat dovedit în cartea lui Nachbin [73], vezi Lema 2, pag. 95.

Teorema A *Fie $b > 0$. Pentru orice $f \in C([0,\infty))$, astfel încât $f(x)e^{-bx} \to 0$, $(x \to \infty)$, și orice $\varepsilon > 0$există un polinom p astfel încât*

$$\sup_{x\in[0,\infty)} e^{-bx}|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

În terminologia din [73], funcția e^{-bx}, $x \geq 0$ este o pondere fundamentală.

Fie spațiul:

$$\tilde{C}_\alpha([0,\infty)) = \{g \in C([0,\infty)) | \ \exists b \in (0,\alpha), \ \lim_{x\to\infty} f(x)e^{-bx} = 0\}. \tag{4.10}$$

Rezultatul nostru principal este următorul:

Teorema 4.2.3. *(vezi Teorema 3.3 din [47]) Dacă $g \in \tilde{C}_\alpha([0,\infty))$ și $f \in \psi C([0,1])$ atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} g\left(\frac{i}{n}\right) (L_n)^i f - \int_0^\infty g(t) T(t) f dt \right\|_\psi = 0. \tag{4.11}$$

4.3 Aplicații

Pentru rezultatele din această secțiune facem trimitere la Secțiunea 4 din [46].

1. Operatorii Bernstein

Fie $B_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatorii Bernstein definiți ca:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right),$$

unde

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \le k \le n,\ x \in [0,1].$$

Operatorii B_n îndeplinesc condițiile A1)-A6), vezi [30], [33] and [68]. Mai exact, avem că $B_n\psi = \frac{n-1}{n}\psi$ deci $\alpha_n = 1/n$ și $\alpha = 1$. B_n admite valorile proprii $a_{n,j}$ corespunzătoare polinoamelor proprii $p_{n,j}$, $0 \le j \le n$, cu $deg\ p_{n,j} = j$ și

$$l_j := \lim_{n\to\infty} a_{n,j}^n = e^{-j(j-1)/2},\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Pentru $j = 0, 1$, avem $p_{n,j}(t) = e_j$ și $B_n(e_j) = e_j$. Existența polinoamelor $p_j = \lim_{n\to\infty} p_{n,j}$ este demonstrată în [33]. În sfârșit, existența semigrupului de operatori generați de iterațiile lui B_n este dată în [15].

2. Operatorii U_n^ρ

Pentru $\rho > 0$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, operatorii U_n^ρ sunt definiți (vezi [53], [79]), după cum urmează:

$$(U_n^\rho f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) F_{n,k}^\rho(f),\ f \in C([0,1]),\ x \in [0,1],$$

unde

$$F_{n,0}(f) = f(0),\ F_{n,n}(f) = f(1);$$
$$F_{n,k}(f) = \int_0^1 f(t) \frac{t^{k\rho-1}(1-t)^{(n-k)\rho-1}}{B(k\rho,(n-k)\rho)} dt,\ 1 \le k \le n-1.$$

Structura proprie a acestor operatori a fost studiată în [57].

Acești operatori îndeplinesc și condițiile A1)-A6). Mai precis avem următoarele: $U_n^\rho\psi = \frac{n-1}{n\rho+1}\psi$, așadar putem considera $\alpha_n = \frac{\rho+1}{n\rho+1}$ și $\alpha = 1$. Atuci, U_n^ρ admite polinoamele proprii $p_{n,j}$, $0 \le j \le n$, $deg\ p_{n,j} = j$. Mai mult, $p_{n,j} = e_j$ și $U_n^\rho(e_j) = e_j$, pentru $j = 0, 1$. Valorile proprii sunt, vezi [57]:

$$a_{n,j} = \rho^j \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{(n\rho)(n\rho+1)\ldots(n\rho+j-1)},\ 0 \le j \le n.$$

Așadar

$$l_j := \lim_{n\to\infty} a_{n,j}^n = e^{-\frac{j(j-1)}{2}\cdot\frac{\rho+1}{\rho}},\ j \ge 0.$$

Existența polinoamelor limită $p_j = \lim_{n\to\infty} p_{n,j}$ este de asemenea arătată în [57]. Pentru demonstrarea existenţei semigrupului de operatori generat de iteraţiile operatorilor U_n^ρ se poate aplica Corolarul 2.2.11 din [15].

5 O teoremă de tip Voronovskaya asociată seriilor geometrice de operatori Durrmeyer

În acest capitol ne propunem să găsim o teoremă de tip Voronovskaya pentru seria geometrică asociată operatorilor Bernstein-Durrmeyer, introdusă de Abel.

Acest rezultat a fost publicat în lucrarea:

[43]: **Ș. Garoiu**, *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein-Durrmeyer operators*, Carpathian Journal of Mathematics(2025), 41(2).

5.1 Seria geometrică de operatori Bernstein-Durrmeyer

U. Abel, în lucrarea [1], a introdus seria geometrică asociată operatorilor Bernstein-Durrmeyer (operatori care au apărut pentru prima dată în lucrarea [41] și independent în [70]; proprietățile lor fiind studiate ulterior în [34], [37], [77] etc.)

$$(M_n f)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\left(x\right)\int_0^1 p_{n,k}\left(t\right) f\left(t\right) dt, \qquad f \in L^{\infty}([0,1]). \tag{5.1}$$

Și anume, operatorii pe care i-a studiat sunt definiți după cum urmează:

$$P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(M_n\right)^k .$$

Acești operatori sunt bine definiți pe spațiul V, descris mai jos

$$V = \left\{f \in L^{\infty}\left([0,1]\right) : ||f||_* < \infty\right\}, \tag{5.2}$$

unde $\|\cdot\|_*$ este norma:

$$||f||_* = \sup_{y\in(0,1)}\left|\left(\psi\left(y\right)\right)^{-1}\int_0^y f\left(x\right)dx\right| .$$

De asemenea, V înzestrat cu norma $||\cdot||_*$ este un spațiu Banach.

Pentru $f \in V$, se poate defini F pe $(0,1)$ ca fiind:

$$F\left(y\right) = \left(\psi\left(y\right)\right)^{-1}\int_0^y f\left(x\right)dx, \qquad y \in (0,1)\,. \tag{5.3}$$

Atunci, $f = \left(\psi F\right)'$ a. p. t. pe $[0,1]$ și $||f||_* = ||F||_{\infty}$.

Mai departe, operatorul $P : V \to V$, a fost definit ca

$$P(f)(x) = \int_0^1 \int_x^t F(u)\, dudt, \qquad x \in [0,1],\ f \in V, \tag{5.4}$$

Integrând prin părți în relația (5.4) se poate observa că

$$P(f)(x) = -\int_0^x tF(t)\, dt + \int_x^1 (1-t)\, F(t)dt, \qquad x \in [0,1],\ f \in V, \tag{5.5}$$

și prin derivare rezultă

$$P'(f)(x) = -F(x)\,. \tag{5.6}$$

În lucrarea sa, Abel a demonstrat că operatorii P_n satisfac următorul rezultat de convergență

Teorema 5.1.1. *Dacă $f \in V$, atunci, pe $(V, ||\cdot||_*)$, are loc convergența*

$$\lim_{n\to\infty} ||P_n(f) - P(f)||_* = 0. \tag{5.7}$$

De asemenea, Abel a obținut următoarele două rezultate cu privire la norma operatorilor M_n și P_n pe spațiul V.

Propoziția 5.1.2. *Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, operatorii M_n au proprietatea că $M_n(V) \subset V$, și*

$$||M_n||_{\mathcal{L}(V,V)} = \frac{n}{n+2}. \tag{5.8}$$

Propoziția 5.1.3. *Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ operatorii P_n au proprietatea că $P_n(V) \subset V$, și*

$$||P_n||_{\mathcal{L}(V,V)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \tag{5.9}$$

Rezultate mai recente privind seriile de puteri de operatorii de aproximare pot fi văzute în [10], [46], [47], [56] și [84]. De asemenea, un mic rezumat al principalelor rezultate pe această temă poate fi văzut și în Capitolul 2 Secțiunea 5.

5.2 Un rezultat de tip Voronovskaya

În această secțiune vom prezenta principalul nostru rezultat, și anume vom dobține o teoremă de tip Voronovskaya asociată operatorilor P_n. Prima dată, vom nota cu $G_{M_n} = \sum_{k=0}^{\infty} (M_n)^k$ seria geometrică asociată operatorilor Bernstein - Durrmeyer M_n, unde convergența are loc pe spațiul V. Apoi vom demonstra că următoarele identități sunt adevărate.

Lema 5.2.1. *(vezi Lema 2.1 din [43]) Operatorul $G_{M_n} \in V$ și verifică identitățile:*

$$(I - M_n) \circ G_{M_n} = I, \tag{5.10}$$

și

$$G_{M_n} \circ (I - M_n) = I, \tag{5.11}$$

unde I este operatorul identitate.

În cele ce urmează vom lucra pe spațiul $V_1 = V \cap C([0,1])$. Menționăm pentru ca $f \in V_1$ este necesar ca $f \in C([0,1])$ și

$$\int_0^1 f(t)dt = 0. \tag{5.12}$$

Pe acest spațiu definim operatorul $U : V_1 \to C([0,1])$ după cum urmează

$$U(f)(y) = \begin{cases} (\psi(y))^{-1} \int\limits_0^y f(x)\,dx, & y \in (0,1) \\ f(0), & y = 0 \\ -f(1), & y = 1 \end{cases} \qquad f \in V_1, \tag{5.13}$$

și norma $\|\cdot\|_*$ ca:

$$\|f\|_* = \sup_{y \in [0,1]} |U(f)(y)|. \tag{5.14}$$

Aici, avem că $U(f)(1) = \lim_{y \to 1} \frac{\int_0^y f(t)dt}{\psi(y)}$ și $U(f)(0) = \lim_{y \to 0} \frac{\int_0^y f(t)dt}{\psi(y)}$, deci, deoarece $\psi(0) = \psi(1) = 0$, aplicând regula lui l' Hospital's vom obține că $U(f)(1) = -f(1)$ și $U(f)(0) = f(0)$.

În continuare, vom defini operatorul

$$\Theta(h)(x) = -\int_0^x th(t)dt + \int_x^1 (1-t)h(t)dt, \tag{5.15}$$

unde $h \in C([0,1])$ și $x \in [0,1]$.

Propoziția 5.2.2. *(vezi Propoziția 2.3 din [43]) Operatorul Θ are proprietatea:*

$$\Theta(C([0,1])) \subset V_1.$$

Din această relație și din (5.15), rezultă că

$$P(f) := \Theta(U(f)), \qquad f \in V_1. \tag{5.16}$$

Apoi, pe spațiul V_1, următorul rezultat referitor la norma $\|\cdot\|_*$ are loc.

Lema 5.2.3. *(vezi Lema 2.2 din [43]) Pentru orice funcție $f \in V_1$ are loc:*

$$\|f\|_* \le 2\|f\|_\infty. \tag{5.17}$$

Acum, putem demonstra principalul nostru rezultat.

Teorema 5.2.4. *(vezi Teorema 2.2 din [43]) Fie* $f \in V_1$ *o funcție derivabilă de zece ori pe* $[0,1]$ *care satisface condițiile* $\int_0^1 f(y) \log \psi(y) dy = 0$, $f(0)+f(1)=0$, $f'(0)-f'(1)=0$, $f''(0)+f''(1)=0$ *și* $f'''(0)-f'''(1)=0$. *Atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n(P_n(f) - P(f)) = 2P(f) - \Theta(T'\psi') - \frac{1}{2}\Theta(T''\psi), \tag{5.18}$$

în raport cu norma $\|\cdot\|_*$.

6 Operatori Kantorovich Stancu exponențiali

În acest capitol vom introduce o nouă clasă de operatori de tip exponenţial, obţinuţi cu o modificare de tip Stancu. (similară cu cea pentru operatorii B_n, vezi operatorii $B_n^{\alpha,\beta}$ din (2.8) obținuți în [89]), a operatorilor Bernstein-Kantorovich exponențiali din formula (2.10), obținuți în [18]. Apoi vom demonstra că acești operatori satisfac teorema lui Korovkin, vom obține un rezultat de convergență într-o versiune ponderată a normei pe spații L^p, un rezultat asimptotic de tip Voronovskaya și unele evaluări ale ordiniului de aproximare folosind K-funcționale și moduli de netezime.

Aceste rezultate au fost publicate în [45]:

Ș. Garoiu, *Exponential Kantorovich-Stancu operators,* Bull. Univ. Transilvania Brasov, Ser. 3, Math. Comput. Sci., 5(67), 2025, no. 2, 127-144.

6.1 Definiția operatorilor și rezultatul de convergență

Vom introduce operatorii:

$$K_n^{\alpha,\beta,\mu}f(x) = (n+\beta+1)e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(a_{n+1}(x))\int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} e^{-\mu t}f(t)dt,\ \ f\in C([0,1]) \tag{6.1}$$

unde $x \in [0,1]$ și $0 \le \alpha \le \beta$, $\mu > 0$, $a_n(x) = \frac{e^{\frac{\mu x}{n+\beta}}-1}{e^{\frac{\mu}{n+\beta}}-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Acești operatori sunt o modificare de tip Stancu a operatorilor exponențiali Bernstein-Kantorovici din (2.10).

Pentru a arăta că acești operatori verifică teorema lui Korovkin vom verifica convergența lor pentru funcțiile de test $e_0(x) = 1$, $exp_\mu(x) = e^{\mu x}$ și $exp_\mu^2(x) = e^{2\mu x}$, pentru $x \in [0,1]$, care formează un sistem Chebyshev. Prima dată, este evident că

$$K_n^{\alpha,\beta,\mu}exp_\mu(x) = exp_\mu(x),\ \ x\in[0,1]. \tag{6.2}$$

Pentru a obține rezultatele noastre de aproximare vom avea nevoie de următoarea lemă.

Lema 6.1.1. *(vezi Lema 1 din [45]) Pentru $x \in [0,1]$ avem că:*

$$K_n^{\alpha,\beta,\mu}e_0(x) = \frac{n+\beta+1}{\mu}e^{\mu x}(1-e^{-\frac{\mu}{n+\beta+1}})e^{-\frac{\mu(\alpha+n)}{n+\beta+1}}(1-e^{\frac{\mu x}{n+\beta+1}}+e^{\frac{\mu}{n+\beta+1}})^n, \tag{6.3}$$

$$K_n^{\alpha,\beta,\mu}exp_\mu^2(x) = \frac{n+\beta+1}{\mu}e^{\mu x}e^{\frac{\mu\alpha}{n+\beta+1}}(e^{\frac{\mu}{n+\beta+1}}-1)e^{\frac{\mu n x}{n+\beta+1}}, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\beta,\mu}exp_\mu^3(x) = {} & \frac{n+\beta+1}{2\mu}e^{\mu x}e^{\frac{2\mu\alpha}{n+\beta+1}}(e^{\frac{2\mu}{n+\beta+1}}-1) \\ & \times\left(e^{\frac{\mu(x+1)}{n+\beta+1}}+e^{\frac{\mu x}{n+\beta+1}}-e^{\frac{\mu}{n+\beta+1}}\right)^n, \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$K_n^{\alpha,\beta,\mu} exp_\mu^4(x) = \frac{n+\beta+1}{3\mu} e^{\mu x} e^{\frac{3\mu\alpha}{n+\beta+1}} (e^{\frac{3\mu}{n+\beta+1}} - 1) \tag{6.6}$$
$$\times \left(e^{\frac{\mu(x+2)}{n+\beta+1}} + e^{\frac{\mu(x+1)}{n+\beta+1}} + e^{\frac{\mu x}{n+\beta+1}} - e^{\frac{2\mu}{n+\beta+1}} - e^{\frac{\mu}{n+\beta+1}} \right)^n .$$

Având în vedere Lema 6.1.1 și deoarece funcțiile e_0, exp_μ și exp_μ^2 formeaz un sistem Chebyshev putem demonstra că operatorii $K_n^{\alpha,\beta,\mu} f$ converg unfirom la funcții $f \in C([0,1])$.

Teorema 6.1.2. *(vezi Teorema 1 din [45]) Pentru $f \in C([0,1])$ are loc convergența uniformă pe $[0,1]$ a operatorilor $K_n^{\alpha,\beta,\mu} f$ la funcțiile f.*

În continuare, vom obține un rezultat de aproximare pentru funcții ce aparțin unei versiuni ponderate a spațiilor L^p.

În cele ce urmează, prin $L_\mu^p([0,1])$ înțelegem spțiul funcțiilor f cu proprietatea:

$$\|f\|_{p,\mu} = \left\{ \int_0^1 |e^{-\mu x} f(x) dx|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

De asemenea, se poate observa că dacă $f \in L_\mu^p([0,1])$, atunci $f \in L^p([0,1])$ și reciproc.

Teorema 6.1.3. *(vezi Teorema 2 din [45]) Pentru $f \in L_\mu^p([0,1])$ și $n \in \mathbb{N}$, rezultă:*

$$\|K_n^{\alpha,\beta,\mu} f\|_{p,\mu} \le \left(\left(1 + \frac{\beta}{n+1}\right) \frac{e^{\frac{\mu}{n+\beta+1}} - 1}{\frac{\mu}{n+\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\mu}, \tag{6.7}$$

și, în consecință,

$$\|K_n^{\alpha,\beta,\mu} f\|_{p,\mu} \le \Theta_{\mu,\beta} \|f\|_{p,\mu}, \tag{6.8}$$

unde $\Theta_{\mu,\beta} = \left(\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \frac{e^\mu - 1}{\mu} \right)^{\frac{1}{p}}$. *Mai mult,*

$$\|K_n^{\alpha,\beta,\mu} f - f\|_{p,\mu} \to 0, \quad \textit{as } n \to \infty. \tag{6.9}$$

Observația 6.1.4. *(vezi Observația 1 din [45]) Inegalitățile din Teorema 6.1.3 pot fi rescrise folosind norma $\|\cdot\|_p$, și de asemenea avem că:*

$$\|K_n^{\alpha,\beta,\mu}\|_p \le e^\mu \Theta_{\mu,\beta}. \tag{6.10}$$

6.2 Teorema Voronovskaya

În această secțiune vom demonstra o teoremă de tip Voronovskaya pentru a obține rata de aproximare a operatorilor noștri. În cele ce urmează, deoarece sistemul Chebyshev considerat este $\{e_0, exp_\mu, exp_\mu^2\}$, vom scrie funcțiile $f \in C^2([0,1])$ ca $f(x) = (f \circ \ln_\mu)(exp_\mu)$, $x \in [0,1]$ unde $\ln_\mu(x) = \log_{e^\mu}(x)$ este funcția inversă a $exp_\mu(x)$.

Pentru astfel de funcții, are loc următoarea formulă Voronovskaya.

Teorema 6.2.1. *(vezi Teorema 3 din [45]) Fie $f \in C^2([0,1])$. Următoarea limită existăȘ*

$$\lim_{n\to\infty} n(K_n^{\alpha,\beta,\mu} f - f)(x) = \left[-\frac{1}{2} - \alpha + (1+\beta+\mu)x - \mu x^2\right](\mu f(x) - f'(x)) \qquad (6.11)$$
$$+\frac{x(1-x)}{2}(f''(x) + \mu f(x)),$$

uniform pentru $x \in [0,1]$.

6.3 Estimări cantitative

În cele ce urmează vom oferi câteva caracterizări ale ratei de convergență a operatorilor noștri la funcții din $C([0,1])$. Rezultatele se obțin în termeni de K-functionale, definite pe parcurs, modulul de ordinul întâi de continuitate și modulul de ordinul doi de netezime. Unele dintre aceste rezultate sunt obținute folosind echivalența dintre K-funcționale și modulele menționate.

Pentru a obține estimările menționate la începutul acestei secțiuni vom avea nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lema 6.3.1. *(vezi Lema 2 din [45]) Pentru $y \in [0,1]$ avem că*

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(y)\left|\frac{k+\alpha}{n+\beta+1} - y\right| \le \Omega_{n,\beta}, \qquad (6.12)$$

unde $\Omega_{n,\beta} = \frac{\sqrt{(\beta+1)^2+n/4}}{n+\beta+1}$.

Acum, putem afirma primul nostru rezultat cantitativ care implică modulul de continuitate de ordinul întâi definit ca:

$$\omega_1(f,\delta) = \sup\{|f(t) - f(x)|,\ t,x \in [0,1],\ |t-x| < \delta\},\ f \in C([0,1]),\ \delta > 0.$$

În acest scop, este valabilă următoarea teoremă.

Teorema 6.3.2. *(vezi Teorema 4 din [45]) Fie $f \in C([0,1])$. Atunci, pentru $n \in \mathbb{N}$ avem că:*

$$|K_n^{\alpha,\beta,\mu} f(x) - f(x)| \le |f(x)|\frac{C^1_{\alpha,\beta,\mu}}{n} + e^{\mu}\omega_1(exp_\mu^{-1} f, \tau_n) \qquad (6.13)$$
$$+e^{\mu}\omega_1\left(exp_\mu^{-1} f, \frac{1}{\sqrt{n+\beta+1}}\right)\left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{n+\beta+1}} + \Omega_{n,\beta}\right\},$$

unde

$$\tau_n = \max_{x\in[0,1]} |a_{n+1}(x) - x|, \qquad (6.14)$$

și $C^1_{\alpha,\beta,\mu}$ este o constantă care depinde α, β, μ.

În continuare, vom obține o estimare pentru aproximarea funcțiilor $f \in L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$ folosind K-functionala:

$$\mathcal{K}_1(f,\delta)_p = \inf_{g \in C^1[0,1]} \{\|f-g\|_p + \delta\|g'\|_\infty\},\ \delta > 0,\ 1 \leq p < \infty. \tag{6.15}$$

Teorema 6.3.3. *(vezi Teorema 5 din [45]) Fie $f \in L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci:*

$$\|K_n^{\alpha,\beta,\mu} f - f\|_p \leq \frac{C^1_{\alpha,\beta,\mu}}{n}\|f\|_\infty + e^\mu(\Theta_{\beta,\mu}+1)\mathcal{K}_1\left(f, \frac{\delta_n^{\alpha,\beta}}{\Theta_{\beta,\mu}+1}\right)_p, \tag{6.16}$$

unde $\delta_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2(n+\beta+1)} + \Omega_{n,\beta} + \tau_n$ și $C^1_{\alpha,\beta,\mu}$ este o constantă ce depinde de α, β și μ.

Acum, pentru a continua cu ultimul nostru rezultat, vom avea nevoie de următoarele definiții ale K-funcționalei și modulului de netezime de ordinul doi ω_2:

$$\mathcal{K}_j(f,\delta) = \inf_{g \in C^j([0,1])} \{\|f-g\|_\infty + \delta^j\|g^{(j)}\|_\infty\},\ f \in C([0,1]),\ \delta > 0,\ j = 1,2,$$

și

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{h \in [0,\delta]} \sup_{x \in [0,1-\frac{h}{2}]} \left|\Delta_h^2(f,x)\right|,$$

unde $\Delta_h^2(f,x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$.

Este bine cunoscut că între aceste K-funcționale și ω_1 și ω_2 are loc următoarea relație (vezi [62]): $\mathcal{K}_j(f,\delta) \leq C_j\omega_j(f,\delta)$, $f \in C([0,1])$, $\delta > 0$, $j = 1,2$, unde C_j sunt constante ce depind de j.

Teorema 6.3.4. *(vezi Teorema 6 din [45]) Fie $f \in C([0,1])$. Atunci:*

$$\|K_n^{\alpha,\beta,\mu} f - f\|_\infty \leq 2\frac{C^1_{\alpha,\beta,\mu}}{n}\|f\|_\infty + C_1^*\omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right) + C_2^*\omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{6.17}$$

pentru $n \in \mathbb{N}$ unde C_1^* și C_2^* sunt constante ce depind de α, β, μ.

7 Operatori Bernstein Durrmeyer exponențiali

În acest capitol, scopul nostru este de a obține o variantă exponențială a operatorilor Bernstein-Durrmeyer M_n din (5.1) similară cu varianta propusă de Angeloni și Costarelli ([18]) pentru operatorii exponențiali Bernstein-Kantorovich din (2.10). Apoi vom demonstra că acești operatori satisfac teorema lui Korovkin, vom obține un rezultat de convergență într-o versiune ponderată a normei pe spații L^p, un rezultat asimptotic de tip Voronovskaya, unele evaluări ale ordinului de aproximare folosind K-funcționale și module de netezime și în final vom demonstra un rezultat de aproximare simultană.

Aceste rezultate au fost publicate în [44]:

Ș. Garoiu, *Exponential Bernstein-Durrmeyer operators*, General Mathematics(2024), Volume 32, no. 2, 84-97.

7.1 Definiția operatorilor și câteva observații

Operatorii Bernstein-Durrmeyer sunt definiți ca:

$$M_n f(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n,k}(t)\, f(t)\, dt,\ n\in\mathbb{N},\ f\in L^\infty([0,1]).$$

După cum am menționat la început, vom introduce o variantă exponențială a operatorilor M_n definiți după cum urmează:

$$M_n^* f(x) = (n+1)e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n,k}(t) f(t) e^{-\mu t} dt,\ f\in C([0,1]),\ x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}, \tag{7.1}$$

unde $\mu > 0$ este un parametru real.

În primul rând, avem următoarea observație, care afirmă că operatorii noștri invariază funcția exponențială $\exp_\mu(x) = e^{\mu x}$, $x \in [0,1]$.

Observația 7.1.1. *(vezi Observația 1 din [44]) Pentru $x\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}$ avem că:*

$$M_n^* exp_\mu(x) = (n+1)e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n,k}(t)dt = e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = e^{\mu x}.$$

Următoarea identitate are loc.

Observația 7.1.2. *(vezi Observația 2 din [44]) Pentru $f\in C([0,1])$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]$ avem că*

$$M_n^\star f(x) = exp_\mu(x) M_n(f \exp_{-\mu})(x). \tag{7.2}$$

Deși operatorii noștri sunt construiți într-un mod similar cu operatorii obținuți de Angeloni și Costarelli, din (2.10), pentru ei nu vom avea nevoie de modificarea argumentului polinoamelor $p_{n,k}$.

Vom reaminti definiția modulului de continuitate de ordinul întâi

$$\omega_1(f,\delta) = \sup\{|f(t) - f(x)|,\ |t-x| < \delta\ x,t \in [0,1],\ \delta > 0\}.$$

Pentru $f \in C^1([0,1])$ modulul de netezime de ordinul doi este definit ca

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{h\in[0,\delta]} \sup_{x\in[0,1-\frac{h}{2}]} \left|\Delta_h^2(f,x)\right|,$$

unde $\Delta_h^2(f,x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$ este diferența finită de ordinul doi a funcției f, cu pasul h.

Folosind modulele de mai sus vom oferi câteva estimări cantitative privind gradul de aproximare de către operatorii noștri. O altă astfel de estimare va fi dată folosind K-funcționalele

$$\mathcal{K}_j(f,\delta) = \inf_{g\in C^j([0,1])} \{\|f-g\|_\infty + \delta^j \|g^{(j)}\|_\infty\},\ f \in C([0,1]),\ \delta > 0,\ j = 1,2. \tag{7.3}$$

și următaore relație dintre $\mathcal{K}_j$ și ω_j:

$$\mathcal{K}_j(f,\delta) \le C_j \omega_j(f,\delta),\ j = 1,\ 2$$

C_j este o constantă ce depinde de j (vezi [62]). Prin $C^j([0,1])$ ne referim la spațiul funcțiilor având derivate de ordinul j^{th} continue pe $[0,1]$ pentru $j = 1,\ 2$.

7.2 Rezultate de convergență

Fie $\gamma_i(x) = x^i \exp_\mu(x)$, $i = 0,\ 1,\ 2$, $x \in [0,1]$. Atunci, având în vedere următoarea lemă, putem considera funcțiile γ_i, $i = 0,\ 1,\ 2$, ca funcţii test ce vor fi utilizate la verificarea condiţiilor teoremei Korovkin pentru operatorii M_n^*.

Lema 7.2.1. *(vezi Lema 1 din [44]) Mulțimea* $\{\gamma_i(x) |\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ x \in [0,1]\}$ *este un sistem Chebyshev.*

Pentru funcțiile test γ_0, γ_1, γ_2 au loc următoarele rezultate.

Lema 7.2.2. *(vezi Lema 2 din [44]) Următoarele identități sunt adevărate:*

$$M_n^*\gamma_0(x) = \gamma_0(x) = exp_\mu(x), \tag{7.4}$$

$$M_n^*\gamma_1(x) = \frac{n}{n+2}\gamma_1(x) + \frac{1}{n+2}\gamma_0(x) \tag{7.5}$$

$$M_n^*\gamma_2(x) = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}\gamma_2(x) + \frac{n}{(n+2)(n+3)}\gamma_1(x) + \frac{2}{(n+2)(n+3)}\gamma_0(x) \tag{7.6}$$

Așadar putem demonstra următorul rezultat de convergență.

Teorema 7.2.3. *(vezi Teorema 1 din [44]) Fie $f \in C([0,1])$. Atunci $M_n^* f$ converge unfiorm la f pe* $[0,1]$.

Mai departe, vom demonstra că operatorii noștri aproximează funcții aparținând spațiilor L^p. Cu toate acestea, deoarece operatorii noștri sunt definiți ca în (7.1) va fi la îndemână să lucrăm cu o versiune ponderată a spațiilor L^p, şi anume vom demonstra convergenţa operatorilor M_n^* în spațiul $L_\mu^p([0,1])$.Având în vedere acest lucru, spunem că o funcție $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ aparține $L_\mu^p([0,1])$ dacă $f \in L^p([0,1])$ și

$$\|f\|_{p,\mu} = \left\{ \int_0^1 \left| e^{-\mu t} f(t) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{7.7}$$

Chiar dacă, $f \in L_\mu^p([0,1])$ atunci $f \in L^p([0,1])$ (și reciproc), alegerea spațiului este motivată de definiția operatorilor M_n^*.

Teorema 7.2.4. *(vezi Teorema 2 din [44]) Fie $f \in L_\mu^p([0,1])$. Atunci:*

$$\|M_n^* f\|_{p,\mu} \le \|f\|_{p,\mu}. \tag{7.8}$$

Mai mult,

$$\lim_{n\to\infty} \|M_n^* f - f\|_{p,\mu} = 0. \tag{7.9}$$

7.3 Teorema Voronovskaya

În această secțiune vom găsi un rezultat de tip Voronovskaya pentru operatorii M_n^*. În cele ce urmează prin $C^2([0,1])$ ne referim la spatiul functiilor continue pe $[0,1]$ care admit derivată de ordinul 2 în $x \in (0,1)$.

Teorema 7.3.1. *(vezi Teorema 3 din [44]) Dacă $f \in C^2([0,1])$ atunci, pentru $x \in [0,1]$:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n(M_n^* f - f)(x) &= [\mu^2 x(1-x) - \mu(1-2x)] f(x) \\ &+ [1 - 2x - 2\mu x(1-x)] f'(x) + x(1-x) f''(x). \end{aligned} \tag{7.10}$$

7.4 Estimări cantitative

În această secțiune vom oferi câteva estimări cantitative ale aproximării cu operatorii M_n^*. Și anume, enunțăm următorul rezultat.

Teorema 7.4.1. *(vezi Teorema 4 din [44]) Pentru $f \in C([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ și $\delta > 0$, avem că*

$$|f(x) - M_n^* f(x)| \le e^{\mu x} \left[1 + \frac{(2n-6)x(1-x)+2}{\delta^2 (n+2)(n+3)} \right] \omega_1 \left(f \cdot exp_{-\mu}, \delta \right), \tag{7.11}$$

și

$$|f(x) - M_n^\star f(x)| \leq e^{\mu x} \left[\frac{|1-2x|}{\delta(n+2)} \omega_1 \left(f \cdot exp_{-\mu}, \delta \right) \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{(2n-6)x(1-x)+2}{2\delta^2(n+2)(n+3)} \right) \omega_2 \left(f \cdot exp_{-\mu}, \delta \right) \right], \tag{7.12}$$

În consecință,

$$\|f - M_n^\star f\| \leq \frac{3}{2} e^\mu \cdot \omega_1 \left(f \cdot exp_{-\mu}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \tag{7.13}$$

și

$$\|f - M_n^\star f\| \leq e^\mu \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \omega_1 \left(f \cdot exp_{-\mu}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{5}{4} \omega_2 \left(f \cdot exp_{-\mu}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]. \tag{7.14}$$

În continuare, o altă estimare folosind ω_1 se poate obține după cum urmează.

Teorema 7.4.2. *(vezi Teorema 5 din [44]) Fie $f \in C([0,1])$. Pentru $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}$, are loc:*

$$|f(x) - M_n^* f(x)| \leq \left(e^{2\mu x} + \frac{1}{2} e^{\mu x} \right) \omega_1 \left(f \cdot e^{-\mu \cdot}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \tag{7.15}$$

În cele ce urmează, vom obține o estimare a gradului de aproximare, a funcțiilor aparținând $C([0,1])$, în termeni de modulele ω_1 și ω_2 folosind K-funcționalele din (7.3) și relația dintre acestea și modulele menționate.

Teorema 7.4.3. *(vezi Teorema 6 din [44]) Dacă $f \in C([0,1])$ și $n \in \mathbb{N}$ atunci:*

$$\|M_n^* f - f\|_\infty \leq \frac{\mu^2 e^\mu + 4\mu}{4n} \|f\|_\infty + K_{n,\mu}^1 \omega_1 \left(f, \frac{e^\mu(2\mu+1)+4}{e^\mu(8n+\mu^2)+4\mu} \right) \tag{7.16}$$
$$+ K_{n,\mu}^2 \omega_2 \left(f, \sqrt{\frac{e^\mu(2\mu+1)+4}{e^\mu(8n+\mu^2)+4\mu}} \right),$$

unde $K_{n,\mu}^1 = C_1 \frac{\left[e^\mu(8n+\mu^2)+4\mu\right](\mu e^\mu + 2)}{2n[e^\mu(2\mu+1)+4]}$ și $K_{n,\mu}^2 = C_2 \frac{e^{2\mu}(8n+\mu^2)+4\mu e^\mu}{4n[e^\mu(2\mu+1)+4]}$, cu C_1 și C_2 constante.

7.5 Aproximare simultană

În cele ce urmează vom oferi un rezultat de aproximare simultană privind operatorii noștri. Pentru a face acest lucru vom avea nevoie de derivata de ordinul r a operatorilor M_n^*. Mai întâi vom reaminti un rezultat care se datorează lui Derriennic (vezi [34]):

Lema 7.5.1. *Fie $f \in C^r([0,1])$. Atunci, pentru $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) = \frac{(n+1)!n!}{(n-r)!(n+r)!} \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x) \int_0^1 p_{n+r,k+r}(t) f^{(r)}(t) dt. \tag{7.17}$$

În continuare, vom face următoarea notație

$$Q_{n,j}f(x) = \frac{(n+1)!n!}{(n-j)!(n+j)!}\sum_{k=0}^{n-j} p_{n-j,k}(x)\int_0^1 p_{n+j,k+j}(t)f(t)dt. \tag{7.18}$$

Observația 7.5.2. *Avem că:*

$$\frac{d^j}{dx^j}(M_n f)(x) = Q_{n,j}f^{(j)}(x). \tag{7.19}$$

Din (7.18) putem vedea că operatorii $Q_{n,j}$ sunt liniari, pozitiv și că verifică urmatoarea lema, demonstrată de Derriennic (see [34]).

Lema 7.5.3. *Fie $f \in C([0,1])$ o funcție. Atunci $Q_{n,j}f$ converge uniform la f.*

Acum, putem enunța rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 7.5.4. *(vezi Teorema 7 din [44]) Fie $f \in C^r([0,1])$ și $s = 0, 1, \ldots, r$. Atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^s}{dx^s}(M_n^* f) = f^{(s)}, \tag{7.20}$$

uniform pe $[0,1]$.

8 Concluzii

O mare parte a acestei teze se ocupă cu studiul problemelor din teoria aproximărilor prin utilizarea unor serii de puteri de operatori. În acest sens, am obținut teoreme de convergență ale seriilor de puteri de șiruri de operatori liniari și pozitivi în două contexte diferite, unul bazat pe teoremele Voronovskaya și celălalt folosind C_0-semigrupuri de operatori. În primul context am obținut și un rezultat privind iterațiile operatorilor liniari și pozitivi care s-a dovedit a fi o reprezentare explicită a teoremei Voronovskaya pentru combinațiile Micchelli de operatori liniari și pozitivi. Până acum, după cunoștințele noastre, nu există un astfel de rezultat, cu excepția unei reprezentări parțiale a limitei în Teorema Voronovskaya menționată mai sus, dată doar pentru operatorii Bernstein. În afară de aceasta, am studiat și teoremele Voronovskaya referitoare la o clasă de operatori obținuți prin serii geometrice de operatori Bernstein-Durrmeyer.

O altă direcție de cercetare abordată este studiul unor operatori obținuți ca modificări de tip exponențial ale operatorilor de tip Kantorovich și Durrmeyer. Această direcție este legată de progresele recente în acest sens din literatura actuală pe această temă.

Subiectele abordate în această teză pot fi continuate cu mai multe studii ale seriilor de puteri construite cu operatori liniari pozitivi, iar teza deschide cercetări ulterioare privind legătura dintre C_0-semigrupuri și probleme de aproximare și, de asemenea, generalizări ulterioare ale unor clase de operatori obținute prin diferite modificări.

Bibliografie

[1] U. Abel, *Geometric series of Bernstein-Durrmeyer operators*, East J. Approx., 15, (2009), 439-450.

[2] U. Abel, M. Ivan, *Over-iterates of Bernstein's operators: a short and elementary proof*, Amer. Math. Monthly, 116 (2009), 535–538.

[3] U. Abel, M. Ivan, R. Păltănea, *Geometric series of Bernstein operators revisited*, J. Math. Anal. Appl., 400(1), (2013), 22-24.

[4] U. Abel, M. Ivan, R. Păltănea, *Geometric series of positive linear operators and the inverse Voronovskaya theorem on a compact interval*, J. Approx. Theory, 184, (2014), 163-175.

[5] J.A. Adell, F.G. Badía, J. de la Cal, *On the iterates of some Bernstein-type operators*, J. Math. Anal. Appl., 209, (1997), 529–541.

[6] P. N. Agrawal, *Simultaneous approximation by Micchelli combinations of Bernstein operators*, Demonstr. Math., 25(3), (1992), 513-524.

[7] T. Acar, A. Aral, D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, *Szász-Mirakyan type operators which fix exponentials*, Results Math., 72(3),(2017), 1341–1358.

[8] T. Acar, A. Aral, H. Gonska, *On Szász-Mirakyan operators preserving* e^{2ax}, $a > 0$, Mediterr. J. Math., 14(6), (2017).

[9] T. Acar, A. Aral, I. Rașa, *Power series of beta operators*, Appl. Math. Comput. 247, (2014), 815–823.

[10] T. Acar, A. Aral, I. Raşa, *Power series of positive linear operators*, Mediterr. J. Math., 16(43), (2019).

[11] T. Acar, A. Aral, I. Rașa, *The new forms of Voronovskaya's theorem in weighted spaces*, Positivity, 20, (2016), 25-40.

[12] A. M. Acu, A. Aral, I. Rașa, *New properties of operators preserving exponentials*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., 117(1), (2023).

[13] F. Altomare, *Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators*, Surv. Approx. Theory, 5, (2010), 92–164.

[14] F. Altomare, M. Campiti, *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, W. de Gruyter GmbH, Berlin, New York, 17, 1994.

[15] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I. Rasa: *Markov operators, positive semigroups and approximation processes,* de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 61. W. de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 61, (2014)

[16] F. Altomare, S. Diomede, *Asymptotic formulae for positive linear operators: direct and converse results*, Jaen J. Approx., 2, (2010), 255-287.

[17] F. Altomare, I. Rașa, *Lipschitz contractions, unique ergodicity and asymptotics of Markov semigroups*, Bollettino UMI 9(5), (2012), 1–17.

[18] L. Angeloni, D. Costarelli, *Approximation by exponential - type polynomials*, J. Math. Anal. Appl., 532(1), (2024).

[19] A. Aral, D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, *Bernstein-type operators that reproduce exponential functions*, J. Math. Inequal., 12(3), (2018), 861–872.

[20] A. Aral, H. Gonska, M. Heilmann, G. Tachev, *Quantitative Voronovskaya-type results for polynomially bounded functions*, Results. Math. 70(3-4), (2016), 313-324.

[21] A. Aral, D. Otrocol, I. Rașa, *On approximation by some Bernstein-Kantorovich exponential-type polynomial*, Period. Math. Hung., 79, (2019), 236–254.

[22] A. Attalienti, I. Rașa, *The eigenstructure of some positive linear operators*, Anal. Numer. Theor. Approx., 43, (2014), 45–58.

[23] W. Bauer, V.B.K. Kumar, R. Rajan, *Korovkin-type theorems on B(H) and their applications to function spaces*, Monatsh. Math., 197(2), (2022), 257–284.

[24] D. Bărbosu, *Kantorovich-Stancu type operators*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5, (2004), 1-6.

[25] E. Berdysheva, *Uniform convergence of Bernstein–Durrmeyer operators with respect to arbitrary measure*, J. Math. Anal. Appl., 394(1), (2012), 324-336.

[26] E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckier, *Durrmeyer operators and their natural quasi-interpolants*, Stud. Comput. Math., 12, (2006), 1-21.

[27] H. Berens, T. Xu, *On Bernstein-Durrmeyer polynomials with Jacobi weights*, Approximation Theory and Functional Analysis, (C.K. Chui ed.), (1991), 25-43.

[28] S. Bernstein, *Démonstration du Théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des Probabilités*, (1911) 13.

[29] S.N. Bernstein, *Complement a. l'article de E. Woronovskaja*, DokI. Akad. Nauk SSSR, 4, (1932), 86-92.

[30] J. Bustamante, *Bernstein operators and their properties*, Birkhäuser, (2017).

[31] G. Z. Chang, Z. Shan, *A simple proof for a theorem of Kelisky and Rivlin*, J. Math. Res., 3, (1983), 145–146.

[32] E.W. Cheney, A. Sharma, *Bernstein power series*, Canad. J. Math., 16, (1964) 241–252.

[33] S. Cooper, S. Waldron, *The eigenstructure of Bernstein operators*, J. Approx. Theory, 105, (2000), 133–165.

[34] M.-M. Derriennic, Sur l'approximation de functions integrable sur $[0,1]$ par des polynomes de Bernstein modifies, J. Approx. Theory, 31, (1981), 323-343.

[35] M. M. Derriennic, *On multivariate approximation by Bernstein-type polynomials*, J. Approx. Theory, 45(2), (1985), 155–166.

[36] R. De Vore, *The approximation of continuous functions by positive linear operators*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).

[37] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer, Berlin, 1993, 303.

[38] Z. Ditzian, K. Ivanov, *Bernstein-type operators and their derivatives,* J. Approx. Theory, 56(1), (1989), 72-90.

[39] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness,* Springer Series in Computational Mathematics, Springer New York.

[40] B. R. Draganov, I. Gadjev, *Direct and converse Voronovskaya estimates for the Bernstein operator*, Result. Math., 73(1), (2018).

[41] J. L. Durrmeyer, *Une formule d'inversion de la Transformee de Laplace, Applications a la Theorie des Moments*, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de l'Universite de Paris, (1967).

[42] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000, 194, with contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[43] **Ș. Garoiu**, *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein-Durrmeyer operators*, Carpathian Journal of Mathematics, 41(2), (2025).

[44] **Ș. Garoiu**, *Exponential Bernstein-Durrmeyer operators*, General Mathematics, 32(2), (2024), 84-97.

[45] **Ș. Garoiu**, *Exponential Kantorovich-Stancu operators,* Bull. Univ. Transilvania Brasov, Ser. 3, Math. Comput. Sci., 5(67)(2), (2025), 127-144.

[46] **Ş. Garoiu**, R. Păltănea, *Generalized Voronovskaya theorem and the convergence of power series of positive linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 531(2)(2), (2024).

[47] **Ș. Garoiu**, R. Paltanea, *The representation of the limit of power series of positive linear operators by using the semigroup of operators generated by their iterate,* Dolomites Research Notes on Approximation, 16(3), (2023), 39-47.

[48] I. Gavrea, M. Ivan, *On the iterates of positive linear operators preserving the linear functions*, J. Math. Anal. Appl. 372, (2010), 366–368.

[49] I. Gavrea, M. Ivan, *On the iterates of positive linear operators*, J. Approx. Theory, 163, (2011), 1076–1079.

[50] H. Gonska, *On the degree of approximation in Voronovskaya's theorem*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, 52(3), (2007).

[51] H. Gonska, M. Heilmann, I. Rașa, *Convergence of iterates of genuine and ultraspherical Durrmeyer operators to the limiting semigroup: C2-estimates*, J. Approx. Theory, 160, (2009), 243–255.

[52] H. Gonska, R. Păltănea, *General Voronovskaya and asymptotic theorems in simultaneous approximation*, Mediterr. J. Math., 7, (2010), 37-49.

[53] H. Gonska, R. Păltănea, *Simultaneous approximation by a class of Bernstein-Durrmeyer operators preserving linear functions*, Czechoslovak Math. J., 60(135), (2010).

[54] H. Gonska, P. Pițul, and I. Rașa, *On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators*, Numerical Analysis and Approximation Theory (Proc. Int. Conf. Cluj-Napoca 2006, ed. by O. Agratini and P. Blaga), (2006) 55-80.

[55] H. Gonska, I. Rașa, *The limiting semigroup of the Bernstein iterates: degree of convergence*, Acta Math. Hungar., 111, (2006), 119–130.

[56] H. Gonska, I. Raşa, E.D. Stanilă, *Power series of operators U_n^ρ*, Positivity, 19, (2015), 237–249.

[57] H. Gonska, I. Rașa, E.D. Stanilă, *The eigenstructure of operators linking the Bernstein and the genuine Bernstein-Durrmeyer operators*, Mediterr. J. Math., 11, (2014), 561-576.

[58] V. Gupta, *Approximation with certain exponential operators*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., 114(2), (2020).

[59] M. Heilmann, I. Rașa, *Eigenstructure and iterates for uniquely ergodic Kantorovich modifications of operators*, Positivity, 21, (2017), 897–910.

[60] M. Heilmann, I. Rașa, *C_0-semigroups associated with uniquely ergodic Kantorovich modifications of operators*, Positivity, 22(3), (2018).

[61] A. Holhos, *A Voronovskaya-type theorem in simultaneous approximation*, Periodica Mathematica Hungarica, 85, (2022), 280–291

[62] H. Johnen, *Inequalities connected with the moduli of smootness*. Mat. Vesn., N. Ser. 9(24), (1972), 289-303.

[63] D. Kacsó, *Estimates for iterates of positive linear operators preserving linear functions*, Results Math., 54, (2009), 85–101.

[64] L. V. Kantorovich, *Sur certains developements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein* I, II. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 563(568), (1930),595–600.

[65] R.P. Kelisky, T.J. Rivlin, *Iterates of Bernstein polynomials*, Pacific J. Math., 21, (1967), 511–520.

[66] P. P. Korovkin, *Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions (Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 90, (1953) 961–964.

[67] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Translated din the Russian Ed. (1959), Russian Monographs and Texts on Advances Mathematics and Physics, Vol. III, Gordon and Breach Publishers, Inc., New York, 1960, Hindustan Publ. Corp. (India), Delhi.

[68] G.G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.

[69] R.G. Mamedov, *On the asymptotic value of the approximation of repeatedly differentiable functions by positive linear operators* (Russian), Dokl. Akad. Nauk, 146 (1962), 1013-1016.

[70] A. Lupaș, *Die Folge der Betaoperatoren,* Dissertation, Univ. Stuttgart (1972), Stuttgart

[71] C.A. Micchelli, *The saturation class and iterates of Bernstein polynomials*, J. Approx. Theory 8, (1973), 1–18.

[72] B. Mond, *Note on the degree of approximation by linear positive operators*, J. Approx. Theory, 18, (1976), 304-306

[73] L. Nachbin, *Elements of aproximation theory*, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1965.

[74] J. Nagel, *Asymptotic properties of powers of Bernstein operators*, J. Approx. Theory, 29, (1980), 323–335.

[75] G.M. Nielson, R.F. Riesenfeld, N.A. Weiss, *Iterates of Markov operators,* J. Approx. Theory, 17, (1976), 321–331.

[76] P. E. Parvanov, B. D. Popov, *The limit case of Bernstein's operators with Jacobi weights*, Math. Balkanica (NS) 8 (2-3), 165-177.

[77] R. Păltănea, *Approximation Theory Using Positive Linear Operators.* Birkhäuser, 2004.

[78] R. Păltănea, *The power series of Bernstein operators*, Automat. Comput. Appl. Math., 15(1), (2006), 7-14.

[79] R. Păltănea, *A class of Durrmeyer type operators preserving linear functions*, Ann. Tiberiu Popoviciu Sem. Funct. Equat. Approxim. Convex. (Cluj-Napoca), 5, (2007), 109-117.

[80] R. Păltănea, *On the geometric series of linear positive operators*, Constr. Math. Anal., 2(2), (2019), 49-56.

[81] R. Păltănea, *Sur un operateur polynomial défini sur l´ensemble des fonctions intégrables*, Babeș Bolyai Univ., Fac. Math., Res. Semin., 2, (1983), 101-106

[82] R. Păltănea, *Optimal estimates with moduli of continuity*, Result. Math., 32, (1997), 318-331

[83] D. Popa, *Korovkin type results for multivariate continuous periodic functions*, Results Math. 74(3), (2019).

[84] I. Raşa, *Power series of Bernstein operators and approximation of resolvents*, Mediterr. J. Math., 9, (2012), 635-644.

[85] I. A. Rus, *Iterates of Bernstein operators via contraction principle*, J. Math. Anal. Appl., 292, (2004), 259–261

[86] R. Schnabl, *Über gleichmäßige Approximation durch positive lineare Operatoren*, Constructive theory of functions (Proc. Internat. Conf., Varna, 1970), Izdat Bolgar. Akad. Nauk, Sofia, (1972), 287–296.

[87] O. Shisha, B. Mond, *The Degree of Convergence of Sequences of Linear Positive Operators,* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 60(4), (1968).

[88] P.C. Sikkema, *On some linear positive operators*, (English) Zbl 0205.08001 Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 73, (1970), 327-337.

[89] D. D. Stancu, *Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein*, Stud. Univ. Babes¸-Bolyai Math., 14, (1969), 31–45.

[90] O. Szász, *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 45, (1950).

[91] H. F. Trotter, *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific J. Math., 8, (1958), 887–919.

[92] E.W. Voronovskaya, *Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 79, (1932), 79-85.

[93] K. G. Weierstrass, *U die analytische Darstellbarkeit sogenannter licher Funktionen einer reellen Veranderlichen*, Sitzungsber. Akad. Berlin, 2, (1885), 633-639.

[94] H.-J. Wenz, *On the limits of (linear combinations of) iterates of linear operators*, J. Approx. Theory 89, (1997), 219–237.

Lista publicațiilor

1. **Ș. Garoiu**, *A Voronovskaya type theorem associated to geometric series of Bernstein-Durrmeyer operators*, Carpathian Journal of Mathematics, 41(2), (2025).

2. **Ș. Garoiu**, *Exponential Bernstein-Durrmeyer operators*, General Mathematics, 32(2), (2024), 84-97.

3. **Ș. Garoiu**, *Exponential Kantorovich-Stancu operators,* Bull. Univ. Transilvania Brasov, Ser. 3, Math. Comput. Sci., 5(67)(2), (2025), 127-144.

4. **Ş. Garoiu**, R. Păltănea, *Generalized Voronovskaya theorem and the convergence of power series of positive linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 531(2)(2), (2024).

5. **Ș. Garoiu**, R. Paltanea, *The representation of the limit of power series of positive linear operators by using the semigroup of operators generated by their iterate,* Dolomites Research Notes on Approximation, 16(3), (2023), 39-47