



Universitatea
Transilvania
din Braşov

UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAŞOV
ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

TEZĂ DE DOCTORAT
-REZUMAT-

Coordonator ştiinţific:

Prof. Univ. Dr. Ioan Lucian Popa

Doctorand:

Tímea Melinda Személy Fülöp (Moraru)

BRAŞOV
2026



Universitatea
Transilvania
din Braşov

UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAŞOV
ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Stabilitate şi dichotomie pentru cocicli stochastici de evoluţie

TEZĂ DE DOCTORAT
-REZUMAT-

Coordonator ştiinţific:

Prof. Univ. Dr. Habil. Ioan Lucian Popa

Doctorand:

Tímea Melinda Személy Fülöp (Moraru)

BRAŞOV
2026

Activitatea științifică desfășurată pe parcursul stagiului de studii universitare de doctorat

I. Lucrări publicate/acceptate spre publicare în reviste/volume indexate Web of Science

1. **T. M. Személy Fülöp**, *Integral characterizations of uniform h -dichotomy in mean for discrete-time stochastic skew-evolution semiflows*, Miskolc Math. Notes, (2025).
2. **T. M. Személy Fülöp**, *Datko type characterizations for uniform dichotomy in mean with growth rates for reversible stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, Glas.Mat.Ser.III, (2025), 60(1), 167–182, DOI:10.3336/gm.60.1.10.
3. **T. M. Személy Fülöp**, D.I. Borlea, *Integral characterizations of uniform h -dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows*. 2024 IEEE 18th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI), (2024), 000025–000030, DOI: 10.1109/SACI60582.2024.10619723.
4. **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform h -dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, Proc. 21th Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math., (ICNAAM), (2023), 3315(1), 280008, DOI: 10.1063/5.0286098.
5. **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform stability in mean for stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, Proc. 21th Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math. (ICNAAM), (2023), 3315(1), 400043, DOI: 10.1063/5.0291168
6. **T. M. Személy Fülöp**, M. Megan, D. I. Borlea (Pătrașcu), *On uniform stability with growth rates of stochastic skew-evolution semiflows in Banach Spaces*, Axioms, (2021), 10(3), 182, DOI: 10.3390/axioms10030182.

II. Lucrări publicate/acceptate spre publicare în reviste de specialitate indexate BDI

1. **T. M. Személy Fülöp**, *On uniform dichotomy in mean of stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, An. Univ. Vest Timi, Ser. Mat.-Inform. 59 (1) (2023), 92-104, DOI: 10.2478/awutm-2023-0008

III. Participări la conferințe internaționale

1. **T. M. Személy Fülöp**, *Integral characterizations for uniform dichotomy in mean with growth rates for reversible stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, XGEN International Conference on Science Communications, May 20-24, 2024, Technical University of Cluj-Napoca, Baia Mare, Romania, <https://events.universitas.ro/event/4/>
2. **T. M. Személy Fülöp**, D.I. Borlea, *Integral characterizations of uniform h -dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows*. 2024 IEEE 18th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI), May 21-25, 2024, Timișoara, România, <https://conf.uni-obuda.hu/saci2024/>
3. **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform h -dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, 21th International conference of numerical analysis and applied mathematics, September 11-17, 2023, Heraklion, Crete, Greece, <https://history.icnaam.org>
4. **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform Stability In Mean For Stochastic Skew-Evolution Semiflows in Banach Spaces*, 20th International conference of numerical analysis and applied mathematics, September 19-25, 2022, Heraklion, Crete, Greece, <https://history.icnaam.org>
5. A. Găină, M. Megan, **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform stability concepts for stochastic skew-evolution cocycles in Banach spaces*, Le XVe Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, 29 août - 2 septembre 2022, Toulouse, France, <https://15colfrro.sciencesconf.org/resource/listeparticipants?lang=fr>
6. A. Găină, M. Megan, **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform Stability Concepts for Discrete-Time Skew-Evolution Cocycles*, ISIM & ISWIM, June 26-29, 2022, Bucharest, Romania, <https://2022.isimconference.eu/images/2022>
7. A. Găină, C.F. Popa, **T. M. Személy Fülöp**, *On stability of evolution cocycles in Banach spaces*, The 28th International Conference in Operator Theory, June 27 - July 1, 2022, Timișoara, Romania, <https://sites.google.com/site/ot28conference/all-abstracts>

IV. Participări la conferințe naționale

1. **T. M. Személy Fülöp**, *Uniform h -Dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces*, Sixth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, May 30-31, 2024, Cluj-Napoca, Romania,
www.cs.ubbcluj.ro/wp-content/uploads/ProgramRISMAA2024-v2.pdf
2. A. Găină, C.F. Popa, **T. M. Személy Fülöp**, *On uniform dichotomy of linear discrete time skew- evolution cocycles in Banach spaces*, Fourth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, May 19-21, 2022, Brasov, Romania,
mateinfo.unitbv.ro/ro/admitere/admitere-masterat/520-rismaa-participants
3. **T. M. Személy Fülöp** , A. Găină, C.F. Popa, *On uniform stability of linear discrete-time systems in Banach spaces* , Third Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, 11 September 2021, Alba-Iulia, Romania, rismaa.uab.ro

V. Citări

V.1. Citări în reviste de specialitate indexate Web of Science

- **T. M. Személy Fülöp**, M. Megan, D. I. Borlea (Pătrașcu), *On uniform stability with growth rates of stochastic skew-evolution semiflows in Banach Spaces*, Axioms. (2021), 10(3), 182. **este citată în:**
 - (i) T.Yue, *On uniform instability in mean of stochastic skew-evolution semiflows*. Glas.Mat., (2024), 59(1), 107–123, <https://doi.org/10.3336/gm.59.1.05>
 - (ii) T.Yue, K. Liu, J. Zhang, *Some results on the uniform polynomial behavior in average of cocycles over maps*. U.P.B. Sci. Bull., Series A, (2025), 87(4), 99–108.

Cuprins

<i>Introducere</i>	1
<i>1. Cocicli stochastici de evoluție și familii de proiectori stochastici</i>	9
1.1 Cocicli stochastici de evoluție	9
1.2 Concepte de creștere uniformă pentru cocicli stochastici de evoluție	15
1.3 Familii de proiectori stochastici invariante respectiv tare invariante la cocicli stochastici de evoluție	17
1.4 Concepte de creștere uniformă pentru perechi de forma (C, P)	20
1.5 Comentarii bibliografice	24
<i>2. Concepte de stabilitate pentru cocicli stochastici de evoluție</i>	26
2.1 Preliminarii	26
2.2 Legături între conceptele de stabilitate uniformă în medie	29
2.3 Caracterizări ale conceptului de stabilitate uniformă în medie	30
2.4 Comentarii bibliografice	35
<i>3. Concepte de dichotomie pentru cocicli stochastici de evoluție</i>	37
3.1 Preliminarii	37
3.2 Legături între conceptele de dichotomie uniformă în medie	38
3.3 Caracterizări ale conceptului de dichotomie uniformă în medie	40
3.4 Comentarii bibliografice	48
<i>4. Concluzii și perspective</i>	50
<i>Bibliografie</i>	51

Introducere

Teoria clasică a comportărilor asimptotice de tip exponențial, polinomial sau cu rate de creștere, precum stabilitate, instabilitate, dichotomie, trichotomie, splitting, a ecuațiilor diferențiale deterministe a cunoscut o dezvoltare impresionantă de-a lungul timpului și a fost tratată din diferite perspective. Au fost obținute soluții ale ecuațiilor diferențiale modelate cu ajutorul proceselor evolutive sau al cociclor peste fluxuri sau semifluxuri în spații Hilbert sau Banach. De asemenea, proprietățile asimptotice amintite mai sus au fost studiate atât în cazul uniform cât și în cazul neuniform.

În contextul dezvoltării teoriei ecuațiilor diferențiale stochastice în spații infinite, o serie de lucrări fundamentale oferă perspective esențiale pentru analiza comportamentului asimptotic și a stabilității acestor sisteme. Astfel, Bensoussan și Flandoli [8] au demonstrat existența varietăților inerte stochastice pentru ecuații parabolice degenerative, folosind metoda Lyapunov–Perron, ceea ce a deschis calea unor studii privind structura geometrică a soluțiilor stochastice. Pe de altă parte, S. Bonaccorsi [11] în 1999 a extins formula variației constante pentru ecuații stochastice neliniare în spații infinit dimensionale.

Lucrarea lui C. Chicone și Y. Latushkin [28] (1999) oferă o abordare unificată în studiul operatorilor de evoluție și al semigrupurilor, cu aplicații în stabilitatea spectrală, teoria controlului și analiza transferului de energie în sisteme dinamice neliniare. În paralel, W. Coppel [29] (1978) a oferit o tratare fundamentală a dichotomiei în teoria stabilității, dezvoltând criterii solide pentru caracterizarea stabilității și instabilității sistemelor diferențiale.

Teoria sistemelor liniare infinite-dimensionale a fost detaliată în lucrările clasice ale lui R. Curtain și Pritchard [31] (1978), iar recent R. Curtain și H. Zwart [30] (2020) au aprofundat această direcție printr-o abordare în spații de stare, adecvată și pentru controlul sistemelor neliniare.

În studiile lui G. Da Prato și Ichikawa [32] (1987) apar contribuții remarcabile legate de ecuațiile Lyapunov pentru sisteme variabile în timp, iar I. Gikhman și A. Skorokhod [49] (1972) au pus bazele teoretice ale calculului Itô în spații infinite-dimensionale. În același spirit, lucrările lui H. Kunita [58] privind generatoarele infinitezimale ale semigrupurilor pozitive aleatorii și tratatele lui P. Protter [94] și J. Zabczyk [137] dedicate calculului stochastic și al teoriei controlului, completează

cadrul conceptual necesar pentru abordările moderne din domeniu.

Fundamentele teoretice utilizate în această lucrare se bazează pe concepte din topologia generală și teoria măsurii, pentru care referințe clasice sunt lucrările lui P. Halmos [57] și J. Munkres [86].

Un cadru general pentru analiza comportamentelor asimptotice ale sistemelor dinamice neliniare, atât în context determinist cât și stochastic, îl constituie noțiunea de cociclu de evoluție, introdusă pentru prima dată în literatura de specialitate în lucrarea autorilor M. Megan și C. Stoica [76]. Această noțiune generalizează conceptele clasice de operatori de evoluție, semigrupuri de operatori și cociclii peste semifluxuri, oferind un instrument flexibil și eficient pentru modelarea sistemelor dinamice în spații Banach.

Extinderea acestui cadru către forme mai generale, care să includă comportamente asimptotice diverse, a fost realizată în numeroase contribuții recente. De exemplu, în [77] și [80], autorii au investigat noțiuni variate de stabilitate și dichotomie pentru cocicli de evoluție, atât pentru cazul uniform cât și pentru cazul neuniform. De asemenea, abordări integrale și caracterizări bazate pe familii de proiectori invariante au fost dezvoltate în [82], [83], [100], [107], [108], [109].

În paralel, în [46], A. Găină a analizat noțiunea de h -dichotomie uniformă pentru cocicli de evoluție în spații Banach, furnizând condiții necesare și suficiente. Lucrarea [47] extinde aceste rezultate la cazul neuniform, introducând clase generale de rate de creștere și oferind caracterizări relevante pentru cocicli de evoluție. O contribuție aparte o aduce studiul asupra dichotomiei cu rate de creștere diferențiabile în [67].

Alte contribuții importante pot fi găsite în lucrările [70], [66] și [78], unde autorii utilizează atât metode clasice cât și instrumente moderne de analiză funcțională pentru a obține criterii aplicabile în spații Banach.

Comportamentul trichotomic precum și caracterizările asociate acestora sunt de asemenea bine reprezentate în literatura recentă, prin lucrări precum [99], [101] și monografia [103], în care se oferă un cadru unificat pentru studiul comportamentelor asimptotice uniforme și neuniforme ale cocicliilor de evoluție.

Ulterior, atenția s-a concentrat tot mai mult asupra ecuațiilor diferențiale stochastice (SDE) în spații Banach sau Hilbert infinit dimensionale. Acestea oferă un cadru natural pentru modelarea fenomenelor afectate de zgomot aleator, cu aplicații în fizică, biologie sau economie. Problemele existenței cocicliilor generați de ecuații diferențiale stochastice a fost studiată intensiv de autori precum A. M. Atewi [4], T. Caraballo în [26], [24] și [25], A. Carvenhill [27], G. Da Prato și J. Zabczyk [33], F. Flandoli [45], B. Schmalfuß [98], S.-E. Mohammed [84], respectiv Mohammed și colaboratorii săi [85]. În acest cadru, s-a conturat și conceptul de cociclu stochastic, introdus în mod sistematic de L. Arnold [1], și extins ulterior în contexte variate [2], [3].

Tema principală a acestei teze este studiul comportamentelor asimptotice în me-

die de tip stabilitate și dichotomie pentru cocicli stochastici de evoluție. Analiza este realizată în timp continuu, în cadru uniform, în spații Banach. Lucrarea își propune să generalizeze rezultatele deja cunoscute în cazul determinist, adaptând conceptele și instrumentele clasice la contextul stochastic și punând accentul pe comportamentele asimptotice cu rate de creștere. Acestea permit o tratare unificată a cazurilor exponențial și polinomial, oferind un cadru mai flexibil pentru studiul asimptotic.

Deoarece comportările asimptotice exponențiale sau polinomiale sunt mai restrictive, a fost nevoie de introducerea unui concept mai general, cel cu rate de creștere.

R. Naulin și M. Pinto în [87], [89] au introdus conceptul de comportări asimptotice cu rate de creștere fiind dezvoltat ulterior în lucrări precum [89], [65]. Această abordare a permis generalizarea rezultatelor existente în cazul exponențial și polinomial, deschizând perspective noi asupra caracterizărilor de tip Datko, Lyapunov sau Barbashin. Comportamentele asimptotice de tip h -stabilitate sau h -dichotomie s-au dovedit utile în tratarea uniformă a unei clase largi de sisteme, atât în context determinist cât și stochastic.

În ultimii ani, o serie de lucrări științifice semnate de T. M. Személy Fülöp au adus contribuții importante în teoria comportamentelor asimptotice în medie ale cocicliilor stochastici de evoluție în spații Banach. Astfel, în lucrarea [130] realizat în colaborare cu M. Megan și D. I. Borlea este introdus și studiat conceptul de stabilitate uniformă în medie cu rate de creștere, fiind formulate condiții suficiente și exemple relevante care ilustrează generalizări ale stabilității exponențiale și polinomiale în medie. Continuând această direcție, lucrarea [124] propune o formalizare riguroasă a dichotomiei uniforme în medie, utilizând familii de proiectori invariante pentru cocicli stochastici de evoluție în timp continuu. În [128] se stabilesc legături între conceptele de h -dichotomie uniformă în medie și dichotomie exponențială uniformă în medie, respectiv între conceptele de h -dichotomie uniformă în medie și dichotomie polinomială uniformă în medie. De asemenea, în lucrarea [123] realizată împreună cu D. I. Borlea sunt oferite caracterizări integrale pentru h -dichotomia uniformă în medie, folosind familii de proiectori invariante, respectiv tare invariante. În [129] se analizează stabilitatea uniformă în medie de tip exponențial și polinomial iar lucrarea [125] vizează cazul reversibil al cocicliilor stochastici de evoluție, obținându-se caracterizări de tip Datko pentru h -dichotomia uniformă în medie. Tot în direcția cocicliilor stochastici de evoluție, C. Stoica a introdus o perspectivă unificată în [105] discutând formulări și interpretări stochastice ale acestor structuri dinamice. În lucrarea recentă [106] sunt analizate unele probleme fundamentale legate de studiul ecuațiilor de evoluție în context stochastic, oferind repere utile pentru extinderea metodelor clasice. În completare, cercetătorul T. Yue a abordat teme conexe referitoare la instabilitatea în medie și caracterizări ale acesteia. În lucrările [135], [136] și [134] sunt formulate teoreme de tip Datko și Barbashin.

Aceste lucrări au fost dezvoltate în spiritul lucrărilor anterioare ale autorilor P. V. Hai în [55], R. Boruga în [13], D. Dragičević în [38], D. Stoica în [111], [112],

[113], [114], [115], [116], D. Stoica și M. Megan în [118], [119], [120], [121], D. Stoica și L. Lemle în [117], D. Stoica, M. Megan și L. Lemle în [122], C. Tudor în [131] și V. M. Ungureanu în [132].

În cadrul teoriei stabilității ecuațiilor diferențiale, câteva teoreme au stat la baza dezvoltării acestui domeniu, printre cele mai importante numărându-se caracterizarea cunoscută sub numele de Datko-Pazy, conform căreia o familie de evoluție $\mathcal{U} = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ definită într-un spațiu Banach X este exponențial stabilă dacă și numai dacă există un exponent $p \in [1, \infty)$ astfel încât

$$\sup_{s \geq 0} \int_s^\infty \|U(t, s)x\|^p dt < \infty, \text{ pentru orice } x \in X.$$

Mai târziu, R. Datko demonstrează pentru cazul particular $p = 2$ acest rezultat pentru semigrupuri în spații Hilbert în [36] iar pentru operatori de evoluție în [37].

Teorema lui Datko a constituit fundamentul unor studii importante privind stabilitatea exponențială uniformă a ecuațiilor de evoluție. Ulterior, numeroase lucrări au fost dedicate acestui subiect menționând doar câteva dintre ele [53], [61], [134], [9] și [7]. Totodată, în analiza comportamentelor asimptotice ale sistemelor dinamice, un punct de referință îl constituie monografia lui A. M. Lyapunov [63] care a stat la baza dezvoltării unor metode fundamentale, în special prin utilizarea funcțiilor de tip Lyapunov, o tehnică frecvent întâlnită în literatura de specialitate. Menționăm aici alte lucrări semnificative [40], [60]. Rezultatul clasic al lui E. A. Barbashin [5] reprezintă unul dintre cele mai importante puncte de plecare în teoria stabilității întrucât a oferit caracterizări integrale, în care parametrul de integrare este al doilea, pentru stabilitatea exponențială uniformă. Această direcție a fost continuată și de alți autori amintind lucrările [39], [52], [134], [133].

Conceptul de stabilitate uniformă, de tip exponențial, polinomial sau cu rate de creștere, ocupă un loc central în teoria comportamentelor asimptotice ale sistemelor dinamice neautonome. Lucrarea fundamentală a lui L. Barreira și C. Valls [6] oferă o perspectivă aprofundată asupra stabilității sistemelor diferențiale neautonome, constituind un reper teoretic important în definirea și studierea acestor concepte.

În spații Banach, criteriile de stabilitate au fost extinse prin metode de tip Datko-Pazy și prin abordări operatoriale moderne. În acest sens, R. Boruga și colaboratorii săi au adus contribuții semnificative: în [19] sunt oferite caracterizări integrale pentru stabilitatea uniformă cu rate de creștere, iar în [22] este detaliată analiza stabilității uniforme folosind condiții funcționale aplicabile într-un cadru generalizat. Instabilitatea corespunzătoare este discutată în [21], în timp ce în [12] se introduc criterii de majorare.

Un rezultat notabil este formularea unui criteriu logaritm pentru stabilitatea polinomială [16], oferind o nouă caracterizare a stabilității polinomiale uniforme pentru operatorii de evoluție în spații Banach. De asemenea, C. Bușe și colaboratorii [23] dezvoltă o versiune întărită a teoremei lui Barbashin, utilă în caracterizări integrale

ale stabilității în context neautonom.

Stabilitatea uniformă a fost tratată în contexte discrete sau generale de către H. Damak [35], C.-L. Mihiț [81], P. V. Hai [54], [56], M. Megan, C. Stoica, L. Buliga [79], C. Stoica [102], dar și de către Megan, Sasu și Sasu în articolele [69], [71], [73] sau de autorii C. Stoica și M. Megan [110] unde se abordează atât stabilitatea, cât și instabilitatea exponențială pentru cocicli peste semifluxuri.

O contribuție recentă remarcabilă aparține aceluiași autori (Megan, A. L. Sasu și B. Sasu), care în [72] propun un criteriu de tip Zabczyk–Rolewicz pentru stabilitatea sistemelor neliniare neautonome, aducând o viziune nouă asupra analizelor funcționale implicate. În plus, articolul [41] leagă stabilitatea de proprietățile de admisibilitate ale sistemelor discrete, în timp ce analiza lui C.-L. Mihiț în [81] aprofundează condițiile de h -stabilitate uniformă pentru operatorii de evoluție.

Toate aceste direcții de cercetare consolidează importanța stabilității uniforme cu rate de creștere, oferind fundamente teoretice esențiale pentru extinderea acestui concept în contextul cocicliilor stochastici de evoluție, ceea ce constituie unul dintre obiectivele principale ale tezei de față.

Generalizarea conceptului de stabilitate se realizează prin introducerea noțiunii de dischotomie, care implică existența unei familii de proiectori ce permite descompunerea spațiului de stări într-o sumă directă a două subspații închise: unul asociat comportamentului stabil, iar celălalt comportamentului instabil. Importanța dichotomiei exponențiale pentru ecuații diferențiale liniare a fost consacrată prin două lucrări fundamentale precum monografia clasică aparținând lui J. L. Massera și J. J. Schäffer, publicată în 1966 [64] și tratatul elaborat de J. L. Daleckii și M. G. Krein apărută în 1974 [34].

Conceptul de dichotomie exponențială uniformă a fost extins în mod semnificativ în ultimele decenii, fiind tratat în numeroase lucrări importante [59], [62], [74], [92], [96], [97], care au oferit caracterizări integrale, condiții necesare și suficiente sau conexiuni cu teoria semigrupurilor de evoluție.

În plus, au fost analizate și forme mai generale ale acestui comportament, cum ar fi dichotomia exponențială neuniformă [93], [95], precum și formele intermediare sau mixte de tip trichotomie, dezvoltate în special în lucrările lui C. Stoica [101], [99] și ale lui S. Elaydi și O. Hájek [43].

O direcție de cercetare recentă este reprezentată de dichotomia cu rate de creștere, sau h -dichotomia, care generalizează cazurile exponențial și polinomial. În această direcție, menționăm contribuțiile semnificative ale lui R. Boruga și M. Megan, care în lucrările [14], [17], [18], [20] au oferit caracterizări ale conceptului de dichotomie precum și criterii de tip Datko pentru acest tip de comportament, inclusiv în varianta neuniformă. De asemenea, în lucrările [9] și [10], autorii au extins teoria varietăților stabile în prezența unor dichotomii polinomiale neuniforme, demonstrând aplicabilitatea acestora la ecuații neliniare neautonome.

În modelarea fenomenelor reale, provenite din domenii precum biologia, eco-

nomia sau științele mediului, se constată adesea că evenimentele nu se desfășoară continuu, ci apar la momente discrete de timp. Acest aspect justifică interesul tot mai ridicat acordat studiului sistemelor dinamice în timp discret. Astfel, cadrul teoretic al cocicliilor stochastice de evoluție în timp discret s-a dovedit a fi extrem de valoros pentru descrierea și analiza comportamentului asimptotic al acestor sisteme.

În lucrarea autoarei [126] au fost evidențiate caracterizări ale proprietății de h -dichotomie uniformă în medie pentru cocicli stochastici de evoluție în timp discret. Mai exact, sunt furnizate condiții necesare și suficiente folosind atât familii de proiectori invariante, cât și familii de proiectori tare invariante, pentru cocicli stochastici de evoluție în timp discret. Ca o consecință, se obțin caracterizări integrale pentru conceptul de dichotomie exponențială uniformă în medie. Pentru contribuții recente în acest domeniu menționăm lucrările [15], [42], [44], [48], [50], [51], [68], [75], [90], [91] și [104].

Lucrarea este structurată în trei capitole precedate de prezenta Introducere și urmate de Bibliografie. Obiectivul principal constă în aprofundarea și generalizarea rezultatelor deterministe în cadrul stochastic.

Primul capitol, intitulat **Cocicli stochastici de evoluție și familii de proiectori stochastici** cuprinde cinci paragrafe *Cocicli stochastici de evoluție*, *Concepte de creștere pentru cocicli stochastici de evoluție*, *Familii de proiectori stochastici invariante la cocicli stochastici de evoluție*, *Concepte de creștere pentru perechi de forma (C, P)* , *Comentarii bibliografice*. Primul paragraf prezintă noțiunile introductive în analiza stohastică, noțiunile de semiflux stohastic de evoluție, aplicație cociclică stohastică de evoluție, cociclu stohastic de evoluție și au fost date câteva exemple semnificative în acest sens. În al doilea paragraf se regăsesc noțiunile de h -creștere uniformă pentru cocicli stochastici de evoluție și sunt stabilite legăturile între conceptele de creștere în medie. Al treilea paragraf tratează conceptele de familie de proiectori invariantă, respectiv tare invariantă dar și legătura între ele. În următorul paragraf se generalizează conceptele de h -creștere pentru cazul general al perechilor de forma (C, P) în cazul uniform. De asemenea, sunt prezentate legăturile între concepte dar sunt date și caracterizări cu familii de proiectori invariante, respectiv tare invariante pentru conceptul de h -creștere în cazul uniform.

Capitolul al doilea, **Concepte de stabilitate pentru cocicli stochastici de evoluție** tratează conceptul de stabilitate în medie cu rate de creștere și este compus din patru paragrafe: *Preliminarii*, *Legături între conceptele de stabilitate uniformă în medie*, *Caracterizări ale conceptului de stabilitate uniformă în medie*, *Comentarii bibliografice*.

În primul paragraf al acestui capitol au fost introduse noțiunile de h -stabilitate în medie precum și h -stabilitate uniformă în medie menționând și de cazurile particulare ale conceptului de stabilitate uniformă și anume conceptul de stabilitate exponențială uniformă în medie, respectiv conceptul de stabilitate polinomială uniformă în medie. De asemenea, au fost date câteva exemple semnificative.

Al doilea paragraf al acestui capitol tratează legăturile între conceptele de sta-

bilitate uniformă în medie. Cel de-al treilea paragraf este dedicat caracterizării conceptului de stabilitate uniformă în medie. Rezultatele principale ale acestei secțiuni sunt Teoremele 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 și Corolariile 2.3.1, 2.3.2, , 2.3.3, 2.3.4, , 2.3.5, 2.3.6 care stau la baza rezultatelor ce urmează a fi demonstrate pe parcursul acestui capitol. Astfel, se obțin caracterizări integrale de tip Barbashin, Datko, și Lyapunov pentru conceptul de h -stabilitate uniformă în medie.

Capitolul al treilea, intitulat **Concepte de dichotomie pentru cocicli stochastici de evoluție** conține cele mai generale rezultate ale tezei și cuprinde trei paragrafe: *Preliminarii*, *Legătura între conceptele de dichotomie uniformă în medie*, *Caracterizarea conceptului de dichotomie uniformă în medie*, *Comentarii bibliografice*.

În primul paragraf al acestui capitol se introduc noțiunile de h -dichotomie uniformă în medie amintind totodată de cazurile particulare și anume conceptul de dichotomie exponențială uniformă în medie și conceptul de dichotomie polinomială uniformă în medie. În paragraful 3.2 se pune accentul pe stabilirea legăturilor între conceptele de dichotomie uniformă iar Teoremele 3.2.1, 3.2.2, respectiv Corolariile 3.2.1, 3.2.2 reprezintă unele din cele mai importante rezultate ale acestui paragraf și au fost publicate în lucrarea [128]. Proprietatea de h -dichotomie uniformă în medie este tratată în paragraful 3.3 cu familii de proiectori invariante, respectiv tare invariante. În Teoremele 3.3.9, 3.3.10 este studiată conexiunea dintre h -dichotomia uniformă în medie în cazul discret și h -dichotomia uniformă în medie în cazul continuu. În acest sens, se obține faptul că h -dichotomia uniformă în medie în timp continuu este echivalentă cu h -dichotomia uniformă în medie în timp discret, în condiții de h -creștere uniformă. Un alt rezultat important al acestei secțiuni este Teorema 3.3.2 care a fost publicată în lucrarea [124]. Alte rezultate importante au fost obținute ulterior și publicate în lucrările [123] și [125].

Rezultatele originale prezentate în această teză și evidențiate în cadrul Comentariilor bibliografice de la finalul fiecărui capitol au fost publicate sau acceptate spre publicare cu excepția Teoremelor 3.3.9 și 3.3.10 care au fost trimise spre publicare în [127]. Toate aceste rezultate aparțin în parte autorului tezei ca unic autor sau au fost obținute în colaborare cu profesorul universitar doctor Emerit Mihail Megan, coordonatorul științific al lucrării, respectiv cu doamna D. I. Borlea. Publicarea s-a realizat în reviste cotate ISI [125], în reviste de specialitate din țară și din străinătate, cu comitet științific de referenți [124], [130] precum și în volume ale unor conferințe internaționale [129], [128], [123]. De asemenea, o serie de alte rezultate originale, care nu sunt incluse în conținutul direct al tezei, dar care se înscriu în tematica acesteia și în planul de pregătire individuală au fost publicate în revista cotată ISI [126] și au fost comunicate în cadrul conferinței naționale "Sixth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications", May 30-31, 2024, Cluj-Napoca, Romania.

De asemenea, rezultatele cuprinse în această lucrare au fost prezentate și discutate în cadrul "Seminariului de Analiză Matematică și Teoria Controlului" de la

Universitatea de Vest din Timișoara, un seminar fondat și îndelung coordonat de regretatul profesor universitar doctor Emerit Mihail Megan, personalitate marcantă a școlii matematice românești. Contribuțiile sale științifice, sprijinul acordat tinerilor cercetători și îndrumarea generoasă oferite autorului tezei au avut un impact esențial în desfășurarea cercetărilor prezentate în această lucrare.

Bibliografia reunește articolele publicate de autor pe tema tezei în reviste de specialitate, lucrările prezentate în cadrul conferințelor naționale și internaționale, precum și o selecție de lucrări consultate și citate de autoare în elaborarea cercetării.

Această teză este dedicată memoriei profesorului universitar doctor Emerit Mihail Megan, mentorul meu științific și un reper fundamental în formarea mea profesională. Gândirea sa riguroasă, ajutorul său constant și încrederea acordată pe tot parcursul pregătirii au fost decisive pentru dezvoltarea acestei lucrări.

Adresez sincere mulțumiri domnului Profesor Universitar Doctor Habilitat Ioan Lucian Popa pentru susținerea, îndrumarea și încurajările oferite în perioada dificilă care a urmat pierderii coordonatorului meu științific. De asemenea, doresc să adresez mulțumiri și membrilor Comisiei de Îndrumare: Profesor Universitar Doctor Habilitat Adina Luminița Sasu, Lector Doctor Aurelian Crăciunescu, Lector Doctor Larisa Elena Biriș, Profesor Universitar Doctor Habilitat Marin Marin, pentru sfaturile și îndrumările valoroase primite în redactarea acestei teze.

Mulțumiri speciale adresez domnului Conferențiar Universitar Doctor Traian Ceașu pentru observațiile valoroase și sprijinul acordat în etapele de redactare a lucrării.

De asemenea, exprim recunoștință colegilor din cadrul colectivului de cercetare de la Universitatea de Vest din Timișoara, ale căror sugestii, îndrumări și încurajări au contribuit semnificativ la finalizarea acestei lucrări.

Le mulțumesc din inimă prietenilor mei dragi, care mi-au fost alături de-a lungul acestui drum și mi-au oferit sprijin, încurajare și gânduri calde, pline de afecțiune și recunoștință.

Întregii mele familii le sunt profund recunoscătoare pentru iubirea, sprijinul, răbdarea și încrederea pe care mi le-au oferit necondiționat. Le mulțumesc pentru rugăciuni, pentru încurajare, pentru liniștea oferită acasă și pentru toate sacrificiile făcute în tăcere. Fără prezența lor constantă și generozitatea cu care m-au susținut, acest drum nu ar fi fost posibil.

1. Cocicli stochastici de evoluție și familii de proiectori stochastici

1.1 Cocicli stochastici de evoluție

Definiția 1.1.1. [57] Fie Ω o mulțime nevidă. O familie de submulțimi $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se numește *σ -algebră pe Ω* dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

1. Mulțimea vidă aparține lui $\mathcal{B}$:

$$\emptyset \in \mathcal{B}.$$

2. Dacă $A \in \mathcal{B}$, atunci și complementara sa față de Ω aparține lui $\mathcal{B}$:

$$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{B}.$$

3. Dacă $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, atunci reuniunea lor numărabilă aparține lui $\mathcal{B}$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

Familia $\mathcal{B}$ se mai numește și *σ -algebră de submulțimi ale lui Ω* .

Definiția 1.1.2. [86, p. 76] Fie K o mulțime nevidă. O familie de submulțimi $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(K)$ se numește *topologie pe K* dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. Mulțimea vidă și mulțimea totală aparțin familiei:

$$\emptyset \in \mathcal{D}, \quad K \in \mathcal{D}.$$

2. Reuniunea arbitrară (eventual infinită) a mulțimilor din $\mathcal{D}$ aparține lui $\mathcal{D}$, adică pentru orice familie $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}$ avem

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{D}.$$

3. Intersecția finită a mulțimilor din $\mathcal{D}$ aparține lui $\mathcal{D}$, adică pentru orice $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{D}$ avem

$$\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{D}.$$

Perechea $(K, \mathcal{D})$ se numește *spațiu topologic*, iar elementele lui $\mathcal{D}$ se numesc *mulțimi deschise*.

Definiția 1.1.3. [57] Fie Ω o mulțime nevidă și fie $\mathcal{B}$ o σ -algebră de submulțimi ale lui Ω . Atunci $(\Omega, \mathcal{B})$ se numește *spațiu măsurabil* iar elementele lui $\mathcal{B}$ se numesc mulțimi măsurabile.

Definiția 1.1.4. [86] Fie $(K, \mathcal{D})$ un spațiu topologic. σ -algebra generată de familia $\mathcal{D}$ se numește *σ -algebră boreliană* pe K și se notează $\mathcal{B}(K) = \sigma(\mathcal{D})$. Elementele sale se numesc *mulțimi boreliene*.

Definiția 1.1.5. [57] Fie $(\Omega, \mathcal{B})$ un spațiu măsurabil și $(K, \mathcal{D})$ un spațiu topologic. O funcție $f : \Omega \rightarrow K$ se zice *măsurabilă* dacă pentru orice $D \in \mathcal{D}$, $f^{-1}(D) \in \mathcal{B}$ (imaginea inversă a oricărei mulțimi deschise prin funcția f este o mulțime boreliană).

Definiția 1.1.6. [57] O funcție $f : \Omega \rightarrow K$, măsurabilă în raport cu spațiile măsurabile $(\Omega, \mathcal{B})$ și $(K, \mathcal{D})$ se numește *variabilă aleatoare*. Spunem că o variabilă aleatoare este *simplă* dacă ia un număr finit de valori.

Definiția 1.1.7. [57] Fie $(\Omega, \mathcal{B})$ un spațiu măsurabil. O funcție $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ σ -aditivă cu $\mu(\Omega) = 1$ se numește *măsură de probabilitate*. Tripletul $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ se numește *spațiu de probabilitate*.

Pentru a defini integrala în cazul general al variabilelor aleatoare oarecare utilizăm următoarea leamnă:

Lema 1.1.1. Dacă X este un spațiu Banach separabil și f o variabilă aleatoare definită pe $(\Omega, \mathcal{B})$ cu valori în $(X, \|\cdot\|)$ atunci funcția cu valori reale $\|f(\cdot)\|$ este măsurabilă.

Pentru demonstrație a se vedea [33, p. 19].

Fie $f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$.

Definiția 1.1.8. [33] Variabila aleatoare $f : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ se numește *Bochner integrabilă* sau *simplu integrabilă* (în raport cu măsura de probabilitate μ) dacă

$$\int_{\Omega} \|f(\omega)\| d\mu(\omega) < \infty.$$

Dacă f este o variabilă aleatoare integrabilă atunci definim

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) d\mu(\omega)$$

unde f_n este un șir de variabile aleatoare simple astfel încât șirul $\|f(\omega) - f_n(\omega)\|$ este monoton descrescător la zero. Această integrală este bine definită deoarece limita de mai sus există [33] și este independentă de șirul de variabile aleatoare simple $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ales pentru aproximare. Mai precizăm că această integrală se numește *media* sau *integrala Bochner* a variabilei aleatoare f . O notăm cu $E(f)$, adică

$$E(f) = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega).$$

Condițiile în care un operator liniar comută cu integrala Bochner sunt date de următoarea propoziție.

Propoziția 1.1.1. *Presupunem că X și Y sunt două spații Banach și $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ este un operator închis cu domeniul $D(A)$ care este o submulțime Boreliană a lui X unde $D(A)$ este înzestrată cu norma graficului lui A . Dacă $f : \Omega \rightarrow X$ este o variabilă aleatoare astfel încât $f(\omega) \in D(A)$ cu probabilitatea 1 atunci $A(f)$ este o variabilă aleatoare cu valori în Y .*

Dacă, mai mult

$$\int_{\Omega} \|Af(\omega)\| d\mu(\omega) < \infty$$

atunci

$$A \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} (Af)(\omega) d\mu(\omega) \quad (1.1)$$

Demonstrație. Pentru demonstrație a se vedea [33, p. 21]. □

Considerăm $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un spațiu de probabilitate. Notăm cu X un spațiu Banach real sau complex.

Fie $\mathcal{B}(X)$ algebra Banach a tuturor operatorilor liniari și mărginiți pe X , iar normele pe X , respectiv $\mathcal{B}(X)$ vor fi notate cu $\|\cdot\|$. De asemenea, definim mulțimile

$$\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$$

$$T = \{(t, s, t_0) \in \mathbb{R}_+^3 : t \geq s \geq t_0, t_0 \in [0, \infty)\}$$

Definiția 1.1.9. [76] O aplicație măsurabilă $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ se numește *semiflux stocastic de evoluție* pe Ω dacă au loc următoarele relații:

$$(es_1) \quad \varphi(t, t, \omega) = \omega, \text{ pentru orice } (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega;$$

$$(es_2) \quad \varphi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega)) = \varphi(t, t_0, \omega), \text{ pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega.$$

Exemplul 1.1.1. [76] Fie $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$, $\varphi(t, s, \omega) = \omega$. Se verifică ușor că φ este un semiflux de evoluție pe Ω .

Exemplul 1.1.2. [76] Fie $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție descrescătoare pe $[0, \infty)$ astfel încât $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = l$. Fie Ω închiderea în $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ în raport cu topologia convergenței uniforme a mulțimii $\{f_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ unde $f_t(\tau) = f(t + \tau)$, pentru orice $\tau \in \mathbb{R}_+$. Aplicația $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$, $\varphi(t, s, \omega) = \omega_{t-s}$ unde $\omega_{t-s}(\tau) = \omega(t - s + \tau)$ este un semiflux stohastic de evoluție pe Ω .

Într-adevăr,

$$\varphi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega)) = \varphi(t, s, \omega(s - t_0 + \tau)) = \omega_{t-t_0}(\tau) = \varphi(t, t_0, \omega).$$

Exemplul 1.1.3. [2] Fie X un spațiu Banach și fie Ω spațiul tuturor drumurilor $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ astfel încât $\omega(0) = 0$ cu topologia compactă deschisă. Fie $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, σ -algebra generată de mulțimea $\{\omega(u) - \omega(v) \in X \mid u, v \leq t\}$ și fie $\mathcal{B}$ - σ -algebra Boreliană asociată lui Ω . Atunci, aplicația definită prin $\varphi_0(t, \omega)(s) = \omega(t + s) - \omega(t)$ este un semiflux stohastic pe Ω , pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Definiția 1.1.10. [76] O aplicație $\Phi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ se numește *aplicație cociclică stohastică de evoluție* asociată semifluxului stohastic de evoluție $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ dacă sunt verificate următoarele condiții:

(ce₁) $\Phi(s, s, \omega) = I$ (operatorul identitate pe X), pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;

(ce₂) $\Phi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))\Phi(s, t_0, \omega) = \Phi(t, t_0, \omega)$, pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$;

(ce₃) $(s, t_0, \omega) \mapsto \Phi(s, t_0, \omega)$ este continuă pentru fiecare $\omega \in \Omega$.

Dacă $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ un semiflux stohastic de evoluție pe Ω și $\Phi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este o aplicație cociclică stohastică de evoluție peste φ , atunci perechea $C = (\Phi, \varphi)$ se numește *cociclu stohastic de evoluție* pe $\Delta \times \Omega$.

Mai mult, un operator de evoluție poate fi văzut ca și o aplicație cociclică de evoluție. Pentru aceasta amintim că o aplicație $U : \Delta \rightarrow \mathcal{B}(X)$ se numește *operator de evoluție* dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

(u₁) $U(t, t) = I$ (operatorul identitate), oricare ar fi $t \in \mathbb{R}_+$;

(u₂) $U(t, s)U(s, t_0) = U(t, t_0)$, oricare ar fi $(t, s, t_0) \in T$.

Definiția 1.1.11. [125] Aplicația cociclică stohastică de evoluție $\Phi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ se numește *reversibilă* dacă pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$, aplicația $\Phi(t, s, \omega)$ este bijectivă.

Exemplul 1.1.4. [55] Fie $U : \Delta \rightarrow \mathcal{B}(X)$ un operator de evoluție. Atunci pentru orice semiflux stocastic de evoluție $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ aplicația $\Phi_U : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$, definită prin

$$\Phi_U(t, s, \omega) = U(t, s), \quad \text{pentru orice } (t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$$

este o aplicație cociclică stocastică de evoluție. Așadar, pentru orice semiflux stocastic de evoluție φ , perechea $C = (\Phi_U, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție.

Exemplul 1.1.5. [2] Considerăm semifluxul stocastic φ_0 definit în Exemplul 1.1.3. Pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ vom nota cu

$$\varphi(t, s, \omega) = \varphi_0(t - s, \omega)$$

și

$$\Phi(t, s, \omega) = \Phi_0(t - s, \omega)$$

Atunci $C(\Phi, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Se observă că

$$\varphi(s, s, \omega) = \omega$$

și

$$\begin{aligned} \varphi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega)) &= \varphi(t + s, t_0, \omega) - \varphi(t, t_0, \omega) = \\ &= \omega(t + s + t_0) - \omega(t + s) - \omega(t + t_0) + \omega(t) = \\ &= \varphi(t + t_0, s, \omega) - \varphi(t, s, \omega) = \\ &= \varphi(t, t_0, \omega). \end{aligned}$$

În consecință, cociclu stocastic de evoluție generalizează conceptul de cociclu stocastic clasic introdus de L. Arnold în [2].

Definiția 1.1.12. [89] O funcție crescătoare $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ cu $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ se numește *rată de creștere*.

Exemplul 1.1.6. [130] Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$. Pentru o rată de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ inversabilă, considerăm

$$h_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h_e(t) = h^{-1}(e^t)$$

și

$$\varphi_e : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e(t, s, \omega) = \varphi(h_e(t), h_e(s), \omega)$$

un semiflux stocastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_e : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_e(t, s, \omega) = \Phi(h_e(t), h_e(s), \omega)$$

o aplicație cociclică stocastică de evoluție asociată lui φ_e .

Atunci $C = (\Phi_e, \varphi_e)$ este un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Exemplul 1.1.7. [130] Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$. Pentru o rată de creștere $h : \mathbf{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ inversabilă, considerăm

$$h_p : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+, \quad h_p(t) = h^{-1}(t + 1)$$

și

$$\varphi_p : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p(t, s, \omega) = \varphi(h_p(t), h_p(s), \omega)$$

un semiflux stocastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_p : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_p(t, s, \omega) = \Phi(h_p(t), h_p(s), \omega)$$

o aplicație cociclică stocastică de evoluție asociată lui φ_p .

Atunci $C = (\Phi_p, \varphi_p)$ este un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Exemplul următor reprezintă cazul particular al Exemplului 1.1.6 pentru $h(t) = e^t$.

Exemplul 1.1.8. [130] Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$. Notăm cu

$$\varphi_p^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p^1(t, s, \omega) = \varphi(e^t - 1, e^s - 1, \omega)$$

un semiflux stocastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_p^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_p^1(t, s, \omega) = \Phi(e^t - 1, e^s - 1, \omega)$$

o aplicație cociclică stocastică de evoluție asociată lui φ_p^1 .

Atunci $C = (\Phi_p^1, \varphi_p^1)$ este un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Exemplul care urmează reprezintă cazul particular al Exemplului 1.1.7 atunci când rata de creștere este $h(t) = t + 1$.

Exemplul 1.1.9. [130] Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$. Notăm cu

$$\varphi_e^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e^1(t, s, \omega) = \varphi(\ln(t + 1), \ln(s + 1), \omega)$$

un semiflux stocastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_e^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_e^1(t, s, \omega) = \Phi(\ln(t + 1), \ln(s + 1), \omega)$$

o aplicație cociclică stocastică de evoluție asociată lui φ_e^1 .

Atunci $C = (\Phi_e^1, \varphi_e^1)$ este un cociclu stocastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Notăm cu $L(\Omega, X, \mu)$ spațiul Banach al tuturor funcțiilor măsurabile Bochner $f : \Omega \rightarrow X$ cu

$$\int_{\Omega} \|f(\omega)\| d\mu(\omega) < \infty.$$

În continuare sunt definite clase particulare de cocicli stochastici de evoluție. Aceste clase sunt utilizate la caracterizarea integrală a stabilității exponențiale, stabilității polinomiale și a h-stabilității respectiv a dichotomiei exponențiale, dichotomiei polinomiale și a h-dichotomiei în medie.

Definiția 1.1.13. [66] Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ se numește *tare măsurabil* dacă, pentru orice $(t_0, x) \in \mathbb{R}_+ \times L(\Omega, X, \mu)$, aplicația dată de

$$s \mapsto \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

este măsurabilă pe $[t_0, \infty)$.

Definiția 1.1.14. [66] Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ se numește **-tare măsurabil* dacă, pentru orice $(t, t_0, x^*) \in T \times L(\Omega, X^*, \mu)$, aplicația dată de

$$s \mapsto \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))^* x^*(\omega)\| d\mu(\omega)$$

este măsurabilă pe $[t_0, t]$.

1.2 Concepte de creștere uniformă pentru cocicli stochastici de evoluție

Definiția 1.2.1. Spunem că perechea $C = (\Phi, \varphi)$ are *h-creștere în medie (c.h.m.)* dacă există trei constante $M \geq 1$, $\varepsilon \geq 0$ și $\alpha > 0$ astfel încât:

$$h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M h(s)^\varepsilon h(t)^\alpha \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Definiția 1.2.2. [130] Spunem că perechea $C = (\Phi, \varphi)$ are *creștere h-uniformă în medie (c.h.u.m.)* dacă există $M > 1$ și $\alpha > 0$ cu

$$h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M h(t)^\alpha \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Remarca 1.2.1. [130] Spunem că perechea $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie dacă și numai dacă există $M > 1$ și $\alpha > 0$ cu

$$h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega);$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

În caz particular, avem:

- (i) pentru $h(t) = e^t$ se obține conceptul de creștere exponențială uniformă în medie;
- (ii) pentru $h(t) = t + 1$ se obține conceptul de creștere polinomială uniformă în medie.

În continuare sunt prezentate două criterii de majorare pentru conceptul de creștere exponențială uniformă:

Propoziția 1.2.1. *Fie cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere exponențială uniformă în medie;
- (ii) există $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ crescătoare, cu $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ și

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq g(t - s) \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$

- (iii) există $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ crescătoare, cu $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ și

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq g(t - s) \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$

Propoziția 1.2.2. *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere polinomială uniformă în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_p^1 = (\Phi_p^1, \varphi_p^1)$ definit în Exemplul 1.1.8 are creștere exponențială uniformă în medie.*

Propoziția 1.2.3. *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere exponențială uniformă în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_e^1 = (\Phi_e^1, \varphi_e^1)$ definit în Exemplul 1.1.9 are creștere polinomială uniformă în medie.*

Propoziția 1.2.4. *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_e = (\Phi_e, \varphi_e)$ definit în Exemplul 1.1.6 are creștere exponențială uniformă în medie.*

Propoziția 1.2.5. *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_e = (\Phi_e, \varphi_e)$ definit în Exemplul 1.1.7 are creștere polinomială uniformă în medie.*

În remarca următoare este evidențiată legătura între noțiunile de creștere prezentate în această secțiune.

Remarca 1.2.2. Legătura între conceptele de creștere definite mai sus este dată de următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc} c.p.u.m. & \Rightarrow & c.p.m. \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ c.e.u.m. & \Rightarrow & c.e.m. \end{array}$$

și

$$c.h.u.m. \Rightarrow c.h.m.$$

1.3 Familii de proiectori stochastici invariante respectiv tare invariante la cocicli stochastici de evoluție

Definiția 1.3.1. [124] Spunem că o aplicație continuă $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este familie [124] de proiectori pe X dacă

$$P^2(s, \omega) = P(s, \omega),$$

pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Remarca 1.3.1. [124] Dacă $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este o familie de proiectori pentru un cociclu de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$, atunci $Q : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ definită prin $Q(s, \omega) = I - P(s, \omega)$ este de asemenea o familie de proiectori pentru C , numită familia de proiectori complementară lui P .

Definiția 1.3.2. [124] Spunem că familia de proiectori $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este invariantă pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ dacă are loc relația:

$$\Phi(t, s, \omega)P(s, \omega) = P(t, \varphi(t, s, \omega))\Phi(t, s, \omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Remarca 1.3.2. [124] Dacă familia de proiectori $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este invariantă pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ atunci și familia de proiectori complementară $Q : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este de asemenea invariantă pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$.

Exemplul 1.3.1. [124] Dacă $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este o familie de proiectori pe X , atunci $P_h : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$, $P_h(s, \omega) = P(h^{-1}(e^s), \omega)$ este o familie de proiectori pe X .

Se observă ușor că

$$P_h(s, \omega) \cdot P_h(s, \omega) = P(h^{-1}(e^s), \omega) \cdot P(h^{-1}(e^s), \omega) = P(h^{-1}(e^s), \omega) = P_h(s, \omega).$$

Exemplul 1.3.2. [124] Dacă $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este o familie de proiectori pe X , atunci $P_h : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$, $P_h(t) = P(h^{-1}(t+1))$ este o familie de proiectori pe X .

Într-adevăr,

$$P_h(s, \omega) \cdot P_h(s, \omega) = P(h^{-1}(s+1), \omega) \cdot P(h^{-1}(s+1), \omega) = P(h^{-1}(s+1), \omega) = P_h(s, \omega).$$

În cele ce urmează, dacă P este o familie de proiectori invariantă pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ atunci notăm cu $\Phi_P : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ aplicația definită prin

$$\Phi_P(t, s, \omega) = \Phi(t, s, \omega)P(s, \omega) \quad (1.2)$$

Propoziția 1.3.1. [123] Aplicația Φ_P are următoarele proprietăți:

- (i) $\Phi_P(t, s, \omega) = P(t, \varphi(t, s, \omega))\Phi_P(t, s, \omega)$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;
- (ii) $\Phi_P(t, t, \omega) = P(t, \omega)$, pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;
- (iii) $\Phi_P(t, t_0, \omega) = \Phi_P(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))\Phi_P(s, t_0, \omega)$, pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$.

Remarca 1.3.3. [125] Dacă aplicația cociclică stochastică de evoluție $\Phi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este reversibilă și familia de proiectori $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este invariantă pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ atunci

$$P(s, \omega)\Phi^{-1}(t, s, \omega) = \Phi^{-1}(t, s, \omega)P(t, \varphi(t, s, \omega)),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Propoziția 1.3.2. [125] Dacă $\Phi_P(t, s, \omega) : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ și $\Phi_P^{-1}(t, s, \omega)$ este inversa sa, atunci:

- (i) $\Phi(t, s, \omega)\Phi^{-1}(t, s, \omega)P(t, \varphi(t, s, \omega)) = P(t, \varphi(t, s, \omega))$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;
- (ii) $\Phi^{-1}(t, s, \omega)\Phi(t, s, \omega)P(s, \omega) = P(s, \omega)$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;
- (iii) $\Phi^{-1}(t, s, \omega)P(t, \varphi(t, s, \omega)) = P(s, \omega)\Phi^{-1}(t, s, \omega)P(t, \varphi(t, s, \omega))$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;

Dacă Q este o familie de proiectori invariantă pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ atunci notăm cu $\Phi_Q : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ aplicația definită prin

$$\Phi_Q(t, s, \omega) = Q(t, \varphi(t, s, \omega))\Phi(t, s, \omega).$$

Propoziția 1.3.3. Aplicația Φ_Q are următoarele proprietăți:

- (i) $\Phi_Q(t, s, \omega) = Q(t, \varphi(t, s, \omega))\Phi_Q(t, s, \omega)$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;

(ii) $\Phi_Q(t, t, \omega) = Q(t, \omega)$, pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;

(iii) $\Phi_Q(t, t_0, \omega) = \Phi_Q(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))\Phi_Q(s, t_0, \omega)$, pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$.

Definiția 1.3.3. [123] Spunem că familia de proiectori $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este *tare invariantă* pentru cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ dacă este invariantă pentru $C = (\Phi, \varphi)$ astfel încât pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$, aplicația $\Phi(t, s, \omega)$ este izomorfism de la $\text{Range } Q(s, \omega)$ la $\text{Range } Q(t, \varphi(t, s, \omega))$.

Remarca 1.3.4. [123] Dacă $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este o familie de proiectori tare invariantă pentru $C = (\Phi, \varphi)$, atunci există $\Psi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ astfel încât pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$, Ψ este un izomorfism de la $\text{Range } Q(t, \varphi(t, s, \omega))$ la $\text{Range } Q(s, \omega)$.

Se utilizează notația

$$\Psi_Q(t, s, \omega) = \Psi(t, s, \omega)Q(t, \varphi(t, s, \omega)).$$

Propoziția 1.3.4. [83] Aplicația Ψ_Q are următoarele proprietăți:

(i) $\Phi_Q(t, s, \omega)\Psi_Q(t, s, \omega) = Q(t, \varphi(t, s, \omega))$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;

(ii) $\Psi_Q(t, s, \omega)\Phi_Q(t, s, \omega) = Q(s, \omega)$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$;

(iii) $\Psi_Q(t, s, \omega) = Q(s, \omega)\Psi_Q(t, s, \omega)$, pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

(iv) $\Psi_Q(t, t, \omega) = Q(t, \omega)$, pentru orice $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;

(v) $\Psi_Q(t, t_0, \omega) = \Psi_Q(s, t_0, \omega)\Psi_Q(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))$, pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$.

Definiția 1.3.4. Perechea (C, P) se numește *pereche dichotomică* dacă:

(i) familia de proiectori P este invariantă la cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$;

(ii) pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ aplicația cociclică stochastică de evoluție $\Phi(t, s, \omega)$ este izomorfism de la $\text{Range } P(s, \omega)$ la $\text{Range } P(t, \varphi(t, s, \omega))$;

(iii) pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ aplicația cociclică stochastică de evoluție $\Phi(t, s, \omega)$ este izomorfism de la $\text{Range } Q(s, \omega)$ la $\text{Range } Q(t, \varphi(t, s, \omega))$,

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Remarca 1.3.5. Perechea (C, P) este pereche dichotomică dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- (i) pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ există $\Psi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ astfel încât $\Psi_P(t, s, \omega)$ este izomorfism de la $\text{Range } P(t, \varphi(t, s, \omega))$ la $\text{Range } P(s, \omega)$ cu

$$\Phi(t, s, \omega) \Psi_P(t, s, \omega) P(t, \varphi(t, s, \omega)) = P(t, \varphi(t, s, \omega))$$

și

$$\Psi_P(t, s, \omega) \Phi(t, s, \omega) P(s, \omega) = P(s, \omega);$$

- (ii) pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ există $\Psi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ astfel încât $\Psi_Q(t, s, \omega)$ este izomorfism de la $\text{Range } Q(t, \varphi(t, s, \omega))$ la $\text{Range } Q(s, \omega)$ cu

$$\Phi(t, s, \omega) \Psi_Q(t, s, \omega) Q(t, \varphi(t, s, \omega)) = Q(t, \varphi(t, s, \omega))$$

și

$$\Psi_Q(t, s, \omega) \Phi(t, s, \omega) Q(s, \omega) = Q(s, \omega).$$

1.4 Concepte de creștere uniformă pentru perechi de forma (C, P)

Definiția 1.4.1. [124] Spunem că perechea (C, P) are *h-creștere uniformă în medie* (c.h.u.m.) dacă există constantele $M \geq 1, \alpha > 0$ astfel încât:

$$(chu_1m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(chu_2m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Definiția 1.4.2. [124] Spunem că perechea (C, P) are *h-creștere în medie* (c.h.m.) dacă există constantele $M \geq 1, \varepsilon \geq 0$ și $\alpha > 0$ astfel încât:

$$(ch_1m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(s)^\varepsilon h(t)^\alpha \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(ch_2m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\varepsilon h(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Cazurile particulare sunt:

- (i) pentru $h(t) = e^t$ se obține conceptul de creștere exponențială uniformă în medie pentru perechi de forma (C, P) ;
- (ii) pentru $h(t) = t + 1$ se obține conceptul de creștere polinomială uniformă în medie pentru perechi de forma (C, P) ;

Propoziția 1.4.1. [123] *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *Perechea (C, P) are c.h.u.m;*

(ii) *Există $M \geq 1, \alpha > 0$ astfel încât:*

$$(chu'_1 m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(chu'_2 m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_Q(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$;

(iii) *Există $M \geq 1, \alpha > 0$ astfel încât:*

$$(chu''_1 m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(chu''_2 m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Psi_Q(t, s, \omega)x(\omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|Q(t, \varphi(t, s, \omega))x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$;

(iv) *Există $M \geq 1, \alpha > 0$ astfel încât:*

$$(chu'''_1 m) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(chu'''_2 m) \quad h(t_0)^\alpha \int_{\Omega} \|\Psi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq \\ Mh(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Psi_Q(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

Remarca 1.4.1. [123] Considerând $h(t) = e^t$ respectiv $h(t) = t + 1$ în Propoziția 1.4.1 vom obține o caracterizare a creșterii uniforme în medie pentru perechi de forma (C, P) pentru cazul exponențial, respectiv pentru cazul polinomial.

Teorema următoare prezintă o caracterizare pentru conceptul de h - creștere uniformă în medie în cazul în care Φ este o aplicație cociclică stocastică reversibilă.

Teorema 1.4.1. [125] *Perechea (C, P) are creștere h -uniformă în medie cu Φ o aplicație cociclică stocastică de evoluție reversibilă dacă și numai dacă există $M > 1$ și $\alpha > 0$ cu:*

$$(c.h.u^r_1 m.) \quad h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq \\ \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)P(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega),$$

$$\begin{aligned}
(c.h.u_2^r.m.) \quad & h(s)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq \\
& \leq Mh(t)^\alpha \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)Q(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega), \\
& \text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu);
\end{aligned}$$

În cele ce urmează vom prezenta criterii de majorare pentru conceptele de creștere uniformă în medie, folosind cocicli stochastici de evoluție definiți în Exemplele 1.1.6 și 1.1.7, precum și familiile de proiectori asociate acestora.

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Pentru o rată de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ inversabilă, considerăm

$$h_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h_e(t) = h^{-1}(e^t)$$

și

$$\varphi_e : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e(t, s, \omega) = \varphi(h_e(t), h_e(s), \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_e : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_e(t, s, \omega) = \Phi(h_e(t), h_e(s), \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_e ,

$$P_e : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_e(s, \omega) = P(h_e(s), \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la cociclul stochastic de evoluție C_e , pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Propoziția 1.4.2. *Perechea (C, P) are h -creștere uniformă în medie dacă și numai dacă perechea (C_e, P_e) are creștere exponențială uniformă în medie.*

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Pentru o rată de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ inversabilă, considerăm

$$h_p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h_p(t) = h^{-1}(t + 1)$$

și

$$\varphi_p : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p(t, s, \omega) = \varphi(h_p(t), h_p(s), \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_p : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_p(t, s, \omega) = \Phi(h_p(t), h_p(s), \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_p ,

$$P_p : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_p(s, \omega) = P(h_p(s), \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la cociclul stochastic de evoluție C_p , pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Propoziția 1.4.3. *Perechea (C, P) are h -creștere uniformă în medie dacă și numai dacă perechea dichotomică (C_p, P_p) are creștere polinomială uniformă în medie.*

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Vom nota cu

$$\varphi_p^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p^1(t, s, \omega) = \varphi(e^t - 1, e^s - 1, \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_p^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_p^1(t, s, \omega) = \Phi(e^t - 1, e^s - 1, \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_p^1 ,

$$P_p^1 : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_p^1(s, \omega) = P(e^s - 1, \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la C_p^1 ,
pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Propoziția 1.4.4. *Perechea (C, P) are creștere polinomială uniformă în medie dacă și numai dacă perechea (C_p^1, P_p^1) are creștere exponențială uniformă în medie.*

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Notăm cu

$$\varphi_e^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e^1(t, s, \omega) = \varphi(\ln(t + 1), \ln(s + 1), \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_e^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_e^1(t, s, \omega) = \Phi(\ln(t + 1), \ln(s + 1), \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_e^1 ,

$$P_e^1 : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_e^1(s, \omega) = P(\ln(s + 1), \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la C_e^1 ,
pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Propoziția 1.4.5. *Perechea (C, P) are creștere exponențială uniformă în medie dacă și numai dacă perechea dichotomică (C_e^1, P_e^1) are creștere polinomială uniformă în medie.*

1.5 Comentarii bibliografice

În ultimele decenii, activitatea de cercetare privind comportamentul asimptotic al ecuațiilor de evoluție stochastice în spații infinit dimensionale a cunoscut o intensificare semnificativă. Multe rezultate pot fi obținute nu doar pentru ecuații diferențiale și operatori de evoluție sau cocicli de evoluție ci și pentru cocicli stochastici de evoluție.

În acest capitol sunt prezentate conceptele de h - creștere pentru cocicli stochastici de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$, respectiv conceptele de creștere pentru perechile de forma (C, P) în cazul uniform. Aceste noțiuni se regăsesc pe parcursul lucrării în enunțurile teoremelor ce caracterizează comportamentul uniform stabil sau dichotomic al cocicliilor stochastici de evoluție în spații Banach.

În primul paragraf al acestui capitol (*Cocicli stochastici de evoluție*) au fost prezentate noțiunile de semiflux stochastic de evoluție și cociclu stochastic de evoluție care reprezintă generalizări ale conceptelor clasice definite de L. Arnold în [2], respectiv G. Da Prato și J. Zabczyk în [33]. În cazul determinist, noțiunea de cociclu de evoluție a fost introdus de M. Megan și C. Stoica în [76]. Exemplele prezentate subliniază caracterul generalizat al noțiunii de cociclu stochastic de evoluție față de conceptele de cociclu de evoluție în sens clasic, respectiv a celui de operator de evoluție.

Rezultatele originale ale acestui paragraf sunt reprezentate de Exemplele 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8, 1.1.9 fiind publicate în [130].

Paragraful 1.2. (*Concepte de creștere uniformă pentru cocicli stochastici de evoluție*) cuprinde conceptele de h -creștere pentru cocicli stochastici de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ în cazul uniform. În cazurile particulare $h(t) = e^t$, respectiv $h(t) = t + 1$ se obțin conceptele de creștere exponențială, respectiv polinomială pentru cocicli stochastici de evoluție. Ca și rezultate originale regăsim Definiția 1.2.2, Remarca 1.2.1 publicate în [130] și Propozițiile 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5 comunicate în cadrul Conferinței *Le XVe Colloque Franco-Roumain de Mathematiques Appliques, 29 août – 2 septembre 2022, Toulouse, France* și fac obiectul unei lucrări științifice aflate în curs de elaborare.

În următorul paragraf (*Familii de proiectori stochastici invariante, respectiv tare invariante*) se regăsesc conceptele care se referă la familii de proiectori (invariantă, tare invariantă) și câteva rezultate care vor fi folosite în continuare în lucrare. Definiția 1.3.4 se referă la definirea conceptului de pereche dichotomică (C, P) unde C este un cociclu stochastic de evoluție iar P este o familie de proiectori invariantă la cociclu stochastic de evoluție C . Definiția 1.3.4 și Remarca 1.3.5 sunt originale și reprezintă rezultate ale unei cercetări aflate în curs de elaborare. Rezultatele originale ale acestui paragraf sunt Definițiile 1.3.1, 1.3.2, Remarcile 1.3.1, 1.3.2, Exemplele 1.3.1, 1.3.2 publicate în [124] dar și Remarca 1.3.3 și Propoziția 1.3.2 care au fost publicate în lucrarea [125]. În lucrarea [123] au fost publicate Definiția 1.3.3, Remarca 1.3.4, Propozițiile 1.3.3, 1.3.4 și reprezintă generalizări ale unor rezultate din

lucrarea [83].

Paragraful 1.4. (*Concepte de creștere uniformă pentru perechi de forma (C, P)*) cuprinde conceptele de creștere exponențială, polinomială și cu rate de creștere pentru perechi de forma (C, P) . Rezultatele originale sunt reprezentate de Definițiile 1.4.1, 1.4.2 care au fost publicate în lucrarea [124].

Propoziția 1.4.1, respectiv Remarca 1.4.1 se referă la caracterizări ale conceptului de h -creștere uniformă în medie respectiv caracterizările de creștere exponențială uniformă în medie și creștere polinomială uniformă în medie și au fost publicate în [123].

Propozițiile 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 și 1.4.5 reprezintă criterii de majorare în cazul creșterilor exponențiale și polinomiale folosind legătura dintre creșterea h -uniformă în medie și creșterea exponențială uniformă în medie, respectiv creșterea h -uniformă în medie și creșterea polinomială uniformă în medie. Aceste propoziții sunt originale și fac parte dintr-un studiu aflat în curs de elaborare. Tot un rezultat original este și Teorema 1.4.1 publicat în [125].

2. Concepte de stabilitate pentru cocicli stochastici de evoluție

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un spațiu de probabilitate și X un spațiu Banach real sau complex. Notăm cu $\mathcal{B}(X)$ algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe X .

Fie $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ un semiflux de evoluție pe Ω și $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Fie $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ o rată de creștere, adică o funcție bijectivă și crescătoare, iar $L(\Omega, X, \mu)$ spațiul Banach al funcțiilor Bochner măsurabile.

2.1 Preliminarii

Definiția 2.1.1. [113] Spunem că perechea $C = (\Phi, \varphi)$ este *uniform stabilă în medie (u.s.m.)* dacă există $N \geq 1$ cu

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

Definiția 2.1.2. [130] Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ se numește *uniform h-stabil în medie (u.h.s.m.)* dacă există $N > 1$ și $\nu > 0$ cu

$$h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$

Remarca 2.1.1. [130] Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h-stabil în medie dacă și numai dacă există $N > 1$ și $\nu > 0$ cu

$$h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$

Se pot menționa următoarele cazuri particulare:

- (i) pentru $h(t) = e^t$ se obține conceptul de stabilitate exponențială uniformă în medie (*u.e.s.m.*).
- (ii) pentru $h(t) = t + 1$ se obține conceptul de stabilitate polinomială uniformă în medie (*u.p.s.m.*).

Remarca 2.1.2. [129] Dacă cociclu stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie, atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform stabil în medie.

Implicația reciprocă nu are loc, după cum este evidențiat în exemplul următor.

Exemplul 2.1.1. [129] Fie $U : \Delta \rightarrow \mathcal{B}(X)$ un operator de evoluție definit prin

$$U(t, s)x = \frac{h(s)}{h(t)}x$$

Aplicația $\Phi_U : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$, definită prin

$$\Phi_U(t, s, \omega) = U(t, s)$$

este o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată semifluxului stochastic de evoluție $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ definit prin

$$\varphi(t, s, \omega) = \frac{h(s)}{h(t)}\omega.$$

Atunci perechea $C = (\Phi_U, \varphi)$ este un cociclu stochastic de evoluție uniform stabil în medie, dar nu este h -uniform stabil în medie.

Remarca 2.1.3. [129] Dacă cociclu stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform stabil în medie, atunci el are creștere h -uniformă în medie.

Într-adevăr, din faptul că $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform stabil în medie rezultă că există $M \geq 1$ cu:

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M \left(\frac{h(t)}{h(s)} \right)^{\alpha} \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mathcal{P})$.

Așadar, $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie.

Implicația reciprocă nu are loc iar acest lucru este evidențiat în exemplul care urmează:

Exemplul 2.1.2. [129] Fie $U : \Delta \rightarrow \mathcal{B}(X)$ un operator de evoluție definit prin

$$U(t, s)x = \frac{h(t)}{h(s)}x$$

Atunci aplicația $\Phi_U : \Delta \times \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$, definită prin

$$\Phi_U(t, s, \omega) = U(t, s)$$

este o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociat semifluxului stochastic de evoluție $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ definit prin

$$\varphi(t, s, \omega) = \frac{h(t)}{h(s)}\omega$$

iar perechea $C = (\Phi_U, \varphi)$ este un cociclu stochastic de evoluție care are uniform h -creștere, dar nu este uniform stabil în medie.

Propoziția 2.1.1. *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este*

(i) *uniform stabil în medie dacă și numai dacă există $N \geq 1$ astfel încât*

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

(ii) *uniform exponențial stabil în medie dacă și numai dacă există constantele $N \geq 1$ și $\nu > 0$ astfel încât*

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Ne^{-\nu(t-s)} \int_{\Omega} \|\Phi(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

Remarca 2.1.4. [129] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform exponențial stabil în medie atunci el este uniform stabil în medie.

Din faptul că $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform exponențial stabil (u.e.s.m.) rezultă că există $N \geq 1$, $\nu > 0$ astfel încât

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Ne^{-\nu(t-s)} \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

În exemplul care urmează se poate observa că implicația reciprocă nu este adevărată.

Exemplul 2.1.3. [100] Fie $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ o funcție crescătoare și mărginită. Aplicația $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$, definită prin

$$\varphi(t, s, \omega) = t - s + \omega$$

este un semiflux stochastic de evoluție pe $\mathbb{R}_+$ pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ iar aplicația $\Phi : \Delta \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$, definită prin

$$\Phi(t, s, \omega) = \frac{f(\omega)}{f(t - s + \omega)}$$

este o aplicație cociclică stochastică de evoluție pe $\mathbb{R}$ pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$. Se verifică ușor că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu de evoluție uniform stabil cu $N = 1$. Pe de altă parte, presupunem prin reducere la absurd că există constantele $N \geq 1$ și $\nu > 0$ astfel încât

$$\frac{f(\omega)}{f(t - s + \omega)} \leq N e^{-\nu(t-s)}$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Alegem $s = 0$ și obținem

$$\frac{e^{\nu t}}{f(t + \omega)} \leq \frac{N}{f(\omega)}$$

ceea ce este absurd dacă $t \rightarrow \infty$ și prin urmare $C = (\Phi, \varphi)$ nu este uniform exponențial stabil în medie.

2.2 Legături între conceptele de stabilitate uniformă în medie

În următoarea teoremă este prezentată legătura între conceptul de h -stabilitate uniformă în medie și conceptul de stabilitate exponențială uniformă în medie.

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și fie $C_e = (\Phi_e, \varphi_e)$ cociclu stochastic de evoluție definit în Exemplul 1.1.6.

Teorema 2.2.1. [130] *Cociclu stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă cociclu stochastic de evoluție $C_e = (\Phi_e, \varphi_e)$ este uniform exponențial stabil în medie.*

Legătura între stabilitatea polinomială uniformă în medie și stabilitatea exponențială uniformă în medie este dat de corolarul următor:

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și fie $C_p^1 = (\Phi_p^1, \varphi_p^1)$ cociclu stochastic de evoluție definit în Exemplul 1.1.8.

Corolarul 2.2.1. [130] *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform polinomial stabil în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_p^1 = (\Phi_p^1, \varphi_p^1)$ este uniform exponențial stabil în medie.*

Teorema următoare prezintă legătura între conceptul de h -stabilitate uniformă în medie și conceptul de stabilitate polinomială uniformă în medie.

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și fie $C_p = (\Phi_p, \varphi_p)$ cociclul stochastic de evoluție definit în Exemplul 1.1.7.

Teorema 2.2.2. [130] *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_p = (\Phi_p, \varphi_p)$ este uniform polinomial stabil în medie.*

Un caz particular al teoremei precedente este legătura între conceptele de stabilitate exponențială uniformă în medie și stabilitate polinomială uniformă în medie.

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și fie $C_e^1 = (\Phi_e^1, \varphi_e^1)$ cociclul stochastic de evoluție definit în Exemplul 1.1.9.

Corolarul 2.2.2. [130] *Cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform exponențial stabil în medie dacă și numai dacă cociclul stochastic de evoluție $C_e^1 = (\Phi_e^1, \varphi_e^1)$ este uniform polinomial stabil în medie.*

Remarca 2.2.1. Conexiunea între conceptele de stabilitate și conceptele de creșteri este dată în următoarea diagramă:

$$u.h.s.m. \Rightarrow c.h.u.m$$

și

$$\begin{array}{ccc} u.e.s.m. & \Rightarrow & u.p.s.m. \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ c.e.u.m. & \Leftarrow & c.p.u.m. \end{array}$$

2.3 Caracterizări ale conceptului de stabilitate uniformă în medie

O primă caracterizare a conceptului de stabilitate uniformă în medie pentru cocicli stochastici de evoluție este dată de

Teorema 2.3.1. [130] *Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere exponențială uniformă în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform exponențial stabil în medie dacă și numai dacă există $r > 1$ și $c \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_{\Omega} \|\Phi(r + s, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq c \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 2.3.1. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere polinomială uniformă în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform polinomial stabil în medie dacă și numai dacă există constantele $r > e - 1$ și $c \in (0, 1)$ cu

$$\int_{\Omega} \|\Phi(rs + r + s, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq c \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 2.3.2. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există constantele $r > e$ și $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$\int_{\Omega} \|\Phi(h^{-1}(rs), h^{-1}(s), \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq c \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

O altă caracterizare a stabilității uniforme în medie este dată de

Teorema 2.3.2. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere polinomială uniformă în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform polinomial stabil în medie dacă și numai dacă există $L > 1$ cu

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \ln \frac{t+1}{s+1} \leq L \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 2.3.3. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există $L > 1$ cu

$$\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \ln \frac{h(t)}{h(s)} \leq L \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 2.3.4. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere exponențială în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform exponențial stabil în medie dacă și numai dacă există $L > 1$ astfel încât

$$(t - s) \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq L \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Teorema 2.3.3. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere exponențială în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform exponențial stabil în medie dacă și numai dacă există $M > 1$ și o funcție crescătoare $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ cu $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ și

$$g(t-s) \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 2.3.5. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere polinomială în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform polinomial stabil în medie dacă și numai dacă există $M > 1$ și o funcție crescătoare $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ cu $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ și

$$g\left(\frac{t+1}{s+1}\right) \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 2.3.6. [130] Dacă cociclul stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ are creștere h -uniformă în medie atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există $M > 1$ și o funcție crescătoare $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ cu $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ și

$$g\left(\frac{h(t)}{h(s)}\right) \int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq M \int_{\Omega} \|x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Pentru caracterizările de tip Datko vom utiliza următoarea clasă de funcții introdusă în [123].

Fie $\mathcal{H}$ mulțimea ratelor de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ care satisfac următoarele condiții:

(h_1) există $H > 1$ cu $h(t+1) \leq Hh(t)$, $\forall t \geq 0$;

(h_2) pentru orice $\beta < 0$ există $H_1 > 1$ cu $\int_s^\infty h(t)^\beta dt \leq H_1 h(s)^\beta$, $\forall s \geq 0$;

(h_3) pentru orice $\beta > 0$ există $H_2 > 1$ cu $\int_0^t h(s)^\beta ds \leq H_2 h(t)^\beta$, $\forall t \geq 0$.

Remarca 2.3.1. [123] Dacă $h(t) = e^t$, atunci $h \in \mathcal{H}$.

Următoarele teoreme reprezintă teoreme de tip Datko pentru conceptul de h -stabilitate uniformă în medie pentru cocicli stochastici de evoluție.

Teorema 2.3.4. *Fie $h \in \mathcal{H}$ și $C = (\Phi, \varphi)$ cociclu stochastic de evoluție tare măsurabil cu h -creștere uniformă. Atunci, $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există constantele $D > 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_s^\infty h(t)^{d-1} \left(\int_\Omega \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right) dt \leq Dh(s)^d \int_\Omega \|x(\omega)\| d\mu(\omega), \quad (2.1)$$

oricare ar fi $(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, P)$.

Teorema 2.3.5. *Fie $h \in \mathcal{H}$ și $C = (\Phi, \varphi)$ cociclu stochastic de evoluție tare măsurabil cu h -creștere uniformă în medie. Atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există $D > 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_s^\infty h(t)^d \left(\int_\Omega \|\Phi(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right) dt \leq D \cdot h(s)^d \int_\Omega \|x(\omega)\| d\mu(\omega), \quad (2.2)$$

pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Teorema 2.3.6. *Fie $h \in \mathcal{H}$ și $C = (\Phi, \varphi)$ cociclu stochastic de evoluție tare măsurabil cu creștere h -uniformă. Atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil dacă și numai dacă există $D > 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_{t_0}^t (h(s)^d)^{-1} \left(\int_\Omega \|\Phi(s, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right)^{-1} ds \leq D(h(t)^d)^{-1} \left(\int_\Omega \|\Phi(t, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

oricare ar fi $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$

Introducem noțiunea de h -funcție Lyapunov de speța întâi prin:

Definiția 2.3.1. O funcție $L_1 : \Delta \times \Omega \times L(\Omega, X, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ se zice h -funcție Lyapunov de speța întâi pentru cociclu stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ dacă există o constantă $D > 1$ astfel încât sunt îndeplinite următoarele condiții:

$$(hL_1) \quad L_1(s, t_0, \omega, x(\omega)) \leq D \int_\Omega \|\Phi(s, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

oricare ar fi $(s, t_0, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, P)$;

$$(hL_1) \quad L_1(t, t_0, \omega, x(\omega)) + \int_s^t \frac{h(\tau)^d}{h(s)^d} \left(\int_\Omega \|\Phi(\tau, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right) d\tau = L_1(s, t_0, \omega, x(\omega)),$$

oricare ar fi $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Următorul rezultat este obținut utilizând h -funcția Lyapunov de speța întâi pentru a obține o caracterizare pentru h -stabilitatea uniformă în medie:

Teorema 2.3.7. *Un cociclu stochastic de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ tare măsurabil cu h -creștere uniformă este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există o h -funcție Lyapunov de speța întâi pentru $C = (\Phi, \varphi)$.*

Definiția 2.3.2. O funcție $L_2 : \Delta \times \Omega \times L(\Omega, X, P) \rightarrow \mathbb{R}_+$ se zice *h -funcție Lyapunov de speța a doua* pentru cociclul de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ dacă există o constantă $D > 1$ astfel încât sunt îndeplinite condițiile:

$$(hL'_1) \quad L_2(t, t_0, \omega, x(\omega)) \leq D \left(\int_{\Omega} \|\Phi(t, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right)^{-1},$$

oricare ar fi $(s, t_0, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$;

$$(hL'_1) \quad L_2(s, t_0, \omega, x(\omega)) + \int_s^t \left(\frac{h(\tau)}{h(\tau)} \right)^d \left(\int_{\Omega} \|\Phi(\tau, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \right)^{-1} d\tau = L_2(t, t_0, \omega, x(\omega)),$$

oricare ar fi $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Următorul rezultat prezintă conceptul de h -stabilitate uniformă în medie prin intermediul h -funcției Lyapunov de speța a doua.

Teorema 2.3.8. *Un cociclu de evoluție $C = (\Phi, \varphi)$ tare măsurabil cu h -creștere uniformă în medie este uniform h -stabil în medie dacă și numai dacă există o h -funcție Lyapunov de speța a doua pentru $C = (\Phi, \varphi)$.*

Pentru caracterizările de tip Barbashin vom utiliza următoarele clase de funcții introduse în [19]:

- (i) $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor funcțiilor $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ cu proprietatea că există $H > 1$ astfel încât $h(t+1) \leq Hh(t)$, oricare ar fi $t \geq 0$.
- (ii) $\mathcal{H}_1$ mulțimea tuturor funcțiilor $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ cu proprietatea că există $H_1 > 1$ astfel încât $h(h(t)) \leq H_1h(t)$, oricare ar fi $t \geq 0$.
- (iii) $\mathcal{H}_B^1$ mulțimea tuturor funcțiilor $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice $\alpha \in (0, 1)$, există $H_1 > 1$ astfel încât $\int_0^t h(s)^{\alpha-1} ds \leq H_1h(t)^\alpha$, oricare ar fi $t \geq 0$.
- (iv) $\mathcal{H}_B^2$ mulțimea tuturor funcțiilor $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice $\alpha \in (0, 1)$, există $H_2 > 1$ astfel încât $\int_0^t h(s)^\alpha ds \leq H_2h(t)^\alpha$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Remarca 2.3.2. Clasele de funcții $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_B^1$, $\mathcal{H}_B^2$ anterior introduse reprezintă o generalizare a creșterilor exponențiale și polinomiale. Mai mult decât atât, ele permit și o caracterizare a $*$ -cocicliilor tare măsurabili cu rate de creștere $h \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_B^1$ pe care o prezentăm în teorema următoare.

Remarca 2.3.3. [19] Dacă e este o funcție exponențială, atunci

$$e \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_B^2 \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_B^1.$$

Remarca 2.3.4. [19] Dacă p este o funcție polinomială, atunci

$$p \in (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1) \cup (\mathcal{H}_B^1 \setminus \mathcal{H}_B^2).$$

Pentru o discuție detaliată privind problema existenței acestor integrale și proprietățile claselor de funcții considerate, a se vedea Secțiunea 3 din [19].

Teorema 2.3.9. [129] Fie $h \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_B^1$ și $C = (\Phi, \varphi)$ cociclu de evoluție $*$ -tare măsurabil cu h -creștere uniformă. Atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil dacă și numai dacă există $B > 1$ și $b \in (0, 1)$ astfel încât

$$\int_0^t h(s)^{-(b+1)} \left(\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))^* x^*(\omega)\| d\mu(\omega) \right) ds \leq h(t)^b B \int_{\Omega} \|x^*(\omega)\| d\mu(\omega), \quad (2.4)$$

pentru orice $(t, s, t_0, x^*) \in T \times \Omega$ și $x^* \in L(\Omega, X, \mu)$

Remarca 2.3.5. Precizarea din Remarca 2.3.2 este valabilă și pentru rate de creștere $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_B^2$.

Teorema 2.3.10. [129] Fie $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_B^2$ și $C = (\Phi, \varphi)$ cociclu stochastic de evoluție $*$ -tare măsurabil cu h -creștere uniformă. Atunci $C = (\Phi, \varphi)$ este uniform h -stabil dacă și numai dacă există $B > 1$ și $b \in (0, 1)$ astfel încât

$$\int_0^t h(s)^{-(b+1)} \left(\int_{\Omega} \|\Phi(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))^* x^*(\omega)\| d\mu(\omega) \right) ds \leq h(t)^b B \int_{\Omega} \|x^*(\omega)\| d\mu(\omega), \quad (2.5)$$

pentru orice $(t, s, t_0, x^*) \in T \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$

2.4 Comentarii bibliografice

Studiul ecuațiilor diferențiale, atât în spații finite, cât și în spații infinit dimensionale, a generat de-a lungul timpului o literatură bogată în ceea ce privește conceptul de stabilitate exponențială uniformă. Acest concept a fost introdus în anul 1930 de către O. Perron [88], în contextul studiului stabilității sistemului

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x)$$

într-un cadru infinit-dimensional. Ulterior, în 1972, R. Datko [37] a oferit o caracterizare de tip integral a stabilității exponențiale uniforme pentru operatorii de evoluție, sub ipoteza unei creșteri exponențiale uniforme. Această contribuție s-a dovedit a fi un punct de plecare esențial pentru o serie întreagă de cercetări ulterioare în domeniu.

În primul paragraf al acestui capitol (*Preliminarii*) se pune accentul pe definirea h -stabilității uniforme în medie, fiind prezentate câteva exemple semnificative în acest sens. O parte dintre aceste rezultate au fost publicate în [130] și reprezintă contribuțiile originale ale acestui paragraf: Definiția 2.1.2 și Remarcile 2.1.1.

Alte rezultate originale sunt Remarcile 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, Propoziția 2.1.1 și Exemplele 2.1.1, 2.1.2, care au fost comunicate în cadrul conferinței *The 20th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, September 19–25, 2022, Heraklion, Crete, Greece* și publicate în [129] pentru conceptul de stabilitate exponențială în medie.

În paragraful următor (*Legături între conceptele de stabilitate uniformă în medie*) sunt stabilite legăturile între conceptele de h -stabilitate uniformă în medie și stabilitatea exponențială uniformă în medie Teorema 2.2.1, h -stabilitate uniformă în medie și stabilitatea polinomială uniformă în medie Teorema 2.2.2. Corolariile 2.2.1 și 2.2.2 reprezintă cazurile particulare ale teoremelor amintite. Aceste teoreme și corolarii reprezintă rezultatele originale ale acestui paragraf și au fost publicate în [130].

În ultimul paragraf (*Caracterizări ale conceptului de stabilitate uniformă în medie*) este dedicat caracterizării stabilității uniforme în medie. Studiul stabilității uniforme în medie se face cu rate de creștere și reprezintă o generalizare a conceptelor de stabilitate exponențială uniformă în medie și stabilitate polinomială uniformă în medie. Funcția $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ se numește rată de creștere (h este o funcție bijectivă și crescătoare). Acest concept este menționat pentru prima dată în lucrarea lui M. Pinto [89]. Caracterizarea conceptului de h -stabilitate uniformă se face cu teoreme de tip Logaritmice, Majorare, Hai, Datko, Lyapunov și Barbashin. Acestea sunt generalizări ale teoremelor de tip Datko, Lyapunov și Barbashin publicate în lucrările autorilor R. Borugă, M. Megan și D.M.M. Toth în [19] și C.L. Mihiț în [81].

Rezultatele originale ale acestui paragraf sunt reprezentate de Teoremele 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 și Corolariile 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6, publicate în [130].

Teoremele 2.3.4, 2.3.5 și 2.3.6 au fost prezentate în cadrul conferinței *Le XVe Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, 29 août – 2 septembre 2022, Toulouse, France* și vor face obiectul unei lucrări științifice aflate în curs de elaborare. De asemenea, Definițiile 2.3.1, 2.3.2 și Teoremele 2.3.7, 2.3.8 constituie rezultate originale, acestea fiind prezentate în contextul studiului stabilității cocicliilor de evoluție în cadrul conferinței *The 28th International Conference in Operator Theory, June 27 – July 1, 2022, Timișoara, Romania*. Cazurile particulare ale Teoremelor 2.3.9, respectiv 2.3.10, au fost publicate în [129].

3. Concepte de dichotomie pentru cocicli stochastici de evoluție

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un spațiu de probabilitate și X un spațiu Banach real sau complex. Notăm cu $\mathcal{B}(X)$ algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe X .

Fie $\varphi : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega$ un semiflux de evoluție pe Ω și $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$.

Fie $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ o rată de creștere, adică o funcție bijectivă și crescătoare, iar $L(\Omega, X, \mu)$ spațiul Banach al funcțiilor Bochner măsurabile.

Considerăm perechea (C, P) , unde $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stochastic de evoluție, iar $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ este o familie de proiectori invariantă pentru C .

3.1 Preliminarii

Definiția 3.1.1. [125] Spunem că perechea (C, P) este *uniform dichotomică în medie (u.d.m.)* dacă există $N \geq 1$ cu

$$(ud_1m) \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(ud_2m) \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Definiția 3.1.2. [124] Spunem că perechea (C, P) este *uniform h -dichotomică (u.h.d.m.)* dacă există $N \geq 1$ și $\nu > 0$ cu

$$(uhd_1m) h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(uhd_2m) h(t)^\nu \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

În caz particular,

- (i) pentru $h(t) = e^t$ se obține conceptul de dichotomie exponențială uniformă în medie (*u.e.d.m.*).
- (ii) pentru $h(t) = t + 1$ se obține conceptul de dichotomie polinomială uniformă în medie (*u.p.d.m.*).

Remarca 3.1.1. [125] Perechea (C, P) este *uniform h -dichotomică* în medie dacă și numai dacă există $N \geq 1$ și $\nu > 0$ cu

$$(uhd'_1 m) \quad h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(uhd'_2 m) \quad h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_Q(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, t_0, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

3.2 Legături între conceptele de dichotomie uniformă în medie

Legătura între h -dichotomia uniformă în medie și dichotomia exponențială uniformă în medie este stabilită în cele ce urmează:

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stohastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Pentru o rată de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ inversabilă, considerăm

$$h_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h_e(t) = h^{-1}(e^t)$$

și

$$\varphi_e : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e(t, s, \omega) = \varphi(h_e(t), h_e(s), \omega)$$

un semiflux stohastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_e : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e(t, s, \omega) = \Phi(h_e(t), h_e(s), \omega)$$

o aplicație cociclică stohastică de evoluție asociată lui φ_e ,

$$P_e : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_e(s, \omega) = P(h_e(s), \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la C_e ,
pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Teorema 3.2.1. [128] Perechea (C, P) este *uniform h -dichotomică în medie* dacă și numai dacă perechea (C_e, P_e) este *uniform exponențial dichotomică în medie*.

Legătura între h -dichotomia uniformă în medie și dichotomia polinomială uniformă în medie este prezentată în cele ce urmează:

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Pentru o rată de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ inversabilă, considerăm

$$h_p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h_p(t) = h^{-1}(t + 1)$$

și

$$\varphi_p : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p(t, s, \omega) = \varphi(h_p(t), h_p(s), \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_p : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p(t, s, \omega) = \Phi(h_p(t), h_p(s), \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_p ,

$$P_p : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_p(s, \omega) = P(h_p(s), \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la C_p ,
pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Teorema 3.2.2. [128] *Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă perechea (C_p, P_p) este uniform polinomial dichotomică în medie.*

Legătura între dichotomia polinomială uniformă în medie și dichotomia exponențială uniformă în medie este stabilită în cele ce urmează.

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Vom nota cu

$$\varphi_p^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_p^1(t, s, \omega) = \varphi(e^t - 1, e^s - 1, \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_p^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_p^1(t, s, \omega) = \Phi(e^t - 1, e^s - 1, \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_p^1 ,

$$P_p^1 : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_p^1(s, \omega) = P(e^s - 1, \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la C_p^1 ,
pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Corolarul 3.2.1. *Perechea (C, P) este uniform polinomial dichotomică în medie dacă și numai dacă perechea (C_p^1, P_p^1) este uniform exponențial dichotomică în medie.*

Legătura între dichotomia exponențială uniformă în medie și dichotomia polinomială în medie este prezentată în cele ce urmează:

Fie $C = (\Phi, \varphi)$ un cociclu stochastic de evoluție pe $\Delta \times \Omega$ și $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X)$ o familie de proiectori invariantă la C . Notăm cu

$$\varphi_e^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \varphi_e^1(t, s, \omega) = \varphi(\ln(t+1), \ln(s+1), \omega)$$

un semiflux stochastic de evoluție pe Ω ,

$$\Phi_e^1 : \Delta \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_e^1(t, s, \omega) = \Phi(\ln(t+1), \ln(s+1), \omega)$$

o aplicație cociclică stochastică de evoluție asociată lui φ_e^1 ,

$$P_e^1 : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad P_e^1(s, \omega) = P(\ln(s+1), \omega)$$

o familie de proiectori invariantă la C_e^1 ,
pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$.

Corolarul 3.2.2. *Perechea (C, P) este uniform exponențial dichotomică în medie dacă și numai dacă perechea (C_e^1, P_e^1) este uniform polinomial dichotomică în medie.*

3.3 Caracterizări ale conceptului de dichotomie uniformă în medie

Propoziția care urmează prezintă caracterizări pentru conceptul de dichotomie uniformă în medie cu proiectori invariinți și cu proiectori tare invariinți.

Propoziția 3.3.1. *[123] Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) *Perechea (C, P) este u.h.d.m;*
- (ii) *Există $N \geq 1, \nu > 0$ astfel încât:*

$$(uhd'_1 m) \quad h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(uhd'_2 m) \quad h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_Q(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$;

- (iii) *Există $N \geq 1, \nu > 0$ astfel încât:*

$$(uhd''_1 m) \quad h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega);$$

$$(uhd''_2 m) \quad h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Psi_Q(t, s, \omega)x(\omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|Q(t, \varphi(t, s, \omega))x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$;

(iv) Există $N \geq 1$, $\nu > 0$ astfel încât:

$$\begin{aligned} (uhd_1''') \quad & h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega); \\ (uhd_2''') \quad & h(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Psi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq Nh(t_0)^\nu \int_{\Omega} \|\Psi_Q(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega). \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

Remarca 3.3.1. [123] Cazurile particulare rezultă, luând $h(t) = e^t$ respectiv $h(t) = t + 1$ în Propoziția 3.3.1. Vom obține o caracterizare a dichotomiei uniforme în medie pentru perechi de forma (C, P) pentru cazul exponențial, respectiv pentru cazul polinomial.

Teorema următoare prezintă o caracterizare pentru conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în cazul în care Φ este o aplicație cociclică stochastică reversibilă.

Teorema 3.3.1. [125] *Perechea (C, P) este h -uniform dichotomică în medie cu Φ o aplicație cociclică stochastică reversibilă dacă și numai dacă există $N > 1$ și $\nu > 0$ cu:*

$$\begin{aligned} (uhd_1^r) \quad & h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq \\ & \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)P(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega), \\ (uhd_2^r) \quad & h(t)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \leq \\ & \leq Nh(s)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)Q(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega), \\ & \text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu); \end{aligned}$$

Următoarea teoremă prezintă o caracterizare pentru conceptul de h -dichotomie uniformă în medie cu un criteriu logaritmic, un criteriu de majorare și un criteriu de tip Hai.

Teorema 3.3.2. [124] *Dacă perechea (C, P) are h -creștere uniformă în medie atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (1) (C, P) este uniform h -dichotomică în medie;
- (2) există o constantă $L > 1$ astfel încât

$$(uhl_1m) \quad \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \ln \frac{h(t)}{h(s)} \leq L \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

$$(uhl_2m) \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \ln \frac{h(t)}{h(s)} \leq L \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

(3) există o funcție crescătoare și bijectivă $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ cu $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$, $g(e) = 1$ și există o constantă $L > 1$ astfel încât:

$$(uhM_1m) \ g\left(\frac{h(t)}{h(s)}\right) \int_{\Omega} \|\Phi_P(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq L \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

$$(uhM_2m) \ g\left(\frac{h(t)}{h(s)}\right) \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq L \int_{\Omega} \|\Phi_Q(t, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(t, s, \omega) \in \Delta \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

(4) există $r > e$ și există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$(uhH_1m) \int_{\Omega} \|\Phi_P(rs, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq c \int_{\Omega} \|P(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega)$$

$$(uhH_2m) \int_{\Omega} \|Q(s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq c \int_{\Omega} \|\Phi_Q(rs, s, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega),$$

pentru orice $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ și $x \in L(\Omega, X, \mu)$.

Remarca 3.3.2. [124] Pentru $h(t) = e^t$ se obține varianta acestei teoreme pentru conceptul de dichotomie exponențială uniformă care reprezintă generalizări ale unor rezultate prezentate de către C. Stoica în [100].

Remarca 3.3.3. [124] Pentru $h(t) = t + 1$, se obține varianta acestei teoreme pentru conceptul de dichotomie polinomială uniformă și a fost demonstrată de către R. Boruga and M. Megan în [17], și R. Boruga în [12] pentru operatori de evoluție în spații Banach.

Remarca 3.3.4. Conexiunea între conceptele de dichotomie și creșteri este dată în următoarea diagramă:

$$u.h.d.m. \Rightarrow c.h.u.m.$$

și

$$\begin{array}{ccc} u.e.d.m. & \Rightarrow & u.p.d.m \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ c.e.u.m. & \Leftarrow & c.p.u.m. \end{array}$$

În continuare, fie $h \in \mathcal{H}$, unde mulțimea $\mathcal{H}$ este definită în 2.3.

Următoarele teoreme prezintă caracterizări integrale utilizând familii de proiectori invariante, respectiv familii de proiectori tare invariante.

Teorema 3.3.3. [123] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stochastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere h -uniformă în medie iar $h \in \mathcal{H}$. Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned}
(uhD_1^1 m_c) \int_s^\infty h(t)^d \left(\int_\Omega \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right) dt \leq \\
\leq D h(s)^d \left(\int_\Omega \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right); \\
\text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(uhD_1^2 m_c) \int_s^\infty \frac{h(t)^d}{\int_\Omega \|\Phi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} dt \leq \frac{D h(s)^d}{\int_\Omega \|\Phi_Q(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}, \\
\text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu) \\
\text{cu } \int_\Omega \|\Phi_Q(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \neq 0.
\end{aligned}$$

Remarca 3.3.5. [123] În Teorema 3.3.3, dacă rata de creștere este e^t , deducem versiunea acestei teoreme pentru conceptul de dichotomie exponențială uniformă în medie.

Teorema 3.3.4. [123] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stochastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere h -uniformă în medie iar $h \in \mathcal{H}$. Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned}
(uhD_1^2 m_c) \int_{t_0}^t \frac{h(s)^{-d}}{\int_\Omega \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} ds \leq \frac{D h(t)^{-d}}{\int_\Omega \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}; \\
\text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu), \text{ cu} \\
\int_\Omega \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \neq 0, \\
(uhD_2^2 m_c) \int_{t_0}^t \frac{\int_\Omega \|\Phi_Q(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}{h(s)^d} ds \leq \frac{D \int_\Omega \|\Phi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}{h(t)^d}, \\
\text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu).
\end{aligned}$$

Remarca 3.3.6. [123] Luând $h(t) = e^t$, obținem versiunea Teoremei 3.3.4 pentru conceptul de dichotomie exponențială uniformă în medie.

Teorema 3.3.5. [123] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stochastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere tare h -uniformă în medie iar $h \in \mathcal{H}$. Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned}
(uhD_1^3 m_c) \int_t^\infty h(\tau)^d \left(\int_\Omega \|\Phi_P(\tau, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right) d\tau &\leq \\
&\leq D h(t)^d \left(\int_\Omega \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right); \\
&\text{pentru orice } (t, t_0, \omega) \in \Delta \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(uhD_2^3 m_c) \int_{t_0}^t h(\tau)^{-d} \left(\int_\Omega \|\Psi_Q(t, \tau, \varphi(\tau, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right) d\tau &\leq \\
&\leq D h(t)^{-d} \left(\int_\Omega \|Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right), \\
&\text{pentru orice } (t, t_0, \omega) \in \Delta \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu).
\end{aligned}$$

Remarca 3.3.7. [123] Teorema 3.3.5 oferă o versiune a teoremei pentru dichotomia exponențial uniformă în medie, în cazul în care $h(t) = e^t$

Teorema 3.3.6. [123] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere tare h -uniformă în medie iar $h \in \mathcal{H}$. Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned}
(uhD_1^4 m_c) \int_{t_0}^t \frac{h(s)^{-d}}{\int_\Omega \|\Phi_P(s, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} ds &\leq \frac{D h(t)^{-d}}{\int_\Omega \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}, \\
&\text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu) \\
&\text{cu } \int_\Omega \|\Phi_P(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(uhD_2^4 m_c) \int_{t_0}^t \frac{h(s)^d}{\int_\Omega \|\Psi_Q(t, s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} ds &\leq \frac{D h(t)^d}{\int_\Omega \|\Psi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}, \\
&\text{pentru orice } (t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega \text{ și } x_0 \in L(\Omega, X, \mu) \\
&\text{cu } \int_\Omega \|\Psi_Q(t, t_0, \omega)x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \neq 0.
\end{aligned}$$

Remarca 3.3.8. [123] Ca o consecință imediată a Teoremei 3.3.6, dacă $h(t) = e^t$, obținem o versiune a sa pentru conceptul de dichotomie exponențială uniformă.

Următoarele două teoreme prezintă caracterizări integrale pentru conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în cazul în care Φ este o aplicație cociclică stocastică de evoluție reversibilă.

Teorema 3.3.7. [125] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere h -uniformă în medie iar $h \in \mathcal{H}$. Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie cu Φ o aplicație cociclică stocastică de evoluție reversibilă dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned} (uhD_1^1 m) \int_s^\infty \frac{h(t)^d}{\int_\Omega \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)P(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} dt &\leq \\ &\leq \frac{D h(s)^d}{\int_\Omega \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$
cu $P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega) \neq 0$;

$$\begin{aligned} (uhD_2^1 m) \int_s^\infty h(t)^d \left(\int_\Omega \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right) dt &\leq \\ &\leq D h(s)^d \int_\Omega \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)Q(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega), \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

Corolarul 3.3.1. [125] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere exponențială uniformă în medie. Perechea (C, P) este uniform exponențial dichotomică în medie cu Φ o aplicație cociclică stocastică de evoluție reversibilă dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ cu

$$\begin{aligned} (ueD_1^1 m) \int_s^\infty \frac{e^{dt}}{\int_\Omega \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)P(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} dt &\leq \\ &\leq \frac{D e^{ds}}{\int_\Omega \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}; \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$ cu $P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega) \neq 0$;

$$\begin{aligned} (ueD_2^1 m) \int_s^\infty e^{dt} \left(\int_\Omega \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega) \right) dt &\leq \\ &\leq D e^{ds} \int_\Omega \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)Q(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega), \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$.

Teorema 3.3.8. [125] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere h -uniformă în medie iar $h \in \mathcal{H}$. Perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie cu Φ o aplicație cociclică stocastică de evoluție reversibilă dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned} (uhD_1^2m) \int_{t_0}^t \frac{\int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}{h(s)^d} ds &\leq \\ &\leq \frac{D \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)P(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}{h(t)^d}; \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$;

$$\begin{aligned} (uhD_2^2m) \int_{t_0}^t \frac{h(s)^{-d}}{\int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)Q(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} ds &\leq \\ &\leq \frac{D h(t)^{-d}}{\int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}, \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$ cu $Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega) \neq 0$.

Corolarul 3.3.2. [125] Presupunem că $C = (\Phi, \varphi)$ este un cociclu stocastic de evoluție tare măsurabil, (C, P) are creștere exponențială uniformă în medie. Perechea (C, P) este uniform exponențial dichotomică în medie cu Φ o aplicație cociclică stocastică de evoluție reversibilă dacă și numai dacă există constantele $D \geq 1$ și $d \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned} (ueD_1^2m) \int_{t_0}^t \frac{\int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)P(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}{e^{ds}} ds &\leq \\ &\leq \frac{D \int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)P(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}{e^{dt}}; \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$;

$$\begin{aligned} (ueD_2^2m) \int_{t_0}^t \frac{e^{-ds}}{\int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(s, t_0, \omega)Q(s, \varphi(s, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)} ds &\leq \\ &\leq \frac{D e^{-dt}}{\int_{\Omega} \|\Phi^{-1}(t, t_0, \omega)Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega)\| d\mu(\omega)}, \end{aligned}$$

pentru orice $(t, s, t_0, \omega) \in T \times \Omega$ și $x_0 \in L(\Omega, X, \mu)$ cu $Q(t, \varphi(t, t_0, \omega))x_0(\omega) \neq 0$.

În cele ce urmează este prezentată o teoremă de echivalență între conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în timp discret și conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în timp continuu cu familii de proiectori invariante.

Notăm cu $\mathcal{H}$ mulțimea ratelor de creștere $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ cu proprietatea că există $H > 1$ astfel încât $h(t+1) < Hh(t)$ pentru orice $t \geq 0$. De asemenea, notăm cu

$$\Delta_d = \{(m, n) \in \mathbf{N}^2 : m \geq n\}.$$

Teorema 3.3.9. [128] Fie $h \in \mathcal{H}$. Atunci perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă perechea (C, P) are creștere h -uniformă în medie și există două constante $N_1 \geq 1$ și $\nu > 0$ cu

$$\begin{aligned} (uhd_1^c m) \quad & h(m)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(m, n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N_1 h(n)^\nu \int_{\Omega} \|P(n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \\ (uhd_2^c m) \quad & h(m)^\nu \int_{\Omega} \|Q(n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N_1 h(n)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_Q(m, n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega), \\ & \text{pentru orice } (m, n, \omega) \in \tilde{\Delta} \times \Omega \text{ și } x \in L(\Omega, X, \mu). \end{aligned}$$

Remarca 3.3.9. [127] Pentru $h(t) = e^t$, respectiv $h(t) = t + 1$ se obține teorema de echivalență între u.e.d.m. în timp discret și u.e.d.m. în timp continuu, respectiv teorema de echivalență între u.p.d.m. în timp discret și u.p.d.m. în timp continuu.

Teorema următoare prezintă echivalența între h -dichotomia uniformă în medie în timp discret și h -dichotomia uniformă în medie în timp continuu cu familii de proiectori tare invariante.

Teorema 3.3.10. [127] Fie $h \in \mathcal{H}$. Atunci perechea (C, P) este uniform h -dichotomică în medie dacă și numai dacă perechea (C, P) are creștere h -uniformă în medie și există două constante $N_1 \geq 1$ și $\nu > 0$ cu

$$\begin{aligned} (uhd_1^t m) \quad & h(m)^\nu \int_{\Omega} \|\Phi_P(m, n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq N_1 h(n)^\nu \int_{\Omega} \|P(n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega); \\ (uhd_2^t m) \quad & h(m)^\nu \int_{\Omega} \|\Psi_Q(m, n, \omega)x(\omega)\| d\mu(\omega) \leq \\ & \leq N_1 h(n)^\nu \int_{\Omega} \|Q(m, \varphi(m, n, \omega))x(\omega)\| d\mu(\omega), \\ & \text{pentru orice } (m, n, \omega) \in \Delta_d \times \Omega \text{ și } x \in \mathcal{L}(\Omega, X, \mu). \end{aligned}$$

Remarca 3.3.10. [127] Pentru $h(t) = e^t$, respectiv $h(t) = t + 1$ se obține teorema de echivalență între u.e.d.m. în timp discret și u.e.d.m. în timp continuu, respectiv teorema de echivalență între u.p.d.m. în timp discret și u.p.d.m. în timp continuu cu familii de proiectori tare invariante.

3.4 Comentarii bibliografice

Un interes semnificativ în teoria sistemelor dinamice a fost acordat fenomenului cunoscut sub denumirea de dichotomie exponențială uniformă.

Proprietatea de dichotomie exponențială pentru ecuații diferențiale liniare a început să capete o importanță deosebită cu apariția a două monografii importante aparținând autorilor J. L. Massera & J. J. Schäffer în [64] și J. L. Daleckii & M.G. Krein în [34].

În sens stochastic, conceptul de dichotomie exponențială a fost studiat de mulți autori precum A. M. Ateiwi în [4] sau T. Caraballo et al. în [24].

În acest capitol este abordat conceptul general al dichotomiei în medie cu rate de creștere sau h -dichotomia în medie, unde $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ este o rată de creștere (mai precis, h este o funcție bijectivă și crescătoare cu $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$) pentru cocicli stochastici de evoluție în spații Banach. Astfel, se obțin diverse caracterizări pentru cocicli stochastici de evoluție în spații Banach pentru acest concept, precum și condiții necesare și suficiente pentru cazurile particulare ale dichotomiei în medie de tip exponențial și polinomial.

În primul paragraf al acestui capitol (*Preliminarii*) sunt enunțate definițiile pentru dichotomia uniformă în medie care generalizează noțiunea de h -stabilitate uniformă în medie descrisă în al doilea capitol. Definiția 3.1.2 și Remarca 3.1.1 reprezintă rezultatele originale ale prezentului paragraf.

În cel de-al doilea paragraf (*Legături între conceptele de dichotomie uniformă în medie*) sunt prezentate conexiunile între conceptele de dichotomie uniformă în medie. Rezultatele originale ale acestui paragraf sunt Teoremele 3.2.1, 3.2.2, Corolariile 3.2.1, 3.2.2 publicate în lucrarea [128] și diseminate în cadrul conferinței *21st International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, September 11–17, 2023, Heraklion, Crete, Greece*.

În paragraful următor (*Caracterizări ale conceptului de dichotomie uniformă în medie*) se obțin caracterizări pentru conceptul de dichotomie uniformă în medie utilizând familii de proiectori invariante, respectiv tare invariante în Propoziția 3.3.1 și Remarca 3.3.1 publicate în [123]. De asemenea, se obține un criteriu de tip logaritm, un criteriu de tip majorare și un criteriu de tip Hai publicate de către T. M. Személy Fülöp în lucrarea [124]. Caracterizările integrale sunt obținute în Teoremele 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6 și Remarcile 3.3.5, 3.3.6, 3.3.7, 3.3.8 și reprezintă rezultate originale publicate în [123] și prezentate în cadrul conferinței *2024 IEEE 18th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI), May 21–25, 2024, Timișoara, România*.

În lucrarea [125] se prezintă caracterizări integrale pentru conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în cazul în care aplicația cociclică stohastică de evoluție Φ este reversibilă. Aceste rezultate sunt originale și se regăsesc în enunțurile Teoremele 3.3.1, 3.3.7, 3.3.8, respectiv al Corolariilor 3.3.1, 3.3.2 fiind publicate în [125]

și diseminate în cadrul conferinței *XGEN International Conference on Science Communications, May 20–24, 2024, Technical University of Cluj-Napoca, Baia Mare, Romania*.

Teorema 3.3.9 reprezintă o teoremă de echivalență între conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în timp discret și conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în timp continuu, folosind familii de proiectori invariante. Acest rezultat este original și a fost publicat în [128].

În schimb, Teorema 3.3.10 prezintă echivalența între conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în timp discret și conceptul de h -dichotomie uniformă în medie în timp continuu, utilizând familii de proiectori tare invariante. Acest rezultat este original și a fost trimis spre publicare în [127].

Ambele rezultate au fost prezentate în cadrul conferinței *Sixth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, May 30–31, 2024, Cluj-Napoca, Romania*.

4. Concluzii și perspective

Teza extinde rezultatele clasice deterministe la context stochastic, oferind un cadru unificat pentru studiul stabilității și dichotomiei cu rate de creștere.

Direcțiile viitoare includ:

- Investigarea h -dichotomiei în medie pentru cocicli stochastici de evoluție în timp discret.
- Aplicații la ecuații diferențiale stochastice în fizică și economie.
- Dezvoltarea de criterii constructive pentru controlul sistemelor stochastice.

Bibliografie

- [1] L. Arnold. *Stochastic differential equations: theory and applications*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [2] L. Arnold. *Random dynamical systems*. Springer Monogr. Math., Berlin, Heidelberg, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0095238>.
- [3] L. Arnold and M. Scheutzow. Perfect cocycles through stochastic differential equations. *Probab. Theory Relat. Fields*, 101(1):65–88, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01192196>.
- [4] A. M. Ateiwi. About bounded solutions of linear stochastic Ito systems. *Miskolc Math. Notes*, 3(1):3–12, 2002. DOI: <https://doi.org/10.18514/MMN.2002.46>.
- [5] E. A. Barbashin. *Introduction to the theory of stability*. Izd. Nauka, Moscow, 1970. In Russian.
- [6] L. Barreira and C. Valls. *Stability of nonautonomous differential equations*, volume 1926 of *Lect. Notes Math.* Berlin: Springer, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74775-8>.
- [7] L. Barreira and C. Valls. Polynomial growth rates. *Nonlinear Anal.*, 71(11):5208–5219, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.005>.
- [8] A. Bensoussan and F. Flandoli. Stochastic inertial manifold. *Stochastics*, 53(1-2):13–39, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1080/17442509508833981>.
- [9] A. Bento and C. Silva. Stable manifolds for nonuniform polynomial dichotomies. *J. Funct. Anal.*, 257(1):122–148, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.01.032>.
- [10] A. Bento and C. Silva. Stable manifolds for non-autonomous equations with non-uniform polynomial dichotomies. *Q. J. Math.*, 63(2):275–308, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1093/qmath/haq047>.

-
- [11] S. Bonaccorsi. Stochastic variation of constants formula for infinite dimensional equations. *Stoch. Anal. Appl.*, 17(4):509–528, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1080/07362999908809616>.
 - [12] R. Boruga. Majorization criteria for polynomial stability and instability of evolution operators. *Bul. Stiint. Univ. Politeh. Timis. Ser. Mat. Fiz*, 64:55–63, 2019.
 - [13] R. Boruga. Polynomial stability in average for cocycles of linear operators. *Theory Appl. Math. Comput. Sci.*, 9(1):8–13, 2019.
 - [14] R. Boruga. On some growth concepts for dichotomic behaviors of evolution operators. *An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat.-Inform.*, 58(2):56–66, 2022. DOI: <https://doi.org/DOI:10.2478/awutm-2022-0017>.
 - [15] R. Boruga. On uniform dichotomies for the growth rates of linear discrete-time dynamical systems in Banach spaces. In *International Conference on Difference Equations and Applications*, pages 175–188. Springer, 2022.
 - [16] R. Boruga and M. Megan. On a logarithmic criterion for uniform polynomial stability. *An. Univ. Vest Timiş., Ser. Mat.-Inform.*, 56(2):104–114, 2018. DOI: <https://doi.org/10.2478/awutm-2018-0018>.
 - [17] R. Boruga and M. Megan. On uniform polynomial dichotomy in Banach spaces. *Bul. Stiint. Univ. Politeh. Timis. Ser. Mat. Fiz*, 63:32–40, 2018.
 - [18] R. Boruga and M. Megan. On some characterizations for uniform dichotomy of evolution operators in Banach spaces. *Mathematics*, 10(19):3704, 2022. DOI: <https://doi.org/doi.org/10.3390/math10193704>.
 - [19] R. Boruga, M. Megan, and D. M.-M. Toth. Integral characterizations for uniform stability with growth rates in Banach spaces. *Axioms*, 10(3):235, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms10030235>.
 - [20] R. Boruga (Toma) and M. Megan. Datko type characterizations for nonuniform polynomial dichotomy. *Carpathian J. Math.*, 37(1):45–51, 2021. DOI: <https://doi.org/DOI:10.37193/CJM.2021.01.05>.
 - [21] R. Boruga (Toma), M Megan, and D. M.-M. .Toth. On uniform instability with growth rates in Banach spaces. *Carpathian J. Math.*, 38(3):789–796, 2022. DOI: <https://doi.org/10.37193/CJM.2022.03.22>.
 - [22] R. Boruga (Toma), D. I. Pătraşcu (Borlea), and D. M.-M. Toth. On uniform stability with growth rates in Banach spaces. In *2021 IEEE 15th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI)*, pages 000393–000396. IEEE, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1109/SACI51354.2021.9465607>.

-
- [23] C. Buşe, M. Megan, M.S. Prajea, and P. Preda. The strong variant of a Barbashin theorem on stability of solutions for non-autonomous differential equations in Banach spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 59(4):491–500, 2007. DOI: <https://doi.org/DOI:10.2478/10.1007/s00020-007-1533-x>.
- [24] T. Caraballo, J. Duany, K. Lu, and B. Schmalfuß. Invariant manifolds for random and stochastic partial differential equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, 10(1):23–52, 2010. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1515/ans-2010-0102>.
- [25] T. Caraballo, P. Kloeden, and B. Schmalfuß. Exponentially stable stationary solutions for stochastic evolution equations and their perturbation. *Appl. Math. Optim.*, 50:183–207, 2004. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1007/s00245-004-0802-1>.
- [26] T. Caraballo and K. Liu. On exponential stability criteria of stochastic partial differential equations. *Stoch. Proc. and Appl.*, 83(2):289–301, 1999. DOI: [https://doi.org/DOI:10.1016/S0304-4149\(99\)00045-9](https://doi.org/DOI:10.1016/S0304-4149(99)00045-9).
- [27] A. Carverhill. Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory. *Stochastics*, 14(4):273–317, 1985. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1080/17442508508833343>.
- [28] C. C. Chicone and Y. Latushkin. *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, volume 70. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1999. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1080/17442508508833343>.
- [29] W. A. Coppel. *Dichotomies in stability theory*, volume 629 of *Lect. Notes Math.* Springer, Cham, 1978.
- [30] R. Curtain and H. Zwart. *Introduction to infinite-dimensional systems theory: a state-space approach*, volume 71. Springer Nature, 2020.
- [31] R. F. Curtain and A. J. Pritchard. *Infinite dimensional linear systems theory*. Springer, 1978.
- [32] G. Da Prato and A. Ichikawa. Liapunov equations for timevarying linear systems. *Syst. Control Lett.*, 9(2):165–172, 1987. DOI: [https://doi.org/DOI:10.1016/0167-6911\(87\)90023-5](https://doi.org/DOI:10.1016/0167-6911(87)90023-5).
- [33] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 44 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511666223>.
- [34] J. L. Daleckii and M. G. Krein. *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, volume 43. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), Providence, RI, 1974.

-
- [35] H. Damak. On uniform h -stability of non-autonomous evolution equations in Banach spaces. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, 44(6):4367–4381, 2021. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1007/s40840-021-01173-0>.
- [36] R. Datko. Extending a theorem of am liapunov to hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.*, 32(3):610–616, 1970. DOI: [https://doi.org/DOI:10.1016/0022-247X\(70\)90283-0](https://doi.org/DOI:10.1016/0022-247X(70)90283-0).
- [37] R. Datko. Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a Banach space. *SIAM J. Math. Anal.*, 3(3):428–445, 1972. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1137/0503042>.
- [38] D. Dragičević. A version of a theorem of R. Datko for stability in average. *Systems Control Lett.*, 96:1–6, 2016. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1016/j.sysconle.2016.06.015>.
- [39] D. Dragičević. Barbashin-type conditions for exponential stability of linear cocycles. *Monatsh. Math.*, 192(4):813–826, 2020. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1007/s00605-020-01438-z>.
- [40] D. Dragičević and C. Preda. Lyapunov type theorems for exponential stability of linear skew-product three-parameter semiflows with discrete time. *Axioms*, 9(2):47, 2020. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms9020047>.
- [41] D. Dragičević, A. L. Sasu, and B. Sasu. Admissibility and polynomial dichotomy of discrete nonautonomous systems. *Carpathian J. Math.*, 38(3):737–762, 2022. DOI: <https://doi.org/DOI:10.37193/CJM.2022.03.18>.
- [42] D. Dragičević, A. L. Sasu, and B. Sasu. On polynomial dichotomies of discrete nonautonomous systems on the half-line. *Carpathian J. Math.*, 38(3):663–680, 2022. DOI: <https://doi.org/DOI:10.37193/CJM.2022.03.12>.
- [43] S. Elaydi and O. Hájek. Exponential dichotomy and trichotomy of nonlinear differential equations. *Differ. Integral Equ.*, 3(6):1201–1224, 1990.
- [44] S. Elaydi, C. Pötzsche, and A. L. Sasu, editors. *Difference equations, discrete dynamical systems and applications, ICDEA 23, Timișoara, Romania, July 24–28, 2017. Proceedings of the 23rd international conference on difference equations and applications*, volume 287 of *Springer Proc. Math. Stat.* Cham: Springer, 2019.
- [45] F. Flandoli. Stochastic flows for nonlinear second-order parabolic SPDE. *Ann. Probab.*, pages 547–558, 1996. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1214/aop/1039639354>.

-
- [46] A. Găină. On uniform h-dichotomy of skew-evolution cocycles in Banach spaces. *An. Univ. Vest Timiș. Ser. Mat.-Inform*, 58(2):96–106, 2022. DOI: <https://doi.org/DOI:10.2478/awutm-2022-0020>.
- [47] A. Găină, M. Megan, and R. Boruga. Nonuniform dichotomy with growth rates of skew-evolution cocycles in Banach spaces. *Axioms*, 12(4):394, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms12040394>.
- [48] A. Găină, M. Megan, and C. F. Popa. Uniform dichotomy concepts for discrete-time skew evolution cocycles in Banach spaces. *Mathematics*, 9(17):2177, 2021. DOI: <https://doi.org/DOI:doi.org/10.3390/math9172177>.
- [49] I. I. Gikhman and A. Skorokhod. *Stochastic differential equations*. Springer, Naukova Dumka, Kiev (in Russian), 2007. DOI: https://doi.org/DOI:doi.org/10.1007/978-3-540-49941-1_2.
- [50] P. V. Hai. Continuous and discrete characterizations for the uniform exponential stability of linear skew-evolution semiflows. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 72(12):4390–4396, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.01.046>.
- [51] P. V. Hai. Discrete and continuous versions of Barbashin-type theorem of linear skew-evolution semiflows. *Appl. Anal.*, 90(11-12):1897–1907, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036811.2010.534728>.
- [52] P. V. Hai. Two new approaches to barbashin theorem. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal*, 19(6):773–798, 2012.
- [53] P. V. Hai. A generalization for theorems of Datko and Barbashin type. *J. Funct. Spaces*, 2015(1):517348, 2015. DOI: <https://doi.org/DOI:doi.org/10.1155/2015/517348>.
- [54] P. V. Hai. On the polynomial stability of evolution families. *Appl. Anal.*, 95(6):1239–1255, 2016. DOI: <https://doi.org/DOI:doi.org/10.1080/00036811.2015.1058364>.
- [55] P. V. Hai. Polynomial behavior in mean of stochastic skew-evolution semiflows. *arXiv preprint arXiv:1902.04214*, 2019. DOI: <https://doi.org/DOI:doi.org/10.48550/arXiv.1902.04214>.
- [56] P. V. Hai. Polynomial stability and polynomial instability for skew-evolution semiflows. *Results Math.*, 74:1–19, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00025-019-1099-3>.
- [57] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1950. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9440-2>.

-
- [58] H. Kunita. Infinitesimal generators of random positive semigroups. *Taiwanese J. Math.*, 1(4):371–387, 1997. DOI: <https://doi.org/10.11650/twjmath/1500406117>.
- [59] Y. Latushkin and R. Schnaubelt. Evolution semigroups, translation algebras, and exponential dichotomy of cocycles. *J. Differ. Equations*, 159(2):321–369, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3668>.
- [60] Z. Lian. *Lyapunov Exponents and Invariant Manifold for Random Dynamical Systems in a Banach Space*. Brigham Young University, 2008.
- [61] W. Littman. A generalization of a theorem of datko and pazy. In *Advances in computing and control*, pages 318–323. Springer, 1989.
- [62] N. Lupa and M. Megan. Exponential dichotomies of evolution operators in Banach spaces. *Monatsh. Math.*, 174(2):265–284, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-013-0517-y>.
- [63] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *Internat. J. Control*, 55(3):531–534, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>.
- [64] J. L. Massera and J. J. Schäffer. *Linear differential equations and function spaces*, volume 21. Academic Press New York, 1966.
- [65] M. Megan. On (h, k)-dichotomy of evolution operators in Banach spaces. *Dynamic Systems and Applications*, 5:189–196, 1996.
- [66] M. Megan, T. Ceașu, and M. L. Ramneanu. Polynomial stability of evolution operators in Banach spaces. *Opuscula Math.*, 31(2):279–288, 2011. DOI: <https://dx.doi.org/10.7494/OpMath.2011.31.2.279>.
- [67] M. Megan, A. Găină, and R. Boruga (Toma). On dichotomy with differentiable growth rates for skew-evolution cocycles in Banach spaces. *Ann. Acad. Rom. Sci., Math. Appl.*, 15(1-2):473–490, 2023. DOI: <https://doi.org/DOI:10.56082/annalsarscimath.2023.1-2.473>.
- [68] M. Megan, C. L. Mihiț, and R. Lolea. On splitting with different growth rates for linear discrete-time systems in Banach spaces. In *Proc. 23rd Int. Conf. Difference Equations Appl. (ICDEA 2017)*, pages 351–368. Cham: Springer, 2019. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-20016-9_15.
- [69] M. Megan, A. L. Sasu, and B. Sasu. On uniform exponential stability of linear skew-product semiflows in Banach spaces. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 9(1):143–154, 2002. DOI: <https://doi.org/10.36045/bbms/1102715145>.

-
- [70] M. Megan, A. L. Sasu, and B. Sasu. Stabilizability and controllability of systems associated to linear skew-product semiflows. *Rev. Mat. Complut.*, 15(2):599–618, 2002. DOI: https://doi.org/10.5209/rev_REMA.2002.v15.n2.16932.
- [71] M. Megan, A. L. Sasu, and B. Sasu. Exponential stability and exponential instability for linear skew-product flows. *Math. Bohem.*, 129(3):225–243, 2004. DOI: <https://doi.org/10.21136/MB.2004.134146>.
- [72] M. Megan, A. L. Sasu, and B. Sasu. Nonlinear criteria for stability of nonautonomous dynamics - a new zabczyk-rolewicz type approach. *Annals: Series on Mathematics & its Applications*, 17(1), 2025.
- [73] M Megan, B Sasu, and A. L. Sasu. On uniform exponential stability of evolution families, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 4:27–43, 2001.
- [74] M. Megan, B. Sasu, and A. L. Sasu. On nonuniform exponential dichotomy of evolution operators in Banach spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 44:71–78, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01197861>.
- [75] M. Megan and C. Stoica. Discrete asymptotic behaviors for skew-evolution semiflows on Banach spaces. *Carpathian J. Math.*, 24(3):348–355, 2008.
- [76] M. Megan and C. Stoica. Exponential instability of skew-evolution semiflows in banach spaces. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Seria Math.*, 53(1):17–24, 2008.
- [77] M. Megan and C. Stoica. Concepts of dichotomy for skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl*, 2(2):125–140, 2010. www.mathematics-and-its-applications.com/preview/january2011/data/1-megan_m.pdf.
- [78] M. Megan and C. Stoica. On uniform exponential dichotomy of skew-evolution semiflows in Hilbert spaces. In *Proc. of Int. Symp. "Research and Education in Innovation Era"*, Section Mathematics & Computer Science, 6th Edition, pages 30–37, Arad, Romania, 2016. "Aurel Vlaicu" University of Arad Publishing House.
- [79] M. Megan, C Stoica, and L. Buliga. On asymptotic behaviours of evolution operators in Banach spaces. *Preprint Series in Mathematics, West University of Timisoara*, pages 1–20, 2006.
- [80] M. Megan, C. Stoica, and L. Buliga. On asymptotic behaviors for linear skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Carpathian J. Math.*, pages 117–125, 2007.
- [81] C.-L. Mihiţ. On uniform h-stability of evolution operators in Banach spaces. *Theory & Applications of Mathematics & Computer Science*, 6(1), 2016.

-
- [82] C.-L. Mihit̃ and D. Borlea. On some concepts of exponential stability for skew-evolution semiflows in Banach spaces. In *2016 IEEE 11th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI)*, pages 167–172. IEEE, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1109/SACI.2016.7507356>.
- [83] C.-L. Mihit̃ and M. Megan. Integral characterizations for the (h, k) -splitting of skew-evolution semiflows. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.*, 62(3):353–365, 2017. DOI: <https://doi.org/10.24193/subbmth.2017.3.08>.
- [84] S.-E. Mohammed. Stochastic dynamical systems in infinite dimensions. In *Trends in stochastic analysis. Papers dedicated to Professor Heinrich von Weizsäcker on the occasion of his 60th birthday.*, pages 249–282. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [85] S.-E. Mohammed, T. Zhang, and H. Zhao. *The stable manifold theorem for semilinear stochastic evolution equations and stochastic partial differential equations*, volume 194. Bull. Amer. Math. Soc., 2008. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0503320>.
- [86] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2 edition, 2000.
- [87] R. Naulin and M. Pinto. Roughness of (h, k) -dichotomies. *Journal of Differential Equations*, 118(1):20–35, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110883237.1437>.
- [88] O. Perron. Die stabilitätsfrage bei differentialgleichungen. *Math. Z.*, 32(1):703–728, 1930. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01194662>.
- [89] M. Pinto. Asymptotic integration of a system resulting from the perturbation of an h -system. *J. Math. Anal. Appl.*, 131(1):194–216, 1988. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(88\)90200-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90200-4).
- [90] M. Pinto. Discrete dichotomies. *Computers & Mathematics with Applications*, 28(1-3):259–270, 1994. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(94\)00114-6](https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)00114-6).
- [91] C. Preda and A.-P. Popit̃iu. A discrete-time approach in the qualitative theory of skew-product three-parameter semiflows. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 24(3):367–379, 2017.
- [92] P. Preda and M. Megan. Nonuniform dichotomy of evolutionary processes in Banach spaces. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 27(1):31–52, 1983. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700011473>.

-
- [93] P. Preda and C. Preda. On nonuniform exponential dichotomy for evolutionary processes. *Ric. Mat.*, 52(2):203–216, 2003.
- [94] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Appl. Math. (N. Y.)*. Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2004.
- [95] M. L. Ramneantu, T. Ceausu, and M. Megan. On nonuniform polynomial dichotomy of evolution operators in Banach spaces. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 75(3):305–318, 2012.
- [96] R. J. Sacker and G. R. Sell. Dichotomies for linear evolutionary equations in Banach spaces. *J. Differ. Equations*, 113(1):17–67, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1113>.
- [97] B. Sasu. Integral conditions for exponential dichotomy: a nonlinear approach. *Bull. Sci. Math.*, 134(3):235–246, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2009.06.006>.
- [98] B. Schmalfuss. A random fixed point theorem and the random graph transformation. *J. Math. Anal. Appl.*, 225(1):91–113, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6008>.
- [99] C. Stoica. Exponential dichotomy and trichotomy for skew-evolution semiflows in Banach spaces. *arXiv preprint arXiv:0804.3558*, pages 1–6, 2008. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0804.3558>.
- [100] C. Stoica. On exponential stability for skew-evolution semiflows on Banach spaces. *Preprint Univ. Bordeaux arXiv:0804.1479v1*, pages 117–125, 2008.
- [101] C. Stoica. Pointwise trichotomy for skew-evolution semiflows on Banach spaces. *J. Math. Sci., New York*, 161(2):327–336, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9556-2>.
- [102] C. Stoica. On polynomial stability for skew-evolution semiflows on Banach spaces. working paper or preprint, <https://hal.science/hal-00641559>, August 2010.
- [103] C. Stoica. *Uniform asymptotic behaviors for skew-evolution semiflows on Banach spaces*. Mirton, 2010.
- [104] C. Stoica. Approaching the discrete dynamical systems by means of skew-evolution semiflows. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2016:10, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/4375069>.
- [105] C. Stoica. An approach to evolution cocycles from a stochastic point of view. In *AIP Conf. Proc.*, volume 2425, page 420029. AIP Publishing, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083066>.

-
- [106] C. Stoica. On stochastic issues in the study of evolution equations. In *AIP Conf. Proc.*, volume 2849, page 450030, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0162302>.
- [107] C. Stoica and D. Borlea. On h-dichotomy for skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Theory Appl. Math. Comput. Sci.*, 2(1):29, 2012.
- [108] C. Stoica and M. Megan. Nonuniform behaviors for skew-evolution semiflows in Banach spaces. *arXiv preprint arXiv:0806.1409*, 2008.
- [109] C. Stoica and M. Megan. On uniform exponential stability for skew-evolution semiflows on Banach spaces. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 72(3-4):1305–1313, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.08.019>.
- [110] C. Stoica and M. Megan. On nonuniform exponential stability for skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Carpathian J. Math.*, 29(2):259–266, 2013.
- [111] D. Stoica. Stochastic evolution cocycles. In *Proc. Internat. Symp. Res. Educ. Innov. Era, 2nd Ed.*, pages 147–154, Arad, 20–21 November, România, 2008.
- [112] D. Stoica. Exponential stability for stochastic cocycle. *Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity*, 7:111–118, 2009.
- [113] D. Stoica. Asymptotic behaviors of stochastic evolution cocycle. *Journal of Engineering, Ann. Fac. Eng. Hunedoara VII (3)*, pages 98–101, 2010.
- [114] D. Stoica. Comportări asimptotice ale soluțiilor ecuațiilor diferențiale stochastice în spații Hilbert. In *Conf. An. Soc. t. Mat. Rom.*, Alba Iulia, România, 2010.
- [115] D. Stoica. Exponential stability and exponential instability for stochastic cocycles. In *Proc. 12th Symp. Math. Appl., Politehnica Univ. Timioara, Romania, Nov. 57, 2009*, pages 182–187. Timișoara: Editura Politehnica, 2010.
- [116] D. Stoica. Uniform exponential dichotomy of stochastic cocycles. *Stochastic Processes Appl.*, 120(10):1920–1928, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.spa.2010.05.016>.
- [117] D. Stoica and D. L. Lemle. On nonuniform stability for stochastic cocycle on Banach spaces. *An. Univ. Oradea, Fasc. Mat.*, 17(1):135–140, 2010.
- [118] D. Stoica and M. Megan. Nonuniform stability for stochastic differential equations in Hilbert spaces. *Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity*, 8:81–88, 2010.

-
- [119] D. Stoica and M. Megan. On nonuniform behaviors of stochastic skew-evolution semiflows in hilbert spaces. In *Proc. Int. Conf. Appl. Math.*, Baia Mare, România, 2010. Presented at the conference, not formally published.
- [120] D. Stoica and M. Megan. Concepts of dichotomy for stochastic skew-evolution semiflows in hilbert spaces. In *Numer. Anal. Appl. Math. (ICNAAM) 2012*, volume 1479, pages 755–758, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4756246>.
- [121] D. Stoica and M. Megan. On nonuniform dichotomy for stochastic skew-evolution semiflows in Hilbert spaces. *Czech. Math. J.*, 62(4):879–887, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10587-012-0071-0>.
- [122] D. Stoica, M. Megan, and D. L. Lemle. Polynomial stability in mean square of stochastic cocycles in hilbert spaces. In *Numer. Anal. Appl. Math. (ICNAAM) 2013*, volume 1558, pages 1635–1638, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4825841>.
- [123] **T. M. Személy Fülöp** and D. I. Borlea. Integral characterizations of uniform h-dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows. In *Proc. 2024 IEEE Int. Symp. Appl. Comput. Intell. Inform. (SACI)*, pages 000025–000030, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1109/SACI60582.2024.10619723>.
- [124] **T. M. Személy Fülöp**. On uniform dichotomy in mean of stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces. *An. Univ. Vest Timiș., Ser. Mat.-Inform.*, 59(1):92–104, 2023. DOI: <https://doi.org/10.2478/awutm-2023-0008>.
- [125] **T. M. Személy Fülöp**. Datko type characterizations for uniform dichotomy in mean with growth rates for reversible stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Glas. Mat., III. Ser.*, 60(1):167–182, 2025. DOI: <https://doi.org/10.3336/gm.60.1.10>.
- [126] **T. M. Személy Fülöp**. Integral characterizations of uniform h-dichotomy in mean for discrete-time stochastic skew-evolution semiflows. *Miskolc Math. Notes*, 26(2):–, 2025.
- [127] **T. M. Személy Fülöp**. On uniform dichotomy in mean with growth rates of stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Appl. Anal. Discrete Math.*, submitted, 2025.
- [128] **T. M. Személy Fülöp**. Uniform h-dichotomy in mean for stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces. In *Proc. 21th Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math. (ICNAAM 2023)*, volume 3315, page 280008, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0286098>.

-
- [129] **T. M. Személy Fülöp.** Uniform stability in mean for stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces. In *Proc. 21th Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math. (ICNAAM 2023)*, volume 3315, page 400043, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0291168>.
- [130] **T. M. Személy Fülöp**, M. Megan, and D. I. Borlea. On uniform stability with growth rates of stochastic skew-evolution semiflows in Banach spaces. *Axioms*, 10(3):182, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms1003018>.
- [131] C. Tudor. Exponential stability and limit theorems for affine Itô equations. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 38(2):165–183, 1993.
- [132] V. M. Ungureanu. Exponential dichotomy of stochastic differential equations. *An. Univ. Timiș., Ser. Mat.-Inform.*, 37(1):149–158, 1999.
- [133] T. Yue. Barbashin type characterizations for the uniform polynomial stability and instability of evolution families. *Georgian Math. J.*, 29(6):953–966, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2188>.
- [134] T. Yue. Some Datko and Barbashin type characterizations for the uniform h -instability of evolution families. *Glas. Mat., III. Ser.*, 57(2):265–280, 2022. DOI: <https://doi.org/10.3336/gm.57.2.07>.
- [135] T. Yue. Datko type characterizations for exponential instability in average of cocycles. *Hiroshima Math. J.*, 54(2):219–232, 2024. DOI: <https://doi.org/10.32917/h2023003>.
- [136] T. Yue. On uniform instability in mean of stochastic skew-evolution semiflows. *Glas. Mat., III. Ser.*, 59(1):107–123, 2024. DOI: <https://doi.org/10.3336/gm.59.1.05>.
- [137] J. Zabczyk. *Mathematical control theory: an introduction*. Syst. Control Found. Appl. Cham: Birkhäuser, 2nd edition edition, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-44778-6>.