



Universitatea
Transilvania
din Braşov

ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică si Informatică

Iana Mihaela FUDULU

GENERALIZĂRI ALE MEDIILOR TERMOELASTICE

GENERALIZATIONS OF THERMOELASTIC MEDIA

REZUMAT

Conducător științific
Prof. dr. Marin MARIN

BRAŞOV, 2025

Cuprins

Introducere	3
1 Aspecte generale ale mediilor micropolare izotrope	9
1.1 Principiul variațional și dependența continuă	9
1.1.1 Ecuații de bază	9
1.1.2 Formulare alternativă. Teoremă variațională	11
1.1.3 Principiul variațional	12
1.1.4 Dependența continuă	13
1.2 Deformarea plană	16
1.2.1 Soluție pentru ecuațiile de câmp	18
1.2.2 Efectul surselor de căldură și al porilor	19
1.2.3 Deformarea plană a unui spațiu elastic cu o gaură cilindrică	20
1.3 Propagarea undelor cu doi timpi de întârziere	22
1.3.1 Preliminarii	22
1.3.2 O analiză a undelor plane	22
1.3.3 Studiul undelor de forfecare	24
1.3.4 Studiul undelor longitudinale	25
1.3.5 Simulare numerică	29
2 Soluții avansate în mediile micropolare izotrope	33
2.1 Soluții în termeni de potențiali complecși	33
2.1.1 Ecuațiile de câmp	33
2.1.2 Problema deformării plane	34
2.1.3 Potențiali complecși	34
2.1.4 Construcția potențialilor	36
2.1.5 Tensiunile din jurul unei incluziuni circulare	37
2.1.6 Simulare numerică	39
3 Medii micropolare anizotrope	42
3.1 Unicitate și instabilitate în termoelasticitatea cu două temperaturi	42
3.1.1 Problema mixtă cu valori la limită și valori inițiale	42
3.1.2 Rezultatul principal	43
3.2 Unicitate, reciprocitate și principiul variațional	45
3.2.1 Formularea problemei	45
3.2.2 Rezultate de reciprocitate	45

4	Medii dipolare	50
4.1	Unicitate și instabilitate	50
4.1.1	Problema mixtă cu date inițiale și la limită	50
4.1.2	Rezultate principale	51
4.2	Efectul golurilor și al variabilelor de stare internă în elasticitatea mediilor cu structură dipolară	53
4.2.1	Ecuații și condiții de bază	53
4.2.2	Rezultate de bază	55
5	Concluzii finale. Diseminarea rezultatelor de cercetare. Direcții viitoare de cercetare	57
5.0.1	Concluzii finale	57
5.0.2	Diseminarea rezultatelor originale	58
5.0.3	Direcții viitoare de cercetare	59

Introducere

Medii micropolare

În studiului mecanicii mediilor continue, mediile micropolare sunt reprezentate de materialele care iau în considerare efectele microrotațiilor și micromomentelor. Altfel spus, pe lângă deplasările și tensiunile clasice considerate în mediile elastice sau vâscoelastice tradiționale, mediile micropolare iau în considerare și rotațiile mici ale particulelor materiale și momentele care acționează asupra lor. Conceptul de medii micropolare a fost dezvoltat de către frații Cosserat și extinsă ulterior de alți cercetători, în special de profesorul de origine turcă, A. Cemal Eringen. În lucrările sale din anii 1960, Eringen a propus teoria micropolară pentru a descrie comportamentul materialelor ce nu pot fi explicate în mod adecvat prin mecanica clasică a mediilor continue. Eringen a arătat cum teoria micropolară poate fi aplicată în diverse domenii, precum: materiale compozite (fibra de carbon, materiale laminate), materiale granulare (nisip, soluri, praf și pulberi metalice), structuri poroase (spume metalice și polimerice, roci și materiale geologice), biomecanică (osul, cartilajul), cristale lichide și polimeri și nanotehnologie (nanotuburi de carbon, grafen). Fiecare dintre aceste materiale prezintă caracteristici care nu pot fi captate în mod adecvat de modelele clasice de medii continue, justificând astfel necesitatea abordării micropolare.

Medii dipolare

Mediile dipolare în contextul elasticității se referă la materiale în care proprietățile mecanice sunt influențate de momente dipolare interne. Aceasta extinde teoria clasică a elasticității pentru a lua în considerare efectele cauzate de distribuția neuniformă a sarcinilor electrice și momentele dipolare la nivel microscopic. Primii care au realizat studii referitoare la aceste medii sunt Mindlin, Rivlin și Green, precum în [46]. Gradele de libertate ale fiecărui moment corepunzător acestei teorii sunt în număr de doisprezece și cuprind nouă microdeformații și trei translații.

Structura lucrării: În lucrarea prezentă rezultatele originale sunt cuprinse în 4 capitole după cum urmează:

Capitolul I - Aspecte generale ale mediilor micropolare izotrope

Primul capitol al acestei lucrări cuprinde rezultate corespunzătoare mediilor micropolare izotrope și este împărțit în trei secțiuni.

În prima secțiune sunt obținute principiul variațional și dependența continuă pentru un mediu micropolar izotrop și omogen. În acest scop pornim de la o prezentare alternativă a problemei cu date inițiale și la limită, caracterizată de ecuațiile (1.7), (1.8), (1.11), cu condițiile (1.13), (1.14), relații analoge cu cele din [7]-[8], precum și în [10]-[11]. În continuare se obține o teoremă ce oferă o caracterizare alternativă a problemei mixte și mai mult obținem principiul variațional al teoriei poro-termoelastice universale cu un singur parametru de relaxare pentru un mediu micropolar izotrop și omogen. În ultima parte a secțiunii se urmărește obținerea dependenței continue a soluțiilor problemei în raport cu date inițiale și la limită și în raport cu încărcările în contextul prezent.

Scopul secțiunii a II-a este studiul deformării plane al materialelor izotrope

micropolare în teoria echilibrului, unde pe lângă deplasare și temperatura absolută, particulele materialelor menționate prezintă pori și microrotații. Soluția determinată ajută la studiul efectelor surselor de căldură și a porilor asupra deformării corpului. Așadar, utilizând ecuațiile de echilibru (1.56)-(1.59) din [1], obținem soluțiile ecuațiilor de câmp. Ulterior obținem un rezultat ce ajută la studiul efectelor menționate, iar în ultima parte a acestei secțiuni, considerăm o gaură cilindrică într-un spațiu elastic, ce conține, de asemenea, domeniul $B = x : x_1^2 + x_2^2 > r_1^2, x_3 \in \mathbb{R}, (r_1 > 0)$. Obținerea deformării implică determinarea funcțiilor $\theta, \varphi, u_\alpha$ și ϕ_α , mai precis a soluțiilor sistemului format, ce au fost notate cu V, W, Q și U .

Mai multe considerații pot fi găsite în [22-24] și o prezentare mai extinsă în [30].

În secțiunea a III-a, caracteristicile fizice ale corpurilor termomecanice sunt investigate în intervale scurte de timp. Accentul este pus pe transmiterea energiei termice, evoluția de la un singur timp de relaxare la modelul dual cu decalaj de fază (DPL), fiind în mod evident necesară. Așadar, τ_q și τ_θ sunt introduși ca doi timpi de decalare ai modelului analizat, mai exact ele reprezintă caracteristici care presupun realizarea echilibrului termic, precum și existența unor ciocniri între electroni și fotoni. În prima parte a acestei secțiuni se obțin două unde de forfecare, neamortizate în timp și neafectate de porozitate și/sau temperatură. În pasul următor, pornind de la ecuația de dispersie, se obțin cinci unde longitudinale, iar în ultima etapă, mai exact partea numerică, se evidențiază efectele cuplării termoelastice cu microrotații asupra undelor longitudinale.

Este necesar să ținem cont de faptul că, în studiul nostru, relația (1.110) a fost obținută din relația constitutivă pentru un mediu termoelastic micropolar, izotrop și omogen, folosind expansiunea seriei Taylor în raport cu timpul, până la gradul 2. Descrierea efectului porozității asupra elasticității este făcută de Cowin-Nunziano în [13]-[14], iar în [8], [16], [18] este descris răspunsul termic, legat de formularea diferențială de timp a modelului Tzou. Forma soluției (1.114) este în conformitate cu [13].

Studiul propagării undelor cu doi timpi de decalare într-un material termoelastic micropolar poros și izotrop reprezintă atât o evoluție, cât și o sinteză a studiilor anterioare. Câteva rezultate în acest sens pot fi găsite în [35]-[44] și [69].

Capitolul II- Soluții avansate în mediile micropolare izotrope

Acest capitol este dedicat studiului soluțiilor în termeni de potențiali complecși pentru medii Cosserat cu pori. Astfel, primul pas implică determinarea deformării plane în cadrul teoriei echilibrului a corpurilor micropolare, omogene, izotrope cu pori. Folosind ecuațiile constitutive (2.1)-(2.3), ecuațiile geometrice (2.4) și ecuațiile de echilibru, fără forțe masice (2.5)-(2.7) din [1], ne concentrăm pe abordarea problemelor fundamentale cu date la limită ale teoriei deformării plane, vezi și [45]-[47]. Ulterior, obținem o descriere a deplasării, a microrotațiilor și a porilor folosind funcții analitice complexe și două funcții reale, bazate pe ecuațiile omogene Helmholtz, descrise în [4]. În continuare este studiată structura funcțiilor potențiale pentru mai multe domenii de interes și aplicăm metoda variabilelor complexe, fără a introduce funcțiile de stres, pentru rezolvarea problemei Kirsch

[6]. Ultima parte a acestei secțiuni este dedicată studiului numeric, unde sunt obținute graficele corespunzătoare potențialilor complecși și distribuțiile tensiunii și deplasării într-un mediu micropolar izotrop.

Capitolul III - Medii micropolare anizotrope

În prima secțiune a acestui capitol sunt studiate unicitatea și instabilitatea în termoelasticitatea cu două temperaturi. Multe studii dedicate termoelasticității clasice au folosit o ecuație de propagare a căldurii care se bazează pe legea Fourier clasică. În consecință, vectorul fluxului de căldură depinde de gradientul temperaturilor și, prin urmare, semnalele termice se vor propaga cu o viteză infinită. Acest lucru contrazice principiul cauzalității, iar pentru a evita această contradicție au apărut o serie de noi teorii ale termoelasticității care propun diferite alternative la ecuația clasică de conducere a căldurii. Așa au apărut diversele modele, dintre care cele mai cunoscute în literatură sunt Green și Lindsay[31], Lord și Shulman[48], Green și Naghdi[49]-[51], More-Gibson-Thompson[52] sau [53]. În toate aceste modele, undele termice se propagă cu viteze finite și toate rezultatele acestor teorii generalizate sunt mai generale și mai realiste din punctul de vedere al fizicii, decât în teoria clasică. În studiul nostru propunem o nouă variație a temperaturii, care depinde de două temperaturi, prin modificarea relației dintre cele două temperaturi și anume temperatura termodinamică și temperatura conductivă. Există multe studii care țin cont de cele două temperaturi, dintre care amintim [54-57]. Alte generalizări ale ecuației conducției căldurii pot fi găsite în multe articole, dintre care menționăm [58- 60] și [64-68].

Rezultatul nostru de unicitate este obținut presupunând că energia inițială nu este strict pozitivă (energia strict pozitivă contrazice presupunerea că soluțiile coincid). Alte rezultate de unicitate se bazează pe presupunerea că tensorul elastic este unul definit pozitiv. Există însă situații termoelastice concrete în care nu poate fi garantată definirea pozitivă a tensorului elastic.

Rezultatul nostru privind instabilitatea exponențială se obține și din ipoteza că energia inițială nu este strict pozitivă. Trebuie să subliniem că problema noastră mixtă este considerată atât în teoria în care este presupusă dependentă de variația ambelor temperaturi, cât și în teoria în care nu există dependență de variația temperaturii conductoare, ci de variația temperaturii termodinamice. Calculele sunt, însă, destul de asemănătoare în ambele situații, motiv pentru care demonstrațiile se fac în detaliu doar în cazul dependenței de variația temperaturii termodinamice.

În cea de-a II-a secțiune, scopul studiului este reprezentat de formularea problemei mixte cu date inițiale și la limită, în cadrul teoriei termodinamicii mediilor Cosserat și obținerea unor rezultate calitative pentru soluțiile problemei formulate. Unul dintre motivele pentru care teoria mediilor termoelastice Cosserat a captat interesul multor specialiști, a fost că această teorie prezice viteza finită a semnalelor de căldură, așa cum au făcut majoritatea teoriilor neclasice ale termoelasticității. Această teorie, inițiată de frații Cosserat, a introdus o mecanică a solidelor continue bazată pe principiul că fiecare punct al mediului are cele șase grade de libertate, la fel ca un corp rigid. De la apariția acestei teorii, dar mai ales în ultima perioadă, au fost publicate o mulțime de lucrări care scot în evidență

avantajul față de teoria clasică a termoelasticității, dar și importanța sa practică precum în [19-20] sau în [101-113]. Specialiștii apreciază că un compozit fibros natural, cum ar fi osul uman sau osul animal, are un comportament de tensiune și înconvoiere care este mai fidel descris de elasticitatea Cosserat decât de elasticitatea clasică. Rezultatele similare cu cele din această secțiune au fost obținute pentru mediile termoelastice clasice, dintre care menționăm [28], [29] și [114]. În unele situații s-au bazat pe transformata Laplace. În alte lucrări, aceste rezultate au fost posibile datorită reformulării problemei mixte inițiale, respectiv ecuația energiei. Niciuna dintre cele două proceduri nu este utilizată în studiul nostru. Planul acestei secțiuni este următorul: Sintetizăm principalele ecuații și condiții care caracterizează problema mixtă din teoria termodinamicii Cosserat, și anume ecuațiile de mișcare, ecuația energiei, datele inițiale și condițiile la limită. De asemenea, precizăm care sunt condiții de regularitate impuse funcțiilor cu care lucrăm, care permit obținerea rezultatelor propuse, Ulterior formulăm și dovedim principalele rezultate ale studiului nostru. Așadar prezentăm două rezultate ale reciprocității, un rezultat de unicitate și principiul variațional, care extinde principii similare din termoelasticitatea clasică.

Multe studii au fost dedicate mediilor micropolare, dintre acestea menționăm [78-85] și [91].

Capitolul IV - Medii dipolare

În prima secțiune a capitolului III, se obțin rezultate de unicitate și instabilitate, urmând același curs precum în cazul mediilor micropolare. În plus trebuie menționată motivația considerării efectului datorat structurii dipolare. În opinia multor cercetători, se știe că acest efect aduce o contribuție importantă la deformarea mediilor. Este suficient să ne referim la medii care au o structură granulară, de exemplu polimeri, oase umane sau grafit.

Secțiunea a II-a este dedicată efectului golurilor și al variabilelor de stare internă. Motivul pentru care am luat în considerare golurile din material este datorat creșterii semnificative, din ultimii ani, a numărului de studii dedicate teoriei mediilor poroase. Se consideră că lucrarea inițiatoare a acestei teorii este [5]. După cum știm, în această teorie apare un nou grad de libertate, asociat rotației independente a particulelor materiale în jurul centrului lor de masă, pentru o descriere mai complexă a comportării materialelor în ceea ce privește proprietățile mecanice (vezi, spre exemplu [70]-[74]). Importanța mediilor poroase se vede în context geofizic(materiale geologice, de exemplu, roci sau soluri) și în cazul materialelor granulare(obținute artificial). Desigur, primele studii au fost elaborate în cazul liniar, fără a lua în considerare efectul termic(vezi, de exemplu, [73]). Apoi studiile au abordat termoelasticitatea corpurilor cu goluri [75]. Alte lucrări în acest subiect sunt [76-77]. De asemenea în lucrarea noastră luăm în considerare o structură dipolară, cu un caz particular al microrotațiilor care a fost introdusă de Eringen. Ulterior au apărut multe lucrări raportate la medii cu microstructură care au sporit importanța acestei teorii.

Structura dipolară, ca și caz particular al microstructurii, are scopul de a elimina, cel puțin parțial, unele contradicții din teoria elasticității clasice(una, foarte

cunoscută, unde de căldură se propagă cu o viteză infinită). Unii cercetători remarcabili au abordat acest tip de structură și au obținut rezultate concludente, dintre care evidențiem [61-63]. Diferite trăsături ale teoriei generalizate sunt abordate în [53], [59-60] și [84-90].

Motivul studiului efectului variabilelor de stare internă este reprezentat de faptul că în ultimul timp a crescut semnificativ numărul de studii dedicate teoriei mediilor cu variabile interne de stare. Variabilele interne de stare pot fi considerate un mijloc de evaluare al proprietăților mecanice, ale unui corp, dar și multe alte efecte, cum ar fi electrice, magnetice, chimice. Pentru prima dată au fost luate în considerare variabilele interne de stare pentru a descrie evoluția corpurilor vâscoelastice în teoria termoelasticității (Chiriță [23]). Apoi s-a constatat că aceste variabile sunt utile pentru studierea comportamentului și a altor tipuri de materiale. Așadar, în studiul Nachlinger și Nunziato [93], variabilele de stare internă sunt utilizate pentru evoluția deformațiilor finite fără conducție de căldură, pentru un corp unidimensional. Sherburn, Horstemeyer, Bammann și Baumgardner [94] descriu implicațiile așa-numitului material geologic, cum ar fi rocile silicate și altele. În [95] se arată că histerezisul corpurilor, fenomenul prin care un material sau un sistem fizic nu își revine instantaneu la starea inițială după ce a fost supus unei acțiuni externe (de exemplu forțe, câmpuri magnetice sau electrice), poate fi descris cu ajutorul unui set de variabile de tip stare internă. În lucrarea [96] găsim un model pentru un termoplastic amorf utilizând un set de variabile de tip stare internă care motivează această abordare termodinamică. În [97], autorii dezvoltă o teorie elastic-vâscoelastică pentru deformarea sticlei polimerice și metalice. O teorie a gradientului bazată pe variabile de stare este prezentată în [98], și această teorie oferă un cadru consistent și o cuplare puternică pentru a prescrie disiparea, procesul prin care energia se pierde sau se degradează, și stocarea energiei. Pentru unele rezultate privind stările antiplane într-un corp elastic anizotrop și pentru plăci ortotrope sau izotrope, vezi [99-100].

Notății

- Derivata temporală este introdusă printr-un punct situat deasupra unei litere;
- Prin convenție, indicii sunt înțeleși ca având valorile întregi 1, 2 sau 3;
- Regula de însumare cu privire la indicii ce se repetă este dată de convenția de însumare a lui Einstein;
- Pentru derivarea parțială a unei funcții f în ceea ce privește variabilele spațiale x_j , vom folosi notația $f_{,j}$;
- Pentru un domeniu mărginit Ω din spațiul euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, notăm cu $\partial\Omega$ frontiera acestuia și $\bar{\Omega}$ închiderea sa;
- $Ox_i, i = 1, 2, 3$, reprezintă sistemul de axe ortogonale fixat la care se raportează mișcarea corpului;
- Funcțiile ce aparțin clasei de regularitate $C^{\alpha,\beta}$ sunt funcții derivabile de ordin cel mult α în raport cu variabilele de timp și de ordin cel mult β în raport cu variabila spațială.

Mulțumiri

Această lucrare nu ar fi fost posibilă fără sprijinul și îndrumarea unor persoane cărora le sunt profund recunoscătoare. Îi mulțumesc conducătorului meu de doctorat, domnul profesor Marin Marin, pentru suportul oferit pe parcursul întregii cercetări, pentru sfaturile valoroase și pentru încrederea acordată. Expertiza și îndrumarea sa au avut un rol esențial în finalizarea acestei teze.

Apreciez, de asemenea, contribuția tuturor profesorilor și colegilor cu care am avut ocazia să colaborez, ale căror cunoștințe și sugestii au fost de mare ajutor în dezvoltarea mea profesională. Le sunt recunoscătoare domnilor profesori care au contribuit la formarea mea de-a lungul anilor, oferindu-mi nu doar cunoștințe valoroase, ci și îndrumare și inspirație în parcursul meu academic.

Mulțumiri speciale se îndreaptă către Universitatea Transilvania din Brașov, care a susținut această cercetare și mi-a oferit oportunități importante de creștere academică.

Nu în ultimul rând, doresc să le mulțumesc familiei și prietenilor mei pentru răbdarea, sprijinul și încurajarea constantă. Fără susținerea lor necondiționată, acest drum ar fi fost mult mai dificil.

Capitol 1

Aspecte generale ale mediilor micropolare izotrope

1.1 Principiul variațional și dependența continuă

1.1.1 Ecuații de bază

Considerăm un material micropolar izotrop și omogen care ocupă o regiune regulată B în spațiul euclidian tridimensional. Închiderea și frontiera lui B sunt notate prin $\bar{B}$ și ∂B , iar ∂B_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) sunt submulțimi ale frontierei. Conform [2]-[3] și [7], ecuațiile de bază ce descriu evoluția unui mediu termoelastic micropolar izotrop poros definite pe domeniul $\bar{B} \times [0, \infty)$ sunt:

- ecuațiile constitutive:

$$t_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + k(u_{i,j} + \epsilon_{ijk} \phi_k) + \xi \varphi \delta_{ij} - (2\lambda + 2\mu + k) \nu \theta \delta_{i,j}, \quad (1.1)$$

$$m_{ij} = \alpha \phi_{k,k} \delta_{ij} + \gamma \phi_{j,i} + \epsilon \phi_{i,j} + \xi \varphi \delta_{ij}, \quad (1.2)$$

$$g = -\xi u_{k,k} - \psi \phi_{k,k} - a\varphi - b\theta, \quad (1.3)$$

$$h_i = d\varphi_{,i}, \quad (1.4)$$

$$\rho\eta = (3\lambda + 2\mu + k) \nu u_{k,k} - b\varphi + c\theta; \quad (1.5)$$

- ecuațiile de mișcare:

$$t_{ji,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.6)$$

$$m_{ji,j} - \epsilon_{ijk} t_{jk} + \rho G_i = \rho I_{ij} \ddot{\phi}_i; \quad (1.7)$$

- ecuația pentru evoluția gurilor

$$h_{i,i} + g + \rho L = \rho \chi \ddot{\varphi}; \quad (1.8)$$

- ecuații ale căldurii:

$$r\dot{\varrho}_{,i} = k\theta_{,i} - \varrho_i, \quad (1.9)$$

$$k\varphi_{,kk} + a_0\left(1 + r\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[-(3\lambda + 2\mu + k)\nu\dot{u}_{k,k} + b\dot{\varphi} - c\dot{\theta} + \frac{\rho r}{\theta_0}\right] = 0; \quad (1.10)$$

- ecuația energiei:

$$\rho\theta_0\dot{\eta} = \varrho_{i,i} + \rho r; \quad (1.11)$$

și ecuațiile geometrice:

$$e_{ij} = u_{i,j} + \epsilon_{ijk}\phi_k, \quad \chi_{ij} = \phi_{i,j}. \quad (1.12)$$

În ecuațiile anterioare am folosit notațiile prezente în tabelul de mai jos.

Notații	Interpretare fizică
λ, μ	constante Lamé
ν	dilatarea termică liniară
η	entropia pe unitatea de masă
k	conductivitatea termică
$\alpha, \gamma, \epsilon, \xi, \zeta, a, b, c, d, I$	moduli constitutivi
f_i	forța masică
G_i	cuplul masic
L	forța extrinsecă a corpului
r	sursa internă de căldură
χ	coeficientul de inerție
I_{ij}	componentele tensorului microinerție
t_{ij}	componentele tensorului tensiune
m_{ij}	componentele tensorului micromoment
ϱ_i	componentele vectorului de conducție termică
u_i	componentele vectorului deplasare
ϕ_i	componentele vectorului microrotație
φ	modificarea fracției de volum
ρ	densitatea masei
ϵ_{ijk}	tensorul lui Ricci
δ_{ij}	simbolul lui Kronecker

Tabel 1.1: Notații

Pentru a defini problema mixtă, în contextul nostru, avem nevoie de condițiile inițiale în următoarea formă:

$$\begin{aligned} u_i(0, x) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(0, x) = u_i^1(x); \quad \phi_i(0, x) = \phi_i^0(x), \quad \dot{\phi}_i(0, x) = \phi_i^1(x); \\ \varphi(0, x) = \varphi^0(x), \quad \theta(0, x) = \theta^0(x), \quad \varrho_i(0, x) = \varrho_i^0(x); \end{aligned} \quad (1.13)$$

și de condițiile la limită în forma generală:

$$u_i = \tilde{u}_i, \text{ pe } \partial B_1 \times [0, \infty); \quad t_{ij}n_j = \tilde{t}_i \text{ pe } \partial B_1^c \times [0, \infty); \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
\phi_i &= \tilde{\phi}_i \text{ pe } \partial B_2 \times [0, \infty); \quad m_{ij}n_j = \tilde{m}_i \text{ pe } \partial B_2^c \times [0, \infty); \\
\varphi &= \tilde{\varphi} \text{ pe } \partial B_3 \times [0, \infty); \quad h_in_i = \tilde{h} \text{ pe } \partial B_3^c \times [0, \infty); \\
\theta &= \tilde{\theta} \text{ pe } \partial B_4 \times [0, \infty), \quad \varrho_in_i = \tilde{\varrho} \text{ pe } \partial B_4^c \times [0, \infty),
\end{aligned}$$

unde $\partial B_1, \partial B_2, \partial B_3$ și ∂B_4 cu complementele lor $\partial B_1^c, \partial B_2^c, \partial B_3^c$ și ∂B_4^c , sunt submulțimi ale lui ∂B ce satisfac condițiile:

$$\begin{cases} \overline{\partial B_1} \cup \partial B_1^c = \overline{\partial B_2} \cup \partial B_2^c = \overline{\partial B_3} \cup \partial B_3^c = \overline{\partial B_4} \cup \partial B_4^c = \partial B, \\ \partial B_1 \cap \partial B_1^c = \partial B_2 \cap \partial B_2^c = \partial B_3 \cap \partial B_3^c = \partial B_4 \cap \partial B_4^c = \emptyset, \end{cases}$$

iar n_i sunt componente ale normalei exterioare la ∂B .

Numim stare admisibilă, o colecție ordonată de funcții $S = \{u_i, \phi_i, \varphi, e_{ij}, \chi_{ij}, t_{ij}, m_{ij}, h_i, g, \theta\}$, funcții ce satisfac următoarele condiții:

- a) $u_i, \phi_i, \varphi \in C^{1,2}; \quad t_{ij}, m_{ij}, h_{i,i}, g \in C^{1,0}; \quad \theta \in C^{1,0};$
- b) $t_{ij} = t_{ji}, m_{ij} = m_{ji}, e_{ij} = e_{ji}; \chi_{ij} = \chi_{ji}$ pe $\bar{B} \times [0, \infty)$.

Considerăm problema P , cu date inițiale și la limită, ce constă din sistemul de ecuații (1.1)- (1.12), cu condițiile (1.13), (1.14).

1.1.2 Formulare alternativă. Teoremă variațională

În această secțiune prezentăm o alternativă a problemei P cu date inițiale și la limită. Începem prin a defini convoluția corespunzătoare a două funcții de spațiu și timp, după cum urmează:

$$(u * v)(x, t) = \int_0^t u(x, t - \tau)v(x, \tau)d\tau; \quad (x, t) \in \bar{B} \times [0, \infty), \quad (1.15)$$

care are loc pentru orice $x \in B$ și unde u și v sunt definite pe $\bar{B} \times [0, \infty)$ și continue în raport cu $t \in [0, \infty)$. Amintim proprietățile convoluției:

$$u_1 * u_2 = u_2 * u_1, \quad (1.16)$$

$$u_1 * (u_2 + u_3) = (u_1 * u_2) + (u_1 * u_3), \quad (1.17)$$

$$u_1 * (u_2 * u_3) = (u_1 * u_2) * u_3, \quad (1.18)$$

$$u_1 * u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \text{ sau } u_2 = 0. \quad (1.19)$$

Vom considera, în continuare, funcțiile $m(t)$ și $n(t)$ astfel încât

$$m(t) = t \text{ și } p(t) = 1, \quad t \in [0, \infty). \quad (1.20)$$

Mai mult, fixăm următoarele funcții: f_i, g_i, l și ω definite pe $\bar{B} \times [0, \infty)$ după cum urmează:

$$f_i = \rho m * F_i + \rho[tu_i^1(x) + u_i^0(x)], \quad (1.21)$$

$$g_i = \rho m * G_i + I_{ij}[t\phi_i^1(x) + \phi_i^0(x)], \quad (1.22)$$

$$l = \rho m * L + \rho\chi[t\varphi^1(x) + \varphi^0(x)], \quad (1.23)$$

$$\omega = \rho p * r + \rho\theta_0\eta. \quad (1.24)$$

Pentru a obține rezultatele dorite, vom folosi următoarele proprietăți:

$$m * \ddot{w}(x, t) = w(x, t) - [t\dot{w}(x, 0) + w(x, 0)], \quad (1.25)$$

$$p * \dot{w}(x, t) = w(x, t) - w(x, 0), \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} m * \dot{w}(x, t) &= p * (p * \dot{w}(x, t)) = p * [w(x, t) - w(x, 0)] \\ &= p * w(x, t) - tw(x, 0), \end{aligned} \quad (1.27)$$

unde $w(x, t)$ și $\dot{w}(x, t)$ sunt definite pe $\bar{B} \times [0, \infty)$ și sunt continuu diferențiabile pe $[0, \infty)$, precum în [11].

Ținând cont de toate acestea, putem formula următoarea teoremă, ce oferă condițiile necesare și suficiente pentru existența și unicitatea soluției problemei discutate.

Teoremă 1. *Funcțiile $u_i, \phi_i, \varphi, t_{ij}, m_{ij}, \eta, \varrho_i$ verifică relațiile (1.6) - (1.9), (1.11) și condițiile inițiale (1.13) $\Leftrightarrow$ satisfac următorul sistem de ecuații,*

$$\begin{cases} m * t_{ji,j} + f_i = \rho u_i, \\ m * (m_{ji,j} - e_{ijk} t_{jk}) + g_i = I_{ij} \phi_i, \\ m * (h_{i,i} + g) + l = \rho \chi \varphi, \\ p * \varrho_{i,i} + \omega = \rho \theta_0 \eta. \end{cases} \quad (1.28)$$

În baza teoremei 1, putem reformula problema mixtă după cum urmează:

Fie $S = \{u_i, \phi_i, \varphi, \theta, e_{ij}, \psi_{ij}, t_{ij}, m_{ij}, h_i, g, \}$ o stare admisibilă. Spunem că S este o soluție a problemei mixte dacă și numai dacă satisface sistemul (1.28), ecuațiile constitutive, ecuațiile geometrice și condițiile inițiale și la limită.

1.1.3 Principiul variațional

În această secțiune, formulăm principiul variațional în contextul teoriei poro-termoelastice generalizate cu un singur parametru de relaxare pentru un mediu micropolar izotrop și omogen. Pentru a obține formularea variațională, vom lua în considerare teorema 1 și noua formulare a problemei mixte, prezentate în secțiunea anterioară.

Această teoremă introduce funcționala energetică $\Omega_t(s)$, al cărei minim reprezintă condiția de echilibru și stabilitate pentru sistemul fizic considerat.

Teoremă 2. *Fie Σ mulțimea stărilor admisibile. Dacă pentru $\forall S \in \Sigma$ și pentru $\forall t \in [0, \infty)$, definim funcționala $\Omega_t\{S\}$ pe S prin*

$$\begin{aligned}
\Omega_t\{S\} = & \int_B m * [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} * e_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) * e_{ij} + k(u_{i,j} + \epsilon_{ijk} \phi_k) * e_{ij} \\
& + \frac{\xi \delta_{ij}}{b} [\rho \eta - (3\lambda + 2u + k) \nu u_{k,k} - c\theta] * (e_{ij} + \psi_{ij} + \rho \eta \frac{b}{\xi \delta_{ij}})] dB \\
& - \int_B m * [(3\lambda + 2\mu + k) \nu \theta] * (\delta_{ij} e_{ij} - \frac{\theta_{,i}}{\theta} u_i) dB - \int_B m * t_{ij} * e_{ij} dB \\
& - \int_B m * m_{ij} * \psi_{ij} dB - \int_B m * b \varphi * \rho \eta dB + \int_B m * (\alpha \phi_{k,k} \delta_{ij} + \gamma \phi_{j,i} + \epsilon \phi_{i,j}) * \psi_{ij} dB \\
& - \int_B \{m * [(\lambda + \mu) u_{k,ki} + (\mu + \nu) u_{ik,k}] - \rho u_i\} * u_i dB \\
& - \int_B \{m * [(\alpha + \nu) \theta_{k,ki} + \epsilon \phi_{i,kk} - 2k \phi_i] - \rho I_{ij} \phi_i\} * \phi_j dB \\
& - \int_B m * (k \epsilon_{ijk} \phi_{k,j} * u_i - k \epsilon_{ij} u_{j,k} * \phi_j) dB - \int_B m * \xi \varphi_{,i} (u_i + \phi_j) dB \\
& - \int_B m * \rho (\varphi_i * u_i + G_i * \phi_j) dB + \int_B (e_{ij} - u_{i,j} - \epsilon_{ijk} \phi_k) * t_{ij} dB \\
& + \int_B m * (\psi_{ij} - \phi_{i,j}) * m_{ij} dB + \int_B m * (\omega - \rho \theta_0 \eta) * \theta dB \\
& + \int_B m * r * (\varrho_{i,j} * h_{i,i} + g * \varrho_i) dB + \int_B r * (L - \rho \chi \varphi) * \varrho_i dB \\
& - \int_{\partial B_1} m * t_i * \tilde{u}_i dA + \int_{\partial B_1^c} m * (t_i - \tilde{t}_i) * u_i dA - \int_{\partial B_2} m * m_i * \tilde{\phi}_i dA \\
& + \int_{\partial B_2^c} m * (m_i - \tilde{m}_i) * \phi_i dA - \int_{\partial B_3} m * h_i * \tilde{\varphi} dA + \int_{\partial B_3^c} m * (h_i - \tilde{h}_i) * \varphi dA \\
& - \int_{\partial B_4} m * \varrho_i * \tilde{\theta} dA + \int_{\partial B_4^c} m * (\varrho - \tilde{\varrho}) * \theta dA, \tag{1.29}
\end{aligned}$$

atunci

$$\delta \Omega_t\{S\} = 0, t \in [0, \infty), \tag{1.30}$$

dacă și numai dacă S satisface problema mixtă considerată.

1.1.4 Dependența continuă

Pentru obținerea unei forme mai simple a ecuațiilor, s-au folosit parametri adimensionali și, în plus, am folosit câteva notații pentru comoditate. Vom determina în continuare dependența continuă a soluțiilor în raport cu datele inițiale și sarcinile externe.

Fie $Z^\alpha = \{u_i^\alpha; \phi_i^\alpha; \varphi^\alpha \theta^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, două soluții corespunzătoare următoarelor date externe, cu aceleași condiții la limită

$$\Xi^\alpha = \{F_i, G_i, L, r, \tilde{u}_i = 0, \tilde{\phi}_i = 0, \tilde{\varphi} = 0, \tilde{\varphi} = 0, \tilde{t}_i = 0, \tilde{m}_i = 0, \tilde{h}_i = 0,$$

$$\tilde{\varrho}_i = 0, u_i^1, u_i^0, \phi_i^1, \phi_i^0, \varphi^0, \theta^0, \varrho_i^0\}. \quad (1.31)$$

Dacă notăm $u_i = u_i^2 - u_i^1, \phi_i = \phi_i^2 - \phi_i^1, \varphi = \varphi^2 - \varphi^1, \theta = \theta^2 - \theta^1$, atunci $Z = \{u_i, \phi_i, \varphi, \theta\}$ este o soluție a problemei mixte cu date externe:

$$\Xi = \{F_i, G_i, L, r, \tilde{u}_i = 0, \tilde{\phi}_i = 0, \tilde{\varphi} = 0, \tilde{\theta} = 0, \tilde{t}_i = 0, \tilde{m}_i = 0, \tilde{h}_i = 0, \\ \tilde{\varrho}_i = 0, u_i^1, u_i^0, \phi_i^1, \phi_i^0, \varphi^0, \theta^0, \varrho_i^0\},$$

unde

$$f_i = f_i^2 - f_i^1, G_i = G_i^2 - G_i^1, r = r^2 - r^1, u_i^0 = u_i^{0(2)} - u_i^{0(1)}, \phi_i^0 = \phi_i^{0(2)} - \phi_i^{0(1)}, \\ \theta^0 = \theta^{0(2)} - \theta^{0(1)}, \varrho_i^0 = \varrho_i^{0(2)} - \varrho_i^{0(1)}, u_i^1 = u_i^{1(2)} - u_i^{1(1)}, \phi_i^1 = \phi_i^{1(2)} - \phi_i^{1(1)}. \quad (1.32)$$

Notăm această problemă cu Γ și introducem funcția τ pe $[0, t_1]$, astfel încât

$$\tau = \frac{1}{2} \int_B [a_{14} \dot{u}_i \dot{u}_i + a_{14} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j + 2Y] dB, \quad (1.33)$$

unde

$$2Y = a_{14} \lambda_1 \mu_{k,k} e_{ij} \delta_{ij} + 2a_{14} \mu_1 e_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) + a_{14} a_{11} \chi_{ij} \chi_{ij} \\ + a_{14} a_9 \varphi^2 + a_{10} a_{14} \varphi_{,j} \varphi_{,j} + a_{12} a_{14} \phi_{ij} \phi_{ij} + \frac{a_4}{a_{13}} c \theta^2 + \frac{a_4^2}{a_{13}} \theta_{,j} \theta_{,j}. \quad (1.34)$$

Fie Y o formă pătratică în variabilele $e_{ij}, \phi_{i,j}, \varphi$ și θ , astfel încât

$$y_1(e_{ij} e_{ij} + \phi_{i,j} \phi_{i,j} + \varphi^2 + \theta^2) \leq Y \leq y_2(e_{ij} e_{ij} + \phi_{i,j} \phi_{i,j} + \varphi^2 + \theta^2), \quad (1.35)$$

pentru orice t și orice variabile, unde y_1 și y_2 sunt considerate două constante pozitive.

Deducem

$$\dot{Y} = a_{14} t_{ij} \dot{e}_{ij} + a_{14} m_{ij} \dot{\chi}_{ij} + a_{14} \varphi \dot{\varphi} + a_5 \theta \dot{\eta}. \quad (1.36)$$

Prin urmare, din ecuațiile (1.33) și (1.36), deducem:

$$\dot{\tau} = \int_B a_{14} \ddot{u}_i \dot{u}_i + a_{14} \ddot{\phi}_i \dot{\phi}_i + a_{14} t_{ij} \dot{e}_{ij} + a_{14} m_{ij} \dot{\chi}_{ij} + a_{14} \varphi \dot{\varphi} + a_5 \theta \dot{\eta} dB. \quad (1.37)$$

În continuare lema prezentă este o bază pentru demonstrarea următoarei teoreme, asigurând că variația energia corespunzătoare soluției problemei nu crește necontrolat, fiind frânată de forțe externe.

Lemă 1. Fie $\{u_i, \phi_i, \varphi, \theta\}$ o soluție a problemei Γ . Atunci

$$\dot{\tau} \leq \int_B (a_1 a_{14} F_i \dot{u}_i + a_2 a_{14} G_i \dot{\phi}_i + a_{14} a_3 L \varphi + a_5 r \theta) dB. \quad (1.38)$$

Definim acum funcțiile P și Q pe $[0, t_1]$ după cum urmează:

$$P = \left(\int_B [\dot{u}_i \dot{u}_i + \dot{u}_i \dot{\phi}_i + \dot{\phi}_i \dot{\phi}_i + \varphi^2 + \theta^2 + e_{ij} e_{ij} + \chi_{ij} \chi_{ij}] dB \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (1.39)$$

$$Q = \left(\int_B [(a_1 a_{14} F_i)^2 + (a_2 a_{14} G_i)^2 + (a_5 L)^2 + (a_5 r)^2] dB \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.40)$$

Dependența continuă a soluțiilor în raport cu datele inițiale și în raport cu încărcările este implicată de următoarea teoremă.

Teoremă 3. Fie două constante strict pozitive, H_1, H_2 și considerăm $\{u_i, \phi_i, \theta\}$ ca soluție a problemei Γ . Atunci, există constantele σ_1, σ_2 , astfel încât,

$$P(t) \leq \sigma_1 P(0) + \sigma_2 \int_0^t Q(s) ds, \quad t \in [0, t_1]. \quad (1.41)$$

1.2 Deformarea plană

Considerăm un corp, care la un moment dat ocupă regiunea B a spațiului tridimensional euclidian și este mărginit de suprafața netedă ∂B . Fie O_{x_k} , ($k = 1, 2, 3$) un sistem de axe ortogonale la care este raportată mișcarea. Pe lângă ecuațiile ce descriu mediul micropolar izotrop în teoria termoelasticității, prezentate anterior, introducem ecuațiile echilibrului în forme locale:

$$t_{ji,j} + \rho F_i = 0, \quad (1.42)$$

$$m_{ji,j} - \epsilon_{ijk} t_{jk} + \rho G_i = 0, \quad (1.43)$$

$$h_{i,i} + g + \rho L = 0, \quad (1.44)$$

$$q_{i,i} + \rho r = 0. \quad (1.45)$$

Vectorul forță de suprafață t_i , cuplul forță de suprafață m_i , fluxul de căldură q și componenta normală vectorului evoluției golurilor N într-un punct regulat pe ∂B , sunt definite de:

$$t_i = t_{ji} n_j, \quad m_i = m_{ji} n_j, \quad q = q_j n_j, \quad N = h_j n_j. \quad (1.46)$$

Știind că potențialul elastic este o formă pătratică pozitivă, vom considera că modulii elasticității satisfac relațiile impuse de acesta:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \mu > 0, \varepsilon > 0, 3\lambda + 2\mu > 3k. \quad (1.47)$$

În continuare, vom considera regiunea B ca interiorul unui cilindru drept, unde Σ este secțiunea transversală deschisă, Π este suprafață laterală și L este frontiera lui Σ . Alegem sistemului cartezian, astfel încât generatoarele lui B sunt paralele cu axa x_3 .

Să introducem variabilele care descriu deformarea plană a lui B , într-un plan paralel cu planul Ox_1x_2 .

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2), \quad u_3 = 0, \quad \phi_\alpha = \phi_\alpha(x_1, x_2), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2),$$

$$\theta = \theta(x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in \Sigma. \quad (1.48)$$

Din formele locale ale legilor echilibrului, din (1.12) și din (1.2) rezultă că $e_{ij}, \chi_{ij}, t_{ij}, m_{ij}, g, h_i, \rho\eta$ și $r\dot{q}_i$ sunt independente de x_3 .

Tensorii de deformare e_{ij} și χ_{ij} , definiți prin ecuațiile geometrice, capătă forma:

$$e_{\alpha,\beta} = u_{\alpha,\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\rho} \phi_\rho, \quad \chi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha,\beta}. \quad (1.49)$$

Variabilele constitutive nenule sunt $t_{\alpha\beta}, t_{33}, m_{\alpha\beta}, h_{\alpha}, r\dot{q}_{\alpha}$. Mai mult:

$$t_{\alpha\beta} = \lambda u_{\rho,\rho} \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + k u_{\alpha,\beta} \phi_{\rho} + \xi \varphi \delta_{\alpha\beta} - (2\lambda + 2\mu + k) \nu \theta \delta_{\alpha\beta} \quad (1.50)$$

$$m_{\alpha\beta} = -\alpha \phi_{\rho,\rho} \delta_{\alpha\beta} - \gamma \phi_{\beta,\alpha} + \epsilon_{\alpha,\beta} + \xi \varphi \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.51)$$

$$g = -\xi u_{\alpha,\alpha} - \psi \phi_{\alpha,\alpha} - a\varphi - b\theta, \quad (1.52)$$

$$h_{\alpha} = d\varphi_{,\alpha}, \quad (1.53)$$

$$\rho\eta = (3\lambda + 2\mu + k) \sigma u_{\alpha,\alpha} - b\varphi + c\theta, \quad (1.54)$$

$$\dot{q}_{\alpha} = k\theta_{\alpha} - q_{\alpha}. \quad (1.55)$$

Prin urmare, vom considera că încărcările corpului sunt independente de x_3 , și $f_3 = 0$. Așadar, ecuațiile echilibrului se reduc la:

$$t_{\alpha\beta,\beta} + \rho f_{\alpha} = 0, \quad (1.56)$$

$$m_{\alpha\beta,\beta} + \rho G_{\alpha} = 0, \quad (1.57)$$

$$h_{\alpha,\alpha} + g + \rho L = 0, \quad (1.58)$$

$$q_{\alpha,\alpha} + \rho S = 0. \quad (1.59)$$

Relațiile (1.46), într-un punct regulat a lui Π , devin:

$$t_{\alpha} = t_{\beta\alpha} n_{\beta}, \quad m_{\alpha} = m_{\beta\alpha} n_{\beta}, \quad t_3 = 0, \quad q = q_{\alpha} n_{\alpha}, \quad N_i = h_{\beta i} n_{\beta}, \quad pe \ L, \quad (1.60)$$

unde, $n_{\alpha} = \cos(n_x, x_{\alpha})$ și unde am notat cu n_x vectorul unitate al normalei exterioare la L .

Conform ecuațiilor geometrice, a ecuațiilor constitutive și a ecuațiilor de echilibru, este necesară verificarea condițiilor la limită. În cazul primei probleme, condițiile la limită sunt:

$$u_{\alpha} = \tilde{u}_{\alpha}, \quad \phi_{\alpha} = \tilde{\phi}_{\alpha}, \quad \theta = \tilde{\theta}, \quad \varphi = \tilde{\varphi} \quad pe \ L, \quad (1.61)$$

unde $\tilde{u}_{\alpha}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{\theta}$ și $\tilde{\varphi}$ sunt funcții prescrise. În cazul celei de-a doua problemă, condițiile la limită sunt:

$$t_{\beta\alpha} n_{\beta} = \tilde{t}_{\alpha}, \quad m_{\beta\alpha} n_{\beta} = \tilde{m}_{\alpha}, \quad \tilde{q} = q_{\beta} n_{\beta}, \quad h_{\alpha i} n_{\alpha} = \tilde{N}_i, \quad pe \ L, \quad (1.62)$$

unde funcțiile date $\tilde{t}_{\alpha}$, $\tilde{m}_{\alpha}$, $\tilde{q}$ și $\tilde{N}_j$ sunt independente de x_3 .

Din (1.49)-(1.59), se poate deduce că $u_{\alpha}, \phi_{\alpha}, \theta$, și φ satisfac ecuațiile:

$$(\lambda + \mu) u_{\rho,\rho\alpha} + (\mu + k) u_{\alpha,\rho\rho} + \xi \varphi_{,\alpha} - (3\lambda + 2\mu + k) \sigma \theta_{,\alpha} = -\rho f_{\alpha}, \quad (1.63)$$

$$(\alpha + \gamma) \phi_{\rho,\rho\alpha} + \epsilon \phi_{\alpha,\rho\rho} + \zeta \varphi_{,\alpha} - 2k \phi_{\alpha} = -\rho G_{\alpha}, \quad (1.64)$$

$$k \Delta \theta = -\rho S, \quad (1.65)$$

$$d\varphi_{,\rho\rho} - \xi u_{\rho,\rho} - \zeta \phi_{\rho,\rho} - a\varphi - b\theta = -\rho L, \quad pe \ \Sigma. \quad (1.66)$$

Prima problemă la limită, implică găsirea funcțiilor $u_{\alpha}, \phi_{\alpha}, \theta$, și φ ce satisfac ecuațiile de mai sus, pe Σ și condițiile la limită (1.61). Evident, din ecuațiile constitutive și din (1.47), putem exprima condițiile la limită în funcție de $u_{\alpha}, \phi_{\alpha}, \theta, \varphi$.

În cazul echilibrului, împărțim această problemă în două, prima implicând găsirea funcțiilor θ și ϕ_α și a doua a funcțiilor u_α și φ . Presupunem, în această secțiune, că:

$$k > 0, d_2 > 0, d_6 > 0, kd_2 - d_1d_3 > 0, d_4 + d_5 + d_6 > 0. \quad (1.67)$$

Este important de notat că restricțiile impuse de inegalitatea lui Clausius-Duhem asupra coeficienților constitutivi, (Grof, 1969), au fost luate în considerare în obținerea condițiilor de mai sus.

1.2.1 Soluție pentru ecuațiile de câmp

Începem prin a introduce câteva notații, precum:

$$c_1 = \lambda + 2\mu + k, \quad (1.68)$$

$$c_2 = d + \frac{-a + d_2}{\Delta}, \quad (1.69)$$

$$m_1 = \left(\frac{2k}{h}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ unde } h = \alpha + \gamma + \varepsilon, \quad (1.70)$$

$$m_2 = \left(d_2/c_2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.71)$$

$$m_3 = \left(\frac{a}{d_6} + \Delta\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.72)$$

$$\kappa_1 = -c_2(3\lambda + 2\mu + k)\sigma - c_1b\zeta, \quad (1.73)$$

$$\kappa_2 = -c_2(3\lambda + 2\mu + k), \quad (1.74)$$

$$\kappa_3 = 0. \quad (1.75)$$

Luând în considerare aceste notații rezultă din (1.47) și din (1.67) că m_1^2, m_2^2 , și $m_3^2 > 0$. Introducem operatorii:

$$C_1 = c_1h\Delta(\Delta - m_1^2), \quad (1.76)$$

$$C_2 = kc_2\Delta(\Delta - m_2^2), \quad (1.77)$$

$$C_3 = d_6(\Delta - m_3^2), \quad (1.78)$$

$$B_1 = hc_1(\lambda + \mu)(\Delta - m_1^2), \quad (1.79)$$

$$B_2 = h\sigma c_1(3\lambda + 2\mu + k)(\Delta - m_1^2)(c_2\Delta - d_2), \quad (1.80)$$

$$B_3 = 0. \quad (1.81)$$

Următoarea teoremă ne dă o soluție a sistemului de ecuații corespunzător mediului.

Teoremă 4. *Considerăm funcțiile*

$$u_\alpha = -c_1C_1\Gamma_\alpha + B_1\Gamma_{\rho,\rho\alpha} - B_2f_{,\alpha} - C_3B_3g_{\rho,\rho\alpha}, \quad (1.82)$$

$$\phi_\alpha = c_1^2\mu\Delta\psi_\alpha + c_1(\kappa_1\Delta - \kappa_2)\Delta l_\alpha + k\zeta c_1C_1\Delta\Delta C_3g_{\rho,\rho\alpha}, \quad (1.83)$$

$$\theta = -c_1(c_2\Delta - d_2)C_1l, \quad (1.84)$$

$$\varphi = c_1C_1C_2g - c_1[k(d_4 - d_5)\Delta C_1g_{\rho,\rho} - c_1d_3C_1l]. \quad (1.85)$$

Dacă $\Gamma_\alpha, \psi_\alpha \in C^6(\Sigma), l \in C^8(\Sigma)$, și $g \in C^{10}(\Sigma)$, satisfac ecuațiile:

$$(\mu + k)\Delta c_1 C_1 \Gamma_\alpha = \rho F_\alpha; \quad (1.86)$$

$$\mu c_1 C_1 \psi_\alpha = \rho G_\alpha; \quad (1.87)$$

$$c_1 C_1 C_2 l = \rho S; \quad (1.88)$$

$$c_1 C_1 C_2 C_3 g = -\rho L, \quad (1.89)$$

atunci $u_\alpha, \phi_\alpha, \theta$ și φ satisfac (1.63)-(1.66).

1.2.2 Efectul surselor de căldură și al porilor

În scopul studierii influențelor surselor de căldură și ale porilor asupra deformării, vom folosi soluția obținută în teorema prezentată în secțiunea anterioară.

Presupunem că

$$\rho F_\alpha = 0, \rho G_\alpha = 0, \rho S = \delta(x - y), \rho L = 0.$$

unde $y(y_\alpha)$ este un punct fixat, iar δ este distribuția lui Dirac.

În acest caz, relațiile (1.86)-(1.89) sunt satisfăcute, dacă considerăm

$$\Gamma_\alpha = 0, \psi_\alpha = 0, l = \omega \text{ și } g = 0.$$

Funcția ω este o soluție a ecuației:

$$\Delta \Delta (\Delta - m_1^2) (\Delta - m_2^2) \omega = \gamma \delta(x - y), \quad (1.90)$$

unde am folosit notația γ pentru $(\varepsilon k c_1^2 c_2)^{-1}$.

Înlocuind $\Gamma_\alpha = 0, \psi_\alpha = 0, l = \omega$ și $g = 0$ în relațiile (1.86)-(1.89) obținem funcțiile $u_\alpha^{(1)}(x, y), \phi_\alpha^{(1)}(x, y), \theta^{(1)}(x, y)$ și $\varphi^{(1)}(x, y)$. Prin urmare,

$$u_\alpha^{(1)}(x, y) = -B_2 \omega_\alpha; \quad (1.91)$$

$$\phi_\alpha^{(1)}(x, y) = c_1 (\kappa_1 \Delta - \kappa_2) \Delta \omega_\alpha; \quad (1.92)$$

$$\theta^{(1)}(x, y) = -c_1 (c_2 \Delta - d_2) C_1 \omega; \quad (1.93)$$

$$\varphi^{(1)}(x, y) = -c_1 b C_1 \omega. \quad (1.94)$$

În continuare, vom avea următoarele ipoteze:

$$* \quad m_1, m_2, m_3 \text{ sunt distincte,}$$

$$* \quad \omega_s, (s = 1, 2, 3, 4), \text{ funcții ce satisfac următoarele ecuații :}$$

$$\Delta \omega_1 = M, \Delta \Delta \omega_2 = M, (\Delta - m_1^2) \omega_3 = M, (\Delta - m_2^2) \omega_4 = M, \text{ unde } M \text{ este o funcție dată.}$$

Prin urmare, putem formula soluția ecuației

$$\Delta \Delta (\Delta - m_1^2) (\Delta - m_2^2) \omega = M,$$

după cum urmează:

$$\omega = \sum_{s=1}^4 z_s \omega_s,$$

unde, constantele z_s , ($s = 1, 2, 3, 4$), sunt date de:

$$z_1 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^4 m_2^4}, \quad z_2 = \frac{1}{m_1^2 m_2^2}, \quad z_3 = \frac{1}{m_1^4 (m_1^2 - m_2^2)}, \quad z_4 = -\frac{1}{m_2^4 (m_1^2 - m_2^2)}. \quad (1.95)$$

Pentru $M = \delta(x - y)$, funcțiile ω_s , ($s = 1, 2, 3, 4$) sunt date de:

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \ln r, \quad \omega_2 = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2\pi} K_0(m_1 r), \quad \omega_4 = -\frac{1}{2\pi} K_0(m_2 r),$$

$$r = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.96)$$

unde am folosit notația K_0 pentru funcția modificată Bessel de ordin 0. Astfel, pentru ecuația (1.90), avem următoarea soluție:

$$\omega = \frac{\gamma}{2\pi} [z_1 \ln r + \frac{1}{4} z_2 r^2 \ln r - z_3 K_0(m_1 r) - z_4 K_0(m_2 r)]. \quad (1.97)$$

Funcțiile $u_\alpha^{(1)}$ și $\phi_\alpha^{(1)}$ reprezintă deplasarea și microrotația. În ceea ce urmează, vom studia efectul porilor. Astfel, presupunem că

$$\rho F_\alpha = 0, \quad \rho G_\alpha = 0, \quad \rho S = 0, \quad \rho L = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - y),$$

unde β este fixat. Așadar, vom avea $\Gamma_\alpha = 0, \psi_\alpha = 0, l = 0$ și $g = \delta_{\alpha\beta} \Omega$. În acest caz, din (1.86)-(1.89), rezultă că Ω este soluție a următoarei ecuații:

$$\Delta \Delta (\Delta - m_1^2) (\Delta - m_2^2) (\Delta - m_3^2) \Omega = \gamma_1 \delta(x - y), \quad (1.98)$$

unde $\gamma_1 = (k \varepsilon d_6 c_1^2 c_2)^{-1}$. Prin urmare, obținem din relațiile (1.86)-(1.89), funcțiile:

$$u_\alpha^{(1+\beta)}(x, y), \quad \phi_\alpha^{(1+\beta)}(x, y), \quad \theta^{(1+\beta)}(x, y), \quad \varphi^{(1+\beta)}(x, y).$$

1.2.3 Deformarea plană a unui spațiu elastic cu o gaură cilindrică

Considerăm un spațiu elastic cu o gaură cilindrică. Presupunem că domeniul $B = \{x : x_1^2 + x_2^2 > r_1^2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, ($r_1 > 0$), este ocupat de un material elastic cu microstructură. Acest material va suferi o deformare plană paralelă cu planul $Ox_1 x_2$. Cunoscând acestea, domeniul Σ este definit de $\Sigma = \{x : x_1^2 + x_2^2 > r_1^2, x_3 = 0\}$. Mai mult, vom presupune că încărcările corpului sunt absente și suprafața incluziunii circulare este lipsită de forțe de suprafață.

Problema pe care o vom studia implică determinarea funcțiilor $\theta, \varphi, u_\alpha$ și ϕ_α , care trebuie să satisfacă următoarele ecuații:

$$(\lambda + \mu) u_{\rho, \rho\alpha} + (\mu + k) u_{\alpha, \rho\rho} + \xi \varphi_{, \alpha} - (3\lambda + 2\mu + k) \sigma \theta_{, \alpha} = 0, \quad (1.99)$$

$$(\alpha + \gamma) \phi_{\rho, \rho\alpha} + \varepsilon \phi_{\alpha, \rho\rho} + \zeta \varphi_{, \alpha} - 2k \phi_\alpha = 0, \quad (1.100)$$

$$k \Delta \theta = 0, \quad (1.101)$$

$$d\varphi_{, \rho\rho} - \xi u_{\rho, \rho} - \zeta \phi_{\rho, \rho} - a\varphi - b\theta = 0, \quad \text{pe } \Sigma. \quad (1.102)$$

Considerăm că soluția are forma

$$\theta = V(r), \varphi = W(r), u_\alpha = x_\alpha U(r) \text{ și } \phi_\alpha = x_\alpha Q(r),$$

unde $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Prin urmare, ele trebuie să satisfacă ecuațiile:

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu)x_\alpha r^2 U + (\mu + k)x_\alpha r^2 U + \xi r W \\ &-(3\lambda + 2\mu + k)\sigma r V = 0, \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$(\alpha + \gamma - 2\kappa)x_\alpha r^2 Q + \varepsilon x_\alpha r^2 Q + \zeta r W = 0, \quad (1.104)$$

$$k\Delta V = 0, \quad (1.105)$$

$$dr^2 W - \xi x_\alpha r U - \zeta x_\alpha r Q - aW - bV = 0, \quad \text{pe } \Sigma. \quad (1.106)$$

Prin rezolvarea sistemului precedent obținem următoarele forme pentru V, W și Q :

$$V = C_1 + B_1 \ln r, \quad (1.107)$$

$$\tau_3 x_\alpha r Q = \frac{\tau_4}{m_1^2} W - \tau_4 C_2 - \tau_4 B_2 \ln r, \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} W = \tau_1 \left(\frac{C_1 + B_1 \ln r}{m_1^2} - B_1 \Delta \ln r \right) + \tau_4 \left(\frac{C_2 + B_2 \ln r}{m_1^2} - B_2 \Delta \ln r \right) \\ - \frac{\tau_2}{m_1^2} N_1 + N_3 k_0(m, r). \end{aligned} \quad (1.109)$$

Funcția U , este determinată imediat prin înlocuirea funcțiilor V, W și Q în relația corespunzătoare.

1.3 Propagarea undelor cu doi timpi de întârziere

1.3.1 Preliminarii

Un continuum termoelastic micropolar liniar, izotrop și omogen cu pori ocupă o regiune destul de regulată B a spațiului euclidian tridimensional, iar evoluția sa termodinamică este guvernată de existența a doi timpi de întârziere (τ_q și τ_θ).

În următoarea ecuație am folosit dezvoltarea în serie Taylor până la ordinul doi pentru modelul termic cu dublă întârziere de fază.

$$q_r + \tau_q \dot{q}_r + (\tau_q^2) \ddot{q}_r = k\theta_{,r} + \tau_\theta k \dot{\theta}_{,r} \text{ în } \bar{B} \times [0, \infty). \quad (1.110)$$

În ceea ce privește timpii de întârziere, folosind (1.110) și adăugând a doua lege a termodinamicii obținem (ca în [12]):

$$0 < \tau_q \leq 2\tau_\theta. \quad (1.111)$$

Vom presupune că în ecuațiile de mișcare cuplul masic și respectiv forța masică sunt nule. Este important de reținut faptul că modulii constitutivi:

$$\lambda, \mu, a, b, d, \xi, \alpha, \epsilon, \gamma,$$

verifică următoarele condiții:

$$\rho > 0, \mu > 0, (\kappa + 2\mu)a > \xi^2, d > 0, a > 0, b > 0. \quad (1.112)$$

Prin înlocuirea ecuațiilor constitutive și a ecuațiilor geometrice în (1.7)-(1.9) obținem ecuațiile prezente în sistemul următor, în variabilele: $u(x, t), \phi(x, t), \varphi(x, t), \theta(x, t)$,

$$\begin{cases} (\mu + \kappa)u_{j,kj} + \lambda u_{k,kj} + \mu u_{k,jj} + \xi \varphi_{,k} - (3\lambda + 2\mu + \kappa)\sigma \theta_{,k} + gF_k = \rho \ddot{u}_k, \\ \alpha \phi_{j,jk} + \gamma \phi_{k,jj} + c \phi_{j,kj} + \psi \varphi_{,k} + \rho G_k = \rho I_{kj} \ddot{\phi}_k, \\ d \varphi_{,kk} - \xi u_{k,k} - \psi \phi_{k,k} - a \varphi - b \theta + \rho L = \rho \tau \ddot{\varphi}, \\ \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left[(3\lambda + 2\mu + \kappa)\sigma \dot{u}_{k,k} \theta_0 - b \dot{\varphi} \theta_0 + c \theta_0 \dot{\theta} - \rho r\right] = k \theta_{,kk} + \tau_\theta \dot{\theta}_{,kk}. \end{cases} \quad (1.113)$$

Din analiza ecuațiilor (1.113) se vede că deformarea mecanică este influențată de efectul termic și de structura poroasă.

1.3.2 O analiză a undelor plane

Menționăm că pentru a avea procesele termoelastice ireversibile trebuie luată în considerare și disiparea temperaturii.

Pentru început vom presupune că încărcările: F_k, G_k, L și r sunt nule. Căutăm soluții pentru sistemul (1.113) sub forma următoare:

$$\begin{cases} u_r(x, t) = Re\left\{\frac{i}{\chi}A_re^{i\chi\sin(x_sn_s-\nu t)}\right\}, \\ \Phi_r(x, t) = Re\left\{\frac{i}{\chi}B_re^{i\chi\sin(x_sn_s-\nu t)}\right\}, \\ \varphi(x, t) = Re\{Ce^{i\chi\sin(x_sn_s-\nu t)}\}, \\ \theta(x, t) = Re\{D\theta_0e^{i\chi\sin(x_sn_s-\nu t)}\}, \end{cases} \quad (1.114)$$

unde $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |C| + |D| \neq 0$, iar A_r, B_r reprezintă componentele a doi vectori complecși constanți A , respectiv B , în timp ce C și D sunt constante complexe, iar $i^2 = -1$ este unitatea imaginară.

Unda se propagă în direcția vectorului normală n , iar numărul de undă este χ . Presupunem $\nu \in \mathbb{C}$, așadar:

$$\nu = Re(\nu) + iIm(\nu), \quad (1.115)$$

unde partea reală indică viteza de propagare a undei, în timp ce partea imaginară indică amortizarea în timp.

Ulterior vom folosi notațiile:

$$\psi(\nu) = 1 - ir\nu\chi, \quad (1.116)$$

$$\nu = ic_2w,$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, c_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}.$$

Având în vedere (1.115) și notația de mai sus, impunem următoarele restricții $Re(w) \leq 0, Im(w) \leq 0$, și obținem:

$$(1 + w^2)A_k + \left[\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 1 \right) A_j n_j + \frac{c_3^2}{c_2^2} A_k n_j - \frac{\xi}{\rho c_2^2} C + \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \sigma D \theta_0 \right] n_k = 0, \quad (1.117)$$

iar

$$\begin{cases} \left(w^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) A_k n_k - \frac{\xi}{\rho c_2^2} C + \theta_0 \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \sigma D = 0, \\ (\gamma + \alpha + \epsilon + \rho I_{kj} c_2^2 w^2) B_k n_k - \xi C = 0, \\ -\frac{\xi}{\chi^2} A_k n_k - \frac{\psi}{\chi^2} B_k n_k + \left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 w^2 \right) C + \frac{b}{\chi^2} \theta_0 D = 0, \\ -\frac{c_2 w \sigma \rho (3c_3^2 + c_1^2)}{\chi} \psi(w) A_k n_k - \frac{bc_2 w}{\chi} \psi(w) C + \left[k(1 + \tau \theta \chi c_2 w) + \frac{cc_2 w \theta_0}{\chi} \psi(w) \right] D = 0, \end{cases} \quad (1.118)$$

unde

$$\psi(w) = 1 + \tau_q \chi c_2 w + \frac{\tau_q^2}{2} \chi^2 c_2^2 w^2. \quad (1.119)$$

1.3.3 Studiul undelor de forfecare

Pentru studiul soluțiilor undelor de forfecare (unde transversale, ce apar în urma forfecării periodice a unui mediu elastic), este necesar să considerăm că $A_k n_k = 0, B_k n_k = 0$, cu $(A_1, A_2, A_3) \neq 0$ și $(B_1, B_2, B_3) \neq 0$, de unde deducem că (1.117) și (1.118) devin:

$$(1 + w^2)A_k + \left[-\frac{\xi}{\rho c_2^2} C + \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \sigma D \theta_0 \right] n_k = 0, \quad (1.120)$$

$$\begin{cases} -\frac{\xi}{\rho c_2^2} C + \theta_0 \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \sigma D = 0, \\ -\xi C = 0, \\ \left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 w^2 \right) C + \frac{b}{\chi^2} \theta_0 D = 0, \\ -\frac{bc_2 w}{\chi} \psi(w) C + \left[k(1 + \tau \theta \chi c_2 w) + \frac{cc_2 w \theta_0}{\chi} \psi(w) \right] D = 0. \end{cases} \quad (1.121)$$

Observăm în continuare că de aici se deduce următoarea egalitate.

$$(1 + w^2)A_k = 0. \quad (1.122)$$

Din relația (1.122), folosind $Re(w) \leq 0, Im(w) \leq 0$ deducem că

$$w = w_5 \equiv -i, \text{ adică } \nu = \nu_5 \equiv c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.123)$$

Prin urmare c_2 , viteza de propagare a undelor, este ca în teoria clasică. Mai mult, sistemul de mai sus admite doar soluția banală $C = 0$ și $D = 0$, deoarece

$$\text{rang} \begin{pmatrix} -\frac{\xi}{\rho c_2^2} & \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \sigma \theta_0 \\ -\xi & 0 \\ d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 & \frac{b}{\chi^2} \theta_0 \\ \frac{ibc_2}{\chi} \psi(-i) & k(1 + \tau \theta \chi c_2(-i)) + \frac{cc_2 \theta_0}{\chi} \psi(-i) \end{pmatrix} = 2. \quad (1.124)$$

În continuare vom considera un minor de ordin doi corespunzător matricei de mai sus și vom presupune că acesta este zero. Așadar avem:

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} -\frac{\xi}{\rho c_2^2} & \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \sigma \theta_0 \\ -\xi & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde obținem : } \xi \sigma \theta_0 \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} = 0, \text{ ceea ce implică}$$

$$\xi = 0 \text{ or } 3c_3^2 + c_1^2 = 0.$$

În ambele cazuri, una dintre relațiile sistemului (1.113) va fi decuplată de celelalte, ceea ce contrazice presupunerea făcută anterior.

Fără a influența generalitatea, vom lua în considerare axa x_1 , care coincide cu direcția de propagare, deoarece $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$. Evident, $A_i n_i = 0$ și $B_i n_i = 0$ implică $A_1 = 0$ și $B_1 = 0$, din care deducem că undele de forfecare nu sunt amortizate în timp și nu există niciun efect asupra lor din cauza porilor sau a temperaturii. Acest tip de unde poate fi recunoscut prin: $U^{(1)} = \{u_r^{(1)}, \phi_r^{(1)}, \varphi^{(1)}, \theta^{(1)}\}$ și $U^{(2)} = \{u_r^{(2)}, \phi_r^{(2)}, \varphi^{(2)}, \theta^{(2)}\}$, unde

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)}(x_1, t) = 0, u_2^{(1)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \sin \chi(x_1 - c_2 t), u_3^{(1)}(x_1, t) = 0, \\
\phi_1^{(1)}(x_1, t) = 0, \phi_2^{(1)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \sin \chi(x_1 - c_2 t), \phi_3^{(1)}(x_1, t) = 0, \quad (1.125) \\
\varphi^{(1)}(x_1, t) = 0, \theta^{(1)}(x_1, t) = 0,
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)}(x_1, t) = 0, u_2^{(2)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \sin \chi(x_1 - c_2 t), u_3^{(2)}(x_1, t) = 0, \\
\phi_1^{(2)}(x_1, t) = 0, \phi_2^{(2)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \sin \chi(x_1 - c_2 t), \phi_3^{(2)}(x_1, t) = 0, \quad (1.126) \\
\varphi^{(2)}(x_1, t) = 0, \theta^{(2)}(x_1, t) = 0.
\end{aligned}$$

Luând în considerare cele de mai sus, concluzionăm că undele transversale nu sunt dispersive, nu sunt amortizate în timp și nu sunt influențate de efecte termice și/sau pori.

1.3.4 Studiul undelor longitudinale

Revenind la sistemul (1.118), și folosind $A_k n_k \neq 0$, $B_k n_k \neq 0$, deducem că sistemul algebric admite soluții netriviiale, în consecință discriminantul sistemului trebuie să fie 0.

$$D(w) = \begin{vmatrix} w^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2} & 0 & -\frac{\xi}{\rho c_2^2} & \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} \\ 0 & M(w) & -\xi & 0 \\ -\frac{\xi}{\chi^2} & -\frac{\psi}{\chi^2} & d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 w^2 & \frac{b}{\chi^2} \theta_0 \\ -\frac{\sigma \rho c_2 (3c_3^2 + c_1^2)}{k \chi} w \psi(w) & 0 & -\frac{b c_2}{k \chi} w \psi(w) & N(w) \end{vmatrix} = 0,$$

unde

$$M(w) = \gamma + \alpha + \epsilon + \rho I_{kj} c_2^2 w^2,$$

$$N(w) = 1 + \tau_\theta \chi c_2 w + \frac{\theta_0 c_2 c}{k \chi} w \psi(w).$$

Ne propunem acum să determinăm soluțiile pentru unde. Pentru a face acest lucru, trebuie să rezolvăm ecuația dispersiei luând în considerare $Re(w) \leq 0$, $Im(w) \leq 0$, situație discutată anterior. În primul rând, studiem cazul în care efectele cuplării sunt egale cu 0. În consecință, presupunem

$$C = \{\xi, 3c_3^2 + c_1^2, b, \psi\} = \{0, 0, 0, 0\}.$$

În acest context, ecuația de mai sus $D(w) = 0$, se reduce la:

$$\left(w^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right) M(w) \left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 w^2\right) N(w) = 0, \quad (1.127)$$

ale cărei rădăcini, verifică condiția $Re(w) \leq 0, Im(w) \leq 0$:

$$w_1^{(0)} = -\frac{\sqrt{c_1^2 + c_3^2}}{c_2}i, \text{ astfel încât } \nu_1^{(0)} = \sqrt{c_1^2 + c_3^2}, \quad (1.128)$$

$$w_2^{(0)} = -\frac{\sqrt{\gamma + \alpha + \epsilon}}{\sqrt{\rho I_{kj} c_2}}i \text{ astfel încât } \nu_2^{(0)} = \sqrt{\frac{\gamma + \alpha + \epsilon}{\rho I_{kj}}}, \quad (1.129)$$

$$w_3^{(0)} = -\sqrt{\frac{d\chi^2 + a}{\rho\tau}} \frac{1}{c_2\chi}i \text{ astfel încât } \nu_3^{(0)} = \frac{\sqrt{d\chi^2 + a}}{\chi\sqrt{\rho\tau}}, \quad (1.130)$$

iar restul rădăcinilor sunt determinate din polinomul

$$L(w) = \Gamma_3 w^3 + \Gamma_2 w^2 + \Gamma_1 w + \Gamma_0, \quad (1.131)$$

unde

$$\Gamma_3 = \frac{\theta_0 c_2^3 \tau_q^2 \chi c}{2k}, \Gamma_2 = \frac{\theta_0 c_2^2 c \tau_q}{k}, \Gamma_1 = \tau_\theta \chi c_2 + \frac{\theta_0 c_2 c}{k\chi}, \Gamma_0 = 1. \quad (1.132)$$

Cum constantele fizice implicate sunt strict pozitive, deducem că $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$, ceea ce implică $L(w) > 0$ pentru orice $w > 0$, deci nu există soluții reale pozitive. În plus, discriminantul ecuației de gradul trei este pozitiv, ceea ce implică existența unei rădăcini reale și două rădăcini complexe conjugate.

$$L(0) = \Gamma_0 > 0, L\left(-\frac{1}{\tau_\theta \chi c_2}\right) = -\frac{\theta_0 c}{k\chi^2 \tau_\theta} \psi\left(-\frac{1}{\tau_\theta \chi c_2}\right) < 0.$$

Neglijând termenii τ_q și τ_q^2 , ecuația (1.131) devine $\Gamma_1 w + \Gamma_0 = 0$. Așasat, rădăcina reală negativă este dată de:

$$w_4^{(0)} \in \left(-\frac{1}{\tau_\theta \chi c_2}, 0\right). \quad (1.133)$$

În ceea ce privește rădăcinile complexe conjugate, vom folosi formula lui Cardano pentru a putea determina partea lor reală. Mai mult, rădăcinile complexe sunt:

$$w_5^{(0)} = -\gamma - i\delta = -\left(\frac{2}{3c^2 \tau_q \chi} + \frac{u^* + v^*}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u^* - v^*), \quad (1.134)$$

$$w_6^{(0)} = -\gamma + i\delta = -\left(\frac{2}{3c^2 \tau_q \chi} + \frac{u^* + v^*}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u^* - v^*), \quad (1.135)$$

cu $\nu_5^{(0)} = ic_2 w_5^{(0)}, \nu_6^{(0)} = ic_2 w_6^{(0)}$.

Fără a afecta generalitatea analizei, alegem axa x_1 , corespunzătoare direcției de propagare, cu $n_1 = 1, n_2 = 0$ și $n_3 = 0$.

În ceea ce privește rădăcina $\nu = \nu_1$, există următoarea undă pentru deplasare:

$$\begin{cases} u_1^{(1)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{A_1^{(1)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_1 t)}\} e^{-\chi c_2 a_1 t}, \\ \phi_1^{(1)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{B_1^{(1)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_1 t)}\} e^{-\chi c_2 a_1 t}, \\ \varphi^{(1)}(x_1, t) = \text{Re}\{C^{(1)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_1 t)}\} e^{-\chi c_2 a_1 t}, \\ \theta^{(1)}(x_1, t) = \theta_0 \text{Re}\{D^{(1)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_1 t)}\} e^{-\chi c_2 a_1 t}, \end{cases} \quad (1.136)$$

unde:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \begin{vmatrix} M(w_1) & -\xi & 0 \\ -\frac{\psi}{\chi^2} & d + \frac{a}{\chi^2} + \rho\tau c_2^2 w_1^2 & \frac{b}{\chi^2} \theta_0 \\ 0 & -\frac{bc_2 w_1}{\chi} \psi(w_1) & N(w_1) \end{vmatrix} = \\ &= M(w_1) \left\{ \left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho\tau c_2^2 w_1^2 \right) N(w_1) + \frac{b^2 c_2 \theta_0}{\chi^3} \psi(w_1) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} &= \begin{vmatrix} 0 & -\xi & 0 \\ -\frac{\xi}{\chi^2} & d + \frac{a}{\chi^2} + \rho\tau c_2^2 w_1^2 & \frac{b}{\chi^2} \theta_0 \\ -\frac{\sigma\rho c_2(3c_3^2 + c_1^2)}{k\chi} w_1 \psi(w_1) & -\frac{bc_2}{k\chi} w_1 \psi(w_1) & N(w_1) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\sigma\xi b \theta_0}{k\chi^3} \rho c_2 (3c_3^2 + c_1^2) w_1 \psi(w_1) + \frac{\xi^2}{\chi^2} N(w_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \begin{vmatrix} 0 & M(w_1) & 0 \\ -\frac{\xi}{\chi^2} & -\frac{\psi}{\chi^2} & \frac{b}{\chi^2} \theta_0 \\ -\frac{\sigma\rho c_2(3c_3^2 + c_1^2)}{k\chi} w_1 \psi(w_1) & 0 & N(w_1) \end{vmatrix} = \\ &= M(w_1) \left[\frac{\xi}{\chi^2} N(w_1) - \frac{\sigma b \theta_0}{k\chi^3} \rho c_2 (3c_3^2 + c_1^2) w_1 \psi(w_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= \begin{vmatrix} 0 & M(w_1) & -\xi \\ -\frac{\xi}{\chi^2} & -\frac{\psi}{\chi^2} & d + \frac{a}{\chi^2} + \rho\tau c_2^2 w_1^2 \\ -\frac{\sigma\rho c_2(3c_3^2 + c_1^2)}{k\chi} w_1 \psi(w_1) & 0 & -\frac{bc_2}{k\chi} w_1 \psi(w_1) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{c_2}{k\chi} w_1 \psi(w_1) \left\{ \frac{\sigma\xi\psi}{\chi^2} \rho (3c_3^2 + c_1^2) - M(w_1) \left[\left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho\tau c_2^2 w_1^2 \right) \sigma\rho (3c_3^2 + c_1^2) + \frac{\xi b}{\chi^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

În ceea ce privește rădăcina $\nu = \nu_2$, există următoarea undă microrotațională:

$$\begin{cases} u_1^{(2)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{A_1^{(2)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_2 t)}\} e^{-\chi c_2 a_2 t}, \\ \phi_1^{(2)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{B_1^{(2)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_2 t)}\} e^{-\chi c_2 a_2 t}, \\ \varphi^{(2)}(x_1, t) = \text{Re}\{C^{(2)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_2 t)}\} e^{-\chi c_2 a_2 t}, \\ \theta^{(2)}(x_1, t) = \theta_0 \text{Re}\{D^{(2)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_2 t)}\} e^{-\chi c_2 a_2 t}, \end{cases} \quad (1.137)$$

Pentru rădăcina $\nu = \nu_3$, există următoarea undă longitudinală poroasă:

$$\begin{cases} u_1^{(3)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{A_1^{(3)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_3 t)}\} e^{-\chi c_2 a_3 t}, \\ \phi_1^{(3)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{B_1^{(3)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_3 t)}\} e^{-\chi c_2 a_3 t}, \\ \varphi^{(3)}(x_1, t) = \text{Re}\{C^{(3)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_3 t)}\} e^{-\chi c_2 a_3 t}, \\ \theta^{(3)}(x_1, t) = \theta_0 \text{Re}\{D^{(3)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_3 t)}\} e^{-\chi c_2 a_3 t}, \end{cases} \quad (1.138)$$

Pentru rădăcina $\nu = \nu_4$, există următoarea undă longitudinală termică:

$$\begin{cases} u_1^{(4)} = \left\{ -\frac{1}{\chi} M(w_4) \left[\left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 a_4^2 \right) \frac{3c_3^2 + c_1^2}{c_2^2} + \frac{\xi b}{\rho c_2^2 \chi^2} \theta_0 \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{\xi \psi(3c_3^2 + c_1^2)}{c_2^2 \chi^3} \right\} \sin(\chi x_1) e^{-\chi c_2 a_4 t}, \\ \phi_1^{(4)} = -\frac{\xi^2}{\chi^2} \left[\left(w_4^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) b \theta_0 + \frac{\xi(3c_3^2 + c_1^2)}{c_2^2} \right] \sin(\chi x_1) e^{-\chi c_2 a_4 t}, \\ \varphi^{(4)} = \frac{1}{\chi^2} M(w_4) \left[\left(w_4^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) b \theta_0 + \frac{\xi(3c_3^2 + c_1^2)}{c_2^2} \right] \cos(\chi x_1) e^{-\chi c_2 a_4 t}, \\ \theta^{(4)} = \left\{ M(w_4) \left[\left(w_4^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) \left(d + \frac{a}{\chi^2} + \rho \tau c_2^2 a_4^2 \right) - \frac{\xi^2}{\chi^2 \rho c_2^2} \right] \right. \\ \quad \left. - \frac{\xi \psi}{\chi^2} \left(w_4^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) \right\} \cos(\chi x_1) e^{-\chi c_2 a_4 t}. \end{cases} \quad (1.139)$$

Iar, în ceea ce privește rădăcina $\nu = \nu_5$, există următoarea undă longitudinală corespunzătoare celor doi timpi de întârziere:

$$\begin{cases} u_1^{(5)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{A_1^{(5)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_5 t)}\} e^{-\chi c_2 a_5 t}, \\ \phi_1^{(5)}(x_1, t) = -\frac{1}{\chi} \text{Im}\{B_1^{(5)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_5 t)}\} e^{-\chi c_2 a_5 t}, \\ \varphi^{(5)}(x_1, t) = \text{Re}\{C^{(5)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_5 t)}\} e^{-\chi c_2 a_5 t}, \\ \theta^{(5)}(x_1, t) = \theta_0 \text{Re}\{D^{(5)} e^{i\chi(x_1 - c_2 b_5 t)}\} e^{-\chi c_2 a_5 t}, \end{cases} \quad (1.140)$$

Mai sus am folosit notațiile

$$M(w_s) = \gamma + \alpha + \epsilon + \rho I_{kj} c_2^2 w_s^2,$$

$$N(w_s) = 1 + \tau_\theta \chi c_2 w_s + \frac{c c_2 \theta_0}{k \chi} w_s \psi(w_s), \text{ cu } s \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

În determinantul corespunzător ecuației de disipare $D(w) = 0$, se poate observa dependența vitezelor de propagare ale celor patru unde longitudinale. Această dependență se realizează cu ajutorul τ_θ și $\psi(w)$ (evident în parametrii decalării de fază).

Putem concluziona, prin urmare, că propagarea undelor longitudinale este afectată de cuplarea deformărilor elastice și a microrotațiilor cu efectele poroase și termice. În același timp, cuplarea cu efectele poroase face să apară o undă longitudinală poroasă, iar luarea în considerare a efectelor termice cu timpi DPL, implică apariția unei unde longitudinale corespunzătoare celor doi timpi de întârziere. De asemenea, se remarcă faptul că, cuplarea cu efectele termice are consecințe asupra tuturor undelor longitudinale în timp (amortizarea amplitudinii).

Pentru o mai bună înțelegere și evidențiere a efectelor cuplajului menționat asupra vitezelor de propagare, este necesar un studiu numeric pe un model ales.

1.3.5 Simulare numerică

În această secțiune ne dorim o mai bună înțelegere a comportamentului vitezelor de fază și a modului de descompunere a soluțiilor de undă longitudinală deduse în secțiunea anterioară. Menționăm că am folosit software-ul Wolfram Mathematica în acest sens.

Simbol	Parametrul materialului	Valoare	Unitatea de măsură
σ	Coeficientul de dilatare termică liniară	2.33×10^{-4}	K^{-1}
λ	Primul modul Lamé	9.4×10^{10}	Nm^{-2}
μ	Al doilea modul Lamé	4×10^{10}	Nm^{-2}
κ	Conductivitatea termică	1×10^{10}	$W m^{-1}K^{-1}$
ξ	Parametru al porilor	1.13849×10^{10}	Nm^{-2}
α	Constantă micropolară	0.020×10^{10}	Nm^{-2}
γ	Constantă micropolară	0.779×10^{-9}	N
ϵ	Constantă micropolară	0.002×10^{10}	Nm^{-2}
a	Parametru al porilor	1.475	
b	Coeficientul cuplajului poro-termic	-2×10^6	$Nm^{-2}K^{-1}$
c	Coeficient de difuzie a porilor	2.9×10^4	$m^2sec^{-2}K^{-1}$
I	Inerția echilibrată	0.2×10^{-19}	m^2
τ	Constanta de inerție echilibrată	1.753×10^{-15}	m^{-2}
ρ	Densitate	1.74×10^3	$Kg m^{-3}$

Tabel 1.2: Valorile parametrilor materialului

În ceea ce privește simulările numerice, coeficienții din Tabelul 1.2, au fost aleși pentru magneziul din [17] și [18]. Se consideră, de asemenea, $\chi = 1 \times (-b)^{-1}$, $\tau_q = 5 \times 10^{-4}s$ și $\tau_\theta = 1 \times 10^{-3}s$. Aceste valori au fost alese raportându-ne la lucrări precum [15] și [16] și ținând cont de condiția (1.115). Astfel, sunt luate în considerare următoarele cazuri, pentru a compara vitezele.

C_1 : Cazul necuplat: $\xi = \psi = \sigma(3c_3^2 + c_1^2) = b = 0$;

C_2 : Cazul poroelastice cu microrotații : $\sigma(3c_3^2 + c_1^2) = b = 0$;

C_3 : Cazul termoelastice cu microrotații: $\xi = \psi = b = 0$;

C_4 : Cazul cuplat cu microrotații.

Model de referință	Necuplat	Termoelastic cu microrotații
ν_1	10196.9	$-4.815.82i$
ν_2	-3.61747×10^{19}	2.51433×10^{12}
ν_3	-7.951×10^{12}	1.39079×10^{12}
ν_4	$-0.0000189777i$	$-0.0000280988i$
ν_5	$5.65685 \times 10^9 + 9.48887 \times 10^{-6}i$	$1.58605 \times 10^8 + 1.57416 \times 10^6i$

Table 1.3: Comparație numerică a $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ și ν_5

În urma simulărilor, se pot distinge valorile prezentate în Tabelul 1.3: cazul necuplat și cazul termoelastic cu microrotații.

Figurile 1-8 prezintă grafica pentru cazurile în care nu avem unde staționare:

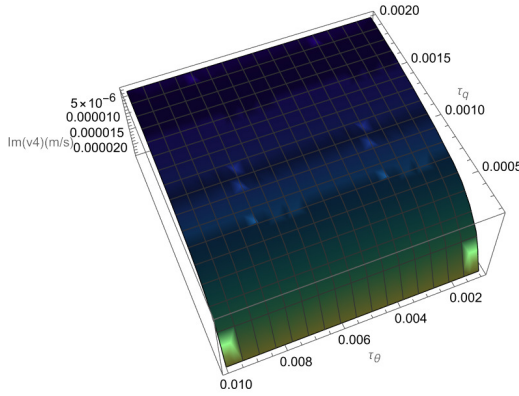


Figura 1.1: Cazul necuplat pentru $Im(\nu_4)$. Comportamentul pentru $Im(\nu_4)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}s, 2 \times 10^{-3}s]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}s, 1 \times 10^{-2}s]$.

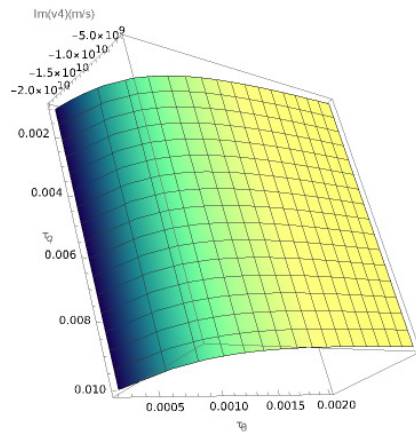


Figura 1.2: Cazul termoelastic pentru $Im(\nu_4)$. Comportamenul pentru $Im(\nu_4)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4} s, 2 \times 10^{-3}s]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}s, 1 \times 10^{-2}s]$.

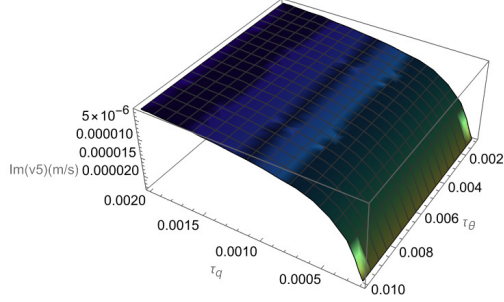


Figura 1.3: Cazul necuplat pentru $Im(\nu_5)$. Comportamentul pentru $Im(\nu_5)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}\text{s}, 2 \times 10^{-3}\text{s}]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}\text{s}, 1 \times 10^{-2}\text{s}]$.

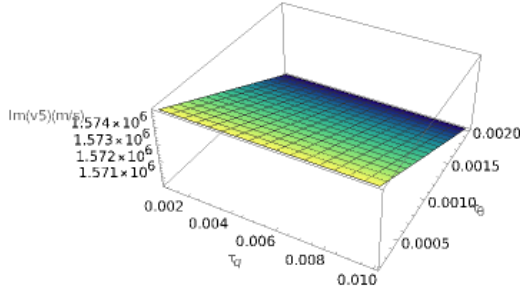


Figura 1.4: Cazul termoelastic pentru $Im(\nu_5)$. Comportamentul pentru $Im(\nu_5)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}\text{s}, 2 \times 10^{-3}\text{s}]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}\text{s}, 1 \times 10^{-2}\text{s}]$.

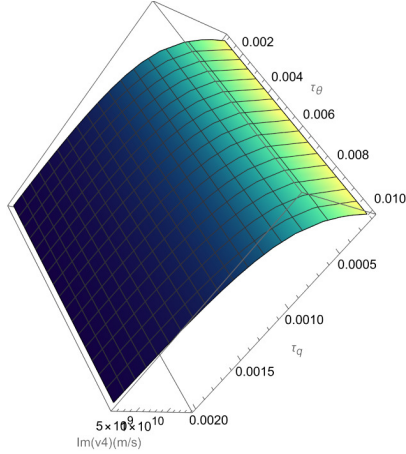


Figura 1.5: Cazul necuplat pentru $Re(\nu_4)$. Comportamentul pentru $Re(\nu_4)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}\text{s}, 2 \times 10^{-3}\text{s}]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}\text{s}, 1 \times 10^{-2}\text{s}]$.

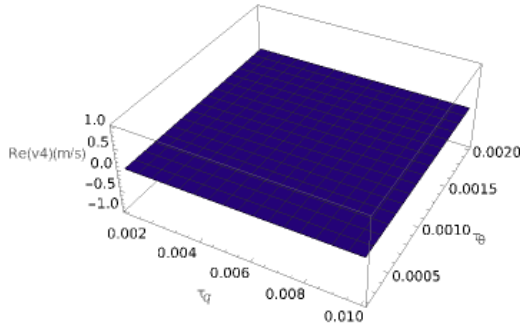


Figura 1.6: Cazul termoelastic pentru $Re(\nu_4)$. Comportamentul pentru $Re(\nu_4)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}\text{s}, 2 \times 10^{-3}\text{s}]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}\text{s}, 1 \times 10^{-2}\text{s}]$.

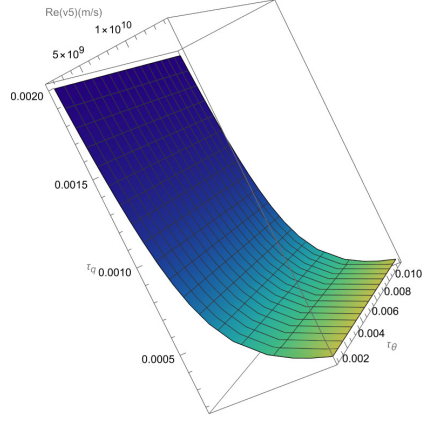


Figura 1.7: Cazul necuplat pentru $Re(\nu_5)$. Comportamentul pentru $Re(\nu_5)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}\text{s}, 2 \times 10^{-3}\text{s}]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}\text{s}, 1 \times 10^{-2}\text{s}]$.

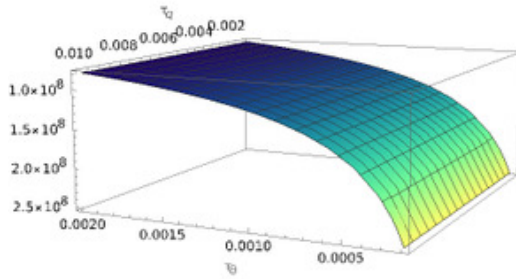


Figura 1.8: Cazul termoelastic $Re(\nu_5)$. Comportamentul pentru $Re(\nu_5)$ variind în funcție de $\tau_q \in [2 \times 10^{-4}\text{s}, 2 \times 10^{-3}\text{s}]$ $\tau_\theta \in [1 \times 10^{-3}\text{s}, 1 \times 10^{-2}\text{s}]$.

Cele 8 grafice analizate (Figurile 1.1-1.8) oferă o perspectivă detaliată asupra comportamentului undelor longitudinale în cazul unui model DPL, comparând scenariile necuplat și cuplat. Analiza grafurilor arată că cuplajul termoelastic joacă un rol crucial în stabilizarea și controlul undelor longitudinale. În timp ce scenariul necuplat evidențiază sensibilitatea ridicată a sistemului la variațiile parametrilor, cuplajul termoelastic minimizează aceste efecte, favorizând o propagare mai eficientă și mai stabilă.

Capitol 2

Soluții avansate în mediile micropolare izotrope

2.1 Soluții în termeni de potențiali complecși

În această parte a lucrării vom investiga deformarea plană, în cadrul teoriei echilibrului, pentru corpurile poroase micropolare, omogene și izotrope, folosind ecuațiile constitutive, ecuațiile geometrice și ecuațiile de echilibru fără forțe masice. Accentul nostru este pus pe tratarea problemelor fundamentale cu valori la limită ale teoriei deformării plane. Ulterior, obținem o descriere a deplasării, a microrotațiilor și a porilor folosind funcții analitice complexe și două funcții reale. În acest sens, ne folosim de ecuațiile omogene Helmholtz [4].

2.1.1 Ecuațiile de câmp

Considerăm B un domeniu mărginit din spațiul euclidian tridimensional, cu ∂B frontiera sa și n normala exterioară la suprafața ∂B . În ipoteza că avem un mediu elastic micropolar poros care ocupă domeniul B , raportăm mișcarea corpului la un sistem de axe ortogonale $Ox_i (i = 1, 2, 3)$.

Ecuațiile de bază care descriu evoluția unui mediu Cosserat izotrop cu goluri sunt următoarele:

-ecuațiile constitutive:

$$t_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + k (u_{i,j} + \varepsilon_{ijk} \phi_k) + \xi \varphi \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

$$m_{ij} = \alpha \phi_{k,k} \delta_{ij} + \gamma \phi_{j,i} + \psi \phi_{i,j} + \zeta \varepsilon_{sji} \varphi_{,s}, \quad (2.2)$$

$$h_i = d \varphi_{,i}, \quad (2.3)$$

-ecuațiile geometrice

$$e_{ij} = u_{i,j} + \varepsilon_{ijk} \phi_k, \quad \chi_{ij} = \phi_{i,j}, \quad (2.4)$$

-ecuațiile de echilibru (încărcările corpului sunt absente)

$$t_{ji,j} = 0, \quad (2.5)$$

$$m_{ji,j} + \varepsilon_{irs} t_{rs} = 0, \quad (2.6)$$

$$h_{i,i} + g = 0. \quad (2.7)$$

Considerăm

$$t_i = t_{ji}n_j, \quad m_i = m_{ji}n_j, \quad N_i = h_{ji}n_j, \quad (2.8)$$

unde N_i este forța de suprafață generalizată într-un punct regulat pe ∂B , t_i este vectorul forță de suprafață și m_i este cuplul forță de suprafață.

Vom presupune în continuare că densitatea de energie internă este o formă pătratică pozitivă, de unde avem:

$$\begin{aligned} \gamma + \beta > 0, \quad \gamma - \beta > 0, \quad \gamma + \beta + 3\alpha > 0, \quad d > 0, \\ \kappa > 0, \quad \kappa + 2\mu > 0, \quad \kappa + 2\mu + 3\lambda > 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notățiile utilizate sunt în conformitate cu Tabelul 1.1.

2.1.2 Problema deformării plane

În această parte a lucrării, vom considera că B este interiorul unui cilindru drept a cărui secțiune transversală este Σ și a cărui limită laterală este Π . Această configurație este reprezentată într-un sistem de coordonate ortogonal, astfel încât generatoarele sale să fie paralele cu axa x_3 . Notăm cu L conturul corespunzător secțiunii transversale. Deformarea plană este considerată a fi paralelă cu planul (Ox_1x_2) . Precum în secțiunea anterioară, dedicată deformării plane, obținem următorul sistem, corespunzător deplasării, microrotației și porilor. (Δ este Laplacianul)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)u_{\rho,\rho\alpha} + (\mu + \kappa)\Delta u_\alpha + \xi\varphi_{,\alpha} + \kappa\varepsilon_{3\alpha\beta}\phi_{,\beta} &= 0, \\ \psi\Delta\varphi + \kappa\varepsilon_{3\alpha\beta}u_{\beta,\alpha} - 2k\phi &= 0, \\ d\Delta\varphi - \xi u_{\rho,\rho} - a\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pașii urmați pentru obținerea sistemului se găsesc în secțiunea {1.1.5}

2.1.3 Potențiali complecși

În această secțiune vom lucra în sistemul (2.10), ale cărui relații vor fi rescrise în coordonate complexe și integrate direct. Cu alte cuvinte, vom determina deplasarea folosind o pereche de funcții analitice complexe, iar microrotația și modificarea fracției de volum folosind funcții reale ce verifică ecuațiile omogene Helmholtz [4]. Mai întâi introducem coordonatele complexe:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad (2.11)$$

și deplasarea complexă

$$U = u_1 + iu_2. \quad (2.12)$$

Aşadar, obţinem

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad u_{\alpha, \alpha} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}, \quad \varepsilon_{3\alpha\beta} u_{\beta, \alpha} = i \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (2.13)$$

Luând în considerare (2.13), vom rescrie relaţiile sistemului (2.10) în următoarea formă

$$\begin{aligned} 2(\kappa + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - i\kappa \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ 4\psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} - i\kappa \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) - 2\kappa \phi &= 0, \\ 4d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} - \xi \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) - a\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

şi folosind notaţii pentru comoditate şi un set de operaţii, obţinem forma corespunzătoare funcţiei φ :

$$\varphi = M_1 - \frac{\xi}{2dm^2(\lambda + \kappa + 2\mu)} [\Gamma(z) + \bar{\Gamma}'(\bar{z})], \quad (2.15)$$

unde M_1 este o funcţie reală care satisface

$$4 \frac{\partial^2 M_1}{\partial z \partial \bar{z}} - m^2 M_1 = 0, \quad (2.16)$$

forma corespunzătoare funcţiei ϕ :

$$\phi = P - \frac{i\kappa}{2\gamma p^2(\mu + \kappa)} [\Gamma'(z) - \bar{\Gamma}'(\bar{z})], \quad (2.17)$$

unde funcţia reală P satisface

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - p^2 \right) P = 0 \quad (2.18)$$

şi

$$U = \eta_1 \Gamma(z) - \eta_2 \bar{\Gamma}(\bar{z}) z - \bar{\omega}(\bar{z}) + 4iq_1 \frac{\partial P}{\partial z} - 4q_2 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{z}}, \quad (2.19)$$

unde ω este o funcţie analitică pe z

Anterior, am putut obţine în relaţiile (2.15), (2.17) şi (2.19) o reprezentare a funcţiilor φ, ϕ şi U în termeni de funcţii analitice complexe Γ, ω şi de funcţii reale M şi P .

Folosind calcule simple rezultă următoarea formă a tensiunilor:

$$\begin{aligned}
t_{11} + t_{22} &= \frac{a(2\mu + 2\lambda + \kappa) - 2\xi^2}{2dm^2(2\mu + \kappa + \lambda)}[\Gamma'(x) + \bar{\Gamma}'(\bar{z})] + \frac{\xi(2\mu + \kappa)}{2\mu + \kappa + \lambda}M_1, \\
t_{11} + it_{12} - t_{22} + it_{21} &= -2(2\mu + k)\left[\eta_2\bar{\Gamma}''(\bar{z})z + \bar{\omega}(\bar{z}) - 4iq_1\frac{\partial^2 P}{\partial \bar{z}^2} + 4q_2\frac{\partial^2 M_1}{\partial \bar{z}^2}\right], \\
t_{21} - t_{12} &= \gamma p^2 P, \\
m_{13} - im_{23} &= 2\gamma\frac{\partial P}{\partial z} + 2i\zeta\frac{\partial M_1}{\partial z} - i\left[\frac{\kappa}{p^2(\mu + \kappa)} + \frac{\zeta\xi}{dm^2(2\mu + \lambda + \kappa)}\right]\Gamma''(z), \\
h_1 - ih_2 &= 2d\frac{\partial M_1}{\partial z} - \frac{\xi}{m^2(2\mu + \lambda + \kappa)}\Gamma''(z).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Exprimăm condițiile la limită în următoarea formă:

$$\begin{aligned}
\eta_1\Gamma(z) - \eta_2x\bar{\Gamma}'(\bar{z}) - \bar{\omega}(\bar{z}) + 4iq_1\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} - 4q_2\frac{\partial M_1}{\partial \bar{z}} &= \tilde{u}(\tau), \\
P(z, \bar{z}) - \frac{i\kappa}{2\gamma p^2(\kappa + \mu)}[\Gamma'(z) - \bar{\Gamma}'(\bar{z})] &= \phi(\tau), \\
M_1(z, \bar{z}) - \frac{\xi}{2dm^2(\lambda + \kappa + 2\mu)}[\Gamma(z) + \bar{\Gamma}'(\bar{z})] &= \varphi(\tau), \quad z \in L,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

unde $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$. Mai mult condițiile la limită pot lua următoarea formă:

$$\begin{aligned}
(2\mu + \kappa)\frac{d}{ds}\{\eta_2[\Gamma(z) + z\bar{\Gamma}'(\bar{z})] + \bar{\omega}(\bar{z}) - 4iq_1\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} + 4q_2\frac{\partial M_1}{\partial \bar{z}}\} &= \tilde{t}(\tau), \\
Im\{[2\gamma\frac{\partial P}{\partial z} + 2i\zeta\frac{\partial M_1}{\partial z} - iw_1\Gamma''(z)]\frac{dz}{\tau}\} &= \tilde{m}(\tau), \\
Im\{[2d\frac{\partial M_1}{\partial z} - w_2\Gamma''(z)]\frac{dz}{d\tau}\} &= \tilde{N}(\tau), \quad z \in L,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

unde $\tilde{t}(\tau) = -\tilde{t}_2 + i\tilde{t}_1$.

2.1.4 Construcția potențialilor

În această secțiune, ne propunem să deducem structura potențialilor Γ, ω, P , și M_1 și să explorăm arbitraritatea acestora în diferite domenii de interes. Analizăm diferențele dintre configurațiile următoarelor seturi de potențiali (Γ, ω, P, M_1) și $(\Gamma^*, \omega^*, P^*, M_1^*)$, corespunzători aceluiași funcții $t_{\alpha\beta}, m_{\alpha 3}$ și h_α .

Conform (2.20), este necesar ca

$$\begin{aligned}
Re[\Gamma'(z)] &= Re[\Gamma^{*'}(z)], \quad M_1 = M_1^*, \quad P = P^*, \\
\eta_2 z \bar{\Gamma}''(\bar{z}) + \bar{\omega}'(\bar{z}) &= \eta_2 z \bar{\Gamma}^{*''}(\bar{z}) + \bar{\omega}^{*'}(\bar{z}),
\end{aligned}$$

unde $Re[\]$ reprezintă partea reală pentru $\]$. Prin urmare, deducem că

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \Gamma^*(z) + iX_z + \rho_1, \\
\omega(z) &= \omega^*(z) + \rho_2, \\
M_1 &= M_1^*, \\
P &= P^*,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

unde X este o constantă reală, iar ρ_1, ρ_2 sunt constante complexe. Putem fixa originea coordonatelor în Σ astfel încât X, ρ_1, ρ_2 să îndeplinească condițiile

$$\Gamma(0) = 0, \operatorname{Im}\{\Gamma'(0)\} = 0, \omega(0) = 0, \quad (2.24)$$

care asigură uniformitatea pentru Γ și ω .

Obținem următoarea formă a potențialilor complecși,

$$\Gamma(z) = \Gamma_1(z) + \sum_{k=1}^m (zX_k + Y_k) \log(z - z_k), \quad (2.25)$$

$$\omega(z) = \omega_1(z) + \sum_{k=1}^m Z_k \log(z - z_k),$$

unde z_k reprezintă un punct în regiunea simplu conectată Σ_k , mărginită de L_k . Γ_1 și ω_1 sunt funcții analitice uniforme pe Σ , Y_k și Z_k sunt constante complexe, iar A_k sunt constante reale.

Din (2.25) deducem:

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (S_1^{(k)} + iS_2^{(k)}) \log(z - z_k) + \Gamma_1(z), \quad (2.26)$$

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \eta_1 \sum_{k=1}^m (S_1^{(k)} - iS_2^{(k)}) \log(z - z_k) + \omega_1(z),$$

unde am notat rezultantele vectorului de stres aplicate conturului ca $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}$.

Teoremă 5. Fie Σ un domeniu nemărginit cu contururile $L_1, L_2, \dots, L_m$ ca regiuni mărginite interne. Dacă presupunem că originea $z = 0$ este exterioară secțiunii Σ și că $h_\alpha, t_{\alpha\beta}$, și $m_{\alpha\beta}$ sunt delimitate în vecinătatea punctului la limită și pentru $|z| = \chi$ suficient de mare, atunci avem următoarele reprezentări:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= -\frac{1}{2\pi} (R_1 + iR_2) \log z + (a_1 + ia_2)z + \Gamma_0(z), \\ \omega(z) &= \frac{1}{2\pi} \eta_1 (R_1 - iR_2) \log z + (b_1 + ib_2)z + \omega_0(z), \\ P(z, \bar{z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (P_n e^{in\theta} + \bar{P}_n e^{-in\theta}) K_n(\tau\chi), \\ M(z, \bar{z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (M_n e^{in\theta} + \bar{M}_n e^{-in\theta}) K_n(w\chi). \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.1.5 Tensiunile din jurul unei incluziuni circulare

În această parte a lucrării, vom folosi rezultatele obținute în secțiunile anterioare. Prin utilizarea condițiilor la limită și a potențialilor complecși, următoarea teo-

remă permite analiza tensiunilor și deformațiilor materialelor cu incluziuni circulare în condiții de încărcare externă.

Teoremă 6. *Fie $\Sigma_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 > \chi^2\}$ un domeniu nemărginit cu o gaură circulară centrată în origine și cu raza χ . În ipoteza că o tensiune axială uniformă acționează asupra corpului în direcția x_1 , la infinit avem:*

$$t_{11}^* = Q, \quad t_{12}^* = 0, \quad t_{21}^* = 0, \quad t_{22}^* = 0, \quad m_{\alpha 3}^* = 0, \quad h_{\alpha}^* = 0, \quad (2.28)$$

unde Q este o constantă dată. Condițiile de mărginire pe frontiera incluziunii circulare devin:

$$\begin{aligned} \eta_2[\Gamma(z) + z\bar{\Gamma}'(\bar{z})] + \bar{\omega}(\bar{z}) - 4iq_1 \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} + 4q_2 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ \text{Im}\left\{2\gamma \frac{\partial P}{\partial z} - iw_1 \Gamma''(z)\right\} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \text{Im}\left\{2d \frac{\partial M_1}{\partial z} - w_2 \Gamma''(z)\right\} \frac{dz}{ds} &= 0, \quad \text{for } |z| = \chi. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Folosind acestea și (2.29) obținem componentele potențialilor complecși după cum urmează:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{4\eta_2(2\mu + \kappa)} Qz + \frac{1}{z} D_1, \\ \omega(z) &= \frac{1}{z} E_1 + \frac{1}{z^3} E_3 - \frac{1}{2(2\mu + \kappa)} Qz, \\ P(z, \bar{z}) &= iH_1 \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) K_2(\tau\chi), \\ M_1(z, \bar{z}) &= H_2 \left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right) K_2(w\chi), \quad \chi = (z\bar{z})^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

unde

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2(2\mu + \kappa)F} Q\xi^2, \quad E_1 = -\frac{1}{2(2\mu + \kappa)} Q\chi^2, \\ E_3 &= \frac{1}{2(2\mu + \kappa)F} [\eta_2 + 1q_1\chi\tau TK_3(\tau\chi) + 2q_2\chi mHK_3(m\chi), \\ H_1 &= TD_1, \quad H_2 = HD_1, \quad F = \eta_2 + 2q_1\tau a_2 TK_1(\tau\chi) + 2q_2m\chi K_3(m\chi) \quad (2.31) \\ T &= \frac{4}{2\chi^4\omega} \{8dK_2(m\chi) + 2m\chi\xi[K_1(m\chi) + K_3(\tau\chi)]\}, \\ H &= \frac{4}{3\chi^4\omega} \{8\gamma K_2(\tau\chi) - 2\tau\chi\xi[K_1(\tau\chi) + K_3(\tau\chi)]\}, \\ \Omega &= \frac{16d\gamma}{\chi^2} K_2(\tau\chi)K_2(m\chi) + 4m\tau\xi^2[K_1(m\chi) + K_3(m\chi)][K_1(\tau\chi) + K_3(\tau\chi)]. \end{aligned}$$

Fie

$$e^{i\theta}U = u_\chi + iu_\theta,$$

unde, componentele u_χ și u_θ sunt în coordonate polare. Din (2.15), (2.17), (2.19) și (2.30) rezultă că

$$\begin{aligned} u_\chi + iu_\theta &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{4\eta_2(2\mu + \kappa)} Q\chi - \frac{1}{\chi}(E_1 - \eta_1 D_1) + u \cos 2\theta + iv \sin 2\theta, \\ \phi &= -2[H_1 K_2(\tau\chi) - \frac{\kappa}{2\gamma\tau^2(\mu + \kappa)\chi^2} D_1] \sin 2\theta, \\ \varphi &= -\frac{\xi Q}{4dm^2\eta_2(\lambda + \kappa + 2\mu)(\kappa + 2\mu)} + 2[H_2 K_2(m\chi) \\ &+ \frac{\xi}{2dm^2(\lambda + \kappa + 2\mu)\chi^2}] \cos 2\theta, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\chi}\eta_2 D_1 + \frac{Q\chi}{2(2\mu + \kappa)} - \frac{1}{\chi^3} E_3 + \frac{2}{\chi} q_1 H_1 K_2(\tau\chi) \\ &+ 2mq_2 H_2 [K_1(m\chi) + K_3(m\chi)], \\ v &= \frac{1}{\chi}\eta_2 D_1 - \frac{Q\chi}{2(\kappa + 2\mu)} - \frac{1}{r^3} E_3 + 2q_1 H_1 [K_1(\tau\chi) + K_3(\tau\chi)] \\ &+ \frac{8}{rq_2} H_2 K_2(m\chi). \end{aligned}$$

În mod similar, folosind (2.20), (2.29) obținem tensiunile.

2.1.6 Simulare numerică

Graficele de mai jos corespund unui cristal izotrop de magneziu cu pori și sunt obținute folosind sistemul de calcul "Wolfram Mathematica". Valorile utilizate pot fi găsite în [9]. Graficele dobândite reprezintă părțile reale și imaginare ale potențialilor complecși $\Gamma(z)$ și $\omega(z)$, obținuți anterior. Acestea ne permit să vizualizăm variația potențialilor în complex. Mai precis, aceste grafice ajută la înțelegerea câmpurilor de tensiune și deplasare din material, la identificarea regiunilor critice și la prezicerea comportamentului materialului în diferite condiții.

Figura 2.1: Comportament $Re(\Gamma(z))$ și $Im(\Gamma(z))$

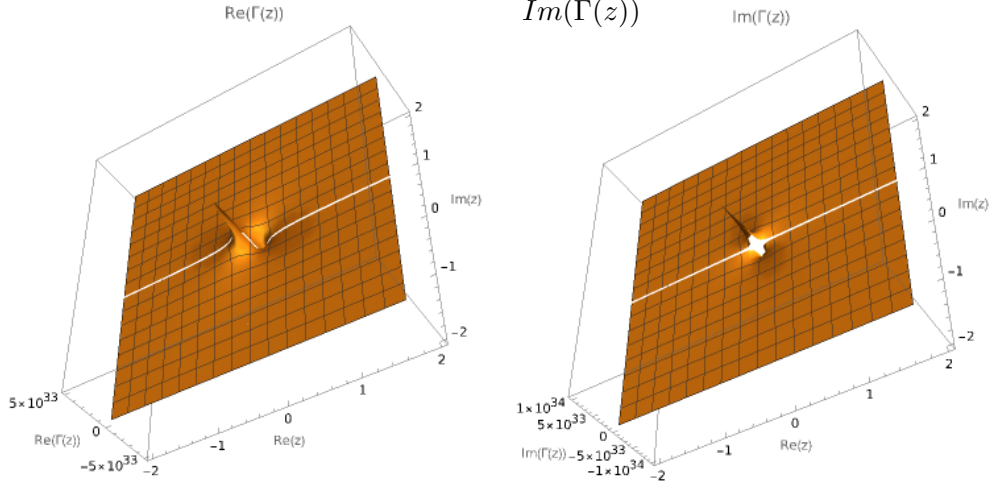
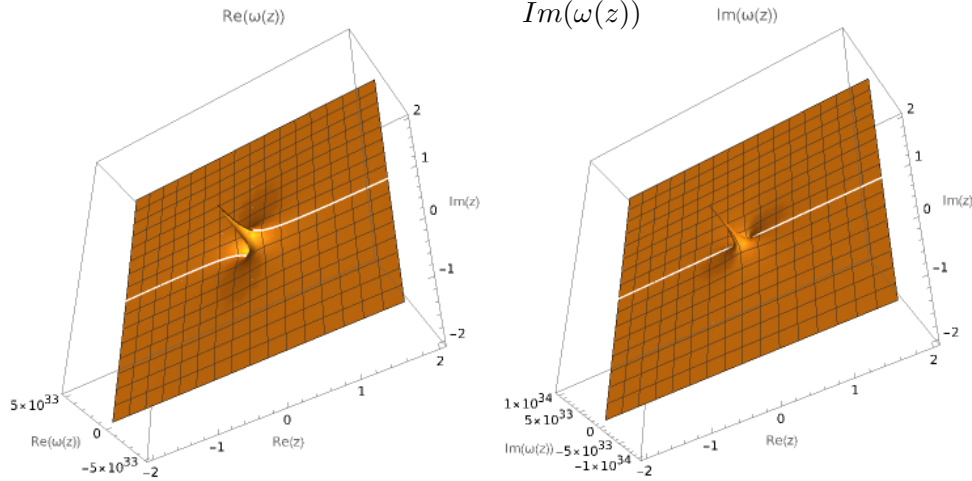


Figura 2.2: Comportament $Re(\omega(z))$ și $Im(\omega(z))$



Următoarele patru grafice corespund părților imaginare și reale ale componentei de deplasare radială "u" și componentei de deplasare tangențială "v", obținute anterior. Axa corespunzătoare lui χ reprezintă distanța radială de la centru a incluziunii circulare, iar axa corespunzătoare lui θ reprezintă coordonatele unghiulare din jurul incluziunii.

Figura 2.3: Comportament $Re(u)$ și $Im(u)$

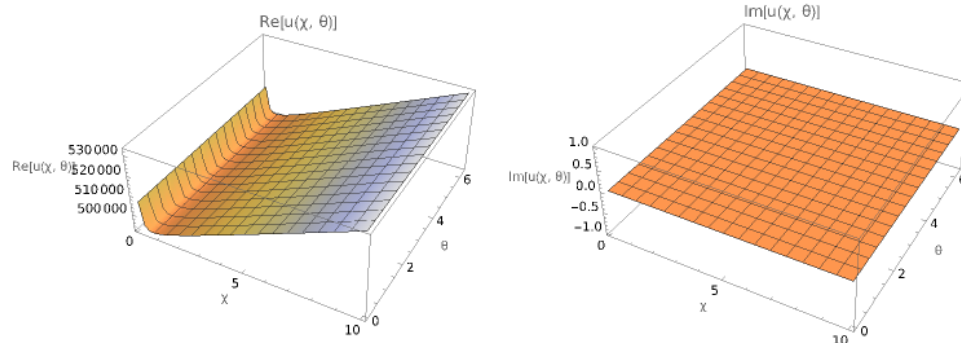
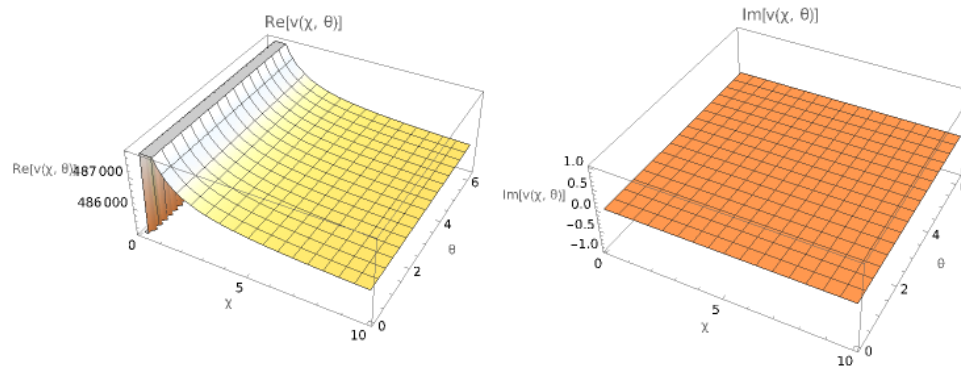


Figura 2.4: Comportament $Re(v)$ și $Im(v)$



Capitol 3

Medii micropolare anizotrope

În această secțiune sunt folosite notațiile prezente în tabelul de mai jos.

Notații	Interpretare fizică
a, b, c, d, h	coeficienți constanți specifici căldurii
η	entropia specifică pe unitatea de masă
I_{ij}	componentele tensorului microinerție
t_{mn}	componentele tensorului tensiune
τ_{mn}	componentele tensorului cuplu de tensiune
q_m	componentele vectorului de conducție termică
v_m	componentele vectorului deplasare
φ_m	componentele vectorului cuplu
ϕ_m	componente ale microrotației
f_m	forța masică
g_m	cuplul masic
t_k	fluxul de căldură
τ_k	tracțiunile de suprafață
$n = (n_l)$	vectorul normală la frontiera ∂D
T	temperatura conductivă
ϑ	temperatura termodinamică
ϑ_0	temperatura de referință constantă
ρ	densitatea masei
ϵ_{ijk}	simbolul lui Ricci

Tabel 3.1: Notații

3.1 Unicitate și instabilitate în termoelasticitatea cu două temperaturi

3.1.1 Problema mixtă cu valori la limită și valori inițiale

Considerăm corpul micropolar termoelastic ocupând domeniul tridimensional Ω din spațiul euclidian R^3 . Închiderea lui Ω este notată cu $\bar{\Omega}$ și avem $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, unde $\partial\Omega$ este frontiera domeniului Ω și este considerată suficient de regulată pentru a permite aplicarea teoremei divergenței. Vectorul unitate al normalei exterioare la $\partial\Omega$ are componentele notate cu n_i . Câmpurile vectorial și tensorial sunt notate cu litere îngroșate. Notăția v_i este folosită pentru componentele unui câmp

vectorial $\mathbf{v}$, notația u_{ij} este folosită pentru componentele unui câmp tensorial $\mathbf{u}$ de ordinul doi, și așa mai departe. Un sistem fix de axe carteziane Ox_i , $i = 1, 2, 3$ va fi folosit pentru a face referire la mișcarea corpului termoelastic.

Având în vedere ecuațiile geometrice și ecuațiile constitutive, care sunt introduse în ecuațiile de bază suntem conduși la următorul sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned} A_{ijmn} (v_{n,mj} + \varepsilon_{kmn} \phi_{k,j}) + B_{ijmn} \phi_{n,mj} - \alpha_{ij} (\vartheta_{,j} + a \dot{\vartheta}_{,j}) &= \rho \ddot{v}_i, \\ B_{ijmn} (v_{n,mj} + \varepsilon_{kmn} \phi_{k,j}) + C_{ijmn} \phi_{n,mj} - \beta_{ij} (\vartheta_{,j} + a \dot{\vartheta}_{,j}) \\ + \varepsilon_{ijk} [A_{jkmn} (v_{n,m} + \varepsilon_{lmn} \phi_l) + B_{jkmn} \phi_{n,m} - \alpha_{ij} (\vartheta_{,j} + a \dot{\vartheta}_{,j})] &= I_{ij} \ddot{\phi}_i, \quad (3.1) \\ \kappa_{ij} T_{,ij} - \alpha_{ij} (\dot{v}_{j,i} + \varepsilon_{ijk} \dot{\phi}_k) - \beta_{ij} \dot{\vartheta}_{j,i} &= h \ddot{\vartheta} + d \dot{\vartheta}, \end{aligned}$$

ce sunt verificate pentru orice $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$.

Prin rezolvarea problemei mixte cu valori la limită inițiale, în teoria termoelasticității cu două temperaturi, a corpurilor micropolare din cilindrul $\Omega \times [0, \infty)$ ne referim la o mulțime ordonată $(v_m, \phi_m, T, \vartheta)$ ce verifică sistemul de ecuații de mai sus, condițiile la limită și condițiile inițiale.

3.1.2 Rezultatul principal

Vom începe această secțiune specificând o lege de conservare a energiei, având în vedere variația temperaturii conductoare, adică luând în considerare relația cu două temperaturi (??). Această lege are următoarea formă:

$$E_1(t) = E_1(0), \quad t \in [0, \infty), \quad (3.2)$$

unde

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho \dot{v}_m(t) \dot{v}_m(t) + I_{mn} \dot{\phi}_m(t) \dot{\phi}_n(t) \right. \\ &\quad + A_{mnkl} e_{mn}(t) e_{kl}(t) + 2B_{mnkl} e_{mn}(t) \sigma_{kl}(t) + C_{mnkl} \sigma_{mn}(t) \sigma_{kl}(t) \\ &\quad + \kappa_{mn} T_{,m}(t) T_{,n}(t) + d \left(\vartheta(t) + \frac{h}{d} \dot{\vartheta}(t) \right)^2 + h \left(a - \frac{h}{d} \right) \dot{\vartheta}^2(t) \Big] dV \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left[\kappa_{mn} T_{,m}(s) T_{,n}(s) + c \left((\kappa_{mn} T_{,m}(s))_{,n} \right)^2 + (ad - h) \dot{\vartheta}^2(s) \right] dV ds. \end{aligned}$$

În cazul în care nu luăm în considerare variația de temperatură a conductibilității, legea conservării energiei primește următoarea formă:

$$E_2(t) = E_2(0), \quad t \in [0, \infty), \quad (3.3)$$

unde

$$\begin{aligned}
E_2(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho \dot{v}_m(t) \dot{v}_m(t) + I_{mn} \dot{\phi}_m(t) \dot{\phi}_n(t) + A_{mnkl} e_{mn}(t) e_{kl}(t) \right. \\
& + 2B_{mnkl} e_{mn}(t) \sigma_{kl}(t) + C_{mnkl} \sigma_{mn}(t) \sigma_{kl}(t) \\
& + d \left(\vartheta(t) + \frac{h}{d} \dot{\vartheta}(t) \right)^2 + h \left(a - \frac{h}{d} \right) \dot{\vartheta}^2(t) \Big] dV \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} \left[\kappa_{mn} T_{,m}(s) T_{,n}(s) + c \left((\kappa_{mn} T_{,m}(s))_{,n} \right)^2 + (ad - h) \dot{\vartheta}^2(s) \right] dV ds.
\end{aligned}$$

Notăm prin $\mathcal{P}$ problema ce constă în sistemul de ecuații (3.1), condițiile la limită și condițiile inițiale.

Teoremă 7. *În cazul datelor inițiale nule, problema mixtă $\mathcal{P}$, admite doar soluția identică nulă.*

Pentru a obține al doilea rezultat principal, referitor la instabilitatea exponențială pentru rezolvarea problemei mixte $\mathcal{P}$, va trebui să presupunem că este îndeplinită o condiție suplimentară. Și anume, trebuie să presupunem că energia sistemului, în starea sa inițială, nu este strict pozitivă, adică $E_2(0) \geq 0$.

Vom începe cu câteva considerații auxiliare utile.

Să luăm în considerare o problemă cu valori la limită de următoarea formă:

$$\begin{aligned}
(\kappa_{mn} u_{,m}(x))_{,n} &= d\vartheta^1 + h\vartheta^0 - (\alpha_{mn} e_{mn}^0 + \beta_{mn} \sigma_{mn}^0), \quad x \in \Omega, \\
\nu(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

unde $u = u(x)$ este funcția necunoscută, iar constantele ϑ^0 , ϑ^1 , e_{mn}^0 și σ_{mn}^0 sunt date inițiale.

Pe baza proprietăților uzuale ale problemelor cu valori la limită, definite în contextul ecuațiilor eliptice, putem deduce că problema cu valori la limită (3.4) admite o soluție $u(x)$, definită pe domeniul Ω .

Cu ajutorul funcției

$$\zeta(x, t) = \int_0^t T(x, s) ds,$$

din (3.4) putem observa că funcția $u(x)$ este o soluție a ecuației

$$\begin{aligned}
d\vartheta(x) + h\dot{\vartheta}(x) - [\kappa_{mn} (u_{,m}(x) + \zeta_{,m}(x))]_{,n} &= \\
&= \alpha_{mn} e_{mn}(x) + \beta_{mn} \sigma_{mn}(x).
\end{aligned}$$

Teoremă 8. *Presupunem coeficienții și tensorii pozitivi.*

Dacă în problema mixtă $\mathcal{P}$ valorile la limită sunt zero, atunci oricare dintre soluțiile sale, pentru care are loc condiția $E_2(0) \geq 0$, este exponențial instabilă.

3.2 Unicitate, reciprocitate și principiul variațional

3.2.1 Formularea problemei

Vom considera un corp neomogen, anizotrop și Cosserat care, la momentul inițial $t = 0$, ocupă domeniul regulat D al spațiului tridimensional euclidian R^3 . Domeniul D este delimitat de suprafața închisă netedă ∂D . Vom folosi atât funcții scalare, cât și funcții vectoriale și tensoriale, iar acestea depind de punctele D , $x = (x_m)$ și de variabila temporală $t \in [0, \infty)$.

Dacă luăm în considerare ecuațiile constitutive, atunci din ecuațiile din ecuațiile de mișcare și din ecuația energiei obținem următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{v}_m &= A_{klmn} e_{kl,n} + B_{klmn} \sigma_{kl,n} + \alpha_{mn} (\vartheta_{,n} + a \dot{\vartheta}_{,n}), \\ I_{mn} \ddot{\phi}_n &= B_{mnkl} e_{kl,n} + C_{klmn} \sigma_{kl,n} + \beta_{mn} (\vartheta_{,n} + a \dot{\vartheta}_{,n}) \\ &\quad + \epsilon_{mjk} (C_{jkl n} \sigma_{ln} + B_{jkl n} \varepsilon_{ln} + \alpha_{jk} (\vartheta + a \dot{\vartheta})), \\ h \ddot{\vartheta} &= -d \dot{\vartheta} + \alpha_{mn} \dot{e}_{mn} + \beta_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} + \kappa_{mn} \vartheta_{,mn}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

ce are loc pentru orice (t, x) din $[0, \infty) \times D$.

Vom nota cu $\mathcal{P}$ problema mixtă cu valori inițiale și la limită în contextul termodinamicii corpurilor Cosserat, formată din ecuațiile (3.5), condițiile inițiale și relațiile la limită.

Rezultatele calitative pe care le vom aborda în continuare se referă la soluțiile problemei $\mathcal{P}$.

3.2.2 Rezultate de reciprocitate

Primul nostru rezultat este unul de reciprocitate. Pentru aceasta avem nevoie de un produs de convoluție pentru două funcții continue. Deci, dacă φ și ψ sunt două funcții scalare, definite pe $[0, \infty) \times D$ și continue în timp, atunci produsul lor de convoluție, notat cu $*$, este definit prin:

$$(\varphi * \psi)(t, x) = \int_0^t \varphi(t - \tau, x) \psi(\tau, x) d\tau.$$

Acum introducem funcțiile $p(t)$ și $r(t)$, utile în cele ce urmează, definite prin:

$$p(t) = 1, \quad r(t) = (p * p)(t) = t, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (3.6)$$

și vom lua în considerare următoarea convenție de scriere:

$$\hat{\varphi}(t, x) = \int_0^t \varphi(\tau, x) d\tau = (p * \varphi)(t, x). \quad (3.7)$$

Pentru a obține o formă mai accesibilă a ecuației energiei, considerăm funcția ω definită pe $[0, \infty) \times D$, prin relația:

$$\omega = \hat{S} + \vartheta_0(\eta_0 - \alpha), \quad (3.8)$$

în care $\hat{S}$ este definit ca în (3.7).

De asemenea, pentru o funcție u din clasa $C^{0,1}$ pe $[0, \infty) \times D$ definim funcțiile β și α prin:

$$\beta u = u + \alpha u, \quad \gamma u = p * u + \alpha u. \quad (3.9)$$

În Propoziția care urmează, formulăm ecuația energiei din într-o manieră diferită.

Propoziție 1.

Dacă funcțiile $q_m \in C^{1,0}$ și $\eta \in C^{0,1}$ satisfac ecuația energiei și condiția inițială $\eta(0, x) = \eta^0(x), x \in D$, atunci ele satisfac ecuația:

$$\hat{q}_{m,m} + \omega = \vartheta_0(\eta - \alpha), \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D. \quad (3.10)$$

Afirmația reciprocă este și ea adevărată.

O relație de reciprocitate se referă la conexiunea dintre două sisteme de date externe:

$$\mathcal{D}^{(\nu)} = \{f_m^{(\nu)}, g_m^{(\nu)}, S^{(\nu)}, \bar{v}_m^{(\nu)}, \bar{\phi}_m^{(\nu)}, \bar{t}_m^{(\nu)}, \bar{\tau}_k^{(\nu)}, \bar{\vartheta}^{(\nu)}, \bar{q}^{(\nu)}, v_m^{0,(\nu)}, v_m^{1,(\nu)}, \\ \phi_m^{0,(\nu)}, \phi_m^{1,(\nu)}, \eta^{0,(\nu)}, \vartheta^{0,(\nu)}\},$$

și soluțiile corespunzătoare acestor sisteme de date, mai exact:

$$\mathcal{S}^{(\nu)} = \left\{ v_m^{(\nu)}, \phi_m^{(\nu)}, \vartheta^{(\nu)}, \tau_{mn}^{(\nu)}, \sigma_{mn}^{(\nu)}, \eta^{(\nu)}, q_m^{(\nu)} \right\},$$

în ambele sisteme de mai sus avem $\nu = 1, 2$.

Pentru a simplifica scrierea relațiilor de reciprocitate, avem nevoie de notația:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}(s, r) = & \int_{\partial D} \left[t_m^{(\nu)}(s, x) v_m^{(\mu)}(r, x) + \tau_k^{(\nu)}(s, x) \phi_m^{(\mu)}(r, x) - \frac{1}{\vartheta_0} b \bar{q}_m^{(\nu)}(s, x) \vartheta^{(\mu)}(r, x) \right] dA \\ & + \int_D \left[f_m^{(\nu)}(s, x) v_m^{(\mu)}(r, x) + g_m^{(\nu)}(s, x) \phi_m^{(\mu)}(r, x) - \frac{1}{\vartheta_0} b \omega^{(\nu)}(s, x) \vartheta^{(\mu)}(r, x) \right] dV \\ & + \int_D \left[\varrho \ddot{v}_m^{(\nu)}(s, x) v_m^{(\mu)}(r, x) + I_{mn} \ddot{\phi}_m^{(\nu)}(s, x) \phi_n^{(\mu)}(r, x) \right. \\ & \quad \left. - h \dot{\vartheta}^{(\nu)}(s, x) \vartheta^{(\mu)}(r, x) - a d \vartheta^{(\nu)}(s, x) \dot{\vartheta}^{(\mu)}(r, x) \right] dV \\ & + \frac{1}{\vartheta_0} \int_D b \bar{q}_m^{(\nu)}(s, x) \vartheta_m^{(\mu)}(r, x) dV, \quad \nu, \mu = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

unde am folosit următoarea convenție:

$$\begin{aligned} t_m^{(\nu)} &= t_{mk}^{(\nu)} n_k, \quad \tau_k^{(\nu)} = \tau_{kl}^{(\nu)} n_l, \\ \omega^{(\nu)} &= \bar{S}^{(\nu)} + \vartheta_0 \left(\eta^{0,(\nu)} - a \right), \quad q^{(\nu)} = q_k^{(\nu)} n_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De asemenea, sunt introduse următoarele notații:

$$\begin{aligned} J_{\nu\mu}(s, r) &= t_{mn}^{(\nu)}(s)v_{m,n}^{(\mu)}(r) + \tau_{mn}^{(\nu)}(s)\phi_{m,n}^{(\mu)}(r) \\ &- b \left[\eta^{(\nu)}(s) - \alpha \right] \vartheta^{(\mu)}(r), \quad \nu, \mu = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

și

$$I_{\nu\mu}(s, r) = J_{\nu\mu}(s, r) + h\dot{\vartheta}^{(\nu)}(s)\vartheta^{(\mu)}(r) + ad\vartheta^{(\nu)}(s)\dot{\vartheta}^{(\mu)}(r), \quad \nu, \mu = 1, 2. \quad (3.14)$$

În (3.13) și (3.14) am evitat scrierea dependenței de variabila x .

Acum formulăm și dovedim primul rezultat de reciprocitate.

Teoremă 9. *Dacă relațiile de simetrie sunt îndeplinite, atunci pentru orice $s, r \in [0, \infty)$ este valabilă următoarea egalitate:*

$$\Gamma_{\nu\mu}(s, r) = \Gamma_{\mu\nu}(s, r), \quad \nu, \mu = 1, 2. \quad (3.15)$$

Pentru a obține un alt rezultat de reciprocitate, vom lua în considerare notațiile:

$$\begin{aligned} F_m^{(\nu)} &= r * \left[f_m^{(\nu)}(s) + g_m^{(\nu)}(s) \right] + \varrho \left[t\dot{v}_m^{1,(\nu)} + v_m^{0,(\nu)} \right], \\ G_m^{(\nu)} &= r * \left[g_m^{(\nu)}(s) + f_m^{(\nu)}(s) \right] + \varrho \left[t\dot{v}_m^{1,(\nu)} + v_m^{0,(\nu)} \right], \\ R^{(\nu)} &= -t\vartheta^{0,(\nu)}, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cu ajutorul teoremei 9 și a notațiilor (3.16) obținem un nou rezultat de reciprocitate.

Teoremă 10. *Dacă relațiile de simetrie sunt satisfăcute și $\mathcal{S}^{(\nu)}$ este soluția care corespunde sistemului de date externe $\mathcal{S}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, atunci este valabilă următoarea egalitate:*

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D} r * \left[t_m^{(1)}(s) * v_m^{(2)} + \tau_k^{(1)} * \phi_k^{(2)} - \frac{1}{\vartheta_0} q^{(1)} * c\vartheta^{(2)} \right] dA \\ &+ \int_D \left[F_m^{(1)} * v_m^{(2)} + G_m^{(1)} * \phi_m^{(2)} - \frac{1}{\vartheta_0} p * \vartheta^{(2)} * c\omega^{(1)} \right] dV \\ &\quad - \frac{a}{\vartheta_0} \int_{\partial D} p * q^{(1)} * R^{(2)} dA - \frac{a}{\vartheta_0} \int_D \omega^{(1)} * R^{(2)} dV \\ &\quad + \int_D \left[(h - ad)R^{(1)} * \vartheta^{(2)} + ap * \kappa_{mn}\vartheta_{,n}^{(1)} * R_{,m}^{(2)} \right] dV \\ &= \int_{\partial D} r * \left[t_m^{(2)}(s) * v_m^{(1)} + \tau_k^{(2)} * \phi_k^{(1)} - \frac{1}{\vartheta_0} q^{(2)} * c\vartheta^{(1)} \right] dA \\ &\quad + \int_D \left[F_m^{(2)} * v_m^{(1)} + G_m^{(2)} * \phi_m^{(1)} - \frac{1}{\vartheta_0} p * \vartheta^{(1)} * c\omega^{(2)} \right] dV \\ &\quad - \frac{a}{\vartheta_0} \int_{\partial D} p * q^{(2)} * R^{(1)} dA - \frac{a}{\vartheta_0} \int_D \omega^{(2)} * R^{(1)} dV \\ &\quad + \int_D \left[(h - ad)R^{(2)} * \vartheta^{(1)} + ap * \kappa_{mn}\vartheta_{,n}^{(2)} * R_{,m}^{(1)} \right] dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pentru a simplifica relațiile care urmează, vom folosi notația:

$$G(s, r) = - \int_D \left[\frac{1}{\vartheta_0} \omega(s) b \vartheta(r) - f_m(s) v_m(r) - g_m(s) \phi_m(r) \right] dV \\ - \int_{\partial D} \left[\frac{1}{\vartheta_0} \bar{q}(s) b \vartheta(r) - t_m(s) v_m(r) - \tau_k(s) \phi_m(r) \right] dA, \quad \forall s, r \in [0, \infty). \quad (3.18)$$

Relația de reciprocitate (3.15) stă la baza rezultatului din următoarea teoremă.

Teoremă 11.

Dacă relațiile de simetrie sunt satisfăcute și $\mathcal{S}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, este soluția care corespunde sistemului de date externe, atunci este valabilă următoarea egalitate:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_D [\varrho v_m v_m + I_{mn} \phi_m \phi_n + a \kappa_{mn} \bar{\vartheta}_{,m} \bar{\vartheta}_{,n}] dV \right\} \\ + \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \int_D [(ad - h) \vartheta^2 + \kappa_{mn} \bar{\vartheta}_{,n} \bar{\vartheta}_{,m}] dV ds \right\} = \\ = \int_0^t [G(t - \tau, t + \tau) - G(t + \tau, t - \tau)] d\tau \quad (3.19) \\ + \int_D \left[\varrho (\dot{v}_m(2t) v_m(0) + \dot{v}_m(0) v_m(2t)) + I_{mn} [\dot{\phi}_m(2t) \phi_m(0) + \dot{\phi}_m(0) \phi_m(2t)] \right] dV \\ + \int_D [(ad - h) \vartheta(0) \vartheta(2t) + a \kappa_{mn} \bar{\vartheta}_{,n}(2t) \bar{\vartheta}_{,m}(0)] dV.$$

Teoremele prezentate anterior sunt esențiale pentru a demonstra că soluțiile ecuațiilor unui sistem fizic respectă anumite principii de simetrie și conservare, ceea ce facilitează atât analiza teoretică, cât și aplicarea practică a acestor soluții. Acum putem aborda problema unicității soluției problemei $\mathcal{P}$.

Teoremă 12.. *Presupunem că:*

- *sunt satisfăcute relațiile de simetrie;*
 - *ϱ și $ad - h$ sunt strict pozitive;*
 - *tensorul κ_{mn} este pozitiv semidefinit; - $a \geq 0$.*
- Atunci problema mixtă $\mathcal{P}$ admite cel mult o soluție.*

Pentru cel de-al doilea rezultat introducem funcționala $\mathcal{F}$, definită pe H , prin:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t, \mathcal{A}) = & \int_D p * [A_{klmn} e_{kl} * e_{mn} + B_{mnkl} \sigma_{kl} * e_{mn} + C_{klmn} \sigma_{kl} * e_{mn} \\
& + \varrho v_m * v_m + I_{mn} \phi_m * \phi_n - \frac{1}{\vartheta_0} r * \kappa_{mn} \vartheta_{,m} * \vartheta_{,n} - r * q_m * \vartheta_{,m} \\
& - [\varrho v_m - r * t_{mn,n} - F_m] * v_m + (I_{mn} \phi_m - p * \tau_{mn,n} - \epsilon_{mjk} t_{jk} - G_m) * \phi_m \\
& - \frac{\vartheta_0}{\alpha} r * (S - \alpha_{mn} e_{mn} - \beta_{mn} \varepsilon_{mn}) * (S - \alpha_{kl} e_{kl} - \beta_{kl} \varepsilon_{kl}) \\
& - r * (t_{mn} * e_{mn} + \tau_{mn} * \varepsilon_{mn}) - (p * S + r * q_{m,m} - R) * \vartheta] dV \\
& + \int_{\Sigma_1} r * t_m * \tilde{v}_m dA + \int_{\Sigma_1^c} r * (t_m - \tilde{t}_m) * v_m dA \\
& + \int_{\Sigma_2} r * \tau_k * \tilde{\phi}_k dA + \int_{\Sigma_2^c} r * (\tau_k - \tilde{\tau}_k) * \phi_k dA \\
& + \int_{\Sigma_3} r * q * \tilde{\vartheta} dA + \int_{\Sigma_3^c} r * (q - \tilde{q}) * \vartheta dA, \quad t \in [0, \infty),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

pentru orice $\mathcal{A} = (v_m, \phi_m, \vartheta, e_{mn}, \sigma_{mn}, t_{mn}, \tau_{mn}, q_m, S) \in H$.

Teoremă 13.. *Să presupunem că relațiile de simetrie sunt satisfăcute, $\alpha \neq 0$ în domeniul D și starea termoelastică $\mathcal{A}$ este o soluție a problemei mixte $\mathcal{P}$. Atunci variația funcționalului $\mathcal{A}$ este zero, mai exact*

$$\delta \mathcal{F}(t, \mathcal{A}) = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{3.21}$$

Remarcă.

Nu este greu de arătat că afirmația din teorema 13 este valabilă și reciproc (vezi Gurtin [34]). Cu alte cuvinte, dacă identitatea (3.21) este adevărată, atunci starea $\mathcal{A}$ pentru care această identitate este adevărată este soluția unică a problemei noastre. Ideea demonstrației, care este sugerată și de Gurtin în [34], se bazează pe o alegere particulară a stării termoelastice $\bar{\mathcal{A}}$. În cazul nostru, starea termoelastică propusă de Lebon în [21] poate fi utilizată cu succes.

Capitol 4

Medii dipolare

În acest capitol vor fi utilizate notațiile prezente în tabelul de mai jos.

Notații	Interpretare fizică
a, b, c, d, h	coeficienți constanți specifici căldurii
η	entropia specifică pe unitatea de masă
I_{ij}	componentele tensorului microinerție
t_{ij}	componentele tensorului tensiune
τ_{ij}	componentele tensorului cuplu de tensiune
σ_{ijk}	componentele momentului de stres
q_i	componentele vectorului de conducție termică
v_i	componentele vectorului deplasare
ϕ_i	componente ale microrotației
τ_k	tracțiunile de suprafață
g_{mn}	forța dipolară a corpului
f_m	forța masică
$n = (n_l)$	vectorul normală la frontiera ∂D
T	temperatura conductivă
φ	modificarea fracției de volum
ϑ	temperatura termodinamică
ϑ_0	temperatura de referință constantă
κ	microinerția
l	forța extrinsecă a corpului
ρ	densitatea masei de referință
ϵ_{ijk}	simbolul lui Ricci

Tabel 4.1: Notații

4.1 Unicitate și instabilitate

4.1.1 Problema mixtă cu date inițiale și la limită

Pentru determinarea unicității și instabilității corpurilor dipolare cu două temperaturi se folosesc aceiași pași ca în cazul mediilor micropolare, diferența fiind reprezentată de complexitatea calculelor dată de trecerea de la vectori la tensori. Așadar, se consideră că un corp termoelastic cu structură dipolară ocupă domeniul tridimensional Ω din spațiul euclidian R^3 . Închiderea lui Ω este notată cu

$\bar{\Omega}$ și avem $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, unde $\partial\Omega$ este frontiera domeniului Ω și este considerată suficient de regulată pentru a permite aplicarea teoremei divergenței. Raportăm mișcarea corpului termoelastic la un sistem fix de axe ortogonale Ox_i , $i = 1, 2, 3$. Cu scopul caracterizării evoluției corpului nostru, considerăm mulțimea de variabile $(v_i, \phi_{ij}, T, \vartheta)$.

Având în vedere ecuațiile geometrice și ecuațiile constitutive, care sunt introduse în ecuațiile de bază, suntem conduși la următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned}
& (A_{ijmn} + E_{ijmn}) v_{n,mj} + (E_{mnij} + B_{ijmn}) (v_{n,mj} - \phi_{mn,j}) \\
& + (F_{ijklm} + D_{ijklm}) \phi_{lm,kj} - (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) (\vartheta_{,j} + a\dot{\vartheta}_{,j}) = \rho\ddot{v}_i, \\
& F_{jklmn} v_{n,mj} + D_{mnjkl} (v_{n,mj} - \phi_{mn,j}) + C_{kljmnr} \phi_{nr,mj} - \delta_{klj} (\vartheta_{,j} + a\dot{\vartheta}_{,j}) \\
& + E_{klmn} v_{m,n} + B_{klmn} (v_{m,n} - \phi_{mn}) + D_{klmnr} \phi_{nr,m} - \beta_{kl} (\vartheta + a\dot{\vartheta}) = I_{kr} \ddot{\phi}_{lr}, \\
& \kappa_{ij} T_{,ij} - \alpha_{ij} \dot{v}_{i,j} - \beta_{ij} (\dot{v}_{i,j} - \dot{\phi}_{ij}) - \delta_{ijk} \dot{\phi}_{ij,k} = h\ddot{\vartheta} + d\dot{\vartheta}, \tag{4.1}
\end{aligned}$$

care sunt satisfăcute pentru orice $(x) \in \Omega \times (0, \infty)$.

Printr-o soluție ne referim la o mulțime ordonată $(v_i, \phi_{ij}, T, \vartheta)$ care satisface sistemul de ecuații (4.1), condițiile la limită și condițiile inițiale.

4.1.2 Rezultate principale

Introducem legea de conservare a energiei

$$W_1(t) = W_1(0), \quad t \in [0, \infty), \tag{4.2}$$

corespunzătoare cazului în care luăm în considerare relația cu două temperaturi (??) și unde

$$\begin{aligned}
W_1(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho \dot{v}_i(t) \dot{v}_i(t) + I_{jk} \dot{\phi}_{ij}(t) \dot{\phi}_{ik}(t) + A_{ijkl} e_{ij}(t) e_{kl}(t) \right. \\
& + 2E_{ijkl} e_{ij}(t) \varepsilon_{kl}(t) + 2F_{ijklm} e_{ij}(t) \gamma_{klm}(t) + B_{ijkl} \varepsilon_{ij}(t) \varepsilon_{kl}(t) \\
& + 2G_{ijklm} \varepsilon_{ij}(t) \gamma_{klm}(t) + C_{ijklmn} \gamma_{ijk}(t) \gamma_{lmn}(t) \\
& + c \kappa_{ij} T_{,i}(t) T_{,j}(t) + d \left(\vartheta(t) + \frac{h}{d} \dot{\vartheta}(t) \right)^2 + h \left(a - \frac{h}{d} \right) \dot{\vartheta}^2(t) \left. \right] dV \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} \left[\kappa_{ij} T_{,i}(s) T_{,j}(s) + c \left((\kappa_{ij} T_{,i}(s))_{,j} \right)^2 + (ad - h) \dot{\vartheta}^2(s) \right] dV ds.
\end{aligned}$$

În cazul în care considerăm relația (??), adică nu luăm în considerare variația de temperatură a conductibilității, legea conservării energiei primește forma

$$W_2(t) = W_2(0), \quad t \in [0, \infty), \tag{4.3}$$

unde

$$\begin{aligned}
W_2(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho \dot{v}_i(t) \dot{v}_i(t) + I_{jk} \dot{\phi}_{ij}(t) \dot{\phi}_{ik}(t) + A_{ijkl} e_{ij}(t) e_{kl}(t) \right. \\
& + 2E_{ijkl} e_{ij}(t) \varepsilon_{kl}(t) + 2F_{ijklm} e_{ij}(t) \gamma_{klm}(t) + B_{ijkl} \varepsilon_{ij}(t) \varepsilon_{kl}(t) \\
& + 2G_{ijklm} \varepsilon_{ij}(t) \gamma_{klm}(t) + C_{ijklmn} \gamma_{ijk}(t) \gamma_{lmn}(t) \\
& + d \left(\vartheta(t) + \frac{h}{d} \dot{\vartheta}(t) \right)^2 + h \left(a - \frac{h}{d} \right) \dot{\vartheta}^2(t) \Big] dV \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} \left[\kappa_{ij} T_{,i}(s) T_{,j}(s) + c \left((\kappa_{ij} T_{,i}(s))_{,j} \right)^2 + (ad - h) \dot{\vartheta}^2(s) \right] dV ds.
\end{aligned}$$

Sistemul de ecuații (4.1), condițiile la limită și condițiile inițiale formează, împreună, problema mixtă pe care o vom nota cu $\mathcal{P}$.

În continuare, vom obține două rezultate principale, o unicitate și o instabilitate, pentru rezolvarea problemei mixte $\mathcal{P}$. Pentru unicitate folosim procedeul uzual: vom arăta că problema $\mathcal{P}$ admite doar soluția nulă, dacă se consideră că datele inițiale sunt nule.

Teoremă 14. *Problema mixtă cu date inițiale și la limită $\mathcal{P}$, în cazul datelor inițiale nule, admite doar soluția nulă.*

În a doilea rezultat principal, dorim să demonstrăm că soluția problemei mixte $\mathcal{P}$ este exponențial instabilă, dacă sunt îndeplinite anumite condiții.

Mai exact, vom presupune că energia inițială a sistemului nu este strict pozitivă.

În primul rând, introducem un rezultat auxiliar util.

Să notăm cu $\nu(x)$ funcția care satisface următoarea problemă de mărginire.

$$\begin{aligned}
(\kappa_{ij} \nu_{,i}(x))_{,j} &= d\vartheta^1 + h\vartheta^0 - (\alpha_{ij} e_{ij}^0 + \beta_{ij} \epsilon_{ij}^0 + \delta_{ijk} \gamma_{ijk}^0), \quad x \in \Omega, \\
\nu(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Faptul că problema de mărginire (4.4) are o soluție poate fi dedus din proprietățile obișnuite ale problemelor cu date la limită atașate ecuațiilor eliptice.

Din (4.4) deducem că funcția ν satisface ecuația:

$$\begin{aligned}
d\vartheta(x) + h\dot{\vartheta}(x) - [\kappa_{ij} (\nu_{,i}(x) + \xi_{,i}(x))]_{,j} &= \\
&= \alpha_{ij} e_{ij}(x) + \beta_{ij} \epsilon_{ij}(x) + \delta_{ijk} \gamma_{ijk}(x),
\end{aligned}$$

unde funcția $\xi(x)$ este definită anterior.

Acum, considerăm problema de mai sus $\mathcal{P}$ în situația în care datele inițiale sunt neomogene și datele la limită omogene.

Teoremă 15. *Să presupunem coeficienții și tensorii pozitivi.*

Dacă problema mixtă cu valori inițiale și la limită $\mathcal{P}$, în cazul datelor la limită nule, admite o soluție pentru care $W_2(0) \geq 0$, atunci această soluție este exponențial instabilă.

4.2 Efectul golurilor și al variabilelor de stare internă în elasticitatea mediilor cu structură dipolară

4.2.1 Ecuații și condiții de bază

Vom considera Ω un domeniu deschis al spațiului euclidian R^3 care este ocupat, la momentul inițial $t = 0$, de un mediu elastic cu variabile interne de stare și structură dipolară. Suprafața $\partial\Omega$ este frontiera domeniului D și este o mulțime închisă și mărginită care permite aplicarea teoremei divergenței. Un punct din Ω este reprezentat sub forma (x_i) sau (x) . Pentru variabila de timp t presupunem că $t \in [0, t_0]$.

Pentru a caracteriza evoluția unui mediu dipolar elastic cu goluri se folosesc variabilele cinematice care urmează:

$$v_m = v_m(x, t), \phi_{jk} = \phi_{jk}(x, t), \varsigma = \varsigma(x, t), (x, t) \in \Omega \times [0, t_0],$$

unde ς reprezintă modificarea fracției de volum.

În următoarele considerații vom folosi φ ca funcție de distribuție a volumului, unde $\varphi = \varsigma - \varsigma_0$, unde ς_0 este valoarea lui ς în starea inițială.

Folosind procedeul lui Green și Rivlin, putem considera o altă deformare care diferă de deformația dată doar printr-o suprapunere a unei mișcări rigide care constă într-o rotație cu viteză unghiulară constantă. Trebuie să presupunem că pentru această mișcare, toate celelalte proprietăți ale mediilor rămân neafectate de această suprapunere. În consecință, obținem următoarele relații cinematice, care furnizează expresii măsurilor deformării, și anume e_{ij} , ε_{ij} și γ_{ijk} , cu privire la variabilele de mișcare:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad \varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \phi_{ij}, \\ \gamma_{ijk} &= \phi_{jk,i}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Vom nota variabilele interne de stare cu ξ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$ și vom folosi notația ξ_ν^0 pentru valorile variabilelor în starea inițială a corpului. Fiind în contextul unei teorii liniare este firesc să folosim ca variabile interne diferența de mai jos, ω_ν , adică:

$$\omega_\nu = \xi_\nu - \xi_\nu^0. \tag{4.6}$$

Vom face considerații numai în cazul particular în care solidele au un punct care este centrul de simetrie. De asemenea, considerăm că pentru corpul, care în starea sa inițială este netensionat, densitatea de energie internă este o formă pătratică în raport cu variabilele sale independente constitutive. Deci, folosind principiul

conservării energiei, obținem următoarea expresie a densității energiei interne:

$$\begin{aligned}\Psi = & \frac{1}{2}A_{ijmn}e_{ij}e_{mn} + G_{ijmn}e_{ij}\varepsilon_{mn} + F_{ijmnr}e_{ij}\gamma_{mnr} + \frac{1}{2}B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} \\ & + D_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\gamma_{mnr} + \frac{1}{2}C_{ijkmnr}\gamma_{ijk}\gamma_{mnr} + a_{ijk}e_{ij}\varphi_{,k} + b_{ijk}\varepsilon_{ij}\varphi_{,k} + c_{ijkm}\gamma_{ijk}\varphi_{,k} \\ & + \frac{1}{2}p_{mn}\varphi_{,m}\varphi_{,n} + \alpha_{ij\nu}e_{ij}\omega_{\nu} + \beta_{ij\nu}\varepsilon_{ij}\omega_{\nu} + \delta_{ijk\nu}\gamma_{ijk}\omega_{\nu} + f_{i\nu}\varphi_{,i}\omega_{\nu}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Coeficienții de mai sus A_{ijmn} , B_{ijmn} , ..., a_{ijk} , ..., $f_{i\nu}$ caracterizează proprietățile elastice ale unui corp cu pori și cu variabilă de stare internă și se numesc coeficienți constitutivi. În general, acești coeficienți depind de punctul x , iar în cazul particular când corpul este omogen, ei au valoare constantă.

Cu ajutorul acestei densități de energie internă se obțin următoarele relații constitutive, care furnizează expresiile pentru măsurile tensiunii, t_{ij} , τ_{ij} , m_{ijk} , h_i , ca funcții ce depind de tensorii deformării:

$$\begin{aligned}t_{ij} &= \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} = A_{ijmn}e_{mn} + G_{mnij}\varepsilon_{mn} + F_{mnrij}\gamma_{mnr} + a_{ijk}\varphi_{,k} + \alpha_{ij\nu}\omega_{\nu}, \\ \tau_{ij} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = G_{ijmn}e_{mn} + B_{ijmn}\varepsilon_{mn} + D_{ijmnr}\gamma_{mnr} + b_{ijk}\varphi_{,k} + \beta_{ij\nu}\omega_{\nu}, \\ \sigma_{ijk} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ijk}} = F_{ijkmn}e_{mn} + D_{mnijk}\varepsilon_{mn} + C_{mnrijk}\gamma_{mnr} + c_{ijkm}\varphi_{,m} + \delta_{ijk\nu}\omega_{\nu}, \\ h_i &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_{,i}} = a_{ijk}e_{jk} + b_{ijk}\varepsilon_{jk} + c_{ijsm}\gamma_{jsm} + f_{i\nu}\omega_{\nu}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Procedeu folosit de Green și Rivlin în cazul elasticității clasice, poate fi folosit și pentru obținerea legilor echilibrului în contextul elasticității mediilor poroase cu structură dipolară și anume:

- ecuațiile de mișcare

$$\begin{aligned}(t_{mn} + \tau_{mn})_{,n} + \rho f_m &= \rho \ddot{v}_m, \\ \sigma_{ijk,i} + \tau_{jk} + \rho g_{jk} &= I_{kr}\ddot{\phi}_{jr};\end{aligned}\quad (4.9)$$

- ecuația forțelor de echilibru:

$$h_{i,i} + \rho l = \rho k \ddot{\varphi}.\quad (4.10)$$

În contextul unei aproximări liniare putem folosi o sugestie din [72] astfel încât inegalitatea producerii entropiei să conducă la următoarea ecuație:

$$\dot{\omega}_{\nu} = f_{\nu},\quad (4.11)$$

unde

$$f_{\nu} = g_{ij\nu}e_{ij} + h_{ij\nu}\varepsilon_{ij} + l_{ijk\nu}\gamma_{ijk} + q_{\nu\beta}\omega_{\beta}.\quad (4.12)$$

Notățiile folosite se găsesc în tabelul 2.1.

Deoarece tensorul e_{ij} este simetric, putem deduce următoarele relații de simetrie:

$$\begin{aligned} A_{ijmn} &= A_{mnij} = A_{ijnm}, \quad B_{ijmn} = B_{mnij}, \quad G_{ijmn} = G_{ijnm}, \\ C_{ijkmnr} &= C_{mnrijk}, \quad p_{mn} = p_{nm}. \end{aligned}$$

Pentru a construi problema mixtă în contextul prezent, vom adăuga, pe lângă ecuațiile de bază de mai sus, următoarele condiții inițiale:

$$\begin{aligned} v_m(x, 0) &= v_{0m}(x), \quad \dot{v}_m(x, 0) = v_{1m}(x), \\ \phi_{jk}(x, 0) &= \phi_{0jk}(x), \quad \dot{\phi}_{jk}(x, 0) = \phi_{1jk}(x), \\ \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad \omega_\nu(x, 0) = \omega_{0\nu}(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.13)$$

și condițiile la limită date de:

$$\begin{aligned} v_m &= \tilde{v}_m, \text{ on } \bar{\Sigma}_1 \times [0, t_0], \quad t_j \equiv (t_{jk} + \tau_{jk}) n_k = \tilde{t}_j, \text{ pe } \Sigma_1^c \times [0, t_0], \\ \phi_{ij} &= \tilde{\phi}_{ij}, \text{ on } \bar{\Sigma}_2 \times [0, t_0], \quad \sigma_{jk} \equiv \sigma_{ijk} n_i = \tilde{\sigma}_{jk}, \text{ on } \Sigma_2^c \times [0, t_0], \\ \varphi &= \tilde{\varphi}, \text{ on } \bar{\Sigma}_3 \times [0, t_0], \quad h \equiv h_i n_i = \tilde{h}, \text{ on } \Sigma_3^c \times [0, t_0]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

În (4.14) suprafețele $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$ și $\bar{\Sigma}_3$ împreună cu complementele lor Σ_1^c , Σ_2^c și Σ_3^c sunt submulțimi ale frontierei $\partial\Omega$ și îndeplinesc următoarele două condiții:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_1 \cup \Sigma_1^c &= \bar{\Sigma}_2 \cup \Sigma_2^c = \bar{\Sigma}_3 \cup \Sigma_3^c = \partial\Omega, \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_1^c &= \Sigma_2 \cap \Sigma_2^c = \Sigma_3 \cap \Sigma_3^c = \emptyset. \end{aligned}$$

Funcțiile v_{0m} , v_{1m} , ϕ_{0jk} , ϕ_{1jk} , φ_0 , $\omega_{0\nu}$, $\tilde{v}_m$, $\tilde{t}_m$, $\tilde{\varphi}_{jk}$, $\tilde{\sigma}_{jk}$, $\tilde{h}$ și $\tilde{\varphi}$, din condițiile de mai sus (4.13) și (4.14), sunt prescrise și îndeplinesc condiții suficiente de regularitate în domeniul lor de definiție.

Folosim notația $\mathcal{P}$ pentru problema mixtă în contextul teoriei elasticității mediilor cu pori și variabile de stare internă și cu o structură dipolară. Aceasta cuprinde ecuațiile (4.9)-(4.11), condițiile inițiale (4.13) și condițiile la limită (4.14).

O stare de deformare $(v_m, \phi_{jk}, \varphi, \omega_\nu)$ se numește soluție pentru problema mixtă $\mathcal{P}$ dacă pentru această deformare sunt verificate ecuațiile (4.9)-(4.11) și condițiile (4.13) și (4.14).

4.2.2 Rezultate de bază

În această secțiune vom aborda problema influenței pe care golurile și variabilele interne de stare o pot avea asupra comportamentului mediilor cu structură dipolară. Pentru a obține aceste rezultate, mai întâi vom introduce câteva estimări utile, cuprinse în teoremele 16, 17 și 18.

Prima estimare auxiliară este demonstrată în teorema 16.

Teoremă 16. Dacă $(v_m, \phi_{jk}, \varphi, \omega_\nu)$ este o soluție arbitrară pentru problema $\mathcal{P}_0$, atunci are loc următoarea egalitate:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (A_{ijmn}e_{ij}e_{mn} + 2G_{ijmn}e_{ij}\varepsilon_{mn} + 2F_{mnrij}e_{ij}\gamma_{mnr} \\ + B_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + C_{ijsmnr}\gamma_{ijs}\gamma_{mnr} + 2D_{ijmnr}\varepsilon_{ij}\gamma_{mnr} + 2\alpha_{ij\nu}e_{ij}\omega_\nu \\ + 2\beta_{ij\nu}\varepsilon_{ij}\omega_\nu + 2\delta_{ijr\nu}\gamma_{ijr}\omega_\nu + \rho\dot{v}_m\dot{v}_m + I_{kr}\dot{\phi}_{jr}\dot{\phi}_{jk}) dV \\ = 2 \int_0^t \int_{\Omega} (\alpha_{ij\nu}e_{ij} + \beta_{ij\nu}\varepsilon_{ij} + \delta_{ijr\nu}\gamma_{ijr}) \dot{\omega}_\nu dV ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

În următoarea teoremă vom demonstra o altă estimare auxiliară.

Teoremă 17. Să considerăm $(v_m, \phi_{jk}, \varphi, \omega_\nu)$ o soluție a problemei P_0 . Atunci putem găsi constanta pozitivă m_1 astfel încât să fie satisfăcută următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha_{ij\nu}e_{ij} + \beta_{ij\nu}\varepsilon_{ij} + \delta_{ijs\nu}\gamma_{ijs}) \dot{\omega}_\nu dV \leq \\ m_1 \int_{\Omega} (e_{ij}e_{ij} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \gamma_{ijs}\gamma_{ijs} + \varphi_{,m}\varphi_{,m} + \omega_\nu\omega_\nu) dV. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ultima estimare auxiliară va fi demonstrată în următoarea teoremă.

Teoremă 18. Să presupunem că ipotezele menționate anterior sunt îndeplinite și luăm în considerare o soluție $(v_m, \phi_{jk}, \varphi, \omega_\nu)$ pentru problema $\mathcal{P}_0$. Atunci poate fi determinată o constantă $m_2 > 0$ astfel încât să aibă loc următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{v}_m\dot{v}_m + \dot{\phi}_{kj}\dot{\phi}_{jk} + e_{ij}e_{ij} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \gamma_{ijk}\gamma_{ijk} + \varphi^2 + \omega_\nu\omega_\nu) dV \leq \\ m_2 \int_0^t \int_{\Omega} (\dot{v}_m\dot{v}_m + \dot{\phi}_{jk}\dot{\phi}_{jk} + e_{ij}e_{ij} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \gamma_{ijk}\gamma_{ijk} + \varphi^2 + \omega_\nu\omega_\nu) dV ds, \end{aligned} \quad (4.17)$$

care are loc pentru orice $t \in [0, t_0]$.

Rezultatul nostru principal va fi obținut luând în considerare estimările date de teorema 16, de teorema 17 și de teorema 18. Deci, vom demonstra unicitatea problemei mixte cu date inițiale și la limită $\mathcal{P}$.

Teoremă 19. Presupunem că tensorii constitutivi și densitatea masei sunt pozitiv definiți. Apoi problema de mai sus $\mathcal{P}$ definită de ecuațiile (4.9)-(4.10) cu datele inițiale (4.13) și datele la limită (4.14) nu poate admite mai mult de o soluție.

Capitol 5

Concluzii finale. Diseminarea rezultatelor de cercetare. Direcții viitoare de cercetare

5.0.1 Concluzii finale

În lucrarea prezentă a fost analizat în profunzime comportamentul mediilor micropolare izotrope și anizotrope, precum și al mediilor dipolare.

În prima parte au fost studiate principiile variaționale, dependența continuă și ecuațiile fundamentale ale mediilor micropolare izotrope, formând astfel o bază solidă pentru analiza ulterioară. Am continuat cu studiul deformării plane și al propagării undelor cu doi timpi de întârziere, rezultate ce oferă o perspectivă detaliată asupra influenței surselor de căldură, a porilor și a incluziunilor asupra comportamentului mecanic.

În a doua parte au fost obținute soluții bazate pe potențiali complecși, aplicabile în analiza tensiunilor și a deformărilor din jurul incluziunilor circulare, ceea ce ajută la modelarea și simularea numerică a acestor fenomene.

În ceea ce privește studiul mediilor micropolare anizotrope, au fost aduse în discuție unicitatea și instabilitatea în termoelasticitate, prin formulări variaționale ale problemelor cu condiții la limită și inițiale. De asemenea au fost abordate principiile de reciprocitate și variaționale, evidențiind rolul acestora în determinarea soluțiilor.

În final, în analiza mediilor dipolare au fost obținute efectele golurilor și ale variabilelor de stare internă asupra elasticității acestora, rezultate ce contribuie la înțelegerea modului în care structura dipolară influențează comportamentul mecanic.

Prin urmare, lucrarea prezentă oferă o perspectivă amplă asupra teoriilor și aplicațiilor mediilor micropolare și dipolare, utilizând metode analitice și numerice pentru a investiga fenomene complexe. Rezultatele obținute au relevanță atât teoretică, cât și practică, putând fi aplicate în diverse domenii ale mecanicii materialelor și ingineriei structurale.

5.0.2 Diseminarea rezultatelor originale

Articole incluse în teza de doctorat

- Marin, M., Vlase, S., **Fudulu, I.M.**, Precup, G.: Effect of Voids and Internal State Variables in Elasticity of Porous Bodies with Dipolar Structure, *Mathematics*, **9**(21), Art. No. 2741 (2021).
<https://doi.org/10.3390/math9212741>
 -wos:000719349700001
- Marin, M., **Fudulu, I.M.**, Vlase, S. :On some qualitative results in thermodynamics of Cosserat bodies, *Boundary Value Problem* 2022, **69** (2022).
<https://doi.org/10.1186/s13661-022-01652-8>
 -wos:000860971100001
- Marin, M., Vlase, S., **Fudulu, I. M.**: On instability in the theory of dipolar bodies with two-temperatures, *Carpathian Journal of Mathematics*, **38**, 459-468 (2022).
<https://doi.org/10.37193/CJM.2022.02.15>
 -wos:000761969400001
- **Fudulu, I.M.**:Plane strain of isotropic micropolar bodies with pores, *Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III: Mathematics and Computer Science*, Vol. **3**(65), No. 1, 81-92 (2023).
<https://doi.org/10.31926/but.mif.2023.3.65.1.7>
- Neagu, D.M., **Fudulu, I.M.** , Marin, M. :Complex potentials solutions for isotropic Cosserat bodies with voids, *Boundary Value Problem* 2024, **129** (2024).
<https://doi.org/10.1186/s13661-024-01938-z>
 - wos:001330082400001
- Neagu, D.M., **Fudulu, I.M.**, Marin, M. et al. :Wave propagation with two delay times in an isotropic porous micropolar thermoelastic material, *Continuum Mech. Thermodyn.* **36**, 639–655 (2024).
<https://doi.org/10.1007/s00161-024-01287-3>
 -wos:001330082400001
- **Fudulu, I.M.**, Marin, M.: On a variational principle and continuous dependence result for a micropolar isotropic body, *Changes and Innovations in Social Systems, Studies in Systems, Decision and Control*, Springer, **505** (2025).
<https://doi.org/10.1007/978-3-031-43506-5-6>

Alte articole elaborate în timpul studiilor

- Bhatti, M.M., Marin, M., Ellahi, R., **Fudulu, I.M.** :Insight into the dynamics of EMHD hybrid nanofluid (ZnO/CuO-SA) flow through a pipe for geothermal energy applications, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* **48**, 14261–14273 (2023).
<https://doi.org/10.1007/s10973-023-12565-8>

-wos: 001082625700001

Prezentarea rezultatelor cercetării

● 4th Edition - MACOS 2022, *International Conference on Mathematics and Computer Science*, September 15-17, 2022, Braşov, Romania.

- **Fudulu, I.M.**, Marin, M.: *On a variational principle and continuous dependence result for a micropolar isotropic body*, *Changes and Innovations in Social Systems. Studies in Systems, Decision and Control*, Springer, **505** (2025). <https://doi.org/10.1007/978-3-031-43506-5-6>

● 5th *International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering*, September 16-18, 2024, Coimbra, Portugalia.

- Neagu, D.M., **Fudulu, I.M.**, Marin, M. : *Complex potentials solutions for isotropic Cosserat bodies with voids*, *Bound Value Probl* 2024, **129** (2024). <https://doi.org/10.1186/s13661-024-01938-z>.

Premierea rezultatelor cercetării

5.0.3 Direcții viitoare de cercetare

Lucrarea prezentă oferă o analiză detaliată asupra comportamentului mediilor micropolare izotrope și anizotrope, precum și al mediilor dipolare, evidențiind atât fundamentele teoretice, cât și metode avansate de soluționare. Complexitatea acestor domenii permite o gamă largă de direcții viitoare de cercetare, care să aprofundeze și să extindă rezultatele obținute.

O primă direcție posibilă ar putea fi extinderea modelelor la medii neomogene și neliniare. În multe aplicații practice, materialele reale prezintă variații ale proprietăților mecanice în spațiu sau comportamente neliniare în urma solicitărilor extreme. Includerea acestor aspecte în modelele teoretice ar putea permite o descriere mai detaliată a comportamentului structurilor complexe și ar contribui la dezvoltarea unor metode mai precise de analiză.

O direcție promițătoare este, de asemenea, aplicarea rezultatelor teoretice la materiale avansate. Materialele cu memorie, metamaterialele și nanomaterialele sunt doar câteva exemple de structuri care prezintă proprietăți mecanice neobișnuite, cum ar fi auto-repararea sau rigiditatea negativă. Investigarea acestor materiale din perspectiva teoriilor micropolare și dipolare ar putea conduce la noi modele de proiectare în domenii precum biomedicina, ingineria aeronautică și robotica.

În plus, dezvoltarea metodelor numerice pentru cazuri tridimensionale reprezintă o provocare tehnică importantă. Utilizarea metodelor numerice avansate, precum metoda elementelor finite (FEM) sau metode bazate pe inteligență artificială, ar putea permite o simulare mai detaliată a fenomenelor și ar facilita optimizarea designului structurilor ingineresti.

Un alt aspect esențial pentru validarea modelelor este investigația experimentală. Deși modelele teoretice și numerice sunt extrem de utile, compararea acestora cu date experimentale poate confirma sau ajusta ipotezele folosite. Experimentele

pe materiale reale ar putea contribui la îmbunătățirea predicțiilor în domeniul elasticității micropolare și dipolare.

O direcție importantă de cercetare o reprezintă și studiul propagării undelor în structuri complexe. Acest subiect este relevant pentru aplicații diverse, de la acustică și seismologie până la analiza nondistructivă a materialelor. Înțelegerea mai profundă a mecanismelor de propagare ar putea duce la îmbunătățirea tehnicilor de detectare a defectelor și la dezvoltarea unor structuri capabile să atenueze sau să controleze propagarea undelor.

În concluzie, studiul mediilor micropolare și dipolare este un domeniu dinamic, cu numeroase aplicații practice și teoretice. Direcțiile viitoare de cercetare pot contribui semnificativ la îmbunătățirea modelelor existente, la dezvoltarea unor noi tehnologii și la înțelegerea mai profundă a comportamentului materialelor în condiții complexe. Astfel, acest domeniu rămâne unul de interes major atât pentru cercetători, cât și pentru inginerii care își propun să rezolve probleme din ce în ce mai sofisticate ale mecanicii materialelor.

Bibliography

- [1] Passarella, F.: *Some results In micropolar thermoelasticity*, Mechanics Research Communications, Col.23, No.4, 349-357 (1996).
- [2] Eringen, A.C.: *Theory of Micropolar elasticity. In Fracture (Edited by H. Leibowitz)*, Academic Press, New York, **2**, 622 (1968).
- [3] Eringen, A.C.: *Theory of Micropolar Elasticity. In Microcontinuum Field Theories*, Springer, New York, (1999).
- [4] Moiola, A., Hiptmair, R., Perugia, I.: *Plane wave approximation of homogeneous Helmholtz solutions*. Z. Angew. Math. Phys., **62**, 809–837 (2011).
- [5] Nunziato, J.W. and Cowin, S.C.: *A Nonlinear Theory of Elastic Materials with Voids*, Arch. Rat. Mech. Anal., **72**, 175-201 (1979).
- [6] Andreev, V. I. and Cybin, N. Y.: *The Inhomogeneous Plate with a Hole: Kirsch's Problem*. Procedia Engineering, **91**, 26–31 (2014). doi:10.1016/j.proeng.2014.12.006
- [7] Fudulu, I.M., Marin, M.: *On a variational principle and continuous dependence result for a micropolar isotropic body*, Springer, (2024).
- [8] Nowacki, W.: *The Linear Theory of Micropolar Elasticity*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, 1–43,(1974).
- [9] Neagu, D.M., Fudulu, I.M., Marin, M., Öchsner, A.: *Wave propagation with two delay times in an isotropic porous micropolar thermoelastic material*. Continuum Mech. Thermodyn., **36**, 639–655 (2024).
- [10] Jiang and Racke, R.: *Evolution Equations in Thermoelasticity*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, (2000).
- [11] Marin, M., Florea, O.: *On temporal behaviour of solutions in thermoelasticity of porous micropolar bodies*, An. St. Univ. Ovidius Constanta, **22**(1), 169-188(2014).
- [12] Fabrizio, M., Lazzari, B.: *Stability and Second Law of Thermodynamics in dual-phase-lag heat conduction*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **74**, 484-489 (2014).
- [13] Ciarletta, M., Svanadze, M., Buonanno, L.: *Plane waves and vibrations in the theory of micropolar thermoelasticity for materials with voids*, European Journal of Mechanics - A/Solids, **28**(4), 897-903 (2009).

- [14] Cowin, S.C., Nunziato, J.W.: *Linear elastic materials with voids*, Journal of Elasticity **13**, 125–147 (1983).
- [15] Eringen, A. C.: *Linear Theory of Micropolar Elasticity*, Journal of Mathematics and Mechanics, **15**(6), 909–923 (1966). <http://www.jstor.org/stable/24901442>
- [16] Tzou DY.: *Experimental support for the lagging behavior in heat propagation*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, **9**(4), 686-693 (1995).
- [17] Iesan, D.: *On some reciprocity theorems and variational theorems in linear dynamic theories of continuum mechanics*, Memorie Accad Sci Torino Cl Sci Fis Mat Nat Ser, **4**(17), 17–37(1974).
- [18] Tzou, DY.: *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*, 2nd Edition. Chichester: Wiley, (2014).
- [19] Zhang, L., et al.: *Hybrid nanofluid flow towards an elastic surface with tantalum and nickel nanoparticles, under the influence of an induced magnetic field*, Eur. Phys. J. Spec. Top., **231**(3), 521-533 (2022).
- [20] Marin, M., et al.: *About finite energy solutions in thermoelasticity of micropolar bodies with voids*, Bound. Val. Probl., **2019**, Art. No. 89 (2019).
- [21] Lebon, G and Perzina, P.: *Variational principles in thermomechanics, in Recent Developments in Thermomechanics of Solids, Eds., CISM Courses and Lectures*, Springer, Wien, Austria, No. 262, pp. 221-396 (1980).
- [22] Ieşan, D., Quintanilla, R.: *On a Theory of Thermoelastic Materials with a Double Porosity Structure*, Journal of Thermal Stresses **37**(9), 1017-1036 (2014).
- [23] Saccomandi, G.: *On inhomogeneous deformations in finite thermoelasticity*, IMA Journal of Applied Mathematics, No. 2, **63** 131–148, (1999).
- [24] Ailawalia, P., Sachdeva, S.K., Pathania, D.S.: *Plane Strain Deformation In A Thermoelastic Microelongated Solid With Internal Heat Source*, International Journal of Applied Mechanics and Engineering, **20**(4), (2015).
- [25] Knops, R.J. and Wilkes, E.W.: *Theory of elastic stability, Flugge handbuch der Physik (ed. C. Truesdell)*, Springer-Verlag, **6**, 125-302 (1973).
- [26] Knops, R.J. and Payne, L.E.: *Growth estimates for solutions of evolutionary equations in Hilbert space with applications in elastodynamics*, Arch. Ration. Mech. Anal., **41**, 363-398 (1971).
- [27] Li, J.R., Zhang, S.X.: *Minimum Principles for Linear Uncoupled Thermoelastodynamics*, Acta Mech. Sinica. **19**, 94-99 (1987).
- [28] Wang, Y., and Wu, W.: *Initial boundary value problems for the three-dimensional compressible elastic Navier-Stokes-Poisson equations*, Advances in Nonlinear Analysis **10**(1), 1356-1383, (2021). DOI:10.1515/anona-2020-0184

- [29] Biagi, S., Calamai, A., Marcelli, C., Papalini, F.: *Boundary value problems associated with singular strongly nonlinear equations with functional terms*, Advances in Nonlinear Analysis **10**(1), 684-706(2021). DOI:10.1515/anona-2020-0131
- [30] Nowacki, W.: *Thermoelasticity*, Pergamon Press, (1986).
- [31] Green, A.E., Lindsay, K.A.: *Thermoelasticity*, J. Elasticity, **2**, 1-7 (1972).
- [32] Eringen, A.C.: *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York (2002).
- [33] Adams, R.A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).
- [34] Gurtin, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, London, (1981).
- [35] Yadav, A. K.: *Thermoelastic waves in a fractional-order initially stressed micropolar diffusive porous medium*, Journal of Ocean Engineering and Science, **6**(4), 376-388 (2021).
- [36] Kumar, A., Kumar, R.: *Wave Propagation in Micropolar Thermoelastic Solids with Two Temperatures*, Journal of Thermal Stresses, v.33, nr. 5, 431-446, (2010)
- [37] Gurtin, M.E.: *Variational principles for linear elastodynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis. **16**(1), 34-50 (1964).
- [38] Mukhopadhyay, S., Sengupta, A.: *Thermoelastic Wave Propagation in Micropolar Porous Media with Dual-Phase-Lag Heat Transfer*, International Journal of Engineering Science, **48**, No.11, 1625-1633 (2010).
- [39] Singh, S. S., Lianngenga, R.: *Effect of micro-inertia in the propagation of waves in micropolar thermoelastic materials with voids*, Applied Mathematical Modelling, **49**, (2017).
- [40] Chadwick P., Seet LTC.: *Wave propagation in a transversely isotropic heat-conducting elastic material*, Mathematika, **17**(2), 255-274 (1970). doi.org/10.1112/S002557930000293X
- [41] Kumar, R., Gupta, V.: *Effect of phase-lags on Rayleigh wave propagation in thermoelastic medium with mass diffusion*, Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, **11**(4), 474-493 (2015).
- [42] Sharma, S., Kumari, S., Singh, M.: *Rayleigh wave propagation in two-temperature dual phase lag model with impedance boundary conditions*, Advances in Mathematics: Scientific Journal, **9**(9), 7525-7534 (2020).
- [43] Ieşan, M. : *Wave Propagation in Thermoelastic Micropolar Porous Medium with Two Temperatures and Two Phase Lags*, Journal of Thermal Stresses, **34**, No. 4, 351-371 (2011).
- [44] Biswas, S., Mukhopadhyay, B., Shaw, S.: *Rayleigh surface wave propagation in orthotropic thermoelastic solids under three-phase-lag*, Journal of Thermal Stresses, **40**(4), 403-419 (2017).

- [45] Ariman, T., Zika, M. J.: *On Complex Potentials in Micropolar Elasticity*, ZAMM - Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik, **51**(3), 183–188 (1971). doi:10.1002/zamm.19710510304
- [46] Mindlin, R. D.: *Complex Representation of Displacements and Stresses in Plane Strain with Couple-Stresses*, Pro. Int. Sympos. on Applications of the Theory of Functions in Continuum Mechanics, Tbilisi, U.S.S.R., 25G-269 (1963).
- [47] Fudulu, I. M.: *Plane strain of isotropic micropolar bodies with pores*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III Mathematics and Computer Science, (2023).
- [48] Lord, H., Shulman, Y.: *A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids (ZAMP), **15**, 299-309 (1967).
- [49] Green, A.E., Naghdi, P.M.: *On undamped heat waves in an elastic solid*, J. Thermal Stresses, **15**, 253-264 (1992).
- [50] Green, A.E., Naghdi, P.M.: *Thermoelasticity without energy dissipation*, J. Elasticity, **31**, 189-208 (1993).
- [51] Green, A.E., Naghdi, P.M.: *A verified procedure for construction of theories of deformable media*, I. Classical continuum physics, II. Generalized continua, III. Mixtures of interacting continua, Proc. Royal Soc. London A, **448**, 335-356, 357-377, 378-388 (1995).
- [52] Quintanilla, R.: *Moore-Gibson-Thompson thermoelasticity with two temperatures*, Appl. Eng. Sci., **1**, 100006 (2020).
- [53] Abbas, I., Marin, M.: *Analytical Solutions of a Two-Dimensional Generalized Thermoelastic Diffusions Problem Due to Laser Pulse*, Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng., **42**(1), 57-71 (2018).
- [54] Chen, P.J., Gurtin, M.E.: *On a theory of heat involving two temperatures*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **19** 614-627, (1968).
- [55] Chen, P.J., et al.: *On the thermodynamics of non-simple materials with two temperatures*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **20**, 107-112 (1969).
- [56] Youssef, H.M., *Theory of two-temperature-generalized thermoelasticity*, IMA J. Appl. Math., **37**, 383-390 (2006).
- [57] Magana, A., et al.: *On the stability in phase-lag heat conduction with two temperatures*, J. Evol. Eq., **18**, 1697-1712 (2018).
- [58] Marin, M. et al.: *On the decay of exponential type for the solutions in a dipolar elastic body*, J. Taibah Univ. Sci. **14** (1), 534-540 (2020).
- [59] Zhang, L. et al.: *Entropy analysis on the blood flow through anisotropically tapered arteries filled with magnetic zinc-oxide (ZnO) nanoparticles*, Entropy, **22**(10), Art. No.1070, (2020).
- [60] Marin, M., Othman, M. I. A., Seadawy, A. R., Carstea, C.: *A domain of influence in the Moore-Gibson-Thompson theory of dipolar bodies*, Journal of Taibah University for Science, **14**(1), 653-660 (2020). doi:10.1080/16583655.2020.1763664

- [61] Mindlin, R.D.: *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal., **16**, 51-78 (1964).
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF00248490>
- [62] Green, A.E., Rivlin, R.S.: *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Ration. Mech. Anal., **17**, 113-147 (1964).
- [63] Gurtin, M.E.: *The dynamics of solid-solid phase transitions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 305-335 (1994).
- [64] Fried, E., Gurtin, M.E.: *Thermomechanics of the interface between a body and its environment*, Continuum Mech. Therm., **19**(5) (2007), 253-271.
- [65] Stanciu, M. et al.: *Vibration Analysis of a Guitar considered as a Symmetrical Mechanical System*, Symmetry, Basel, **11**(6), Art. No. 727 (2019).
- [66] Marin, M.: *An evolutionary equation in thermoelasticity of dipolar bodies*, J. Math. Phys., **40**, No. 3, 1391-1399 (1999).
- [67] Marin, M.: *A domain of influence theorem for microstretch elastic materials*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **11**(5), 3446-3452 (2010).
- [68] Marin, M. et al.: *Modeling a microstretch thermo-elastic body with two temperatures*, Abstract and Applied Analysis, Art. No. 583464, 1-7 (2013).
- [69] Othman, M.I.A., et al.: *A novel model of plane waves of two-temperature fiber-reinforced thermoelastic medium under the effect of gravity with three-phase-lag model*, Int J Numer Method H, **29**(12), 4788-4806 (2019).
- [70] Chirila A, et al.: *On adaptive thermo-electro-elasticity within a Green-Naghdi type II or III theory*, Contin. Mech. Thermodyn., **31**(5), 1453-1475 (2019).
- [71] Marin, M.: *A temporally evolutionary equation in elasticity of micropolar bodies with voids*, U.P.B. Sci. Bull., Series A-Applied Mathematics Physics, **60**(3-4), 3-12 (1998).
- [72] Marin, M., Chirilă, A., Codarcea, L., Vlase, S.: *On vibrations in Green-Naghdi thermoelasticity of dipolar bodies*, An. Sti. U. Ovid. Co.- Mat., **27**, No. 1, 125-140 (2019) .
- [73] Marin, M., Crăciun, E. M.: *Uniqueness results for a boundary value problem in dipolar thermoe lasticity to model composite materials*, Compos. Part B-Eng. **126**, 27-37 (2017).
- [74] Goodman, M.A., Cowin, S.C.: *A continuum theory of granular material*, Arch. Rat. Mech. Anal., **44**, 249-266 (1971).
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF00284326>
- [75] Iesan, D.: *Thermoelasticity of bodies with microstructure and microtemperatures*, International Journal of Solids and Structures, **44**, 26-26 (2007).
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01302942>
- [76] Marin, M., Agarwal, R.P., Mahmoud, S.R.: *Modeling a microstretch thermoe lastic body with two temperature*, Abstr. Appl. Anal., **2013**, Art. No.583464, (2013). <https://www.hindawi.com/journals/aaa/2013/583464/>

- [77] Marin, M., Stan, G.: *Weak solutions in Elasticity of dipolar bodies with stretch*, Carpathian J. Math., **29**(1), 33-40 (2013). <https://www.jstor.org/stable/43999518>
- [78] Scalia, A.: *On some theorems in the theory of micropolar thermoelasticity*, Int. J. Eng. Sci., **28**, No. 3, 181-189 (1990).
- [79] Marin, M., Chirilă, A., Öchsner, A., Vlas, S.: *About finite energy solutions in thermoelasticity of micropolar bodies with voids*, Bound. Value Probl., **2019**, No. 89, 1-14 (2019).
- [80] Marin, M.: *Some basic theorems in elastostatics of micropolar materials with voids*, J. Comp. Appl. Math., **70**, No. 1, 115-126 (1996).
- [81] Marin, M.: *On existence and uniqueness in thermoelasticity of micropolar bodies*, Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris, Serie II, **321**, No. 12, 475-480 (1995).
- [82] Groza, G., et al.: *Transverse vibrations analysis of a beam with degrading hysteretic behavior by using Euler-Bernoulli beam model*, An. St. Univ. "Ovidius" Constanta, ser. Mat., **26**(1), 125-139 (2018). <https://sciendo.com/article/10.2478/auom-2018-0008>
- [83] Marin, M., Fudulu, I. M., Vlas, S.: *On some qualitative results in thermodynamics of Cosserat bodies*, Boundary Value Problems, Art. No. 69 (2022).
- [84] Marin, M., Vlas, S., Fudulu, I.M., Precup, G.: *Effect of Voids and Internal State Variables in Elasticity of Porous Bodies with Dipolar Structure*, Mathematics, **9**(21), Art. No. 2741 (2021).
- [85] Marin, M., Vlas, S., Fudulu, I.M., Precup, G.: *On instability in the theory of dipolar bodies with two-temperatures*, Carpathian Journal of Mathematics, **38**(2), 459-468 (2022).
- [86] Vlas, S., Teodorescu, P.P.: *Elasto-dynamics of a solid with a general "rigid" motion using fem model; Part I. Theoretical approach*, Rom. J. Phys., **58**(7-8), 872-881 (2013). <https://rjp.nipne.ro/2013-58-7-8/0872-0881.pdf>
- [87] Vlas, S.: *A method of eliminating lagrangian multipliers from the equation of motion of interconnected mechanical systems*, J. Appl. Mech., **54**(1), 235-237 (1987). <https://doi.org/10.1115/1.3172969>
- [88] Chirila, A., et al.: *On adaptive thermo-electro-elasticity within a Green-Naghdi type II or III theory*, Contin. Mech. Thermodyn., **31**(5), 1453-1475 (2019). <https://link.springer.com/article/10.1007/s00161-019-00766-2>
- [89] Groza, G., Pop, N.: *Approximate solution of multipoint boundary value problems for linear differential equations by polynomial functions*, J. Differ. Equ. Appl., **14**(12), 1289-1309 (2008). <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10236190801953864>
- [90] Marin, M.: *Some estimates on vibrations in thermoelasticity of dipolar bodies*, J. Vib. Control, **16**(1), 33-47 (2020). <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1077546309103419>

- [91] Neagu, D.M., Fudulu, I.M., Marin, M.: *Complex potentials solutions for isotropic Cosserat bodies with voids*, Boundary Value Problems, 2024:129, (2024).
- [92] Chirita, S.: *On the linear theory of thermo-viscoelastic materials with internal state variables*, Arch. Mech., **33**, 455-464 (1982).
<https://fbc.pionier.net.pl/details/nx3wR>
- [93] Nachlinger, R.R., Nunziato, J.W.: *Wave propagation and uniqueness theorem for elastic materials with ISV*, Int. J. Eng. Sci., **14**, 31-38 (1976).
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0020722576900537>
- [94] Sherburn, J.A., et al.: *Application of the Bammann inelasticity internal state variable constitutive model to geological materials*, Geophysical J. Int., **184**(3), 1023-1036 (2011).
<https://academic.oup.com/gji/article/184/3/1023/623469>
- [95] Wei, C., Dewoolkar, M.M.: *Formulation of capillary hysteresis with internal state variables*, Water Resources Research, **42**, Art. No. W07405 (2006).
- [96] Solanki, K.N., Bammann, D.J.: *A thermodynamic framework for a gradient theory of continuum damage*, Acta Mech., **213**, 27–38 (2010).
<https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-009-0200-5>
- [97] Anand, L., Gurtin, M.E., *A theory of amorphous solids undergoing large deformations*, Int. J. Solids Struct., **40**, 1465-1487 (2003).
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020768302006510>
- [98] Bouvard, J.L., et al.: *A general inelastic internal state variable model for amorphous glassy polymers*, Acta Mech., **213**(1-2), 71-96 (2010).
<https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-010-0349-y>
- [99] Craciun, E.M., Soos, E.: *Anti-plane states in an anisotropic elastic body containing an elliptical hole*, Math. Mech. Solids, **11** (5), 459-466 (2006).
<https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1081286505044138>
- [100] Jafari, M., et al.: *Optimum design of infinite perforated orthotropic and isotropic plates*, Mathematics, **8**(4), Art. No. 569 (2020).
<https://www.mdpi.com/2227-7390/8/4/569>
- [101] Iesan, D.: *Micromorphic elastic solids with initial stresses and initial heat flux*, Int. J. Eng. Sci., **49**, 1350-1356 (2011). 121-132, 2013
- [102] Wilkes, N.S.: *Continuous dependence and instability in linear thermoelasticity*, SIAM J. Appl. Math., **11**, 292-299 (1980).
- [103] Marin, M.: *On weak solutions in elasticity of dipolar bodies with voids*, J. Comp. Appl. Math., **82** (1-2), 291-297 (1997).
- [104] Scutaru, M.L., et al.: *New analytical method based on dynamic response of planar mechanical elastic systems*, Bound. Val. Probl., **2020**(1), Art. No. 104 (2020).
- [105] Day, W.A.: *Means and autocorrections in elastodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., **73**, 243-256 (1980).

- [106] Iesan, D.: *Sur la Theorie de la Thermoelasticite Micropolaire Couplee*, C. R. Acad. Sci. Paris, **265 A**, 271-275 (1967).
- [107] Craciun, E-M., et al.: *Stress concentration in an anisotropic body with three equal collinear cracks in Mode II of fracture. I. Analytical study*, Z. Angew. Math. Mech, ZAMM, **94** (9), 721-729 (2014).
- [108] Trivedi, N., et al.: *The mathematical study of an edge crack in two different specified models under time-harmonic wave*, Mech. Compos. Mater., **58**(1), 1-14 (2022).
- [109] Ghita, C, et al.: *Existence result of an effective stress for an isotropic viscoplastic composite*, Comput. Mater. Sci. **64**, 52-56 (2012).
- [110] Pop, N.: *An algorithm for solving nonsmooth variational inequalities arising in frictional quasistatic contact problems*, Carpathian J. Math, **24**(2), 110-119 (2008).
- [111] Vlas, S., et al.: *A Method for the Study of teh Vibration of Mechanical Bars Systems with Symmetries*. Acta Tech. Napocensis, Ser. Appl. Math. Mech. Eng. , **60**(4), 539-544 (2017).
- [112] Vlas, S., et al.: *Coupled transverse and torsional vibrations in a mechanical system with two identical beams*, AIP Advances, **7**(6), 065301, (2017).
- [113] Abouelregal, A.E., Marin, M.: *The size-dependent thermoelastic vibrations of nanobeams subjected to harmonic excitation and rectified sine wave heating*, Mathematics, **8**(7), Art. No. 1128 (2020).
- [114] Chu, J., Escher, J.: *Variational formulations of steady rotational equatorial wave*, Adv. Nonlinear Anal., **10**, 534–547 (2021). doi.org/10.1515/anona-2020-0146