Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Bianca Ioana VASIAN

Contribuții la teoria constructivă a aproximării

Contributions to constructive approximation theory

REZUMAT

Conducător ştiințific
Prof.dr. Radu PĂLTĂNEA

BRAȘOV, 2025

Cuprins

1 Introducere

1.1 Considerații asupra teoriei constructive a aproximării

Temele studiate în această teză de doctorat fac parte din domeniul matematic al teoriei aproximării. Teoria aproximării poate fi privită ca o punte între matematica pură și cea aplicată. Principala preocupare a domeniului este aproximarea funcțiilor continue cu valori reale prin funcții mai simple, mai ușor de gestionat. Un alt punct de interes este aproximarea cantitativă, precum și evaluarea eroarii de aproximare.

Fundamentele acestui domeniu au fost stabilite de către mari matematicieni, printe care îi menționăm pe K. Weierstrass, S. N. Bernstein, D. Jackson, P. P. Korovkin, G. G. Lorentz.

Mai mult, acest domeniu de cercetare are istorie în țara noastră fiind intens studiat de către matematicienii T. Popoviciu, D. D. Stancu și A. Lupaș.

Unul dintre cele mai importante rezultate ale teoriei aproximării, cunoscut în literatură drept *Prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass*, demonstrată de K. Weierstrass în lucrarea [116], afirmă că pentru orice funcție continuă $f \in C([a,b])$ și pentru orice $\varepsilon > 0$, există o funcție polinomială cu coeficienți reali $p(x)$, astfel încât $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in [a,b]$. Cea mai faimoasă demonstrație a acestui rezultat a fost propusă de către matematicianul S. N. Bernstein în lucrarea [18], unde autorul a dovedit rezultatul într-un mod constructiv care a condus la definirea bine-cunoscuților operatori Bernstein. Acești operatori sunt definiți astfel:

$$B_n\left(f,x\right) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\left(x\right) f\left(\frac{k}{n}\right),\ x \in \left[0,1\right],\ f \in C([0,1]),$$

unde

$$p_{n,k}\left(x\right) = \binom{n}{k} x^k \left(1-x\right)^{n-k},\quad \text{for } 0 \leq k \leq n,$$

și $p_{n,k}\left(x\right) = 0$ pentru $k > n$.

După ce acești operatori au fost introduși, au reprezentat un mare interes în cercetare. Pentru mai multe rezultate privind proprietățile operatorilor Bernstein, sugerăm cititorului următoarele referințe bibliografice [14, 19, 26, 30, 81, 82, 100, 115].

De asemenea, pentru extinderea familiei de funcții care urmează să fie aproximate, se pot găsi o mulțime de alți operatori, printre care menționăm operatorii Kantorovich, unde funcția de aproximat este integrabilă pe $[0,1]$ ($f \in L_1([0,1])$),

$$K_n(f,x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt,\ x \in [0,1],\ f \in L_1([0,1]),$$

unde $p_{n,k}$ sunt definiți anterior.

Operatorii Kantorovich au fost intens studiați iar modificări ale acestora reprezintă un domeniu de cercetare deschis, de exemplu, menționăm următoarele [59, 61, 94, 106, 107].

Altă generalizare a operatorilor Bernstein, de asemenea pentru funcții integrabile pe intervalul $[0,1]$, a fost introdusă J. L. Durrmeyer în lucrarea [43], și independent de A. Lupaş în [72]:

$$D_n(f,x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t)f(t)dt, \; f \in L_1([0,1]), \; x \in [0,1],$$

cu $p_{n,k}$ definiți mai sus. Pentru mai multe rezultate privind proprietățile operatorilor Durrmeyer facem referire la următoarele referințe [38, 72, 79, 85].

Pentru un studiu complet al domeniului teoriei constructive a aproximării, menționăm următoarele cărți [9, 12, 35, 37, 86, 93, 103].

1.2 Motivations for choosing the theme

Teoria aproximării reprezintă o punte între matematica pură și cea aplicată. În acest sens putem menționa diferite aplicații în domenii semnificative de cercetare precum:

- aproximare constructivă;
- interpolare;
- teoria probabilităților;
- analiză funcțională;
- teoria operatorilor;
- analiză numerică;
- grafică asistată de calculator;
- machine learning.

1.3 Structura tezei

În această teză, prezentăm noi contribuții la aproximarea prin operatori liniari pozitivi sau nepozitivi și teoria constructivă a aproximării. Rezultatele sunt structurate în cinci capitole. Primul capitol este dedicat stabilirii notațiilor și terminologiei, precum și menționării obiectelor matematice utilizate în această teză. În al doilea capitol prezentăm câțiva operatori de tip Durrmeyer nepozitivi. Aici sunt discutate două clase de operatori de tip Durrmeyer care sunt liniari, dar nu și pozitivi pe întregul lor domeniu de definiție. Al treilea capitol conține noi clase de operatori de tip Stancu-Kantorovich modificați în sens King. Acești operatori sunt prezentați într-un capitol separat deoarece posedă proprietatea de pozitivitate. Discutăm trei noi metode de obținere a operatorilor de tip Stancu-Kantorovich. Al patrulea capitol este dedicat operatorilor nepozitivi de tip Kantorovich atașați unor operatori diferențiali liniari. În prima secțiune a acestui capitol discutăm doar generalizarea operatorilor Bernstein în sens Kantorovich, iar în a doua secțiune propunem o metodă de obținere a unei generalizări a operatorilor Kantorovich care posedă anumite proprietăți, cum ar fi aproximarea simultană. Al cincilea capitol este dedicat introducerii unui modul de netezime de ordinul doi, dublu ponderat. În acest capitol propunem un nou modul de ordinul doi care depinde de două funcții pondere. O aplicație a acestui modul este prezentată pentru operatorii Szász-Mirakjan.

Primul capitol, **Preliminarii**, conține notațiile și terminologia, precum și câteva concepte cheie esențiale pentru demonstrarea rezultatelor prezentate în această teză. Aici prezentăm și câțiva operatori particulari care sunt ulterior generalizați sau utilizați în exemple.

Capitolul doi, **Operatori de tip Durrmeyer nepozitivi**, este dedicat introducerii unor noi operatori de tip Durrmeyer care nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0, 1]$. Principalele rezultate din acest capitol fac parte din lucrările **"On approximation properties of some non positive Bernstein-Durrmeyer type operators"**, An. Şt. Univ. Ovidius Constanța, Vol. 21(1), 2023; și **"On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense"**, publicat în Dolomites Research Notes on Aproximation, 16(3), 104-117, 2023. Rezultatele prezentate în acest capitol, referitoare la cele două clase de operatori menționați mai sus, sunt demonstrate folosind metode noi.

Capitolul trei, **Operatori de tip Kantorovich modificați în sensul King** conține trei clase noi de operatori liniari pozitivi de tip Stancu-Kantorovich. Rezultatele din acest capitol fac parte din lucrarea **"On New Classes of Stancu-Kantorovich-Type Operators"**, Mathematics 2021, care este publicată în colaborare cu Ştefan Lucian Garoiu și Cristina Maria Păcurar. Aici, propunem câțiva operatori care păstrează două dintre funcțiile de test $e_i,\ i \in \{0, 1, 2\}$ și demonstrăm că aceștia sunt operatori de aproximare. De asemenea, studiem viteza de convergență în fiecare caz utilizând modulul de continuitate de ordinul întâi.

Capitolul patru, **Operatori de tip Kantorovich nepozitivi atașați unor operatori diferențiali liniari**, este structurat în două secțiuni. Prima secțiune este dedicată unor operatori Bernstein-Kantorovich generali, unde propunem o modificare a operatorilor Bernstein folosind un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți. Pentru această clasă de operatori demonstrăm un rezultat de aproximare, un rezultat de tip Voronovskaja și, de asemenea, un rezultat de aproximare simultană. Încheiem prima secțiune prin furnizarea unui contraexemplu care demonstrează că acești operatori nu sunt pozitivi. Rezultatele prezentate în această secțiune fac parte din două lucrări **"Approximation Properties of Some Non-positive Kantorovich Type Operators"**, 2022 Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selçuk Meeting (2022), 188-194, și **Voronovskaja type theorem for some non-positive Kantorovich type operators**, Carpathian Journal of Mathematics Vol. 40, No. 1 (2024), 187-194.

A doua secțiune a acestui capitol prezintă câțiva operatori Kantorovich generalizați. Aici, propunem o modificare de tip Kantorovich folosind un operator diferențial liniar cu coeficienți neconstanți. Rezultatele din această secțiune sunt prezentate pentru o secvență arbitrară de operatori liniari pozitivi L_n care posedă proprietatea de aproximare simultană. Pentru acești operatori oferim un rezultat de aproximare și un rezultat de tip Voronovskaja. În cazul în care coeficienții operatorului diferențial sunt constanți, am putut demonstra și un rezultat de aproximare simultană. Secțiunea se încheie cu generalizări ale unor operatori clasici. Rezultatele pot fi găsite în lucrarea **Generalized Kantoro-**

vich operators, General Mathematics, Vol. 32, Nr. 2 (2025), 67-83.

Capitolul cinci, **Modul de ordinul doi dublu ponderat**, este dedicat introducerii unui nou modul de ordinul doi ce depinde de două funcții pondere. Acest nou modul este util pentru a obține estimări ale gradului de aproximare a funcțiilor cu creștere rapidă la infinit, prin operatori liniari pozitivi generali care păstrează polinoamele de gradul unu. Capitolul se încheie cu un exemplu pentru operatorii Szász-Mirakjan. Rezultatele din acest capitol pot fi găsite în lucrarea **"Double weighted modulus"**, trimisă spre publicare, care a fost obținută în colaborare cu domnul profesor Radu Păltaănea.

În concluzie, această teză prezintă un studiu și o cercetare cuprinzătoare a aproximării prin operatori liniari pozitivi, operatori liniari care nu sunt pozitivi și a teoriei aproximării constructive. Această teză propune metode de lucru noi și acoperă, de asemenea, concepte fundamentale ale teoriei.

1.4 Rezultate originale conținute în teză

Rezoltatele originale care se regăsesc în această teză sunt urmăroarele:

A *On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators*

Noutatea adusă de această lucrare este legată de introducerea unei noi clase de operatori Bernstein-Durrmeyer care nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0, 1]$. Lipsa proprietății de pozitivitate a condus la propunerea de noi metode de demonstrare a rezultatului aproximării fără a utiliza teorema Korovkin pe partea intervalului pe care operatorii nu sunt pozitivi.

B *On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense*

Aici, introducem o nouă clasă de operatori Bernstein-Durrmeyer modificați în sensul Bezier-King. Acești operatori nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0, 1]$. Aici, pentru a demonstra aproximarea funcțiilor continue pe toate $[0, 1]$, procedăm în două moduri diferite pe porțiunea intervalului pe care operatorii sunt pozitivi și respectiv pe cea pe care sunt nepozitivi. În această lucrare demonstrăm câteva rezultate privind viteza de aproximare utilizând modulii de ordinul întâi și doi. De asemenea, demonstrăm un rezultat de tip Voronovskaja.

C *On New Classes of Stancu-Kantorovich-Type Operators*

În această lucrare introducem trei clase de operatori de aproximare care păstrează două dintre funcțiile de test e_0, e_1, e_2 simultan. Demonstrăm că aproximarea este valabilă pe un interval $I \subset [0, 1]$ în fiecare caz. Operatorii studiați aici sunt operatori liniari pozitivi.

D *Approximation Properties of Some Non-positive Kantorovich Type Operators*

Propunem o nouă clasă de operatori de tip Bernstein-Kantorovich construiți folosind un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți. Demonstrăm că diferențele finite de ordinul k ale unei funcții F pe noduri echidistante aproximează uniform derivata de ordinul k a funcției F. Acest rezultat ne ajută să demonstrăm că noii operatori de tip Bernstein-Kantorovich sunt operatori de aproximare pentru toate funcțiile continue pe $[0,1]$. Concluzionăm prin afirmarea nepozitivității acestor operatori.

E *Voronovskaja type theorem for some non-positive Kantorovich type operators*

În această lucrare demonstrăm o teoremă de tip Voronovskaja și un rezultat de aproximare simultană pentru operatorii introduși în lucrarea de mai sus.

F *Generalized Kantorovich operators*

Introducem un șir de operatori de tip Kantorovich mai generali, definiți folosind un operator diferențial liniar cu coeficienți neconstanți. Rezultatul de aproximare uniformă și teorema de tip Voronovskaja, demonstrate în această lucrare, sunt enunțate pentru un șir general de operatori $L_n \in C([0,1])$. Încheiem această lucrare oferind exemple pentru câțiva operatori clasici și un contraexemplu pentru fiecare care demonstrează că varianta lor Kantorovich nu este pozitivă.

G *Double weighted modulus*

Introducem un nou modul de netezime de ordinul doi care depinde de două funcții pondere. Acest nou modul este util pentru a obține estimări ale gradului de aproximare a funcțiilor cu creștere rapidă spre infinit, prin operatori liniari pozitivi generali care păstrează polinoamele de gradul întâi. Lucrarea se încheie cu un exemplu pentru operatorii Szász-Mirakjan.

1.5 Diseminarea rezultatelor

Rezultatele menționate în secțiunea anterioară au fost diseminate în comunitatea matematică sub formă de lucrări publicate în reviste internaționale, precum și sub formă de comunicări la conferințe și workshop-uri, după cum urmează:

A În cadrul conferinței internaționale "44th summer symposium in real analysis" care a avut loc între 20-24 Iunie 2022, Paris și Orsay, Franța, am prezentat lucrarea intitulată *"On Approximation Properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer Type Operators"*.

De asemenea, la conferința internațională "Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis" ce a avut loc între 5-8 Iulie 2022, Matera Italia, am prezentat *"On Approximation Properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer Type Operators"*.

Am publicat lucrarea: **B. I. Vasian**, "On Approximation Properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer Type Operators", An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Vol 31(1), 2023.

B În cadrul ediției a 14-a a conferinței internaționale "International conference on approximation theory and its applications", Alexandru Lupaş, Sibiu, care a avut loc în Septembrie 12-14 2022, am prezentat lucrarea "Approximation properties of some non-positive Kantorovich type operators".

C În cadrul conferinței internaționale online "International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selcuk Meeting" 2022 (ICOMSS'22), am prezentat lucrarea intitulată "Approximation properties of some non-positive Kantorovich type operators".

Am publicat lucrarea: **B. I. Vasian**, Approximation Properties of Some Non-positive Kantorovich Type Operators, 2022 Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selçuk Meeting (2022), 188-194.

D În cadrul celei de-a 4-a ediții a conferinței internaționale MACOS, 2022, "International Conference on Mathematics and Computer Science" care a avut loc între 15-17 Septembrie, 2022, Braşov, Romania, am prezentat lucrarea "On approximation properties of some non-positive linear operators".

E În cadrul celei de-a 5-a ediții a conferinței internaționale MACOS, 2024, "International Conference on Mathematics and Computer Science" ce a avut loc între 13-15 Iunie 2024, Braşov, Romania, am prezentat "Generalized Kantorovich operators".

Am pulblicat lucrarea: **B. I. Vasian**, Generalized Kantorovich operators, General Mathematics, Vol. 32, No. 2 (2025), 67-83.

F Alte lucrări publicate:

B. I. Vasian, Voronovskaja type theorem for some non-positive Kantorovich type operators, Carpathian Journal of Mathematics Vol. 40, No. 1 (2024), 187-194.

B. I. Vasian, On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense, Dolomites Research Notes on Approximation, 16(3) (2023), 104-117.

B. I. Vasian, Ş. L. Garoiu, C. M. Păcurar, On New Classes of Stancu-Kantorovich-Type Operators, Mathematics (2021).

R. Păltănea, **B. I. Vasian**, *Double weighted modulus*, trimisă spre publicare.

1.6 Mulțumiri

Doresc să-mi exprim profunda recunoștință îndrumătorului meu de doctorat, Prof. Dr. Radu Păltănea, pentru îndrumarea, asistența și sprijinul neprețuit de care am beneficiat pe parcursul studiilor și cercetărilor din stagiul de doctorat.

De asemenea, doresc să-mi exprim recunoștința față de Departamentul de Matematică și Informatică din cadrul Facultății de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov, pentru sprijinul acordat pe parcursul cercetării mele. Mai mult, sunt profund recunoscător pentru sprijinul pe care l-am primit din partea Universității Transilvania din Brașov, care m-a ajutat la publicarea cercetării efectuate și la participarea în cadrul multor conferințe în timpul studiilor.

De asemenea, doresc să-mi exprim mulțumirile familiei mele pentru sprijinul și înțelegerea pe care mi le-au oferit pe parcursul studiilor doctorale.

2 Preliminarii

2.1 Notații și terminologie

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval.

Notăm cu $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ mulțimea funcțiilor reale definite pe I. Cu $\mathcal{B}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ mărginită}\}$ notăm mulțimea funcțiilor mărginite pe I. Cu $C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ continuă}\}$ notăm mulțimea funcțiilor continue pe I.

Pentru $k \in \{0, 1, \dots\}$, prin $C^k(I)$ înțelegem mulțimea funcțiilor continue care admit derivată de ordinul k continuă. În particular, prin $C^0(I)$ înțelegem $C(I)$.

Notăm cu $\mathcal{P}(I)$ mulțimea polinoamelor definite pe I și cu Π_k mulțimea polinoamelor de grad cel mult k.

Prin funcție test sau funcție monomială înțelegem $e_j(t) = t^j$, $j \in \{0, 1, \dots\}$.

Fie X un spațiu Banach. Notăm $\| \cdot \|_X$ norma pe X.

Dacă $X = \mathcal{B}(I)$, atunci prin norma unei funcții $\|f(\cdot)\|$, $f \in \mathcal{B}(I)$, pe I înțelegem norma supremum:

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|, \ f \in \mathcal{B}(I). \tag{2.1}$$

În continuare enumerăm câțiva operatori folosiți pe parcursul tezei:

- Operatorul identitate Id ce satisface $Id(f) = f$, $f \in \mathcal{F}(I)$;
- Simbolul Landau O: $O(f(x)) = \{g(x) \ : \ \exists \ c, x_0 > 0 \text{ astfel încât } 0 \leq f(x) \leq cg(x), \ \forall \ x \geq x_0\}$;
- Simbolul Laundau o: $o(f(x)) = \{g(x) \ : \ \forall \ c > 0, \ \exists \ x_0 > 0 \text{ astfel încât } 0 \leq f(x) < cg(x), \ \forall \ x \geq x_0\}$.

Un alt operator folosit este operatorul *diferență finită* cu pasul k a unei funcții f:

$$\Delta_k f(x) = f(x + k) - f(x). \tag{2.2}$$

Iterata de ordin l a lui Δ_k se notează cu Δ_k^l și este definită astfel:

$$\Delta_k^l f(x) = \Delta_k \left[\Delta_k^{l-1} f(x)\right], \tag{2.3}$$

ce conduce la următoarea identitate:

$$\Delta_k^l f(x) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} f(x + ik). \tag{2.4}$$

Propoziția 2.1.1. *[35] Dacă f este un polinom de grad $l-1$ atunci $\Delta_k^l f(x) = 0$.*

Fie I un interval și $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$, $n + 1$ puncte distincte din I. Fie $f \in \mathcal{F}(I)$. Diferențele divizate ale lui f în punctele $x_0, x_1, \dots, x_n$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned} f[x_k] \ &: \ = f(x_k), \ k = \overline{0, n}, && (2.5) \\ f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}] \ &: \ = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}, \end{aligned}$$

pentru $k = \overline{0, n-p},\ j = \overline{0, n}.$

Pentru diferențele divizate menționăm următoarele rezultate:

Propoziția 2.1.2. *[35] Dacă f este un polinom de grad $< n$, atunci*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0. \tag{2.6}$$

Propoziția 2.1.3. *[35] (Teorema de medie pentru diferențe divizate) Dacă f este diferențiabilă de ordin n, atunci*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \tag{2.7}$$

pentru $\xi \in \left(\min_{k\in\{0,1,\ldots n\}} x_k, \max_{k\in\{0,1,\ldots n\}} x_k\right).$

Propoziția 2.1.4. *[35] Are loc următoarea relație între diferențele divizate și diferențele finite:*

$$f[x, x+h, \ldots, x+lh] = \frac{1}{l!h^l}\Delta_h^l f(x). \tag{2.8}$$

În teoria aproximării prin operatori, modulele de continuitate s-au dovedit a fi foarte utili. Aceste obiecte matematice pot fi folosite pentru a măsura gradul de netezime al unei funcții într-un mod mult mai elegant. Aceste module sunt definite astfel:

Definiția 2.1.5. *[35] Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f \in \mathcal{F}(I)$. Modulul de continuitate al funcției f este definit astfel:*

$$\omega_1(f,h) = \sup\{|f(x) - f(y)| \ :\ |x-y| \leq h;\ x, y \in I\},\ h \geq 0. \tag{2.9}$$

În cazul unei funcții continue f pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ care satisface $\omega_1(f,h) = o(h)$, se obține că f este constantă, prin urmare modulul de continuitate nu este util pentru măsurarea unei netezimi de ordin superior. În acest caz, sunt necesare modulele de netezime. Aceste module sunt conectate cu diferențele finite de ordin superior.

Definiția 2.1.6. *[35] Fie $I \subset \mathbb{R}$ și $f \in C(I)$, I compact. Modulul de netezime de ordin l al funcției f aste definit astfel:*

$$\omega_l(f,h) = \sup_{0<k\leq h} \|\Delta_k^l(f,x)\|,\ h \geq 0. \tag{2.10}$$

Modulele de netezime prezentate mai sus reprezintă un instrument foarte util pentru problemele de aproximare. Cu toate acestea, în cercetările recente, modulele clasice de netezime s-au dovedit a fi ineficienți. Pentru a remedia aceste neajunsuri, au fost introduse următoarele module, care sunt denumite module de netezime ponderate ale funcției f.

Definiția 2.1.7. *[37] Fie $I \subset \mathbb{R}$ și $f \in \mathcal{F}(I)$. Modulul de netezime ponderat de ordin l al lui f este dat de:*

$$\omega_l^{\varphi}(f,h) = \sup_{0<k\leq h} \|\Delta_{k\varphi(\cdot)}^l(f,\cdot)\|,\ h \geq 0, \tag{2.11}$$

unde funcția $\varphi(x)$ este o funcție pondere aleasă în practică în funcție de problema studiată.

Observația 2.1.8. *Dacă* $\varphi(x) \equiv 1$, *atunci* (2.11) *devine modulul de netezime din* (2.10).

Funcția $\varphi(x)$ din definiția modulului de netezime ponderat, numită *funcție pondere*, este definită pentru $x \in I$ (unde $I = (a, b)$ cu $a \in \{-\infty, 0\}$ și $b \in \{1, \infty\}$), și satisface următoarele:

Propoziția 2.1.9. *[37]*

A $\varphi = 1$ *local;*

B *există două valori* $\gamma(a)$ *și* $\gamma(b)$ *astfel încât* $\gamma(0) \geq 0$, $\gamma(1) \geq 0$ *și* $\gamma(\pm\infty) \leq 1$ *pentru care*

$$\varphi(x) \simeq \begin{cases} |x|^{\gamma(a)}, & x \to a+ \ \text{ for } a \in \{-\infty, 0\} \\ x^{\gamma(\infty)}, & x \to \infty \ \text{ pentru } b = \infty \\ (1-x)^{\gamma(1)}, & x \to 1- \ \text{ pentru } b = 1 \end{cases}; \tag{2.12}$$

C $\varphi(x)$ *este o funcție măsurabilă (în raport cu măsura* μ*) și există* M_0, k_0 *constante, astfel încât oricare ar fi* $0 < k \leq k_0$ *și orice interval finit* $J \subset I$, *are loc următoarea inegalitate în măsură:*

$$\mu\left(\{x \in I : x \pm h\varphi(x) \in J\}\right) \leq M_0 \mu(E). \tag{2.13}$$

În continuare, amintim definițiile K-funcționalelor, K-funcționalelor de ordin l și K-funcționalelor de ordin l ponderate.

Definiția 2.1.10. *[35] Fie* X, Y *două spații Banach astfel încât* $Y \subset X$ *continuu.* K*-funcționala atașată funcției* $f \in X$ *este definită prin:*

$$K(f, t) := K(f, t; X, Y) := \inf_{g \in Y} \{\|f - g\|_X + t\|g\|_Y\}, \ t \geq 0. \tag{2.14}$$

Definiția 2.1.11. K*-funcționala de ordin* l *a funcției* $f \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ *este definită prin:*

$$K_l(f, t^l) = \inf_{g \in C^l(I)} \{\|f - g\| + t^l \|g^{(l)}\|\}, t \geq 0. \tag{2.15}$$

Definiția 2.1.12. K*-funcționala de ordin* l*, ponderată, a funcției* $f \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ *este definită prin:*

$$K_l^{\varphi}(f, t^l) = \inf_{g \in C^l(I)} \{\|f - g\| + t^l \|\varphi^l g^{(l)}\|\}, t \geq 0. \tag{2.16}$$

Unul dintre cele mai importante rezultate privind K-funcționalele și modulele de netezime este următoarea teoremă de echivalență între acestea.

Teorema 2.1.13. *[35] Presupunând că funcția* φ *satisface condițiile Proposition 2.1.9,* $l \in \{0, 1, \dots\}$ *și* $f \in C(I)$*, unde* $I = (0, 1)$, $I = (0, \infty)$ *sau* $I = \mathbb{R}$*, atunci*

$$C_1 \omega_l^{\varphi}(f, t) \leq K_l^{\varphi}(f, t^l) \leq C_2 \omega_l^{\varphi}(f, t), \ 0 < t \leq t_0, \tag{2.17}$$

unde $C_1, C_2, t_0 > 0$ *sunt constante.*

2.2 Module de continuitate

2.3 Module de netezime

2.4 Module de netezime ponderate

2.5 K-funcționale

2.6 Operatori

2.7 Aproximarea funcțiilor prin șiruri de operatori liniari și pozitivi

2.8 Clase particulare de operatori

2.9 Operatori de tip King

2.10 Curbe Bézier

3 Operatori de tip Durrmeyer nepozitivi

În acest capitol, studiem câțiva operatori de tip Durrmeyer. Pentru acești operatori am demonstrat câteva rezultate de aproximare, împreună cu estimarea erorii și teoreme de tip Voronovskaja. Rezultatele din acest capitol se bazează pe lucrările publicate în două articole: **Vasian B. I.**, *On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators*, An. Șt. Univ. Ovidius Constanța, Vol. 21(1), 2023; și **Vasian B. I.**, *On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense*, Dolomites Research Notes on Approximation, 16(3), 104-117, 2023.

3.1 Asupra proprietăților de aproximare ale unor operatori de tip Bernstein-Durrmeyer nepozitivi

În această primă secțiune vom prezenta rezultate privind un nou tip de operatori Bernstein-Durrmeyer care nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0,1]$. Pentru acești operatori vom demonstra un rezultat de convergență uniformă pe toate funcțiile continue pe $[0,1]$, precum și un rezultat de estimare a erorii de aproximare în funcție de modulul de continuitate ω_1. De asemenea, va fi demonstrată și o teoremă de tip Voronovskaja.

Aceste rezultate au fost publicate în lucrare **B.I. Vasian**,*On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators*, An. Șt. Univ. Ovidius Consstanța, Vol. 21(1), 2023.

Vom introduce operatorii de tip Durrmeyer modificați pe care îi vom studia în acest capitol.

Definiția 3.1.1. *[108]*
Fie $\alpha \geq 0$. Pentru orice funcție $f \in C([0,1])$, definim:

$$D_n^\alpha(f,x) = (n+1)\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}^\alpha(x)\int_0^{\frac{n}{n+\alpha}} p_{n,k}^\alpha(t)\, f(t)\, dt,\ \ x \in [0,1], \tag{3.1}$$

unde $p_{n,k}^\alpha(x) = \left(\frac{n+\alpha}{n}\right)^n \binom{n}{k} x^k \left(\frac{n}{n+\alpha} - x\right)^{n-k}$, $n,k \in \mathbb{N},\ k \leq n$.

Observația 3.1.2. *[108] Pentru $\alpha = 0$ obținem operatorii clasici Bernstein-Durrmeyer, iar pentru $\alpha = 1$ se obțin operatorii studiați de Deo N. et al. în lucrarea [33].*

Observația 3.1.3. *[108] $D_n^\alpha(f,x)$ definit în (3.1) este un operator liniar care este pozitiv pentru $x \in \left[0, \frac{n}{n+\alpha}\right]$ și nepozitiv pentru $x \in \left(\frac{n}{n+\alpha}, 1\right]$.*

Lema 3.1.4. *[108] Are loc următoarea identitate:*

$$\int_0^{\frac{n}{n+\alpha}} t^{k+s}\left(\frac{n}{n+\alpha}-t\right)^{n-k} dt = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n+s+1} B\left(k+s+1, n-k+1\right), \tag{3.2}$$

unde $B(\cdot,\cdot)$ este funcția Beta a lui Euler.

Propoziția 3.1.5. *[108] Operatorii D_n^α satisfac următoarele relații:*
i) $D_n^\alpha\left(e_0,x\right)=1$;
ii)$D_n^\alpha\left(e_1,x\right)=\frac{n}{n+2}x+\frac{n}{(n+\alpha)(n+2)}$;
iii)$D_n^\alpha\left(e_2,x\right)=\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}x^2+\frac{4n^2}{(n+2)(n+3)(n+\alpha)}x+\frac{2n^2}{(n+2)(n+3)(n+\alpha)^2}$,
unde $x\in[0,1]$.

Notăm cu $M_{n,m}\left(x\right)$ momentul de ordin m al operatorilor D_n^α, care au următoarea expresie:

$$\begin{aligned} M_{n,m}\left(x\right) &= D_n^\alpha\left(\left(t-x\right)^m, x\right) \qquad (3.3) \\ &= \left(n+1\right)\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}^\alpha\left(x\right)\int_0^{\frac{n}{n+\alpha}}\left(t-x\right)^m\cdot p_{n,k}^\alpha\left(t\right)dt. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.6. *(Teorema 6 din [108]) Are loc următoarea relație de recurență:*

$$\begin{aligned} \left(m+n+2\right)M_{n,m+1}\left(x\right) &= x\left(\frac{n}{n+\alpha}-x\right)\left[2mM_{n,m-1}\left(x\right)+M_{n,m}'\left(x\right)\right] \qquad (3.4) \\ &+\left(m+1\right)\left(\frac{n}{n+\alpha}-2x\right)M_{n,m}\left(x\right). \end{aligned}$$

Cu toate considerațiile anterioare, putem enunța un prim rezultat de aproximare pentru operatorii D_n^α.

Teorema 3.1.7. *(Teorema 8 din [108]) Oricare ar fi $\alpha\geq 0$, $f\in C([0,1])$, și oricare ar fi $\varepsilon\in(0,1)$, are loc următoarea limită:*

$$\lim_{n\to\infty} D_n^\alpha\left(f\right)=f, \text{ uniform pe } [0,1-\varepsilon]. \tag{3.5}$$

În ceea ce privește rezultatul de mai sus, am putut demonstra convergența uniformă doar pe intervalul pe care operatorii D_n^α sunt pozitivi. Următorul nostru obiectiv este de a demonstra că operatorii D_n^α pot aproxima toate funcțiile continue pe întregul interval $[0,1]$, chiar dacă nu sunt operatori pozitivi pe întregul interval.

Propoziția 3.1.8. *(Propoziția 9 din [108]) Pentru $l\in\{0,1,\dots\}$ avem:*

$$D_n^\alpha\left(e_l,x\right)=\left(n+1\right)\frac{\left(n!\right)^2}{\left(n+l+1\right)!}\sum_{i=0}^{\min\{n,l\}}\binom{l}{i}\frac{l!}{i!}\frac{1}{\left(n-i\right)!}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{l-i}x^i. \tag{3.6}$$

Cu ajutorul acestui rezultat obținem:

Propoziția 3.1.9. *(Propoziția 10 din [108]) Oricare ar fi $l\in\{0,1,\dots\}$, avem:*

$$D_n^\alpha\left(e_l\right)\to e_l \text{ uniform pe } [0,1]. \tag{3.7}$$

Observația 3.1.10. *[108] Din Propoziția 3.1.9 și din liniaritatea operatorilor* D_n^{α}*, obținem că pentru orice polinom* $P \in \mathcal{P}([0,1])$*, convergența* $D_n^{\alpha}(P,x) \to P(x)$ *are loc uniform pe* $x \in [0,1]$*.*

Propoziția 3.1.11. *(Porpoziția 12 din [108]) Are loc:*

$$\|D_n^{\alpha}\| \leq e^{2\alpha}, \tag{3.8}$$

oricare ar fi $n \in \{1,2,\dots\}$*, și* $\alpha \geq 0$*.*

Teorema 3.1.12. *(Teorema 13 din[108]) Oricare ar fi* $f \in C([0,1])$*, avem:*

$$\lim_{n\to\infty} D_n^{\alpha}(f) = f \text{ uniform pe } [0,1]. \tag{3.9}$$

Următorul rezultat dă o estimare a erorii de aproximare folosind modulul de continuitate $\omega_1(f,\delta)$.

Teorema 3.1.13. *(Teorema 14 din [108]) Pentru* $f \in C([0,1])$ *și* $x \in [0,1]$ *avem:*

$$|D_n^{\alpha}(f,x) - f(x)| \leq \left\{1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2}{n+2}\left[x\left(\frac{n}{n+\alpha}\right) + \frac{1}{n+3}\right]}\right\}\omega_1(f,\delta), \tag{3.10}$$

pentru $x \in \left[0, \frac{n}{n+\alpha}\right]$*, și*

$$|D_n^{\alpha}(f,x) - f(x)| \leq \left\{e^{2\alpha} + \frac{e^{2\alpha}}{\delta'}\left[\frac{2\alpha}{n} + \frac{n}{(n+\alpha)(n+2)}\right]\right\}\omega_1(f,\delta'), \tag{3.11}$$

pentru $x \in \left(\frac{n}{n+\alpha}, 1\right]$.

Observația 3.1.14. *[108] Considerând*

$$\delta = \delta' = \max\left\{\sqrt{\frac{2}{n+2}\left[\frac{n}{n+\alpha} + \frac{1}{n+3}\right]}, \frac{2\alpha}{n} + \frac{n}{(n+\alpha)(n+2)}\right\}, \tag{3.12}$$

atunci

$$\| D_n^{\alpha}(f) - f \| \leq 2e^{2\alpha}\omega(f,\delta). \tag{3.13}$$

3.1.1 Rezultat de tip Voronovskaja

În această secțiune demonstrăm un alt rezultat de măsurare a ordinului de aproximare sub forma unei teoreme de tip Voronovskaja.

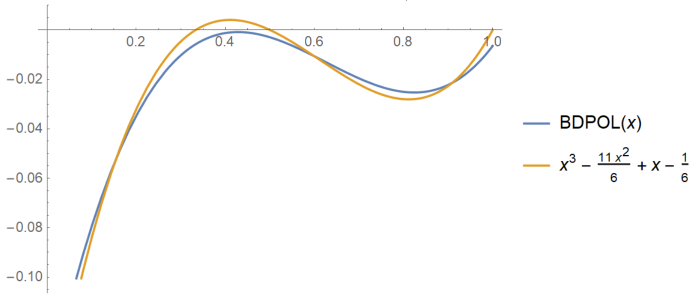
Teorema 3.1.15. *(Teorema 16 din [108]) Fie* $f \in C([0,1))$ *o funcție mărginită, diferențiabilă de două ori în punctul* $x \in (0,1)$*. Atunci are loc următoarea limită:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[D_n^{\alpha}(f,x) - f(x)\right] = (1-2x)f'(x) + x(1-x)f''(x). \tag{3.14}$$

3.1.2 Grafice

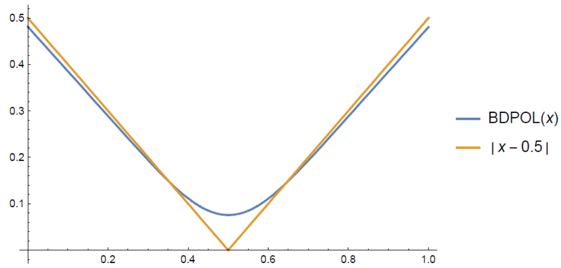
Pentru primul exemplu am considerat funcţia $f(x) = x^3 - (11/6)x^2 + x - 1/6$ pentru $x \in [0, 1]$. În acest caz am obţinut Figura 3.1.

Figura 3.1: $\alpha = 1$ şi $n = 50$



Pentru al doilea exemplu am considerat funcţia $f(x) = |x - 0.5|$ pentru $x \in [0, 1]$ şi am obţinut Figura 3.2.

Figura 3.2: $\alpha = 1$ şi $n = 50$



După cum se poate observa din rezultatele obţinute şi din graficele de mai sus, operatorii D_n^α au proprietăţi bune de aproximare deşi nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0, 1]$.

3.2 Asupra proprietăţilor de aproximare a unor operatori de tip Bernstein-Durrmeyer nepozitivi modificaţi în sens King

Această secţiune este dedicată unor rezultate privind operatorii de tip Bernstein-Durrmeyer, definiţi folosind metodele propuse de King şi Bezier. Operatorii obţinuţi aici nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0, 1]$, dar sunt operatori de aproximare. Unele dintre rezultate sunt obţinute într-un mod simplu folosind primul modul de continuitate. Pentru rezultatele privind modulul de netezime de ordinul doi, folosim metode cu ajutorul K-funcţionalelor necesare. În cele din urmă, demonstrăm un rezultat de tip Voronovskaja pentru a evalua eroarea de aproximare.

Aceste rezultate au fost publicate în lucrarea **B. I. Vasian**, *On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense*, Dolomites Research Notes on Approximation, Vol. 16, 2023.

Fie $\tau : [0,1] \to [0,1]$ astfel încât τ este o funcție diferențiabilă și crescătoare cu $\tau(0) = 0$ și $\tau(1) = 1$.

Pentru a demonstra rezultatele, considerăm funcția f mărginită $[0,1]$.

Având modelul operatorilor din secțiunea anterioară, introducem o nouă clasă de operatori:

Definiția 3.2.1. *[109] Fie $\alpha \geq 0$. Pentru $f \in C([0,1])$, definim:*

$$D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) = \tag{3.15}$$

$$(n+1)\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)\sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}^{\alpha,\tau,\theta}(x)\int_0^{\frac{n}{n+\alpha}} p_{n,k}^{\alpha}(t)\left(f\circ\tau^{-1}\right)(t)\,dt,\ x\in[0,1],$$

unde

$$Q_{n,k}^{\alpha,\tau,\theta}(x) = \left[J_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)\right]^{\theta} - \left[J_{n,k+1}^{\alpha,\tau}(x)\right]^{\theta}, \tag{3.16}$$

cu $\theta \geq 1$ un întreg și $J_{n,k}^{\alpha,\tau}(x) = \sum_{j=k}^{n} p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)$, unde

$$p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x) = \left(\frac{n+\alpha}{n}\right)^{n}\binom{n}{k}\tau^{k}(x)\left(\frac{n}{n+\alpha}-\tau(x)\right)^{n-k}. \tag{3.17}$$

Observația 3.2.2. *[109] Menționăm următoarele observații referitoare la notații:*

A *Dacă indicele θ lipsește, atunci $\theta = 1$;*

B *Dacă indicele τ lipsește, atunci $\tau(x) = x$.*

Pentru operatorii $D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}$ definiți în (3.15) menționăm următoarele:

Observația 3.2.3. *[109] Din definiție se poate observa că operatorii $D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}$ sunt liniari pe $C([0,1])$.*

Observația 3.2.4. *[109] Există $\xi_n \in (0,1)$ cu proprietatea $\tau(\xi_n) = \frac{n}{n+\alpha}$, astfel încât $\tau(x) > \frac{n}{n+\alpha}$ pentru $x \in (\xi_n, 1]$ și $\tau(x) \leq \frac{n}{n+\alpha}$ pentru $x \in [0, \xi_n]$, prin urmare operatorii $D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}$ nu sunt pozitivi pe întregul interval $[0,1]$.*

3.2.1 Rezultate auxiliare

Pentru a demonstra rezultatele privind acești operatori, avem nevoie de câteva rezultate pentru $D_{n,\tau}^{\alpha}$, i.e. când $\theta = 1$.

Următorul rezultat dă o formulă de recurență pentru $p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)$.

Lema 3.2.5. *(Lema 3.2 din [109]) Pentru funcțiile $p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)$ din (3.17), are loc:*

$$\tau(x)\left(\frac{n}{n+\alpha}-\tau(x)\right)\left(p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)\right)' = n\tau'(x)\left(\frac{k}{n+\alpha}-\tau(x)\right)p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x),\ x\in[0,1]. \tag{3.18}$$

Lema 3.2.6. *(Lema 3.3 din [109]) Operatorii $D_{n,\tau}^{\alpha}$ satisfac următoarele:*

A $D_{n,\tau}^{\alpha}(e_0,x)=1;$

B $D_{n,\tau}^{\alpha}(\tau,x)=\frac{1}{n+2}\left(n\tau(x)+\frac{n}{n+\alpha}\right);$

C $D_{n,\tau}^{\alpha}\left(\tau^2,x\right)=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\left(n(n-1)\tau^2(x)+\frac{4n^2}{n+\alpha}\tau(x)+\frac{2n^2}{(n+\alpha)^2}\right);$

unde τ este definit ca mai sus și $x\in[0,1]$.

Notăm cu $M_{n,m}^{\tau,\alpha}(x)$ momentul central de ordin $m\in\{0,1,2,\dots\}$ al operatorilor $D_{n,\tau}^{\alpha}$, care este definit astfel:

$$M_{n,m}^{\tau,\alpha}(x)=D_{n,\tau}^{\alpha}\left((\tau(t)-\tau(x))^m,x\right),\ x\in[0,1].$$

Lema 3.2.7. *(Lema 3.4 din [109]) Are loc următoarea relație de recurență:*

$$\begin{aligned}&(m+n+2)\,\tau'(x)M_{n,m+1}^{\tau,\alpha}(x) \qquad (3.19)\\ &=\tau(x)\left(\frac{n}{n+\alpha}-\tau(x)\right)\left[2m\tau'(x)\,M_{n,m-1}^{\tau,\alpha}(x)+\left(M_{n,m}^{\tau,\alpha}\right)'(x)\right]\\ &+(m+1)\,\tau'(x)\left(\frac{n}{n+\alpha}-2\tau(x)\right)M_{n,m}^{\tau,\alpha}(x).\end{aligned}$$

Observația 3.2.8. *[109] Pentru simplificarea notațiilor, notăm*

$$\phi_\tau(x):=\tau(x)\left(\frac{n}{n+\alpha}-\tau(x)\right).$$

Observația 3.2.9. *[109] Funcția $\phi_\tau(x)$ își atinge maximul pentru $\tau(x)=\frac{n}{2(n+\alpha)}$ iar valoarea maximă este $\max\phi_\tau=\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^2$.*

Propoziția 3.2.10. *(Propoziția 3.6 din [109]) Următoarea inegalitate are loc:*

$$\left\|D_{n,\tau}^{\alpha}f\right\|\le e^{2\alpha}\|f\|, \tag{3.20}$$

oricare ar fi $f\in C([0,1)]$.

Observația 3.2.11. *[109] Pentru $a,b\in[-1,1]$ și $\theta\ge 1$ un întreg, are loc inegalitatea*

$$\left|a^\theta-b^\theta\right|\le\theta\,|a-b|. \tag{3.21}$$

Observația 3.2.12. *[109] Are loc*

$$\begin{aligned}|Q_{n,k}^{\alpha,\tau,\theta}(x)|&=\left|\left[J_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)\right]^\theta-\left[J_{n,k+1}^{\alpha,\tau}(x)\right]^\theta\right| \qquad (3.22)\\ &\le\theta\left|J_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha,\tau}(x)\right|=\theta|p_{n,k}^{\alpha,\tau}(x)|,\end{aligned}$$

inegalitate obținută ca o consecință a Observației 3.2.11, unde $\theta\ge 1$ este un întreg.

Folosind rezultatele anterioare, putem demonstra următoarele rezultate privind operatorii $D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}$.

Propoziția 3.2.13. *(Propoziția 3.7 din [109]) Are loc:*

$$\left\|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}f\right\|\le\theta e^{2\alpha}\|f\|, \tag{3.23}$$

oricare ar fi $f\in C([0,1])$.

Observația 3.2.14. *[109] Avem $D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(e_0,x)=1$ oricare ar fi $x\in[0,1]$.*

3.2.2 Aproximare cantitativă

În cele ce urmează vom stabili câteva rezultate cantitative folosind diferiți moduli de continuitate: modulul de continuitate ω_1 și o combinație între ω_1 și modulul de netezime ω_2.

Teorema 3.2.15. *(Teorema 4.1 din [109]) Pentru $f \in C([0,1])$ avem*

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right| \leq \left\{1 + \frac{1}{\delta}\frac{n}{n+\alpha}\sqrt{\frac{\theta(n+1)}{2(n+2)(n+3)}}\right\}\omega_1\left(f \circ \tau^{-1}, \delta\right), \tag{3.24}$$

pentru $x \in [0, \xi_n]$, $\delta > 0$, și

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right| \leq \theta e^{2\alpha}\left\{1 + \frac{1}{\delta'}\left[\frac{2\alpha}{n} + \frac{n}{(n+2)(n+\alpha)}\right]\right\}\omega_1\left(f \circ \tau^{-1}, \delta'\right), \tag{3.25}$$

pentru $x \in (\xi_n, 1]$, $\delta' > 0$.

Corolar 3.2.16. *(Corolar 4.2 din [109]) Fie $f \in C([0,1])$. Are loc:*

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right| \leq 2\omega_1\left(f \circ \tau^{-1}|_{[0,\xi_n]}, \frac{n}{n+\alpha}\sqrt{\frac{\theta(n+1)}{2(n+2)(n+3)}}\right), \tag{3.26}$$

pentru $x \in [0, \xi_n]$, și

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right| \leq 2\theta e^{2\alpha}\omega_1\left(f \circ \tau^{-1}|_{[\xi_n,1]}, \frac{2\alpha}{n} + \frac{n}{(n+2)(n+\alpha)}\right), \tag{3.27}$$

pentru $x \in (\xi_n, 1]$.

Lema 3.2.17. *(Lema 4.3 din [109]) Pentru $x \in [0,1]$, avem:*

$$D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}\left((\tau(t) - \tau(x))^2, x\right) \leq \theta\frac{n+1}{2(n+2)(n+3)}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^2, \ for\ x \in [0, \xi_n], \tag{3.28}$$

și

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}\left((\tau(t) - \tau(x))^2, x\right)\right| \leq \theta e^{2\alpha}\frac{2n\left[n^2 - n(2-\alpha) - 3\alpha\right]}{(n+2)(n+3)(n+\alpha)^2}, \ for\ x \in (\xi_n, 1]. \tag{3.29}$$

Următoarele rezultate sunt estimări cu ajutorul lui ω_1 și ω_2. Pentru a obține aceste rezultate impunem următoarele restricții funcției $\tau(x)$:

- $\tau(x) \in C^2([0,1])$;
- $\inf_{x\in[0,1]} \tau'(x) \geq l, \ l \in \mathbb{R}_+$.
- $\sup_{x\in[0,1]} |\tau''(x)| \leq \beta, \ \beta \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 3.2.18. *(Teorema 4.4 din [109]) Pentru $f \in C([0,1])$, avem:*

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right| \tag{3.30}$$
$$\leq \frac{\theta e^{2\alpha}+1}{2}\left[C_1\omega_1\left(f, \frac{2\zeta_1\left(1+\frac{\beta}{2l}\zeta_1\right)}{\theta e^{2\alpha}+1}\right) + C_2\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{\zeta_1^2}{\theta e^{2\alpha}+1}}\right)\right],\ x \in [0,\xi_n],$$

unde $\zeta_1 = \frac{\sqrt{\theta}}{l}\frac{n}{n+\alpha}\sqrt{\frac{n+1}{2(n+2)(n+3)}}$ *și* $C_1,\ C_2$ *sunt constante ce nu depind de* n*, și*

$$\left|D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right| \tag{3.31}$$
$$\leq \frac{\theta e^{2\alpha}+1}{2}\left[C_1^*\omega_1\left(f, \frac{2\zeta_2\left(1+\frac{\beta}{2l}\zeta_2\right)}{\theta e^{2\alpha}+1}\right) + C_2^*\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{\zeta_2^2}{\theta e^{2\alpha}+1}}\right)\right],\ x \in (\xi_n,1],$$

unde $\zeta_2 = \frac{1}{l}\sqrt{\theta e^{2\alpha}\frac{2n[n^2-n(2-\alpha)-3\alpha]}{(n+2)(n+3)(n+\alpha)^2}}$*, și* $C_1^*,\ C_2^*$ *sunt constante ce nu depind de* n*.*

3.2.3 Rezultat de tip Voronovskaja

În această secțiune demonstrăm un rezultat de tip Voronovskaja pentru operatorii $D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}$.

Lema 3.2.19. *(Lema 5.1 din [109]) Fie $f \in C^2[0,1]$. Atunci are loc:*

$$\left|n\left[D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right]\right| \tag{3.32}$$
$$\leq \theta\frac{2n}{n+2}\left|\frac{f'(x)}{\tau'(x)}\right|\left(\tau(x) + \frac{n}{n+\alpha}\right)$$
$$+\theta\frac{n}{(n+2)(n+3)}\left|\frac{f''(x)}{(\tau'(x))^2} - f'(x)\frac{\tau''(x)}{(\tau'(x))^3}\right|\left[(n-3)\phi_\tau(x) + \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^2\right] \tag{3.33}$$
$$+\Lambda_n(x);\ x \in [0,\xi_n],$$

unde $\Lambda_n(x) \to 0$ *când* $n \to \infty$*.*

Teorema 3.2.20. *(Teorema 5.2 din [109]) Pentru $f \in C^2[0,1]$ și $x \in [0,1)$, are loc:*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n\left[D_{n,\tau}^{\alpha,\theta}(f,x) - f(x)\right]\right) \tag{3.34}$$
$$= 2\theta\left|\frac{f'(x)}{\tau'(x)}\right|(\tau(x)+1) + \theta\left|\frac{f''(x)}{(\tau'(x))^2} - f'(x)\frac{\tau''(x)}{(\tau'(x))^3}\right|\tau(x)(1-\tau(x));\ x \in [0,1).$$

4 Operatori de tip Kantorovich modificați în sens King

În acest capitol vom prezenta câteva rezultate privind operatorii de tip Kantorovich.

Anume, vom trata câteva clase de operatori de tip Kantorovich modificați folosind metodele Stancu și King. Clasele obținute în acest mod conțin doar operatori liniari și pozitivi, iar pentru aceste clase este demonstrată aproximarea uniformă a tuturor funcțiilor continue pe intervale specifice.

4.1 Asupra unor noi clase de operatori de tip Stancu-Kantorovich

În această secțiune prezentăm rezultatele obținute în lucrarea **Vasian B. I.**, Garoiu Ş. L., Păcurar C. M., *On New Classes of Stancu-Kantorovich-Type Operators*. Mathematics 2021.

Aici, am introdus noi clase de operatori de tip Stancu-Kantorovich construiți cu metoda introdusă de King în lucrarea [66]. Fiecare clasă este construită astfel încât operatorii să invarieze două funcții de test simultan. În primul rând, vom studia operatorii care invariază e_0 și e_1. În al doilea rând, e_0 și e_2, și în final e_1 și e_2. Pentru fiecare clasă am studiat aproximarea uniformă a funcțiilor continue pe anumite intervale pe care operatorii rămân pozitivi. De asemenea, sunt furnizate câteva rezultate ale estimării erorii în fiecare caz. Definim clasele de operatori după cum urmează:

Definiția 4.1.1. *(Definiția 4 din [110]) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $c_n, d_n : I \to \mathbb{R}$ funcții satisfăcând $c_n(x) \geq 0$, $d_n(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in I$, $0 \leq \alpha \leq \beta$ și $n \in \{1, 2, \dots\}$. Definim următorii operatori de tip Stancu-Kantorovich:*

$$S_n^{(\alpha,\beta)*}(f,x) = (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(c_n(x))^k (d_n(x))^{n-k}\int\limits_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(t)\,dt. \tag{4.1}$$

pentru orice $x \in I$, $m \in \{1, 2, \dots\}$ și $f \in L_1([0,1])$.

Pentru acești operatori avem:

Lema 4.1.2. *(Lema 1 din [110]) Operatorii din* (4.1) *satisfac următoarele:*

$$S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_0,x) = (c_n(x)+d_n(x))^n, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_1,x) = &\frac{n}{n+\beta+1}c_n(x)(c_n(x)+d_n(x))^{n-1} \\ &+\frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}(c_n(x)+d_n(x))^n, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$
\begin{aligned}
S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_2,x) &= \frac{n(n-1)}{(n+\beta+1)^2}c_n^2(x)(c_n(x)+d_n(x))^{n-2} \\
&+\frac{n(2\alpha+2)}{(n+\beta+1)^2}c_n(x)(c_n(x)+d_n(x))^{n-1} \\
&+\frac{3\alpha(\alpha+1)+1}{3(n+\beta+1)^2}(c_n(x)+d_n(x))^n
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

oricare ar fi $x \in I,\ n \in \{0,1,\dots\}$, *unde* $e_i(t) = t^i,\ i \in \{0,1,2\}$.

Definiția 4.1.3. *Notăm cu* $M_{n,k}L_n(x)$, *momentul de ordin* k *al operatorilor* L_n, *ce au următoarea expresie:*

$$M_{n,k}(L_n(x)) = L_n\left((e_1-x)^k, x\right). \tag{4.5}$$

4.1.1 Operatori de tip Stancu-Kantorovich ce invariază e_0 și e_1

Impunem condiția ca operatorii Stancu-Kantorovich introduși în (4.1), să invarieze funcțiile e_0 și e_1. Astfel, construim operatorii astfel încât să satisfacă:

$$
\begin{aligned}
&\bullet_1\ S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_0,x) = 1; \\
&\bullet_2\ S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_1,x) = x; \\
&\bullet_3\ \lim_{n\to\infty} S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_2,x) = x^2 \text{ uniform pe un interval.}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Din condițiile impuse în (4.6) și identitățile (4.2), (4.3), obținem:

$$c_n(x) = \frac{n+\beta+1}{n}x - \frac{2\alpha+1}{2n}, \tag{4.7}$$

și

$$d_n(x) = \frac{-(n+\beta+1)x}{n} + \frac{2n+2\alpha+1}{2n}, \tag{4.8}$$

oricare ar fi $n \in \{1,2,\dots\}$ și $x \in I$.

Pentru a obține operatori pozitivi, impunem funcțiilor $c_n(x)$ și $d_n(x)$ să fie pozitive. Astfel obținem:

$$\frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)} \le x \le \frac{2n+2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}, \text{ oricare ar fi } x \in I, \text{ și } n \in \{1,2,\dots\}.$$

Lema 4.1.4. *(Lema 2 din [110]) Pentru* $0 \le \alpha \le \beta$ *și orice întreg* $n_0 < n$, *are loc următoarea incluziune:*

$$\left[\frac{2\alpha+1}{2(n_0+\beta+1)}; \frac{2n_0+2\alpha+1}{2(n_0+\beta+1)}\right] \subset \left[\frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}; \frac{2n+2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}\right].$$

Observația 4.1.5. *Din moment ce pe intervalul* $\left[\frac{2\alpha+1}{2(n_0+\beta+1)}; \frac{2n_0+2\alpha+1}{2(n_0+\beta+1)}\right]$ *avem că* $c_n(x),\ d_n(x) \ge 0$, *oricare ar fi* $n \in \{1,2,\dots\}$, *considerăm* $I = \left[\frac{2\alpha+1}{2(n_0+\beta+1)}; \frac{2n_0+2\alpha+1}{2(n_0+\beta+1)}\right]$, *unde* n_0 *e un număr natural fixat arbitrar. Observăm ca pentru orice* $\varepsilon > 0$, *dacă luăm* n_0 *suficient de mare, atunci* $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset I$.

Considerând șirurile de funcții $c_n(x)$ și $d_n(x)$ obținute în relațiile (4.7) și (4.8), operatorii de tip (4.1) au următoarea expresie:

$$S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}(f,x) = (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{n+\beta+1}{n}x - \frac{2\alpha+1}{2n}\right)^{k} \tag{4.9}$$
$$\times\left(\frac{-(n+\beta+1)}{n}x + \frac{2n+2\alpha+1}{2n}\right)^{n-k}\int\limits_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(t)\,dt,$$

oricare ar fi $x \in I$.

Lema 4.1.6. *(Lema 3 din [110]) Operatorii $S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}$ din (4.9) satisfac*

$$\begin{aligned} S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}(e_0,x) &= 1;\\ S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}(e_1,x) &= x;\\ S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}(e_2,x) &= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{n+2\alpha+1}{n(n+\beta+1)}x - \frac{n(12\alpha+5)+3(2\alpha+1)^2}{12n(n+\beta+1)^2}\end{aligned} \tag{4.10}$$

pentru $x \in I$.

Lema 4.1.7. *(Lema 4 din [110]) Au loc următoarele relații:*

$$M_{n,0}\left(S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = 1, \tag{4.11}$$

$$M_{n,1}\left(S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = 0, \tag{4.12}$$

$$M_{n,2}\left(S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = -\frac{x^2}{n} + \frac{n+2\alpha+1}{n(n+\beta+1)}x + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4.13}$$

Lema 4.1.8. *(Lema 5 din [110]) Avem*

$$\lim_{n\to\infty} nM_{n,2}\left(S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = x(1-x) \tag{4.14}$$

uniform pentru $x \in I$. Mai mult, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un întreg $n_\varepsilon \geq n_0$, suficient de mare, astfel încât

$$nM_{n,2}\left(S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) \leq \frac{1+\varepsilon}{4}, \tag{4.15}$$

oricare ar fi $x \in I$ și $n \in \{1,2,\dots\}$ cu $n \geq n_\varepsilon$.

Teorema 4.1.9. *(Teorema 2 din [110]) Fie $f \in C([0,1])$. Următoarea limită are loc:*

$$\lim_{m\to\infty} S_{1,m}^{(\alpha,\beta)*}(f) = f$$

uniform pe I. Mai mult, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \{1,2,\dots\}$ astfel încât

$$\left|S_{1,n}^{(\alpha,\beta)*}(f,x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2}\right)\omega_1\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

pentru orice $x \in I$ și $n \in \{1,2,\dots\}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Prezentăm un exemplu grafic pentru a vedea procesul de aproximare. Am considerat funcția $f(x) = \sin(20x)$, $n = 25$, $\alpha = 0.1$ și $\beta = 0.2$.

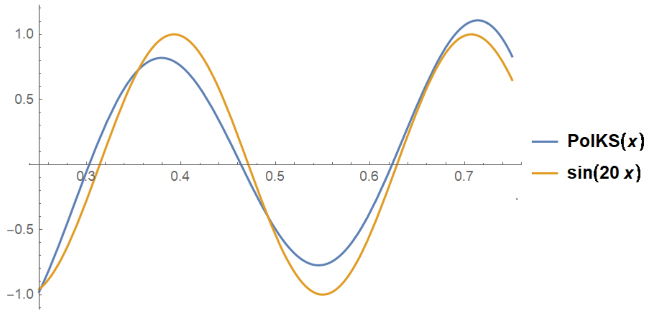


Figura 4.1: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $n = 25$

În Figura 4.1 se poate vedea că șirul de operatori (albastru) este un proces de aproximare pentru funcția f (portocaliu).

4.1.2 Operatori de tip Stancu-Kantorovich ce invariază funcțiile e_0 și e_2

În continuare tratăm operatorii de tip Stancu-Kantorovich din (4.1) pentru care impunem invarierea funcțiilor e_0 și e_2. În acest sens, operatorii sunt construiți astfel:

$$\begin{gathered} \bullet_1 S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_0, x) = 1 \\ \bullet_2 S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_2, x) = x^2 \\ \bullet_3 \lim_{n\to\infty} S_n^{(\alpha,\beta)*}(e_1, x) = x \text{ uniform pe un interval.} \end{gathered} \tag{4.16}$$

Impunând condițiile de mai sus, (4.16), și folosind identitățile din (4.2) și (4.4) obținem următoarele condiții pentru $c_n(x)$ și $d_n(x)$:

$$c_n(x) + d_n(x) = 1, \ \forall x \in I, \ n \in \{1, 2, \dots\}, \tag{4.17}$$

și ecuația de gradul doi în $c_n(x)$:

$$n(n-1)c_n^2(x) + 2n(1+\alpha)c_n(x) + \alpha(\alpha+1) + \frac{1}{3} = x^2(n+\beta+1)^2, \tag{4.18}$$

$x \in I$, și $n \in \{1, 2, \dots\}$.

Observăm că pentru $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, discriminantul ecuației (4.18):

$$\delta_n(x) = 4n\left[n\left(\frac{2}{3}+\alpha\right) + \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3} + x^2(n-1)(n+\beta+1)^2\right] \tag{4.19}$$

este pozitiv.

Facem următoarele notații:

$$\Delta_n(x) = \frac{\delta_n(x)}{4}.$$

Rezolvând ecuația (4.18) obținem, pentru $n \geq 2$:

$$c_n(x) = \frac{-n(1+\alpha) + \sqrt{\Delta_n(x)}}{n(n-1)} \tag{4.20}$$

și, din relația (4.17), obținem:

$$d_n(x) = \frac{n(n+\alpha) - \sqrt{\Delta_n(x)}}{n(n-1)}. \tag{4.21}$$

Pentru a aplica Teorema Korovkin, avem nevoie ca operatorii să fie pozitivi. Pentru aceasta impunem ca $c_n(x)$ și $d_n(x)$, din (4.20) și (4.21), să fie funcții pozitive. Astfel obținem:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+\alpha+\frac{1}{3}}}{n+\beta+1} \leq x \leq \frac{\sqrt{n(n+2\alpha+1)+\alpha^2+\alpha+\frac{1}{3}}}{n+\beta+1}.$$

Lema 4.1.10. *(Lema 6 din [110]) Fie $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$ fixat. Atunci exită un număr natural $n_0 \in \{1, 2, \dots\}$, astfel încât*

$$[\varepsilon', 1-\varepsilon'] \subset \left[\frac{\sqrt{\alpha^2+\alpha+\frac{1}{3}}}{n+\beta+1}; \frac{\sqrt{n(n+2\alpha+1)+\alpha^2+\alpha+\frac{1}{3}}}{n+\beta+1}\right], \tag{4.22}$$

oricare ar fi $n \in \{1, 2, \dots\}$ cu $n \geq n_\varepsilon$ și $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Observația 4.1.11. *Deoarece șirurile de funcții $c_n(x)$ and $d_n(x)$ sunt pozitive pe intervalul (4.22), în continuare vom considera $I = [\varepsilon', 1-\varepsilon']$, oricare ar fi $\varepsilon' > 0$ și $n \geq n_0$.*

Întorcându-ne în relația (4.1) cu expresiile funcțiilor $c_n(x)$ și $d_n(x)$ din relațiile (4.20) și (4.21), operatorii devin:

$$S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}(f,x) = \frac{n+\beta+1}{(n(n-1))^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-n(1+\alpha) + \sqrt{\Delta_n(x)}\right)^k \tag{4.23}$$
$$\times \left(n(n+\alpha) - \sqrt{\Delta_n(x)}\right)^{n-k} \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(t)\, dt,$$

oricare ar fi $x \in I$ și $n \geq n_0$.

Lema 4.1.12. *(Lema 7 din [110]) Operatorii $S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}$ din (4.23) satisfac:*

$$\begin{aligned} S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}(e_0,x) &= 1; \\ S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}(e_1,x) &= \frac{-(n+2\alpha+1)+2\sqrt{\Delta_n(x)}}{2(n+\beta+1)(n-1)}; \\ S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}(e_2,x) &= x^2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

pentru $x \in I$ și $n \geq n_0$.

În continuare prezentăm primele trei momente ale operatorilor $S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}$.

Lema 4.1.13. *(Lema 8 din [110]) Au loc următoarele:*

$$M_{n,0}\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = 1, \tag{4.25}$$

$$M_{n,1}\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = -x + \frac{-(n+2\alpha+1)+2\sqrt{\Delta_n(x)}}{2(n+\beta+1)(n-1)}, \tag{4.26}$$

$$M_{n,2}\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = 2x\left(x - \frac{-(n+2\alpha+1)+2\sqrt{\Delta_n(x)}}{2(n+\beta+1)(n-1)}\right), \tag{4.27}$$

pentru orice $x \in I$ *și* $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Lema 4.1.14. *(Lema 9 din [110]) Au loc următoarele limite:*

$$\lim_{n\to\infty} nM_{n,1}\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = \frac{1}{2}(x-1), \tag{4.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} nM_{n,2}\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = x(1-x), \tag{4.29}$$

uniform pentru $x \in I$. *Mai mult, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon > n_0$ *astfel încât*

$$M_{n,2}\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right), \tag{4.30}$$

pentru orice $x \in I$ *și* $n \in \{1, 2, \ldots\}$ *cu* $n \geq n_\varepsilon$.

Teorema 4.1.15. *(Teorema 3 din [110]) Fie* $f \in C([0,1])$. *Are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*}(f) = f$$

uniform pe I. *Mai mult, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \{1, 2, \ldots\}$ *astfel încât:*

$$\left|\left(S_{2,n}^{(\alpha,\beta)*} f\right)(x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

pentru orice $x \in I$ *și* $n \in \{1, 2, \ldots\}$ *cu* $n \geq n_\varepsilon$.

Pentru acești operatori am obținut următoarele grafice pentru funcțiile $f(x) = 2x^3 - \frac{20}{7}x^2 + \frac{8}{7}x - \frac{1}{7}$ și $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$, cu $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.65$ și $n = 50$.

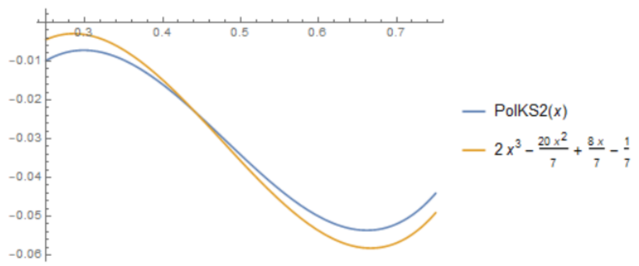


Figura 4.2: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.65$, $n = 50$

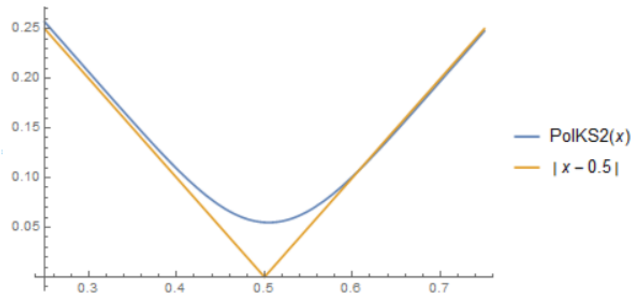


Figura 4.3: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.65$, $n = 50$

4.1.3 Operatori de tip Stancu-Kantorovich ce invariază funcțiile e_1 și e_2

În această secțiune impunem operatorilor de tip Stancu-Kantorovich din (4.1) să invarieze funcțiile e_1 și e_2. În acest sens, operatorii satisfac:

$$\begin{gathered} \bullet_1 \lim_{n\to\infty} S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\left(e_0,x\right)=1, \text{ uniform pe un interval,} \\ \bullet_2 S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\left(e_1,x\right)=x, \\ \bullet_3 S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\left(e_2,x\right)=x^2. \end{gathered} \tag{4.31}$$

Pentru a obține rezultatele principale ale acestei secțiuni, facem următoarea notație

$$S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\left(e_0,x\right)=1+w_n\left(x\right), \tag{4.32}$$

unde $x \in I,\ n \in \{1,2,\dots\}$ și $w_n : I \to \mathbb{R}$.

Observația 4.1.16. *Pentru ca operatorii $S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*},\ n \in \{1,2,\dots\},\ 0 \le \alpha \le \beta$ să fie pozitivi, impunem ca $S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\left(e_0,x\right) \ge 0$, ceea ce implică*

$$1+w_n\left(x\right)\ge 0,\ \forall x\in I,\ n\in\{1,2,\dots\}. \tag{4.33}$$

Din relația (4.32), obținem:

$$\left(c_n\left(x\right)+d_n\left(x\right)\right)^n=1+w_n\left(x\right),\forall x\in I,\ n\in\{1,2,\dots\}, \tag{4.34}$$

care implică

$$c_n\left(x\right)+d_n\left(x\right)=\left(1+w_n\left(x\right)\right)^{\frac{1}{n}},\forall x\in I,\ n\in\{1,2,\dots\}. \tag{4.35}$$

Având considerațiile anterioare și impunând condițiile $\bullet_2$ și $\bullet_3$ din (4.31), obținem următoarea lemă.

Lema 4.1.17. *(Lema 10 din [110]) Pentru a avea $S_{3,n}^{(\alpha_\varepsilon,\beta)*}(e_1,x)=x$, $c_n(x)$ și $d_n(x)$ sunt de forma:*

$$c_n\left(x\right)=\frac{n+\beta+1}{n}\left[x-\frac{2\alpha+1}{2\left(n+\beta+1\right)}\left(1+w_n\left(x\right)\right)\right]\left(1+w_n\left(x\right)\right)^{\frac{1-n}{n}} \tag{4.36}$$

și

$$d_n(x) = (1 + w_n(x))^{\frac{1}{n}} \times \tag{4.37}$$
$$\left[1 - \frac{n+\beta+1}{m} \cdot \frac{1}{1+w_n(x)} \left(x - \frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}(1+w_n(x))\right)\right].$$

Din condiția $\bullet_2$ din (4.31),avem următoarea ecuație de gradul doi în $w_n(x)$:

$$w_n^2(x)\left[-5n - 3 - \alpha(1+n+\alpha)\right] +$$
$$w_n(x)\{-12n\left[(n+1)^2 + \beta(\beta+2n+2)\right]x^2 +$$
$$12\left[(n+1)^2 + 2\alpha(1+n) + \beta(1+n+2\alpha)\right]x - 2\left[5n+3+12\alpha(1+n+\alpha)\right]\} +$$
$$+\{-12\left[(n+1)^2 + \beta(\beta+2n+2)\right]x^2 +$$
$$+12\left[(n+1)^2 + 2\alpha(1+n) + \beta(1+n+2\alpha)\right]x - \left[5n+3+12\alpha(1+n+\alpha)\right]\} = 0,$$

cu soluțiile notate $w_{n,1}$ și $w_{n,2}$, $w_{n,2} < w_{n,1}$.

Observația 4.1.18. *Se pot verifica următoarele:* $\lim_{n\to\infty} w_{n,2}(x) = -\infty$ *și* $\lim_{n\to\infty} w_{n,1}(x) = 0$, *uniform pentru* $x \in (0,1)$.

În continuare vom considera $w_n(x) = w_{n,1}(x)$.

Pentru a obține operatori pozitivi, funcțiile $c_n(x)$ și $d_n(x)$ din relațiile (4.36) și (4.37) trebuie să fie pozitive. În aceste condiții obținem:

$$x - \frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}(1+w_n(x)) \geq 0,$$

și

$$1 - \frac{n+\beta+1}{n} \cdot \frac{1}{1+w_n(x)} \left(x - \frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}(1+w_n(x))\right) \geq 0,$$

pentru orice $x \in I$, $n \in \{1,2,\dots\}$ și $0 \leq \alpha \leq \beta$ care implică:

$$\frac{2(n+\beta+1)}{2n+2\alpha+1}x - 1 \leq w_n(x) \leq \frac{2(n+\beta+1)}{2\alpha+1}x - 1, \tag{4.38}$$

oricare ar fi $x \in I$, $n \in \{1,2,\dots\}$ și $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Lema 4.1.19. *(Lema 11 din [110]) Fie* $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$. *Atunci există* $n_0 \in \{1,2,\dots\}$ *astfel încât inegalitatea* (4.38) *are loc oricare ar fi* $x \in [\varepsilon', 1-\varepsilon']$ *cu* $n \in \{1,2,\dots\}$, $n \geq n_0$.

În cele ce urmează vom considera $I = [\varepsilon', 1-\varepsilon']$, cu $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$ fixat.

Putem rescrie operatorii din relația (4.1) astfel:

$$S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}(f,x) = (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+w_n(x))^{1-k}$$
$$\times\left(\frac{n+\beta+1}{n}\left(x - \frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}(1+w_n(x))\right)\right)^k$$
$$\times\left(1 - \frac{n+\beta+1}{n(1+w_n(x))}\left(x - \frac{2\alpha+1}{2(n+\beta+1)}(1+w_n(x))\right)\right)^{n-k}\int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(t)\,dt.$$

Lema 4.1.20. *(Lema 12 din [110]) Pentru $x \in I$, $I = [\varepsilon', 1-\varepsilon']$, $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$, și $n \in \{1, 2, \dots\}$, avem:*

$$M_{n,0}\left(S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = 1 + w_n(x),$$

$$M_{n,1}\left(S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = -xw_n(x),$$

$$M_{n,2}\left(S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}\right)(x) = x^2 w_n(x).$$

Teorema 4.1.21. *(Teorema 4 din [110]) Are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}(f) = f$$

uniform pe $[\varepsilon', 1-\varepsilon']$, $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$, oricare ar fi $f \in C([0,1])$.

Observația 4.1.22. *Conform rezultatului obținut în lucrarea [48] care demonstrează că nu există un șir de operatori analitici liniari și pozitivi $L : C([0,1]) \to C([0,1])$ care să invarieze funcțiile e_1 și e_2, menționăm că restricția imaginii la intervalul $[\varepsilon', 1-\varepsilon']$, $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$, este cel mai mare interval pe care operatorii noștri rămân pozitivi.*

În continuare prezentăm un exemplu grafic ca o comparație între operatorii noștri $S_{3,n}^{(\alpha,\beta)*}$ notați prin $PolKS(x)$, și operatorii $P(x)$ obținuți de Indrea et al. în lucrarea [62], care sunt un caz particular al operatorilor noștri pentru $\alpha = \beta = 0$.

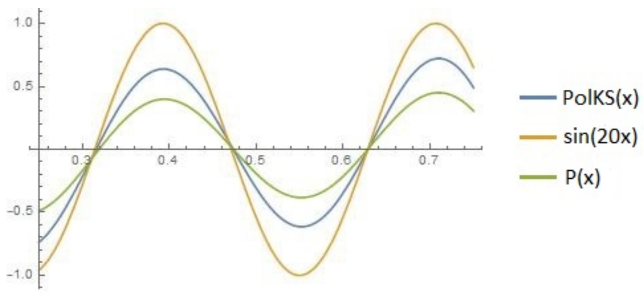


Figura 4.4: $f(x) = \sin(20x)$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$, $n = 50$

În continuare, considerăm funcția $f(x) = |x - 0.5|$ și obținem următorul grafic:

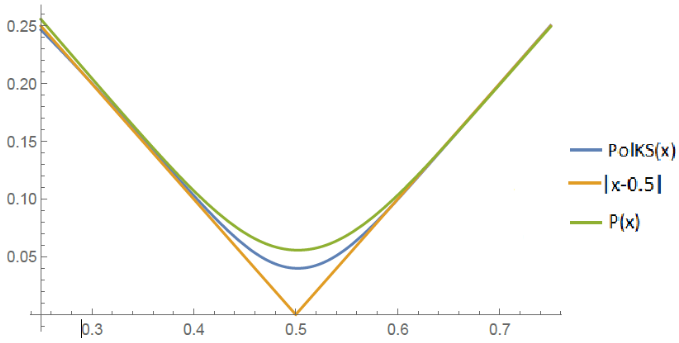


Figura 4.5: $f(x) = |x - 0.5|$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$, $n = 50$

5 Operatori de tip Kantorovich nepozitivi atașați unor operatori diferențiali liniari

În acest capitol, prezentăm câțiva operatori obținuți ca o generalizare a operatorilor Kantorovich folosind diferite tipuri operatori diferențiali liniari. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în următoarele trei lucrări: **Vasian, B. I.**, Approximation Properties of Some Non-positive Kantorovich Type Operators, 2022 Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Selçuk Meeting (2022), 188-194; **Vasian, B. I.**, Voronovskaja type theorem for some non-positive Kantorovich type operators, Carpathian Journal of Mathematics Vol. 40, No. 1 (2024), 187-194 și **Vasian, B. I.**, Generalized Kantorovich operators, General Mathematics, Vol. 32, No.2, (2025), 67-83.

Prima secțiune a acestui capitol este dedicată operatorilor generali de tip Bernstein-Kantorovich care nu sunt pozitivi pe $[0, 1]$, dar pot fi utilizați pentru a aproxima uniform toate funcțiile continue pe acesta.

În a doua secțiune, vom trata cei mai generali operatori de tip Kantorovich. Metoda prezentată acolo este utilă pentru a oferi nenumărați operatori de aproximare, care nu sunt pozitivi pe $[0, 1]$.

5.1 Operatori de tip Bernstein-Kantorovich generali

În această secțiune, vom oferi o generalizare a operatorilor de tip Bernstein-Kantorovich folosind un operator diferențial liniar de ordinul l cu coeficienți constanți, D^l, și operatorul de antiderivare corespunzător I^l, având proprietatea $D^l \circ I^l = Id$. Vom demonstra convergența pe toate funcțiile continue pe $[0, 1]$. Aceasta are loc chiar dacă operatorii construiți în acest fel nu sunt pozitivi. Modul de construire a operatorilor noștri este de o generalizare a metodei lui Kantorovich, ceea ce înseamnă că operatorii noștri vor fi obținuți ca o compunere între operatorul diferențial D^l, operatorul Bernstein de ordinul $n+l$ și operatorul de antiderivare I^l.

Pentru $l \in \{1, 2, \dots\}$, fi

$$D^l f = \sum_{i=0}^{l} a_i f^{(i)}, \tag{5.1}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_l \in \mathbb{R}$. Operatorul de antiderivare corespunzător, I^l, este obținut din condiția $D^l \circ I^l = Id$. Aceasta conduce la:

$$\left(D^l \circ I^l\right)(f) = f,$$

care este echivalentă cu:

$$a_l \left(I^l f\right)^{(l)} + a_{l-1} \left(I^l f\right)^{(l-1)} + \dots + a_1 \left(I^l f\right)' + a_0 \left(I^l f\right) = f, \tag{5.2}$$

care este o ecuație diferențială de ordin l cu coeficienți constanți, pentru care există $I^l f$ dar soluția nu este unică și este de clasă $C^l([0,1])$. Întrucât există o infinitate de astfel de soluții, se poate obține o unică soluție prin impunerea unor condiții inițiale pentru ecuației diferențiale asftel: într-un anumit punct, soluția $I^l f$ și derivatele sale până la ordinul $l-1$ să aibă valori particulare (vezi [15]). Cu toate acestea, forma exactă a operatorului de antiderivare nu joacă un rol în demonstrațiile noastre, prin urmare, condițiile inițiale și forma lor sunt neglijate.

Operatorii de tip Kantorovich prezentați în această secțiune sunt de forma:

$$K^l = D^l \circ L \circ I^l, \tag{5.3}$$

unde L este un operator.

Considerăm $L = B_{n+l}$ în definiția (5.3) și vom demonstra că acești operatori liniari pot aproxima funcțiile continue pe $[0,1]$ chiar dacă nu sunt operatori pozitivi.

Derivata de ordin l a operatorilor Bernstein, B_{n+l}, poate fi exprimată cu ajutorul diferențelor finite de ordin l cu pasul $k = \frac{1}{n+l}$ astfel:

$$B_{n+l}^{(l)}(f,x) = \frac{(n+l)!}{n!} \sum_{k=0}^{n} \Delta^l_{\frac{1}{n+l}} f\left(\frac{k}{n+l}\right) p_{n,k}(x),\ x \in [0,1],\ f \in C([0,1]).$$

În urma acestor considerații, fie operatorul de tip Bernstein-Kantorovich:

$$K_n^l(f,x) = \left(D^l \circ B_{n+l} \circ I^l\right)(f,x),\ x \in [0,1] \tag{5.4}$$

care poate fi rescris astfel:

$$K_n^l(f,x) = D^l\left(B_{n+l} I^l f\right)(x). \tag{5.5}$$

Pentru simplitate notăm $I^l f := F$

$$K_n^l(f,x) = \sum_{i=0}^{l} a_i \left[B_{n+l}(F,x)\right]^{(i)} \tag{5.6}$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \frac{(n+l)!}{(n+l-i)!} a_i \sum_{j=0}^{n+l-i} \Delta^i_{\frac{1}{n+l}} F\left(\frac{j}{n+l}\right) p_{n+l-i,j}(x).$$

Observația 5.1.1. *Operatorii (5.6) sunt liniari.*

Scopul nostru este să demonstrăm că are loc convergența:

$$\left\|K_n^l f - f\right\| \to 0,\ as\ n \to \infty$$

pentru toate funcțiile continue pe $[0,1]$.

5.1.1 Rezultat de aproximare

Pentru a demonstra rezultatul de aproximare, următoarea lemă este esențială:

Lema 5.1.2. *(Lema 2.1 din [111]) Fie I un iterval compact și $F \in C^k(I)$, atunci următoarea convergență are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} (n+l)^k \Delta^k_{\frac{1}{n+l}} F = F^{(k)},\ uniform\ pe\ I, as\ n \to \infty. \tag{5.7}$$

Astfel, putem enunța rezultatul principal al acestei secțiuni:

Teorema 5.1.3. *(Teorema 2.2 din [111]) Fie $f \in C([0,1])$. Următoarea limită are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} K_n^l f = f, \ uniform \ pe \ [0,1]. \tag{5.8}$$

Observația 5.1.4. *[111] Operatorii $K_n^l f(x)$ nu sunt pozitivi.*

Exemplul 5.1.5. *[111] Fie $n = 1$ și operatorul diferențial $D^1 f = f' - f$ care are un operator de antiderivare fixat $I^1 f(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$, care va fi notat $I^1 f(x) := F(x)$ și ales astfel încât $F(0) = 0$. Considerăm funcția*

$$f(t) = e^{-5t}, \ t \in [0,1].$$

Atunci:

$$K_1^1(f,1) = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}} \left(e^{-3} - 1\right) - \frac{e}{6}\left(e^{-6} - 1\right) = -7.0288 \times 10^{-2},$$

ceea ce demonstrează observația anterioară.

5.1.2 Rezultat de tip Voronovskaja

În această secțiune demonstrăm un rezultat de tip Voronovskaja pentru operatorii K_n^l. Introducem următoarea notație pentru a simplifica rezultatul:

$$D_y^l g(x) = \sum_{i=1}^{l} a_i y^i g^{(i-1)}(x). \tag{5.9}$$

Teorema 5.1.6. *(Teorema 2.3 din [112]) Fie $f \in C^2([0,1])$ și $F \in C^{l+2}([0,1])$, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[K_n^l(f,x) - f(x)\right] = \frac{1}{2} D^l \left\{x(1-x)[F(x)]''\right\} \tag{5.10}$$

$$= \frac{1}{2} x(1-x) f''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{\partial D_y^l F''(x)}{\partial y}\Big|_{y=1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_y^l F'(x)}{\partial y^2}\Big|_{y=1}.$$

uniform pentru $x \in [0,1]$.

5.1.3 Aproximare simultană

În această sețiune demonstrăm un rezultat de aproximare simultană pentru operatorii K_n^l.

Teorema 5.1.7. *(Teorema 3.4 din [112]) Fie $f \in C^r([0,1])$ cu $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} [K_n^l(f)]^{(r)} = f^{(r)}, \tag{5.11}$$

are loc uniform pe intervalul $[0,1]$ și $F \in C^{l+r}([0,1])$.

5.1.4 Examplu

Fie $D^*f = f'' - 3f' + 2f$ un operator diferențial de ordin doi și I^*, un operator de antiderivare fixat prin $D^* \circ I^* = Id$ și condițiile inițiale $I^*f(0) = 0$ și $(I^*f)'(0) = 0$. Atunci:

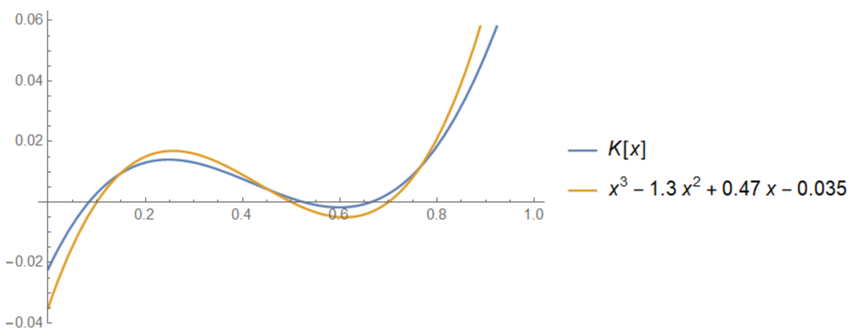
$$I^*f(x) = \int_0^x e^{x-t}\left(e^{x-t} - 1\right) f(t)dt, \ x \in [0,1]. \tag{5.12}$$

Notăm $F(x) := I^*f(x)$.

Considerăm operatorii:

$$K_n^*(f,x) = (D^* \circ B_{n+2} \circ I^*f)(x) = D^*(B_{n+2}(F,x)), \ x \in [0,1]. \tag{5.13}$$

Luăm funcția $f(x) = x^3 - 1.3x^2 + 0.47x - 0.035$. Pentru aceasta, cu $n = 30$ obținem următorul proces grafi folosind soft-ul matematic Wolfram Mathematica:



5.2 Operatori Kantorovich generali

În această secțiune vom introduce o nouă clasă de operatori modificați în sens Kantorovich folosind operatori diferențiali liniari de ordinul l cu coeficienți neconstanți. Operatorii construiți astfel pot fi utilizați pentru a aproxima toate funcțiile continue pe $[0,1]$ chiar dacă nu sunt operatori pozitivi.

Această secțiune conține cele mai generale rezultate pe acest subiect, generalizând secțiunea anterioară prin considerarea operatorului diferențial D^l într-un mod general. Rezultatele sunt demonstrate pentru orice operator L care satisface anumite proprietăți, nu doar pentru operatorii Bernstein.

Pentru a susține rezultatele noastre, vom oferi o teoremă de aproximare și câteva teoreme de tip Voronovskaja pentru generalizarea Kantorovich a operatorilor Bernstein, Durrmeyer, Kantorovich, Stancu și U_n^ρ.

Rezultatele din această secțiune pot fi găsite în lucrarea **B. I. Vasian**, Generalized Kantorovich operators, General Mathematics, Vol. 32, No. 2 (2025), 67-83.

Acest subiect a fost studiat în cazuri particulare în lucrări precum [50, 83, 23, 109].

5.2.1 Construcția operatorilor

Fie $l \in \{1, 2, \ldots\}$, și

$$D^l g(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i(x)\, g^{(i)}(x), \tag{5.14}$$

cu $a_i(x) \in C(\mathbb{R}),\ i \in \{0, 1, \ldots, l\}$. Prin operator de antiderivare corespunzător lui D^l înțelegem un operator I^l ce satisface $D^l \circ I^l = Id$. Această condiție conduce la:

$$\left(D^l \circ I^l\right)(f) = f,$$

care este echivalentă cu:

$$a_l(x)\left(I^l f\right)^{(l)} + a_{l-1}(x)\left(I^l f\right)^{(l-1)} + \cdots + a_1(x)\left(I^l f\right)' + a_0(x)\left(I^l f\right) = f. \tag{5.15}$$

Ecuația (5.15) este o ecație diferențială de ordin l cu coeficienți neconstanți. Pentru o astfel de ecuație diferențială amintim următorul rezultat de existență și unicitate a soluției:

Teorema 5.2.1. *[15] Presupunând că $a_i \in C(I),\ i \in \{0, 1, \ldots, l\}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis cu $a \in I$. Având $b_0, b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{R}$ astfel încât au loc condițiile inițiale $y^{(i)}(a) = b_i,\ i \in \{0, 1, \ldots, l\}$, atunci ecuația*

$$a_l(x)\, y^{(l)} + a_{l-1}(x)\, y^{(l-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x),\ f \in C(I), \tag{5.16}$$

are o soluție unică $y \in C^l(I)$.

Din teorema de mai sus deducem că pentru ecuația (5.15) există soluții și, prin impunerea unor condiții inițiale, vom găsi una unică. Menționăm că pentru construcția operatorilor studiați în această lucrare, expresia exactă a operatorilor de antiderivare nu joacă un rol important, deoarece alegând un operator de antiderivare diferit, operatorul nostru va fi diferit, dar procesele de aproximare pe care le studiem nu depind de alegerea acestuia.

Observația 5.2.2. *(Observația 2.2. din [113]) Din Teorema 5.2.1 avem că soluția lui (5.15) există pe un interval deschis I. Pentru a demonstra rezultatele noastre, alegem I astfel încât $[0, 1] \subset I$.*

Definiția 5.2.3. *[113] Fie $(L_n)_n$ un șir de operatori liniari și pozitivi pe $C([0, 1])$. Introducem operatorii de tip Kantorovich astfel:*

$$K_n = D^l \circ L_n \circ I^l, \tag{5.17}$$

având expresia

$$\begin{aligned} K_n(f, x) &= \left(D^l \circ L_n \circ I^l\right)(f, x) \\ &= D^l\left(L_n(F, x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{l} a_i(x)\, L_n^{(i)}(F, x),\ x \in [0, 1],\ f \in C[0, 1], \end{aligned} \tag{5.18}$$

unde $F(x) = I^l f(x)$.

Pentru a demonstra rezultatele noastre avem nevoie de următoarele noțiuni. Fie I un interval compact și

$$M_{n,k}(x) = L_n\left(\frac{(t-x)^k}{k!}, x\right), \ x \in I.$$

În lucrarea [51] a fost demonstrat următorul rezultat.

Teorema 5.2.4. *[51] Fie $(L_n)_n$ un șir de operatori liniari și pozitivi pe $C(I)$, I compact, astfel încât L_n este convex de ordin $r-1$, cu $r \geq 0$ întreg. Presupunând că au loc $M_{n,4}(x) = o(M_{n,2}(x))$ uniform pentru $x \in I$,, $M_{n,0}(x) = 1$, și că există două funcții $a, b : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} nM_{n,1}(x) = a(x)$ și $\lim_{n\to\infty} nM_{n,2}(x) = b(x)$. Atunci, pentru $f \in C^{r+2}(I)$ are loc următoarea limită uniformă:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[L_n^{(r)}(f,x) - f^{(r)}(x)\right] = \left[a(x) f'(x) + b(x) f''(x)\right]^{(r)}, \ x \in I. \quad (5.19)$$

5.2.2 Proprietăți de aproximare

Pentru operatorii K_n introduși anterior, putem enunța următorul rezultat.

Teorema 5.2.5. *(See Theorem 4.1 in [113]) Fie $(L_n)_n$ un șir de operatori liniari și pozitivi pe $C([0,1])$, ce au în plus proprietatea de aproximare simultană $\left\|L_n^{(k)} g - g^{(k)}\right\| \to 0$ uniform pe $[0,1]$, $g \in C^k([0,1])$, $k = \overline{0,l}$, $l \in \{0,1,2\ldots\}$. Atunci următoarea convergență are loc*

$$\|K_n f - f\| \to 0, \ uniform \ pe \ [0,1], \quad (5.20)$$

cu $f \in C([0,1])$.

Folosind Teorema 5.2.4 putem demonstra următorul rezultat de tip Vornovskaja pentru operatorii K_n.

Teorema 5.2.6. *(Teorema 4.2 din [113]) Fie $(L_n)_n$ un șir de operatori liniari și pozitivi pe $C([0,1])$ astfel încât L_n este convex de ordin $r-1$, cu $r \geq 0$ un întreg. Presupunând că au loc $M_{n,4}(x) = o(M_{n,2}(x))$ uniform pentru $x \in [0,1]$, și $M_{n,0}(x) = 1$, atunci există două funcții $a, b : [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} nM_{n,1}(x) = a(x)$ și $\lim_{n\to\infty} nM_{n,2}(x) = b(x)$. Let $K_n = D^l \circ L_{n+l} \circ I^l$. Atunci, pentru $f \in C^{r+2}([0,1])$ următoarea limită are loc uniform:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left[K_n(f,x) - f(x)\right] &= \sum_{i=0}^{l} a_i(x)\left[a(x) F'(x) + b(x) F''(x)\right]^{(i)} \quad (5.21) \\ &= D^l\left(a(x) F'(x) + b(x) F''(x)\right), \ x \in [0,1]. \end{aligned}$$

5.2.3 Aproximare simultană

În această secțiune considerăm $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0,1,\ldots,l\}$, $l \geq 0$, constante reale, și operatorul diferențial

$$D^{*l} f(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i f^{(i)}(x). \quad (5.22)$$

Fie I^{*l} operatorul corespunzător de antiderivare în raport cu compunerea $D^{*l} \circ I^{*l} g = g$, care duce la o ecuație diferențială de ordin l cu coeficienți constanți $a_i \in \mathbb{R}$. Pentru o astfel de ecuație știm că soluția există dar nu este unică decât dacă impunem condiții inițiale care nu sunt necesare pentru următorul rezultat. Notăm $I^{*l} f := F^*$.

Fie L_n un șir de operatori și definim K_n^* astfel:

$$K_n^* = D^{*l} \circ L_n \circ I^{*l}. \tag{5.23}$$

Pentru operatorii K_n^* putem enunța următorul rezultat de aproximare simultană:

Teorema 5.2.7. *(Teorema 5.1 din [113]) Fie $(L_n)_n$ un șir de operatori având proprietatea că $(L_n g)^{(j)} \to g^{(j)}$ uniform pentru $x \in [0,1]$ și $g \in C^j([0,1])$, $0 \leq j \leq r+l$, $r \geq 0$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} (K_n^* f)^{(r)} = f^{(r)} \text{ uniform pe } [0,1], \tag{5.24}$$

$f \in C^r([0,1])$ și $F^* \in C^{r+l}([0,1])$.

5.2.4 Cazuri particulare

În această secțiune vom studia modificarea Kantorovich generalizată pentru anumiți operatori bine cunoscuți.

Pentru a simplifica notațiile, introducem următorul operator diferențial

$$D_y^l g(x) = \sum_{i=1}^{l} y^i a_i(x) g^{(i-1)}(x). \tag{5.25}$$

Operatori Bernstein

Fie B_n operatorii Bernstein definiți în (1.1):

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \ x[0,1], \ f \in C([0,1]),$$

unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, pentru $0 \leq k \leq n$.

Fie $L_n = B_{n+l}$. Prin urmare,

$$K_n^B(f,x) = \left(D^l \circ B_{n+l} \circ I^l\right)(f,x) \tag{5.26}$$
$$= \sum_{i=0}^{l} a_i(x) B_{n+l}^{(i)}(F,x), \ x \in [0,1], \ f \in C([0,1]).$$

Teorema 5.2.8. *(Teorema 6.3 din [113]) Următoarea convergență*

$$\lim_{n\to\infty} K_n^B(f) = f \tag{5.27}$$

are loc uniform pe $[0,1]$ și $f \in C([0,1])$.

Teorema 5.2.9. *(Teorema 6.4 din [113]) Fie* $a_i \in C^2([0,1])$ *și* $F \in C^{l+2}([0,1])$. *Următoarea limită are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[K_n^B(f,x) - f(x)\right] \tag{5.28}$$
$$= \frac{x(1-x)}{2} D^l F''(x) + \frac{1-2x}{2}\frac{\partial D_y^l F''(x)}{\partial y}|_{y=1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D_y^l F'(x)}{\partial y^2}|_{y=1},$$

Operatori Durrmeyer

Fie D_n operatori Durrmeyer definiți în (1.1) astfel:

$$D_n(f,x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_0^1 p_{n,k}(t)\, f(t)\, dt,\ x\,[0,1],\ f \in C([0,1]),$$

cu $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, pentru $0 \le k \le n$.

Operatorii Durrmeyer sunt utili în aproximarea funcțiilor $f \in L_1([0,1])$.

Acum alegem $L_n = D_{n+l}$ în construcția noastră, prin urmare:

$$K_n^D(f,x) = \left(D^l \circ D_{n+l} \circ I^l\right)(f,x) \tag{5.29}$$
$$= \sum_{i=0}^{l} a_i(x)\, D_{n+l}^{(i)}(F,x),\ x \in [0,1],\ f \in C([0,1]).$$

Teorema 5.2.10. *(Teorema 6.6 din [113]) Următoarea convergență*

$$\lim_{n\to\infty} K_n^D(f) = f \tag{5.30}$$

are loc uniform pe $[0,1]$ *și* $f \in C([0,1])$.

Teorema 5.2.11. *(Teorema 6.7 din [113]) Fie* $a_i \in C^2([0,1])$ *și* $F \in C^{l+2}([0,1])$. *Următoarea limită are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[K_n^D(f,x) - f(x)\right] \tag{5.31}$$
$$= x(1-x)D^l F''(x) + (1-2x)D^l F'(x) + (1-2x)\frac{\partial D_y^l F''(x)}{\partial y}|_{y=1}$$
$$-2\frac{\partial D_y^l F'(x)}{\partial y}|_{y=1} - \frac{\partial^2 D_y^l F'(x)}{\partial y^2}|_{y=1},\ f \in C^2([0,1]).$$

Operatori Kantrovich

Fie $\tilde{K}_n$ operatori Kantorovich definiți în (1.1) astfel:

$$\tilde{K}_n(f,x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\, dt,\ x\,[0,1],\ f \in C([0,1]),$$

cu $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, pentru $0 \le k \le n$.

Alegem $L_n = \tilde{K}_{n+l}$ în construcția noastră, prin urmare:

$$K_n^{\tilde{K}}(f,x) = \left(D^l \circ \tilde{K}_{n+l} \circ I^l\right)(f,x) \tag{5.32}$$
$$= \sum_{i=0}^{l} a_i(x)\, \tilde{K}_{n+l}^{(i)}(F,x),\ x \in [0,1],\ f \in C([0,1]).$$

Deoarece rezultatul aproximării simultane este valabil pentru $K_n^{\tilde{K}}$, putem aplica Teorema 5.2.6 și obținem următorul rezultat de aproximare uniformă:

Teorema 5.2.12. *(Teorema 6.9 din [113]) Următoarea convergență*

$$\lim_{n\to\infty} K_n^{\tilde{K}}(f) = f \tag{5.33}$$

are loc uniform pentru $x \in [0,1]$ *și* $f \in C([0,1])$.

Teorema 5.2.13. *(Teorema 6.10 din [113]) Fie* $a_i \in C^2([0,1])$ *și* $F \in C^{l+2}([0,1])$. *Are loc următoarea limită:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[K_n^{\tilde{K}}(f,x) - f(x)\right] \tag{5.34}$$
$$= \frac{x(1-x)}{2} D^l F''(x) + (1-2x) D^l F'(x) + \frac{1-2x}{2}\frac{\partial D_y^l F''(x)}{\partial y}|_{y=1}$$
$$-\frac{\partial D_y^l F'(x)}{\partial y}|_{y=1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D_y^l F'(x)}{\partial y^2}|_{y=1},\ f \in C^2([0,1]).$$

Operatori Stancu

Fie $S_n^{\alpha,\beta}$ operatori Bernstein-Stancu definiți astfel:

$$S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right),\ x\,[0,1],\ f \in C([0,1]),$$

cu $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, pentru $0 \le k \le n$, și $\frac{k+\alpha}{n+\beta} \in [0,1],\ 0 \le k \le n$.

Alegem $L_n = S_{n+l}^{\alpha,\beta}$ în construcția noastră, prin urmare:

$$K_n^{S}(f,x) = \left(D^l \circ S_{n+l}^{\alpha,\beta} \circ I^l\right)(f,x) \tag{5.35}$$
$$= \sum_{i=0}^{l} a_i(x) \left(S_{n+l}^{\alpha,\beta}\right)^{(i)}(F,x),\ x \in [0,1],\ f \in C([0,1]).$$

Deoarece rezultatul aproximării simultane este valabil pentru K_n^S, putem enunța următorul rezultat privind aproximarea uniformă, folosind Teorema 5.2.5:

Teorema 5.2.14. *(Teorema 6.12 din [113]) Următoarea convergență*

$$\lim_{n\to\infty} K_n^{S}(f) \to f \tag{5.36}$$

are loc uniform pe $[0,1]$ *și* $f \in C([0,1])$.

Teorema 5.2.15. *Fie* $M_{n,m} = \frac{1}{m!} S_n^{\alpha,\beta}((e_1 - xe_0)^m, x)$*. Atunci*

$$(n+\beta)(m+1)M_{n,m+1}(x) \tag{5.37}$$
$$= x(1-x)\left[M'_{n,m}(x) + mM_{n,m-1}(x)\right] + (\alpha - \beta x)M_{n,m}(x),\ x \in [0,1].$$

Teorema 5.2.16. *(Teorema 6.13 din [113]) Fie* $a_i \in C^2([0,1])$ *și* $F \in C^{l+2}[0,1]$*. Are loc următoarea limită:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[K_n^S(f,x) - f(x)\right] \tag{5.38}$$
$$= \frac{x(1-x)}{2} D^l F''(x) + (\alpha - \beta x) D^l F'(x) + \frac{1-2x}{2} \frac{\partial D_y^l F''(x)}{\partial y}|_{y=1}$$
$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_y^l F'(x)}{\partial y^2}|_{y=1} - \beta \frac{\partial D_y^l F'(x)}{\partial y}|_{y=1},\ x \in [0,1],\ f \in C^2([0,1]).$$

Operatori U_n^ρ

Operatorii U_n^ρ sunt definiți astfel:

$$U_n^\rho(f,x) = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k}^\rho(f)\, p_{n,k}(x),\ f \in C([0,1]),\ x \in [0,1],$$

cu

$$F_{n,k}^\rho(f) = \int_0^1 f(t)\, \mu_{n,k}^\rho(t)\, dt \text{ și}$$
$$\mu_{n,k}^\rho(t)\, dt = \frac{t^{k\rho-1}(1-t)^{(n-k)\rho-1}}{B(k\rho,(n-k)\rho)},$$

unde $B(\cdot,\cdot)$ este funcția Beta a lui Euler și $\rho > 0$.

Considerăm $L_n = U_{n+l}^\rho$ și obținem:

$$UK_n^\rho(f,x) = \left(D^l \circ U_{n+l}^\rho \circ I^l\right)(f,x),\ f \in C([0,1]),\ x \in [0,1]. \tag{5.39}$$

Teorema 5.2.17. *(Teorema 6.16 din [113]) Următoarea convergență*

$$\lim_{n\to\infty} UK_n^\rho(f) \to f \tag{5.40}$$

are loc uniform pe $[0,1]$*,* $f \in C([0,1])$ *și* $\rho \in (0,\infty]$*.*

Teorema 5.2.18. *(Teorema 6.17 din [113]) Fie* $a_i \in C^2([0,1])$ *și* $F \in C^{l+2}([0,1])$*. Are loc următoarea limită:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[UK_n^\rho(f,x) - f(x)\right] \tag{5.41}$$
$$= \frac{\rho+1}{\rho}\left[\frac{x(1-x)}{2} D^l F''(x) + \frac{1-2x}{2} \frac{\partial D_y^l F''(x)}{\partial y}|_{y=1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_y^l F'(x)}{\partial y^2}|_{y=1}\right]. \tag{5.42}$$

unde $x \in [0,1],\ f \in C^2([0,1])$*.*

5.2.5 Nonpositivity of operators

Propoziția 5.2.19. *(Propoziția 7.1 din [113]) Operatorii* K_n^B*,* K_n^D*,* K_n^S*,* $K_n^{\tilde{K}}$ *și* UK_n^ρ *sunt liniari dar nu sunt pozitivi.*

6 Modul de ordinul doi dublu ponderat

În acest capitol introducem un nou modul de netezime de ordinul doi cu două funcții pondere pentru a obține estimări ale ordinului de aproximare a funcțiilor cu creștere rapidă spre infinit, prin operatori liniari pozitivi generali care păstrează polinoame de gradul întâi. Vom da, de asemenea, un exemplu pentru operatorii Szász-Mirakjan. Rezultatele din acest capitol se bazează pe lucrarea: R. Păltănea, **B. I. Vasian**, Modul dublu ponderat, trimisă spre publicare.

Scopul prezentei lucrări este de a oferi rezultate generale de convergență cantitativă pentru aproximarea punctuală prin operatori liniari și pozitivi a funcțiilor pe intervalul $[0,\infty)$ cu o creștere rapidă spre infinit, utilizând un nou modul special de netezime de ordinul doi. De asemenea, vom menționa câteva consecințe pentru aproximarea uniformă pe mulțimi compacte și pentru aproximarea ponderată.

Noul modul pe care îl introducem utilizează două funcții pondere. Prima este $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$, care a fost deja utilizată în construcția modulului Ditzian-Totik pe intervalul $[0,\infty)$. A doua, notată cu Ψ, are rolul de a pondera creșterea funcțiilor la infinit.

Metoda descrisă este una directă și utilizează un șir „canonic" care poate fi atașat unui punct din intervalul $(0,\infty)$, pe care îl vom defini în cele ce urmează. Această metodă a fost utilizată pentru prima dată în estimarea ratei de aproximare prin operatori liniari pozitivi generali în termeni de modul Ditzian-Totik în [47] și dezvoltată în [24, 80].

Exemplificăm rezultatele obținute pentru cazul operatorilor Szász-Mirakjan, în ultima secțiune a acestui capitol.

6.1 Definiții și rezultate de bază

Fie $I=[0,\infty)$ și folosim definițiile spațiilor $\mathcal{F}(I)$, $C(I)$, $C^2(I)$, menționate în preliminarii. Dacă $f\in C(I)$ și $b>0$, notăm $\|f\|_{[0,b]}=\max_{x\in[0,b]}|f(x)|$. Fie $e_i(t)=t^i$, $(t\in I)$, pentru $i=0,1,2,\ldots$ și Π_k, mulțimea polinoamelor de grad cel mult k.

Pentru o funcție $f\in\mathcal{F}(I)$ și trei puncte $0\le a<y<b$, notăm

$$\Delta(f,a,y,b)=\frac{b-y}{b-a}f(a)+\frac{y-a}{b-a}f(b)-f(y). \tag{6.1}$$

Considerăm funcția $\varphi(t)=\sqrt{t}$, $(t\in I)$. Fie $\Psi\in\mathcal{F}(I)$ o funcție crescătoare astfel încât $\Psi(0)>0$.

Definiția 6.1.1. *[87] Pentru $h>0$ și $f\in\mathcal{F}(I)$, fie*

$$\omega_2^{\Psi,\varphi}(f,h)=\sup\left\{\frac{|\Delta(f,a,y,b)|}{\Psi(y)},\ 0\le a<y<b,\ b-a\le 2h\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \tag{6.2}$$

și

$$B^h_{\Psi,\varphi}(I)=\{f\in\mathcal{F}(I),\ \omega_2^{\Psi,\varphi}(f,h)<\infty\}. \tag{6.3}$$

Este ușor de văzut că $\omega_2^{\Psi,\varphi}$ este un modul de ordinul doi pe spațiul $B^h_{\Psi,\varphi}(I)$. Mai mult, dacă $0 < h_1 < h_2$, atunci $B^{h_1}_{\Psi,\varphi}(I) \subset B^{h_2}_{\Psi,\varphi}(I)$.

Lema 6.1.2. *[87] Fie $h > 0$ și funcția $\Theta_h(u) = u + h^2 - h\sqrt{4u + h^2}$, $u \in I$.*

i) Pentru orice $0 \le t < u$ și $h > 0$, condiția $u - t \le 2h\sqrt{\frac{u+t}{2}}$ este echivalentă cu inegalitatea $t \ge \Theta_h(u)$.

ii) Fie $a > 0$ și $\eta \in (0, 1)$. Dacă $h \le (1 - \eta)\sqrt{\frac{a}{2(1+\eta)}}$, atunci $\Theta_h(u) \ge \eta u$, $(u \ge a)$.

Lema 6.1.3. *[87] Fie $\Psi \in \mathcal{F}(I)$ o funcție crescătoare astfel încât $\Psi(0) > 0$. Dacă pentru $f \in C(I)$, există $\eta \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\Psi(\eta x)} = 0, \tag{6.4}$$

atunci

i) oricare ar fi $h > 0$ avem $\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) < \infty$;

ii) avem

$$\lim_{h\to 0+} \omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) = 0. \tag{6.5}$$

Lema 6.1.4. *[87] Fie $\Psi \in \mathcal{F}(I)$ o funcție crescătoare cu $\Psi(0) > 0$. Dacă $f \in C^2(I)$ satisface următoarea condiție: există constantele $M > 0$ și $\eta \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\|f''\|_{[0,x]} \frac{x}{\Psi(\eta x)} \le M, \ (x > 0), \tag{6.6}$$

atunci

$$\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) < \infty, \ (h > 0), \ \textit{and} \ \lim_{h\to 0+} \omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) = 0. \tag{6.7}$$

Exemplul 6.1.5. *[87]* Dacă $f(x) = x^\gamma$, $(x \in I)$, cu $\gamma \ge 2$, și $\Psi(x) = x^\alpha + 1$, $(x \in I)$ cu $\alpha > \gamma - 1$, atunci $\lim_{h\to 0+} \omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) = 0$. Se poate aplica Lema 6.1.4.

Exemplul 6.1.6. *[87]* Dacă $f \in C(I)$ și există $M > 0$, $\gamma > 0$ astfel încât $|f(x)| \le Me^{\gamma x}$, $(x \in I)$, și $\Psi(x) = e^{\alpha x}$, $(x \in I)$, $\alpha > \gamma$, atunci $\lim_{h\to 0+} \omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) = 0$. Se poate aplica Lema 6.1.3.

6.2 Șir canonic atașat unui punct

Pentru a obține estimări cu modulul $\omega_2^{\Psi,\varphi}$ definim noțiunea de șir canonic atașat unui punct $y \in (0, \infty)$ și unui număr $h > 0$, astfel încât $y \ge h^2$, după cum urmează.

Definiția 6.2.1. *[87] Fie $h > 0$ și $y \ge h^2$. Fie $q \ge 1$ astfel încât $y = q^2h^2$. Șirul canonic atașat lui y și h este șirul $(x_j)_{j\ge -2r}$:*

$$0 \le x_{-2r} \le x_{1-2r} < \ldots < x_{-1} < x_0 = y < x_1 < \ldots, \tag{6.8}$$

unde $r = [q]$ (cel mai mare întreg mai mic sau egal cu q) și

$$x_j = \begin{cases} (q + k)^2h^2, & \textit{for } j = 2k, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \ge -r \\ (q + k)(q + k + 1)h^2, & \textit{for } j = 2k + 1, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \ge -r. \end{cases} \tag{6.9}$$

Observația 6.2.2. *[87]*

i) Termenul $x_{-2r-1} \geq 0$ nu este definit deoarece $(q-r-1)(q-r) < 0$.

ii) Pentru $q \in \mathbb{N}$ avem $0 = x_{-2r} = x_{-2r+1} < x_{-2r+2} < \dots$. Pentru $q \notin \mathbb{N}$ avem $0 < x_{-2r} < x_{-2r+1} < \dots$

iii) Avem

$$\begin{aligned} x_{2k+1} - x_{2k} &= h\varphi(x_{2k}), \text{ for } k \geq -r; & (6.10)\\ x_{2k} - x_{2k-1} &= h\varphi(x_{2k}), \text{ for } k \geq -r+1. & (6.11) \end{aligned}$$

Lema 6.2.3. *[87] Are loc*

$$x_{j+1} - x_{j-1} \leq 2h\varphi\left(\frac{x_{j+1} + x_{j-1}}{2}\right), \ \forall j \geq 1 - 2r, \tag{6.12}$$

și în consecință, pentru orice $f \in B^h_{\Psi,\varphi}(I)$

$$|\Delta(f, x_{j-1}, x_j, x_{j+1})| \leq \Psi(x_j)\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h), \ j \geq 1 - 2r. \tag{6.13}$$

Lema 6.2.4. *[87] Fie $h > 0$ și $y = q^2h^2$, cu $q \geq 1$. Fie $f \in B^h_{\Psi,\varphi}(I)$ astfel încât $f(y - h\varphi(y)) = 0$ și $f(y + h\varphi(y)) = 0$. Atunci*

$$|f(u) - f(y)| \leq \Psi(u)\left(1 + \frac{(u-y)^2}{yh^2}\right)\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h), \ \forall u > y + h\varphi(y). \tag{6.14}$$

Lema 6.2.5. *[87] În condițiile Lemei 6.2.4, avem:*

$$|f(t) - f(y)| \leq \Psi(y)\left(1 + 4\frac{(t-y)^2}{yh^2}\right)\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h), \ \forall\, 0 \leq t < y - h\varphi(y), \tag{6.15}$$

(dacă există un astfel de t).

Fixăm $y > 0$, $h > 0$ și $\Psi \in \mathcal{F}(I)$, o funcție crescătoare, astfel îcât $\Psi(0) > 0$. Pentru $f \in B^h_{\Psi,\varphi}(I)$, considerăm funcția:

$$\Lambda_f(s) = \left[\left(1 + \frac{(s-y)^2}{yh^2}\right)\Psi(s) + \left(1 + 4\frac{(s-y)^2}{yh^2}\right)\Psi(y)\right]\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h), \ (s \in I). \tag{6.16}$$

Lema 6.2.6. *[87] În condițiile Lemei 6.2.4 avem*

$$|f(s) - f(y)| \leq (\Psi(s) + \Psi(y))\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h), \ (s \in [y - h\varphi(y), y + h\varphi(y)]). \tag{6.17}$$

Corolar 6.2.7. *[87] În condițiile Lemei 6.2.4 avem*

$$|(u-y)(f(t) - f(y) + (y-t)(f(u) - f(y))| \leq (u-y)\Lambda_f(t) + (y-t)\Lambda_f(u), \tag{6.18}$$

pentru orice $0 \leq t < y < u$.

Lema 6.2.8. *[87] Fie $h > 0$ și $0 < y \leq h^2$. Fie $f \in B^h_{\Psi,\varphi}(I)$ astfel încât $f(0) = 0$ și $f(2h^2) = 0$. Atunci relația (6.18) este satisfăcută pentru toate punctele $0 \leq t < y < u$.*

6.3 Rezultate principale

Pentru a obține rezultatul principal este necesar următorul rezultat general.

Lema 6.3.1. *[87] Fie μ o măsură pozitivă pe intervalul J și fie F o funcțională definită de μ, adică $F(f) = \int_J f(t)d\mu(t)$, $f \in \mathcal{L}_\mu(J)$. Fie y un punct interior lui J. Presupunem că $\Pi_1 \subset \mathcal{L}_\mu(J)$, $F(e_0) = 1$, $F(e_1) = y$ și $F(|e_1 - ye_0|) > 0$. Fie $f \in \mathcal{L}_\mu(J)$ și $\Phi \in \mathcal{L}_\mu(J)$ astfel încât $\Phi \geq 0$ și*

$$|(u-y)(f(t)-f(y))+(y-t)(f(u)-f(y))| \leq (u-y)\Phi(t)+(y-t)\Phi(u), \quad (6.19)$$

pentru orice $t, u \in J$, $t < y < u$. Atunci:

$$|F(f) - f(y)| \leq F(\Phi). \quad (6.20)$$

Observația 6.3.2. În lucrarea [80]-Teorema 2.1.1 este dat un rezultat mai general dar cu o demonstrație diferită.

Amintim că $I = [0, \infty)$. Fixăm o funcție crescătoare $\Psi : I \to (0, \infty)$ și considerăm un șir de operatori liniari și pozitivi $L_n : V \to \mathcal{F}(I)$, de forma

$$L_n(f, y) = \int_{[0,\infty)} f(t)d\mu_{n,y}(t), \ (f \in V, \ y \in I, \ n \in \mathbb{N}), \quad (6.21)$$

unde $\{\mu_{n,y}, \ (n, y) \in \mathbb{N} \times I\}$ este o familie de măsuri pozitive și prin V înțelegem $V = \bigcap_{(n,y)\in\mathbb{N}\times I} \mathcal{L}_{\mu_{n,y}}(I)$. În plus, presupunem că

$$\Pi_2 \subset V, \text{ and } \Psi\Pi_2 \subset V \quad (6.22)$$

$$L_n(e_i) = e_i, \ i = 0, 1, \text{ and } L_n(|e_1 - ye_0|)(y) \neq 0, \text{ for } n \in \mathbb{N}, \ y \in I. \quad (6.23)$$

Mai mult, folosind notațiile din Secțiunea 6.1 putem enunța rezultatul principal.

Teorema 6.3.3. *[87] Dacă $(L_n)_n$ este un șir de operatori liniari și pozitivi de forma (6.21) satisfăcând condițiile (6.22) și (6.23). Atunci pentru orice $f \in B^h_{\Psi,\varphi}(I) \cap V$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in I$ și $h > 0$ avem:*

$$\begin{aligned} |L_n(f, y) - f(y)| \leq & \left[\Psi(y) \left(1 + 4L_n \left(\left(\frac{e_1 - ye_0}{h\varphi(y)} \right)^2, y \right) \right) \right. \\ & \left. + L_n \left(\Psi \cdot \left(e_0 + \left(\frac{e_1 - ye_0}{h\varphi(y)} \right)^2 \right), y \right) \right] \omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h). \end{aligned} \quad (6.24)$$

În cazul particular în care $\Psi(s) = 1$, $(s \in I)$, notăm $\omega_2^{1,\varphi}(f, h)$ simplu prin $\omega_2^{\varphi}(f, h)$ și $B^h_{\Psi,\varphi}(I)$ prin $B^h_{\varphi}(I)$. În acest caz obținem un rezultat mai simplu.

Corolar 6.3.4. *[87] Dacă condițiile Teoremei 6.3.3 sunt satisfăcute, și $\Psi = e_0$, inegalitatea*

$$|L_n(f, y) - f(y)| \ \leq \ \left[2 + 5L_n \left(\left(\frac{e_1 - ye_0}{h\varphi(y)} \right)^2, y \right) \right] \omega_2^{\varphi}(f, h) \quad (6.25)$$

are loc pentru orice $f \in B^h_{\varphi}(I) \cap V$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in I$ și $h > 0$.

Corolar 6.3.5. *[87] Fie $(L_n)_n$ un șir de operatori liniari și pozitivi ca în Teorema 6.3.3. Fie $b > 0$. Presupunem că Ψ este crescătoare, $\Psi(0) = 1$ și $\|L_n(\Psi)\|_{[0,b]} < \infty$. Notăm*

$$h_n^b = \sup_{y \in (0,b]} y^{-1} L_n(\Psi(e_1 - y)^2, y), \ (n \in \mathbb{N}), \tag{6.26}$$

și presupunem că $h_n^b < \infty$. Dacă $f \in V$ satisface condiția $\omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h_n^b) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\|L_n(f) - f\|_{[0,b]} \leq \Big(5\Psi(b) + \|L_n(\Psi)\|_{[0,b]} + 1)\omega_2^{\Psi,\varphi}\Big(f, \sqrt{h_n^b}\Big). \tag{6.27}$$

În consecință, dacă $\lim_{n\to\infty} h_n^b = 0$, oricare ar fi $b > 0$ și $\lim_{h\to 0} \omega_2^{\Psi,\varphi}(f, h) = 0$, atunci $(L_n(f))_n$ este uniform convergentă pe compacte la f.

6.4 Aplicații pentru operatorii Szász-Mirakjan

Operatorii Szász-Mirakjan sunt definiți prin:

$$S_n(f, y) = e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \ (y \in I), \tag{6.28}$$

unde $f \in \mathcal{F}(I)$ este o funcțe pentru care seria este convergentă. Acești operatori pot fi reprezentați folosind o familie de măsuri $\mu_{n,y} = e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \delta_{k/n}$, unde δ_z este măsura Dirac în punctul z.

Observația 6.4.1. *[87]* Dacă $f \in \mathcal{F}(I)$ satisface condiția $|f(y)| \leq Me^{\gamma y}$, $\forall\, y \in I$, unde $M > 0$ și $\gamma > 0$ sunt constante, atunci $S_n(f)(y)$ este bine definit pentru orice $y \in I$ și $n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, folosind inegalitatea $n\left(e^{\frac{\gamma}{n}} - 1\right) \leq e^{\gamma} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, avem

$$e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq Me^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nye^{\frac{\gamma}{n}})^k}{k!} = Me^{ny(e^{\frac{\gamma}{n}}-1)} \leq Me^{(e^{\gamma}-1)y}.$$

Prin urmare seria (6.28) este absolut convergentă.

Notăm $E(I) = \{f \in \mathcal{F}(I),\ \exists M > 0,\ \exists \gamma > 0,\ |f(t)| \leq Me^{\gamma t},\ (t \in I)\}$.

Teorema 6.4.2. *Fie $\Psi(t) = e^{\alpha t}$, $(t \in I)$, $\alpha > 0$. Considerăm funcția*

$$H_\alpha(y) = 5e^{\alpha y} + e^{(e^\alpha - 1)y}(1 + e^\alpha + y(e^\alpha - 1)^2), \ (y \in I). \tag{6.29}$$

Fie $f \in E(I)$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\omega_2^{\Psi,\varphi}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \infty$. Avem:

$$|S_n(f, y) - f(y)| \leq H_\alpha(y)\omega_2^{\Psi,\varphi}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ (y \in I), \tag{6.30}$$

și în consecință, oricare ar fi $b > 0$:

$$\|S_n(f) - f\|_{[0,b]} \leq H_\alpha(b)\omega_2^{\Psi,\varphi}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{6.31}$$

Corolar 6.4.3. *[87] Dacă $f \in E(I)$, atunci șirul $(S_n(f))_n$ este uniform convergent pe compacte la f.*

Mai mult, dacă $f \in C(I)$ satisface $|f(x)| \leq Me^{\gamma x}$, $(x \in I)$, cu $M > 0$, $\gamma > 0$, atunci oricare ar fi $b > 0$ relația (6.31) are loc pentru $n \in \mathbb{N}$, unde $\alpha > \gamma$ și $\Psi(x) = e^{\alpha x}$, $(x \in I)$. În plus $\lim_{n\to\infty} \omega_2^{\Psi,\varphi}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

În cele din urmă considerăm aproximarea ponderată. Pentru $\beta > 0$, fie fucția pondere $\exp_{(-\beta)}(x) = e^{-\beta x}$, $(x \in I)$. Pentru $f \in \mathcal{F}(I)$, notăm

$$\|f\|_{(-\beta)} = \sup_{x \in I} |f(x)| e^{-\beta x}. \tag{6.32}$$

Corolar 6.4.4. *[87] Fie $f \in C(I)$, astfel încât $|f(x)| \leq Me^{\gamma x}$, $(x \in I)$, unde $M > 0$, $\gamma > 0$. Dacă $\beta > \max\{\gamma, e^\gamma - 1\}$, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_{(-\beta)} = 0. \tag{6.33}$$

Mai mult, dacă există α, β, astfel încât $\beta > \max\{\alpha, e^\alpha - 1\}$ și $\alpha > \gamma$, atunci:

$$\|S_n(f) - f\|_{(-\beta)} \leq \sup_{y \in I}(H_\alpha(y) e^{-\beta y}) \omega_2^{\Psi,\varphi}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{6.34}$$

unde $\Psi(x) = e^{\alpha x}$, $(x \in I)$, $\sup_{y\in I}(H_\alpha(y)e^{-\beta y}) < \infty$ și $\lim_{n\to\infty} \omega_2^{\Psi,\varphi}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

7 Conclusions

Rezultatele prezentate în această teză aduc noi contribuții la teoria aproximării.

Am demonstrat utilitatea luării în considerare a operatorilor care nu sunt pozitivi, oferind rezultate de estimare îmbunătățite pe intervalul în care operatorii considerați nu sunt pozitivi.

De asemenea, am introdus o metodă de generare a operatorilor de aproximare de tip Kantorovich definiți folosind un operator diferențial liniar arbitrar cu coeficienți constanți sau neconstanți.

Mai mult, am introdus un nou modul de ordinul doi, care este util în obținerea de estimări ale gradului de aproximare a funcțiilor cu creștere rapidă spre infinit, prin secvențe generale de operatori liniari pozitivi.

În ceea ce privește dezvoltarea ulterioară, această teză deschide noi direcții de cercetare. Una dintre acestea este aproximarea funcțiilor folosind alte clase de operatori care nu sunt pozitivi și cercetarea îmbunătățirilor pe care le pot aduce.

De asemenea, în ceea ce privește modulul introdus, rămâne deschisă problema considerării funcției de ponderare secundară ca fiind convexă în loc să fie crescătoare.

În concluzie, această teză aduce rezultate noi care contribuie semnificativ la teoria aproximării prin operatori liniari pozitivi sau nepozitivi, prin introducerea de metode de lucru și concepte noi.

Bibliografie

[1] T. Acar, M. C. Montano, P. Garrancho, V. Leonessa, On sequences of J. P. King-type operators, Journal of Function Spaces, 2019, (2019).

[2] T. Acar, P. N. Agrawal, T. Neer, Bezier variant of the Bernstein-Durrmeyer type operators, Results in Mathematics 72, (2017), 1341-1358.

[3] T. Acar, A. Aral, V. Gupta, On approximation properties of a new type Bernstein-Durrmeyer operators, Mathematica Slovaca, 65 (5), (2015), 1107-1122.

[4] T. Acar, A. Aral, I. Raşa, Modified Bernstein-Durrmeyer operators, General Mathematics, 22 (1), (2014), 27-41.

[5] T. Acar, Asymptotic formulas for generalized Szász-Mirakyan operators, Applied Mathematics and Computation, 263, (2015), 223-239.

[6] J. A. Adell, J. de la Cal, Bernstein-Durrmeyer operators, Computers & Mathematics with Applications, Volume 30, Issues 36, (1995).

[7] O. Agratini, On simultaneous approximation by Stancu-Bernstein operators in Approximation and Optimization, In : Proceedings of ICAOR Romania, Cluj-Napoca, (1996).

[8] O. Agratini, Linear operators that preserve some test functions, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2006, (2006).

[9] O. Agratini, Aproximare prin operatori liniari, Presa Universitară Clujeană, (2000).

[10] O. Agratini, T. Andrica, Discrete approximation processes of King's type. In: Pardalos, P., Rassias, T., Khan, A. (eds) Nonlinear Analysis and Variational Problems. Springer Optimization and Its Applications, 35, Springer, New York, NY, (2010).

[11] P. N. Agrawal, N. Bhardwaj, P. Bawa, Bézier variant of modified α-Bernstein operators. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 71, (2022), 807-827.

[12] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications. De Gruyter, Berlin 1994.

[13] F. Altomare, Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. Surv. Approx. Theory 5, (2010), 92-164.

[14] O. Aramă, Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor lui S. Bernstein, (Properties concerning the monotony of the sequence of polynomials of S. Bernstein), Studii și cercetări (Cluj), 8 no. 3-4, (1957), 195-210.

[15] V. Barbu, Differential Equations, Translated from the 1985 Romanian original by Liviu Nicolaescu, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, Cham, (2016).

[16] D. Bărbosu, Kantorovich-Stancu type operators. J. Inequal Pure Appl. Math., (2004).

[17] M. Becker, Global approximation theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces. Indiana Univ. Math. J. 27, (1978), 127-142.

[18] S. N. Bernstein, Démonstration du théorém de Weierstrass fondeé sur la calcul desprobabilitiés, Commun. Soc. Math. Charkow Sér 13, (1912), 1-2.

[19] S. N. Bernstein, Complément á l'article de E. Voronovskaya "Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein", C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS A 4, (1932), 86-92.

[20] P. E. Bézier, Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques. Automatisme 13(5), (1968), 189–196.

[21] P. E. Bézier, How renault uses numerical control for car body design and tooling, SAE Paper 680010. Society of Automotive Engineers Congress, Detroit, (1968).

[22] H. Bohman, On approximation of continuous and of analytic functions, Arkiv. Mat. (2)(1), (1952), 43–56.

[23] B. D. Boyanov, V. M. Veselinov, A note of the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 14, (1970), 9-13.

[24] J. Bustamante, Estimates of positive linear operators in terms of second-order moduli. J. Math. Anal. Appl. 345, (2008), 203-212.

[25] J. Bustamante, J.M. Quesada, L. Morales de La Cruz, Direct estimate for positive linear operators in polynomial weighted space. J. Approx. Theory 162, (2010), 1495-1508.

[26] J. Bustamente, Bernstein operators and their properties, Biskhauser, 2017.

[27] P. P. Butzer, H. Berens, Approximation theorems for semi-groups of operators. In: Semi-Groups of Operators and Approximation. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 145, Springer, Berlin, Heidelberg, (1967).

[28] J. Cal, A. M. Valle, A generalization of Bernstein-Kantorovich operators, J. Math. Anal. Appl., 252, (2000).

[29] D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, F. J. Munos-Delgado, Shape preserving approximation by Bernstein-type operators which fix polinomials, Applied Mathematics and Computation, 182, (2006), 1615–1622.

[30] I. Chlodovsky, Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein, Compositio Math., 4, (1937), 380-393.

[31] G. Z. Chang, Generalized Bernstein-Bézier polynomials. J. Comput. Math 1(4), (1983), 322–327.

[32] F. Cheng, On the rate of convergence of Bernstein polynomials of functions of bounded variation. J Approx Theory 39(3), (1983), 259-274.

[33] N. Deo, M. A. Noor, M. A. Siddiqui, On approximation by a class of new Bernstein type operators, Applied Mathematics and Computation, (2008).

[34] M. M. Derriennic, Sur l'approximation de fonctions intégrables sur [0, 1] par des polynômes de Bernstein modifies, Journal of Approximation Theory, (31)(4), (1981), 325-343.

[35] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993.

[36] M. Dhamija, N. Deo , Better approximation results by Bernstein-Kantorovich operators. Lobachevskii J. Math., (2017).

[37] Z. Ditzian, Convergence of sequences of linear positive operators: remarks and applications. J. Approx. Theory 14, (1975), 296-301.

[38] Z. Ditzian, K. Ivanov, Bernstein-type operators and their derivatives, J. Approx. Theory 56, (1989) 72-90.

[39] Z. Ditzian, V. Totik, Moduli of smoothness. Springer, New York 1987.

[40] Z. Ditzian, X. Zhou, Kantorovich-Bernstein polynomials. Constr. Approx., 6, (1991), 421–435.

[41] O. Duman, M. A. Özarslan, MKZ type operators providing a better estimation on [1/2,1), Canadian Mathematical Society, (50)(3), (2007), 434–439.

[42] O. Duman, M. A. Özarslan, Szász-Mirakjan type operators providing a better error estimation, Applied Mathematics Letters, (20)(12) (2007), 1184–1188.

[43] J. L. Durrmeyer, Une formule d'inversion de la transformée de Laplace-applications á la théorie des moments, Thése de 3e cycle, Faculté des Science de l'Université de Paris, (1967).

[44] M. Floater, On the convergence of derivatives of Bernstein approximation, J. Approx. Theory 134, (2005), 130–135.

[45] A. D. Gadzhiev, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that P.P. Korovkin (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 208, (1974), 1001-1004, translated in English in Sov. Math. Dokl. 15, (1974), 1433-1436.

[46] A. D. Gadzhiev, Theorems of Korovkin type. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 20, (1976), 995-998.

[47] I. Gavrea, H. Gonska, R. Păltănea,G. Tachev, General estimates for the Ditzian–Totik modulus. East J. Approx. 9, (2003), 175–194.

[48] I. Gavrea, M. Ivan, A note on the fixed points of positive linear operators, J. Approx. Theory 227, (2018), 27-36.

[49] H. Gonska, P. Pitul, I. Rasa, On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators, in: Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj Napoca, Romania July 5–8, (2006), 55–80.

[50] H. Gonska, M. Heilmann, I. Raşa, Kantorovich operators of order k, Numer. Funct. Anal. Optim. (32)(7), (2011), 717-738.

[51] H. Gonska, R. Păltănea, General Voronovskaya and asymptotic theorems in simultaneous approximation, Mediterr. J. Math. 7, (2010), 37–49.

[52] H. Gonska, R. Păltănea, Simultaneous approximation by a class of Bernstein-Durrmeyer operators preserving linear functions, Czech. Math. J. 60(3), (2010), 783-799.

[53] H. Gonska, P. Pitul, Remarks on a article of J.P. King, Comment. Math. Univ. Carol. 46, (2005), 645-652.

[54] H. Gonska, On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem. Stud Univ Babeș Bolyai Math 52(3), (2007), 103-115.

[55] H. Gonska, I. Rașa, Asymptotic behaviour of differentiated Bernstein polynomials. Mat Vesnik 61(1), (2009), 53-60.

[56] V. Gupta, W. Heping, The rate of convergence of q-Durrmeyer operators for $0 < q < 1$, Math. Meth. Appl. Sci. 31(16), (2008), 1946-1955.

[57] V. Gupta, U. Abel, Rate of convergence of bounded variation functions by a Bézier-Durrmeyer vari- ant of the Baskakov operators. Int. J. Math. Math. Sci. 9 (2004), 459–468.

[58] V. Gupta, G. Tachev, Approximation with positive linear operators and linear combinations, Springer, 2017.

[59] M. Heilmann, I. Raşa, k-th order Kantorovich type modification of the operators U_n^ρ. J. Appl. Funct. Anal. 9(3), (2014), 320-334 .

[60] T. Hermann, Approximation of bounded functions on unbounded interval. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 29, (1977), 393-398.

[61] W. Hoeffding, The L_1 norm of approximation error for Bernstein-type polynomials, J. Approx. Theory 4, (1971), 347-356.

[62] A. Indrea, A. Indrea, O. Pop, A new class of Kantorovich-type operators. CMA. 3(3), (2020), 116-124.

[63] A. Kajla, T. Acar, Modified α-Bernstein operators with better approximation properties, Ann. Funct. Anal. 10 (4), (2019), 570 - 582.

[64] A. Kajla, T. Acar, Bezier-Bernstein-Durrmeyer type operators, RACSAM (Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas), 114(31), (2020).

[65] L. V. Kantorovich, Sur certain developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein, I, II. C. R. Acad. URSS (1930), 563-568.

[66] J. P. King, Positive linear operators which preserve x^2. Acta Math. Hung. 99, (2003), 203-208.

[67] H. B. Knoop, P. Pottinger, Ein Satz vom Korovkin-Typ fur C^k- Raume, Math. Z. 148, (1976), 23-32.

[68] P. P. Korovkin, On convergence of linear positive operators in the space of continous functions, Dokl. 114, (1957), 961-964.

[69] P. P. Korovkin, Linear operators and approximation theory, Fizmatgiz, Moskow, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.

[70] G. G. Lorentz, Bernstein polynomials, 2nd edn. Chelsea, New York, 1986.

[71] D. S. Lubinsky, A survey of weighted polynomial approximation with exponential weights. The European Digital Mathematics Library 3, (2007), 1-105.

[72] A. Lupaș, Die Folge der Betaoperatoren, Dissertation, Universitat Stuttgart, 1972.

[73] N. I. Mahmudov, P. Sabancigil, On genuine q-Bernstein-Durrmeyer operators, Academia, (2009).

[74] D. A. Meleşteu, Generalized Bernstein type operators, Bulletin of the Transilvania University of Braşov, 13(62)(2), (2020).

[75] S. A. Mohiuddine, T. Acar, A. Alotaibi, Construction of a new family of Bernstein-Kantorovich operators, Math Meth Appl Sci. 40(18),(2017), 7749-7759.

[76] B. Mond, Note: On the degree approximation by linear pozitive operators, J. Approx. Theory 18, (1976), 304–306.

[77] T. Neer, A. M. Acu, P. N. Agrawal, Bézier variant of genuine-Durrmeyer type operators based on Pólya distribution, Carpathian J 33(1), (2017), 77-86.

[78] Ç. Nursel, V. A. Radu, Approximation by generalized Bernstein-Stancu operators, Turkish Journal of Mathematics 43(4), (2019), 2032-2048.

[79] P.E. Parvanov, B.D. Popov, The limit case of Bernstein's operators with Jacobi-weights. Math. Balk., 8(2-3), (1994), 165-177 .

[80] R. Păltănea, Approximation theory using positive linear operators. Birkhäuser, Boston 2004.

[81] R. Păltănea, The preservation of the property of the quasiconvexity of higher order by Bernstein, operators, Anal. Numér. Théor. Approx., 25(1-2), (1996), 195-201.

[82] R. Păltănea, Optimal constant in approximation by Bernstein operators, J. Comput. Analysis Appl., Kluwer Academic 5(2), (2003), 195-235.

[83] R. Păltănea, A note on generalized Bernstein-Kantorovich operators, Bulletin of the Transilvania University of Braşov, 6(2), (2013), 27-32.

[84] R. Păltănea, A class of Durrmeyer-type operators preserving linear functions, Ann. Tiberiu Popoviciu Sem. Funct. Equat. Approxim. Convex. (Cluj-Napoca), 5, (2007), 109–117.

[85] R. Păltănea, Sur un operateur polynomial défini sur l'ensemble des fonctions intégrables, Babeş Bolyai Univ., Fac. Math., Res. Semin., 2, (1983), 101-106.

[86] R. Păltănea, M. Smuc, Sharp estimates of asymptotic error of approximation by general positive linear operators in terms of the first and the second moduli of continuity, Results Math 72, (2019).

[87] R. Păltănea, **B. I. Vasian**, *Double weighted modulus*, Results Math, SUBMITTED.

[88] J. Peetre,New thoughts on Besov space. Duke University, Durham, NC, USA 1976.

[89] O. T. Pop, The generalization of Voronovskaja's theorem for a class of liniar and positive operators. Rev. Anal. Numer. Théor. Approx. 34(1), (2005), 79-91.

[90] O. T. Pop, A. D. Indrea, P. I. Braica, Durrmeyer operators of King-type. Ann. Univ. Craiova Math. Comput. Sci. Ser. 39, (2012), 288-298.

[91] T. Popoviciu, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur. Math. Cluj 10, (1935), 49-54.

[92] D. Popa, Voronovskaja type theorems for King type operators. Results Math 75(81), (2020).

[93] M.J.D. Powell, Approximation theory and methods, Cambridge University Press, 1981.

[94] S.D. Riemenschneider, The L_p- saturation of the Bernstein-Kantorovich polynomials, J. Approx. Theory 23, (1978), 158-162.

[95] B. Sendov, V. Popov, The convergence of the derivatives of positive linear operators (in Russian), C.R. Acad. Bulgare Sci. 22 (1969), 507–509.

[96] B. Sendov, V.A. Popov, The averaged moduli of smoothness, Pure and Applied Mathematics, John Wiley& Sons, 1988.

[97] S. Y. Shaw, C. C. Yeh, Rates of approximation of unbounded functions by positive linear operators. J. Approx. Theory 57, (1989), 278-292.

[98] O. Shisha, B. Mond, The degree of convergence of linear positive operators. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 60, (1968),1196-1200.

[99] M. A. Siddiqui, R. R. Agrawal, N. Gupta, On a class of modified new Bernstein operators. Advanced Studies in Contemporary Mathematics 24(1), (2014), 97-107.

[100] P.C Sikkema, Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen, Numerische Math. 3, (1961), 107-116.

[101] D. D. Stancu, Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein. Studia Univ. "Babes-Bolyai", Ser. Math.-Phys. 14(2), (1969), 31-45.

[102] O. Szász, Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. Journal of Research of the National Bureau of Standards 45, (1950).

[103] A.F. Timan, Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963.

[104] V. Totik, V.: Uniform approximation by Szász-Mirakjan type operators. Acta Math. Hung. 41(3-4), (1983), 291-307.

[105] V. Totik, Approximation by Bernstein polynomials, American Journal of Mathematics 116, (1994), 995–1018.

[106] V. Totik, Approximation in L^1 by Kantorovich polynomials,Acta Sci. Math. 46, (1983), 211-222.

[107] V. Totik, Problems and solutions concerning Kantorovich operators, J. Approx. Theory 37, (1983), 51-58.

[108] **B. I. Vasian**, On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa 31(1), (2023).

[109] **B. I. Vasian**, On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense, Dolomites Research Notes on Approximation, 16(3) (2023), 104-117.

[110] **B. I. Vasian**, Ş. L. Garoiu, C. M. Păcurar, On new classes of Stancu-Kantorovich-type operators. Mathematics 9(11), (2021).

[111] **B. I. Vasian**, Approximation properties of some nonpositive Kantorovich type operators, 2022 Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Sel cuk Meeting, (2022), 188-194.

[112] **B. I. Vasian**, Voronovskaja type theorem for some nonpositive Kantorovich type operators, Carpathian Journal of Mathematics 40(1), (2024), 187-194.

[113] **B. I. Vasian**, Generalized Kantorovich operators, General Mathematics 32(2), (2025), 67-83.

[114] E.V. Voronoskaya: D´et´ermination de la forme asymptotique de l'approximation des functions par les polynˆomes de M. Bernstein, C.R. Acad. Sci. URSS, (1932), 79-85.

[115] S. Wigert, Sur l'approximation par polynômes des fonctions continues, Ark. Math. Astr. Fys. 22(B) ,(1932), 1-4.

[116] K. G Weierstrass, U die analytische Darstellbarkeit sogenannter licher Funktionen einer reellen Veranderlichen, Sitzungsber. Akad. Berlin 2, (1885), 633-639.

Lista publicațiilor

1. **B. I. Vasian**, On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa 31(1), (2023).

2. **B. I. Vasian**, On approximation properties of some non-positive Bernstein-Durrmeyer type operators modified in the Bezier-King sense, Dolomites Research Notes on Approximation, 16(3) (2023), 104-117.

3. **B. I. Vasian**, Ş. L. Garoiu, C. M. Păcurar, On new classes of Stancu-Kantorovich-type operators. Mathematics 9(11), (2021).

4. **B. I. Vasian**, Approximation properties of some nonpositive Kantorovich type operators, 2022 Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences: A Sel cuk Meeting, (2022), 188-194.

5. **B. I. Vasian**, Voronovskaja type theorem for some nonpositive Kantorovich type operators, Carpathian Journal of Mathematics 40(1), (2024), 187-194.

6. **B. I. Vasian**, Generalized Kantorovich operators, General Mathematics 32(2), (2025), 67-83.

7. R. Păltănea, **B. I. Vasian**, *Double weighted modulus*, SUBMITTED.